ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROGER BADER

Fonctions à singularités polaires sur des domaines compacts et des surfaces de Riemann ouvertes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 3 (1954), p. 243-300
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_3_243_0>

FONCTIONS A SINGULARITÉS POLAIRES
SUR DES DOMAINES COMPACTS
ET DES SURFACES DE RIEMANN OUVERTES

PAR M. ROGER BADER.

INTRODUCTION.

Depuis la publication, en 1941, du Mémoire fondamental de R. Nevanlinna*[1], *Quadratisch integrierbare Differentiale...*, l'étude des intégrales abéliennes simples qu'on peut définir sur les surfaces de Riemann ouvertes, est devenue un des champs de recherche de la théorie des fonctions d'une variable complexe. Par surface de Riemann, il est maintenant classique d'entendre une variété topologique à deux dimensions réelles munie d'une structure analytique complexe. Comme intégrales abéliennes simples de première, de deuxième ou de troisième espèce, on a considéré celles qui satisfont à une condition de régularité à l'extérieur d'un compact : intégrale de Dirichlet finie (Nevanlinna, Myrberg, Sario, Ahlfors, etc.), module ou partie harmonique bornée (Ahlfors, Myrberg, etc.), moyennes bornées (Nevanlinna, Parreau). A l'exception de P. J. Myrberg qui se place du point de vue de la construction effective ou de l'existence d'intégrales abéliennes particulières sur des surfaces déterminées (utilisation de la théorie des fonctions automorphes), aucun auteur ne semble avoir envisagé le cas d'intégrales simples de deuxième et troisième espèce à une infinité de singularités polaires. L'objet de ce travail est de donner certaines définitions de telles intégrales et d'en faire une première étude.

La méthode consiste à rechercher d'abord, sur un domaine compact, les différentielles et fonctions méromorphes qui ont un comportement particulier du point de vue de la norme dans le domaine (intégrale de Dirichlet) ou du

(1) L'astérisque ou un chiffre entre crochets à la suite d'un nom indique un renvoi à la bibliographie.

module et de l'argument sur sa frontière. La notion de surface de Schottky d'un domaine (le domaine et son symétrique) est utilisée systématiquement et permet une définition simple et géométrique des différentielles et fonctions importantes dans le domaine : ce seront celles qui se laissent prolonger convenablement sur la surface de Schottky. On étudie ensuite dans quelle mesure les différentielles et fonctions sur une surface ouverte sont limites des différentielles et fonctions remarquables définies sur les domaines compacts d'une exhaustion de la surface. Cette méthode est inspirée essentiellement du Mémoire de L. Ahlfors [1], *Open Riemann surfaces*... qui l'applique dans le cas de différentielles de première espèce et de norme finie.

Au chapitre I, après avoir rappelé quelques généralités (§ 1), je détermine (§ 2) les conditions d'orthogonalité, au sens de la norme, entre les différentielles analytiques exactes sur un domaine compact et les différentielles méromorphes sur la surface de Schottky correspondante différentielles que j'appelle différentielles de Schottky-Ahlfors. Je décompose ensuite additivement toute différentielle méromorphe Ω sur un compact en une différentielle exacte de première espèce et en une différentielle de Schottky-Ahlfors ω. Cette décomposition dépend d'un arbitraire qui peut être choisi tel que ω diffère d'aussi peu que l'on veut de Ω, au sens de la norme. Au paragraphe 3, je montre que sur une surface ouverte S toute différentielle méromorphe est, à une différentielle analytique de norme finie près, la limite uniforme (convergence compacte) de ses composantes de Schottky-Ahlfors relatives aux domaines d'une exhaustion de S et convenablement choisies dans ces domaines. Ceci m'amène à considérer une classe $\mathcal{D}'_a$ de différentielles méromorphes Ω qui sont limites de leurs composantes dites strictes de Schottky-Ahlfors ; il existe un domaine D dont chaque composante connexe est compacte, qui contient les pôles de Ω, et tel que $\|\Omega\|^2_{S-D} + \|\Omega - \omega\|^2_D < \infty$, ω désignant la composante stricte de Ω dans D. Ces différentielles sont déterminées par les parties singulières de leur développement aux pôles et par leurs périodes, sur les surfaces de Riemann où toute fonction holomorphe de norme finie est constante.

Au chapitre II, j'étudie les différentielles réelles fermées ω qui admettent des singularités polaires : au voisinage d'un point isolé où leurs coefficients ne restent pas finis, il existe une différentielle harmonique γ ayant une singularité polaire en ce point, telle que les coefficients $\omega - \gamma$ soient finis. A l'aide de propriétés d'orthogonalité analogues à celles du chapitre I, je décompose additivement (§ 1) une différentielle fermée sur un compact en une différentielle harmonique à singularités polaires — sa composante de Schottky-Ahlfors — et en une différentielle fermée exacte. Il en résulte (§ 2) qu'une différentielle harmonique sur une surface de Riemann ouverte S, est, à une différentielle harmonique exacte de norme finie près, la limite de ses composantes de Schottky-Ahlfors convenablement choisies sur les domaines d'une exhaustion de S.

Les différentielles harmoniques (classe $\mathcal{D}'_h$) que l'on considère alors sont déterminées par leurs parties singulières aux pôles et par leurs périodes, sur les surfaces de Riemann où toute fonction harmonique uniforme de norme finie est une constante. On trouve une condition suffisante, d'existence d'une différentielle exacte de la classse $\mathcal{D}'_h$ ayant des parties singulières données en des points donnés d'une surface parabolique.

Au chapitre III, je considère des fonctions méromorphes multiplicatives (multiplicateurs de module unité). Sur un domaine compact D(§ 1), ce sont les fonctions multiplicatives de module unité (classe M_1) ou d'argument constant (M_0) sur la frontière D' qu'il est intéressant de considérer. On décompose une fonction multiplicative en produit d'une fonction multiplicative de la classe M_1 par une fonction sans zéro ni pôle dans le domaine D. Au paragraphe 2, je montre que les bases des différentielles de première espèce sur les surfaces de Schottky de domaines exhaustifs d'une surface de Riemann S convergent vers une base des différentielles de première espèce de S. Ceci me permet au paragraphe 3 d'étendre la condition nécessaire d'Abel relative aux zéros et aux pôles d'une fonction uniforme : il faut que la somme des valeurs, aux pôles, d'une intégrale de différentielle harmonique de première espèce et de norme finie, à un nombre fini de périodes non nulles, soit égale à la somme de ses valeurs aux zéros. Cette généralisation a lieu sur les surfaces paraboliques pour les fonctions uniformes appartenant à la classe $\mathcal{B}_a$ des fonctions multiplicatives dont le module est compris entre deux constantes positives, à l'extérieur d'un voisinage, de composantes connexes compactes, des zéros et des pôles (ces points remplissant une condition de faible densité sur S.) Ces fonctions sont limites uniformes de leurs composantes appartenant aux espaces M_1 relatifs aux domaines d'une exhaustion de S.

En terminant ce travail, je suis heureux de pouvoir exprimer ma vive reconnaissance à M. Valiron qui m'a sans cesse prodigué ses conseils et ses encouragements, ainsi qu'à M. Fiala qui a orienté mes premières recherches. J'adresse mes remerciements respectueux à M. Montel qui m'a fait l'honneur d'accepter la présidence du jury et à M. Pérès qui a bien voulu m'examiner sur la seconde thèse. Ma gratitude va enfin à mon ami M. Parreau avec qui j'ai eu sur ce travail de nombreux entretiens et qui m'en a suggéré de précieuses améliorations.

CHAPITRE I.

Différentielles méromorphes et leur intégrale de Dirichlet.

1. Généralités.

On a coutume de parler d'intégrales abéliennes de deuxième ou de troisième espèce suivant que leurs singularités sont uniquement polaires (en z^{-n}, n entier positif si z désigne l uniformisante locale au voisinage du point singulier $z = 0$) où polaires et logarithmes (en z^n et en $\log z$). Quand il n'y a pas lieu de distinguer les deux cas, ce qui est vrai pour les deux premiers chapitres de ce travail, il est commode de considérer plutôt les différentielles correspondantes (singularités en $z^{-n}\,dz$). Il est alors très avantageux d'utiliser le calcul différentiel extérieur et la terminologie employée de façon générale par Bidal et de Rham* et introduite par Ahlfors [1] dans l'étude des intégrales abéliennes de première espèce. Je vais d'abord rappeler rapidement les principales notions qui sont ainsi à la base des deux premiers chapitres (*voir* Ahlfors [1]).

1.1. *Différentielles.* — On appelle *différentielle* sur une surface de Riemann S, la forme différentielle extérieure ω, linéaire, définie au voisinage d'un point P à l'aide de l'uniformisante locale $z = x + iy$ ($z = 0$ correspond au point P) par

$$\omega = a\,dx + b\,dy, \qquad a = a(z), \qquad b = b(z),$$

où les coefficients a et b sont à valeurs complexes, continus et à dérivées premières continues, et se comportent par rapport à un changement d'uniformisante locale comme les composantes d'un vecteur covariant. On désigne par $\bar\omega = \bar a\,dx + \bar b\,dy$ l'*imaginaire conjuguée* de ω, $\bar a$ et $\bar b$ étant les fonctions imaginaires conjuguées de a et b. D'autre part, on associe à ω sa *différentielle adjointe* (2) $\omega^\star = -b\,dx + a\,dy$.

Si, au voisinage d'un point P, on a (3) $d\omega = 0$, on dit que la différentielle est *fermée* au point P; si ω et $\omega^\star$ sont fermées en P, ω est dite *harmonique* (en général complexe) en P; si $\omega^\star = -i\omega$ au voisinage de P et si ω est harmonique en P, on dit que ω est *analytique* en P. De même on dira qu'une différentielle est fermée, harmonique ou analytique sur un domaine D d'une surface de Riemann S, ou sur la surface S tout entière, si ces propriétés ont lieu en tout point intérieur du domaine ou de la surface.

On voit qu'une différentielle fermée en P est *exacte* en P, c'est-à-dire est la différentielle extérieure, $df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$, d'une fonction au voisinage de P. Au contraire, dans un domaine D ou sur une surface S, on dira que ω est exacte si elle est non seulement fermée, mais encore si la fonction dont elle est la différentielle est *uniforme* dans D ou sur S.

A l'aide du *produit extérieur* de deux différentielles, $\omega_1 = a_1\,dx + b_1\,dy$ et $\omega_2 = a_2\,dx + b_2\,dy$:

$$\omega_1\omega_2 = (a_1 b_2 - a_2 b_1)\,dx\,dy$$

(2) Je rappelle les relations $\omega^{\star\star} = -\omega$ et $\omega_1\omega_2^\star = \omega_2\omega_1^\star$ (produit extérieur défini plus bas).

(3) La différentielle extérieure de ω est $d\omega = \left(\frac{\partial b}{\partial x} - \frac{\partial a}{\partial y}\right)dx\,dy$.

on défini le *produit scalaire* des deux différentielles ω_1 et ω_2 dans D ou sur S par [4]

$$(\omega_1, \omega_2) = \int_{D,S} \omega_1 \overline{\omega}_2^\star,$$

et la norme d'une différentielle ω par

$$\| \omega \|^2 = (\omega, \omega) = \int_{D,S} (\| a \|^2 + \| b \|^2)\, dx\, dy.$$

si, bien entendu, ces intégrales ont un sens; on vérifie facilement que la norme ainsi définie correspond au double de l'intégrale de Dirichlet de $\int \omega$.

Une différentielle analytique φ est de la forme $\varphi = a\,dz$, a étant une fonction analytique de $z = x + iy$. Autour du point $P(z = 0)$ on considère le développement de φ :

$$\varphi = (a_h z^h + a_{h+1} z^{h+1} + \ldots)\, dz \qquad (h \geqq 0);$$

le nombre h est invariant et représente l'ordre de φ en P.

Dans un domaine compact D de frontière D′ par rapport à S, la formule de Cauchy-Green appliquée au produit $f\omega$ s'écrit :

$$(1.1) \qquad \int_{D'} f\omega = \int_D d(f\omega) = \int_D df\omega + \int_D f\,d\omega.$$

l'intégration sur le contour D′ étant effectuée dans le sens direct par rapport à D (on a D à sa gauche quand on parcourt D′ dans ce sens).

Soulignons en passant que dans le genre d'étude que nous allons faire, il suffit d'envisager des domaines à frontières « très régulières » c'est-à-dire composées d'arcs de courbes analytiques ou suffisamment différentiables (Parreau*).

1.2. Singularités. — Les différentielles analytiques de deuxième ou troisième espèce (différentielles méromorphes) sur une surface de Riemann S sont celles qui admettent, en des points isolés de S, des singularités polaires, mais qui sont analytiques en tout autre point de S. Si z désigne l'uniformisante locale au voisinage d'un point $P(z = 0)$, la différentielle méromorphe φ a la forme

$$(1.2) \qquad \varphi = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} \right) dz + \varphi_1 \qquad (h > 0),$$

si P est singulier; φ_1 désigne une différentielle analytique sans singularité au voisinage de P. Le nombre complexe a_{-1} est invariant par changement d'uniformisante locale, c'est le résidu de φ en P. Si $a_{-1} = 0$, la différentielle est dite

---

[4] La relation $(\omega_1, \omega_2) = (\overline{\omega}_2, \overline{\omega}_1)$ se déduit immédiatement de cette définition et de la relation signalée au sujet de la définition de l'adjointe de ω.

de deuxième espèce; elle est de troisième espèce dans le cas général $a_{-1} \neq 0$. Le nombre h (entier positif) est également invariant par changement d'uniformisante locale : c'est l'ordre du pôle de φ en P ($-h$ étant l'ordre de φ en P).

1.3. Cycles (Ahlfors [2]). — Comme une surface de Riemann S est une variété orientable et triangulable (Stoïlov*), on peut considérer son groupe d'homologie unidimensionnel : parmi les cycles d'un nombre fini d'éléments, on distingue les bords au sens *compact* (frontières de chaînes bidimensionnelles finies) des bords au sens *non compact* (frontières de chaînes bidimensionnelles infinies).

Sur un domaine D de frontière D′ n'interviennent que des cycles et bords modulo D′ $\left(\text{ou mod } \complement_{S} D\right)$ c'est-à-dire des cycles et bords de S dans lesquels on a négligé tout ce qui fait partie de $\complement_{S} D$ (Lefschetz*).

Je n'entrerai pas dans le détail de la définition du *nombre d'intersection* (Ahlfors [2], Virtanen*) de deux classes de cycles. Il suffira de noter ici que cette définition est possible, c'est-à-dire possède un caractère d'invariance topologique (deux cycles d'une même classe ont le même nombre d'intersections avec un cycle donné) et que deux classes $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ ont un nombre d'intersection $0 (\mathcal{A} \times \mathcal{B} = 0)$ ou $1 (\mathcal{A} \times \mathcal{B} = 1)$ si et seulement s'il existe un cycle de $\mathcal{A}$ et un cycle de $\mathcal{B}$ sans points communs ou ayant au plus un seul point commun (dans ce dernier cas on admettra que les orientations sont telles que le cycle de $\mathcal{B}$ coupe le cycle de $\mathcal{A}$ de droite à gauche; si $\mathcal{A} \times \mathcal{B} = -1$, l'intersection de $\mathcal{A}$ par $\mathcal{B}$ a lieu de gauche à droite).

Une *base d'homologie* du groupe d'homologie des cycles formés d'un nombre fini d'éléments se compose d'une suite dénombrable de cycles linéairement indépendants, $C_1, \ldots, C_n, \ldots$, telle que tout cycle C du groupe dépende linéairement des cycles $C_{k_1}, \ldots, C_{k_i}$, et qu'il existe une relation d'homologie :

$$C \sim x_{k_1} C_{k_1} + \ldots + x_{k_i} C_{k_i} \qquad (x_k \text{ entiers}).$$

La propriété importante du groupe d'homologie de S est l'existence d'une *base d'homologie canonique* c'est-à-dire formée de cycles $A_1, B_1, \ldots, A_n, B_n, \ldots$ satisfaisant entre eux aux relations

$$A_i \times A_j = 0, \qquad B_i \times B_j = 0, \qquad A_i \times B_j = \delta_i^j \qquad \text{(Kroneker)}.$$

De plus, étant donné une exhaustion de S formée de compacts $\bar{S}_0 \subset S_1, \ldots, \bar{S}_{n-1}, \subset S_n, \ldots$, la base d'homologie précédente peut être choisie de façon que :

1° dans S_n, $A_{n_1}, B_{n_1}, \ldots, A_{n_i}, B_{n_i}$ forment une base d'homologie modulo S'_n (frontière de S_n);

2° les cycles sur S'_n ne dépendent linéairement que d'un nombre fini de cycles A.

Le *genre* g d'un domaine ou d'une surface est égal à la moitié du nombre total des classes d'homologie distinctes de la classe zéro. La *connexion* d'un domaine compact est définie par $2g+c$, c étant le nombre de composantes connexes de sa frontière.

1.4. Périodes. — La formule de Cauchy-Green appliquée à une différentielle fermée ω dans un compact D de frontière D′ donne

$$\int_{D'} \omega = 0,$$

autrement dit, la *période* de ω sur un bord D′ est nulle. La période de ω sur un cycle ne dépend donc que de la classe d'homologie du cycle considéré.

Pour une différentielle analytique de deuxième espèce, on peut également définir la période sur une classe d'homologie de cycles : pour montrer que l'intégrale d'une telle différentielle est nulle sur un bord D′ (au sens compact), on applique la formule de Cauchy-Green au compact D_ε obtenu en supprimant dans D les voisinages des singularités situés à l'intérieur des cercles $|z_\nu| < \varepsilon$ (z_ν étant l'uniformisante locale au voisinage du point singulier P_ν; $z_\nu = 0$ correspondant au point P_ν); ε est supposé suffisamment petit pour que ces voisinages soient disjoints. Les intégrales de ω portant sur les cercles $|z_\nu| = \varepsilon$ sont identiquement nulles :

$$\int_0^{2\pi} \left(\frac{a_{-h}}{z_\nu^h} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z_\nu^2} + a_0 + a_1 z_\nu + \ldots \right) i\varepsilon\, e^{i\varphi}\, d\varphi = 0 \qquad (z_\nu = \varepsilon\, e^{i\varphi}).$$

De la même manière, on voit qu'au contraire, pour une différentielle analytique de troisième espèce, l'intégrale sur un bord D′ est égale à $2i\pi$ fois la somme des résidus de la différentielle. Cependant on pourra dire que deux différentielles de troisième espèce, ayant les mêmes résidus, ont mêmes périodes ou périodes distinctes, suivant que leur différence, qui est de deuxième espèce, a des périodes nulles ou non. Quand dans la suite nous parlerons de périodes d'une différentielle de troisième espèce, il sera sous-entendu qu'il s'agit de périodes prises par rapport à un système de cycles bien déterminés.

2. Différentielles méromorphes sur des domaines compacts.

2.1. Domaine. Surface de Schottky correspondante. — Une structure analytique déterminant une surface de Riemann S est définie par la donnée d'une classe de fonctions, $\mathfrak{A}(P)$, à valeurs complexes, en chaque point P de S (*voir*, par exemple, Parreau*). On peut faire correspondre à cette structure une structure symétrique définie en chaque point par la classe $\overline{\mathfrak{A}}(P)$ des fonctions complexes conjuguées de $\mathfrak{A}(P)$. La surface symétrique $\tilde{S}$ ainsi obtenue diffère de S uniquement par son orientation qui est opposée à celle de S.

A partir de deux domaines symétriques D et $\tilde{D}$ de S et $\tilde{S}$, on peut alors construire une surface $\hat{D}$, close ou ouverte, suivant que D est compact ou non. Topologiquement on obtient $\hat{D}$ en soudant D à $\tilde{D}$ par identification de leurs frontières aux points symétriques. En un point de $\hat{D}$ intérieur à D ou $\tilde{D}$, la structure analytique de $\hat{D}$ est égale à la structure induite sur D ou $\tilde{D}$ de la structure de S ou $\tilde{S}$; les uniformisantes locales en deux points symétriques peuvent être choisies imaginaires conjuguées. En un point de $D' = \tilde{D}'$, on peut définir la structure analytique comme suit : D' étant frontière très régulière de D, on peut choisir comme uniformisante locale en $Q \in D'$, sur S, une fonction $z(P)$ réelle sur D', à partie imaginaire positive dans D; l'uniformisante locale correspondante sur $\tilde{S}$ aura une partie imaginaire négative dans $\tilde{D}$; en considérant alors Q comme appartenant à $\tilde{D}$, on voit que z dans D et $\bar{z}$ dans $\tilde{D}$ sont les prolongements l'une de l'autre et forment une uniformisante locale z en Q; $\mathcal{A}(Q)$ est la classe des fonctions à valeurs complexes associée à Q sur $\hat{D}$. $\hat{D}$ est appelé la *surface de Schottky* de D (Ahlfors [1]).

Si D est compact, de genre g et si D' a c parties disjointes, le genre de la surface de Schottky $\hat{D}$ est $\hat{g} = 2g + c - 1$.

Dans le cas de domaines compacts, on peut généraliser de la façon suivante la construction précédente :

PROPOSITION 2.1 ([5]). — *Pour que deux domaines compacts* D_1 *et* D_2, *appartenant respectivement à deux surfaces de Riemann* S_1 *et* S_2, *puissent être soudés pour former une surface close, il faut et il suffit que leur frontière* D'_1 *et* D'_2 *ait même nombre fini de composantes.*

Il suffit de montrer que les deux domaines peuvent être raccordés convenablement. Considérons par exemple deux composantes $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ des frontières D'_1 et D'_2 que nous voulons raccorder. Appelons u_1 et u_2 les fonctions harmoniques dans D_1 et D_2 égales à zéro sur $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ et égales respectivement à $+1$ et à -1 sur $\complement_{D'_1} D'_{1,\nu}$ et $\complement_{D'_2} D'_{2,\nu}$. En désignant par v_1 et v_2 leurs conjuguées, on voit que les fonctions $\exp(u_1 + iv_1)$ et $\exp(u_2 + iv_2)$ représentent conformément un voisinage de $D'_{1,\nu}$ dans D_1 sur une couronne $1 \leqq |w| \leqq 1 + \varepsilon$ et un voisinage de $D'_{2,\nu}$ dans D_2 sur une couronne $1 \geqq |w| \geqq 1 - \varepsilon$. On peut alors définir le raccord de D_1 et D_2 à travers $D'_{1,\nu}$ et $D'_{2,\nu}$ par le raccord des deux couronnes $1 - \varepsilon \leqq |w| \leqq 1$ et $1 \leqq |w| \leqq 1 + \varepsilon$ à travers $|w| = 1$. Comme D'_1 et D'_2 ont le même nombre de composantes, le raccord peut être ainsi effectué à travers chaque composante.

([5]) Cette proposition est due essentiellement à M. Parreau.

2.2. Différentielles de Schottky-Ahlfors. — Considérant les différentielles harmoniques ou analytiques sur un compact fermé $\overline{D}$, Ahlfors [1] a trouvé que celles qui pouvaient être prolongées régulièrement sur la surface close $\hat{D}$, jouent un rôle particulier et, plus précisément, résolvent certains problèmes d'extremum dans $\overline{D}$. Il a appelé ces différentielles régulières sur $\hat{D}$ (de première espèce), les différentielles de Schottky de D.

De façon analogue je me propose d'étudier les différentielles méromorphes [6] sur D (D étant compact), qui se prolongent en différentielles méromorphes sur $\hat{D}$. Pour les distinguer des différentielles de Schottky, je les appellerai *différentielles de Schottky-Ahlfors.*

A cause de la symétrie d'une surface de Schottky $\hat{D}$, on peut faire correspondre à toute différentielle de Schottky-Ahlors [7] φ analytique, dont l'expression en P est $a\,dz$ (a, fonction analytique à singularités polaires isolées) une différentielles $\tilde{\tilde{\varphi}}$ dont l'expression en $\tilde{P}$ est $\overline{a}\,d\overline{z}$; c'est encore une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors car $\overline{z}$ est l'uniformisante locale en $\tilde{P}$. A une singularité de φ de la forme (1.2) en P correspond une singularité de $\tilde{\tilde{\varphi}}$ en $\tilde{P}$ de la forme

$$\tilde{\tilde{\varphi}} = \left(\frac{\overline{a}_{-h}}{\overline{z}^h} + \ldots + \frac{\overline{a}_{-1}}{\overline{z}}\right) d\overline{z} + \tilde{\tilde{\varphi}}_1. \tag{2.2.1}$$

L'uniformisante locale étant $\overline{z}$, le résidu en ce point est donc $\overline{a}_{-1}$. D'autre part l'ordre du pôle de $\tilde{\tilde{\varphi}}$ en $\tilde{P}$ est également h.

La différentielle $\tilde{\tilde{\varphi}}$ permet de mettre φ sous forme de somme de différentielles ayant des propriétés de symétrie, ou, ce qui revient au même, ayant sur D' des propriétés remarquables :

$$\varphi = \frac{\varphi + \tilde{\tilde{\varphi}}}{2} + \frac{\varphi - \tilde{\tilde{\varphi}}}{2} = \varphi^r + \varphi^i.$$

La première composante φ^r est réelle sur D', la seconde imaginaire pure. Soit $\mathfrak{S}_a$ l'espace vectoriel complexe, des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors; soit $\mathfrak{S}_r$ (resp. $\mathfrak{S}_i$) le sous-espace réel de $\mathfrak{S}_a$ des différentielles réelles (resp. imaginaires pures) sur D' ($\mathfrak{S}_i = i\mathfrak{S}_r$) :

Proposition 2.2.1. — *Sur le corps des nombres réels, l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_a$ est la somme directe de ses sous-espaces $\mathfrak{S}_r$ et $\mathfrak{S}_i$.*

La décomposition est unique car $\varphi^r + \varphi^i = 0$ sur D' entraîne $\varphi^r = \varphi^i = 0$ sur D' donc dans D.

---

(6) Je supposerai toujours qu'elles n'ont pas de pôles sur D'.

(7) De façon générale, à $\omega = a\,dx + b\,dy$ en P correspond $\tilde{\omega} = \tilde{a}\,dx - \tilde{b}\,dy$ en P, $\tilde{a}$ et $\tilde{b}$ étant les valeurs de a et b en $\tilde{P}$, exprimées en fonction de $\overline{z}$.

En considérant une différentielle φ^r, on peut parler de ses périodes et demi-périodes sur D : les premières sont relatives à des cycles de D, les secondes à la trace dans D (demi-cycles) de cycles de $\hat{D}$ homologues à des chemins R sur $\hat{D}$ satisfaisant à $R = -\tilde{R}$ (je dirai aussi « chemins ou cycles conjugués des composantes de D' »). Comme φ^r satisfait à la relation $\varphi^r = \tilde{\bar{\varphi}}^r$, et que d'autre part, de façon générale :

$$\int_{\tilde{C}} \varphi = \int_{C} \tilde{\varphi}, \tag{2.2.2}$$

on voit que φ^r a des périodes imaginaires conjuguées sur deux cycles symétriques de $\hat{D}$, et qu'en particulier, ses périodes relatives à des cycles conjugués des composantes de D' sont imaginaires pures et égales au double de la partie imaginaire des demi-périodes correspondantes dans D. Les parties réelles ou imaginaires des périodes et les parties imaginaires des demi-périodes sur D déterminent donc les parties réelles ou imaginaires des périodes sur $\hat{D}$. Comme une différentielle méromorphe sur une surface close est définie par les parties réelles ou imaginaires de ses périodes et les parties singulières de ses développements aux pôles, à condition que la somme des résidus soit nulle, on a :

Proposition 2.2.2. — *Étant donné sur* D, *d'une part, des parties imaginaires des périodes (nulles sur des cycles homologues aux composantes de* D'*) et des parties imaginaires des demi-périodes, ou des parties réelles des périodes, et d'autre part, des parties singulières en des points donnés, il existe une et une seule différentielle* φ^r *sur* D *ayant ces données, à condition que la somme des résidus donnés soit imaginaire pure.*

La condition vient du fait que si φ^r a pour résidu a_{-1} en P, $\tilde{\bar{\varphi}}^r = \varphi^r$ a pour résidu $\bar{a}_{-1}$ en $\tilde{P}$; ainsi

$$\sum_{\hat{D}} \text{résidus } \varphi^r = 2\mathcal{R} \sum_{D} \text{résidus } \varphi^r.$$

2.3. Différentielles multiples de diviseurs donnés. — Étant donné un ensemble fini de points (P_ν) sur une surface de Riemann close S, ou dans un domaine compact D, on associe à chaque point un entier m_ν positif, nul ou négatif, et l'on appelle diviseur d de composantes (P_ν, m_ν) le produit symbolique (H. Weyl*) :

$$d = \prod_{1}^{s} P_\nu^{m_\nu} \qquad (s \geqq 0). \tag{2.3.1}$$

L'ordre total du diviseur est $m = \sum_\nu m_\nu$. Je considère le nombre m' égal à $m - 1$

si $m \neq 0$ et à zéro si $m = 0$. J'écrirai $d = 1$ si $s = 0$. J'utiliserai les notations

$$(2.3.2) \qquad d' = \prod_{1}^{s} P_\nu^{m'_\nu}, \qquad |d| = \frac{d}{d'}.$$

Une différentielle méromorphe φ est dite multiple de d si elle est régulière à l'extérieur des points (P_ν) et si en P_ν son ordre est au moins égal à m_ν : si m_ν est positif, elle a un zéro d'ordre au moins égal à m_ν, si m_ν est négatif, elle a un pôle d'ordre au plus égal à $-m_\nu$.

Je dirai qu'un diviseur d_1 est multiple d'un diviseur d_2, $d_1 \supset d_2$, s'il indique plus de zéros et moins de pôles, c'est-à-dire, plus précisément, si $d_1 d_2^{-1}$ est à exposants positifs. Je désignerai par $[d_1, d_2]$ le plus petit commun multiple de d_1 et d_2.

Étant donné un domaine D de genre g et ayant c courbes frontières, soit δ un diviseur à exposants positifs d'ordre total m défini sur $\hat{D}$; appelons $\mathcal{S}_a(\delta^{-1})$ l'espace vectoriel des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors multiples de δ^{-1} et notons que $\mathcal{S}_r(\delta^{-1}) = \mathcal{S}_r([\delta, \tilde{\delta}]^{-1})$, $\tilde{\delta}$ désignant le symétrique de δ ; on peut énoncer $(\hat{g} = 2g + c - 1)$:

Proposition 2.3. — *L'espace $\mathcal{S}_a(\delta^{-1})$ a $\hat{g} + m'$ dimensions complexes. L'espace $\mathcal{S}_r(\delta^{-1})$ a $\hat{g} + (2n)'$ dimensions réelles, $2n$ étant l'ordre total de $[\delta, \tilde{\delta}]$.*

En effet le genre de $\hat{D}$ étant $\hat{g}$, il y a $\hat{g}$ différentielles analytiques de première espèce, indépendantes, et d'autre part les parties singulières introduisent m coefficients complexes liés par la seule relation résultant du théorème des résidus. La deuxième partie de la proposition résulte de la proposition 2.2.1.

2.4 Orthogonalité. — Dans la suite du paragraphe 2 je considérerai l'orthogonalité de deux différentielles, au sens du produit scalaire, sur le domaine D de la surface de Schottky $\hat{D}$.

De ce fait les produits scalaires que nous allons considérer ne peuvent être définis qu'en faisant intervenir un passage à la limite convenable. Ce sont en effet les produits de deux différentielles méromorphes φ et ψ et, pour que l'intégrale double soit absolument convergente il faut que $\varphi\psi$ ait au plus un pôle simple, donc que l'une au plus ait un pôle simple. Cependant, si l'on choisit au voisinage de chaque pôle une uniformisante locale, $z = r e^{i\theta}$, et que l'on exclut du domaine D les cercles $(|z| \leqq r)$, on voit (par un calcul explicite que nous ferons chaque fois) que lorsqu'une de ces différentielles est régulière, ces produits scalaires, considérés comme limites des produits dans les domaines $D - (|z| \leqq r)$, quand r tend vers zéro, ont des limites finies indépendantes des uniformisantes locales choisies. Pour le calcul du produit scalaire on introduit ainsi une convention qui possède la propriété d'invariance conforme et qui rappelle la notion de valeur principale de Cauchy. Nous parlerons du produit scalaire principal ou d'orthogonalité au sens principal.

Ahlfors [1] a montré qu'une différentielle de première espèce sur $\overline{D}$ se décomposait additivement de façon unique en une différentielle de Schottky ayant mêmes périodes et en une différentielle analytique exacte. Ces résultats sont basés sur certaines propriétés d'orthogonalité que je vais généraliser aux différentielles méromorphes.

Considérons deux diviseurs d et d_0 donnés par :

$$(2.4.1)\quad \begin{cases} d = \prod_r^s P_\nu^{m_\nu} & (P_\nu \in D,\ m_\nu > 0,\ s \geqq 0), \\ d_0 = \prod_s^t Q_\nu^{n_\nu} & (Q_\nu \in D,\ n_\nu > 0,\ t \geqq 0). \end{cases}$$

Cherchons dans quelles conditions s'annule le produit scalaire principal d'une différentielle φ de Schottky-Ahlfors multiple de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$ par une différentielle dF analytique exacte sur $\overline{D}$. On calculera d'abord ce produit scalaire dans le domaine $D - V$, $V = (|z| \leqq r)$, complémentaire par rapport à D d'un voisinage V, intérieur à D, des points (P_ν) et (Q_ν). J'appelle C_ν les courbes frontières de chaque composante connexe de V qui sont supposées suffisamment petites pour ne contenir qu'un seul point P ou Q. Sur D', on a la relation $\varphi = \tilde{\varphi}$. En se rappelant que le produit extérieur de deux différentielles analytiques est nul [8] $(dF . \bar{\tilde{\varphi}} = 0)$ on peut écrire les relations suivantes [application répétée de la formule (1.1)] :

$$(2.4.2)\quad \begin{aligned} (dF, \varphi)_{D-V} &= \int_{D-V} dF\bar{\varphi}^* = \int_{D'} F\bar{\varphi}^* + \sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi}^* \\ &= i\int_{D'} F\bar{\varphi} + \sum_{P_\nu} i\int_{C_\nu} F\bar{\varphi} = i\int_{D'} F\bar{\tilde{\varphi}} + i\sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi} \\ &= -i\sum_{Q_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\tilde{\varphi}} + i\sum_{P_\nu}\int_{C_\nu} F\bar{\varphi}, \end{aligned}$$

les intégrales étant prises dans le sens direct par rapport à $D - V$ et les sommes étant étendues respectivement à toutes les courbes entourant les points (Q_ν) et les points (P_ν).

Faisons tendre r vers zéro; nous dirons aussi que V parcourt une base $(r \to 0)$, $\mathcal{V}$, du filtre des voisinages de (P_ν, Q_ν); évaluons la limite d'une intégrale portant sur un chemin entourant un point P et sur un chemin entourant un point Q.

---

(8) Si φ_1 et φ_2 sont deux différentielles analytiques, on a successivement

$$\varphi_1\varphi_2 = \varphi_1^*\varphi_2^* = -\varphi_1\varphi_2.$$

Pour cela, supposons que le développement de F au voisinage de P et Q soit respectivement :

$$F = \alpha_0 + \alpha_1 z + \dots \quad \text{au voisinage de P,}$$
$$F = \beta_0 + \beta_1 z + \dots \quad \text{au voisinage de Q.}$$

D'autre part, soit

$$\varphi = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \frac{a_{-h+1}}{z^{h-1}} + \dots\right) dz \quad \text{au voisinage de P.}$$
$$\varphi = \left(\frac{b_{-k}}{\bar{z}^k} + \frac{b_{-k+1}}{\bar{z}^{k-1}} + \dots\right) d\bar{z} \text{ au voisinage de } \tilde{\text{Q}}.$$

Alors

$$\tilde{\bar{\varphi}} = \left(\frac{\bar{b}_{-k}}{z^k} + \frac{\bar{b}_{-k+1}}{z^{k-1}} + \dots\right) dz \quad \text{au voisinage de Q.}$$

On obtient facilement, en un point $P \in (P_\nu)$, la valeur conformément invariante :

$$\lim_{V} i \int_C F\bar{\varphi} = -2\pi\alpha_0 \bar{a}_{-1},$$

et en un point $Q \in (Q\nu)$, la quantité proportionnelle au résidu de $F\tilde{\bar{\varphi}}$ et donc aussi conformément invariante :

$$\lim_{V} i \int_C F\tilde{\bar{\varphi}} = +2\pi(\beta_0 \bar{b}_{-1} + \beta_1 \bar{b}_{-2} + \dots + \beta_{k-1} \bar{b}_{-k}).$$

On voit donc qu'en général (φ quelconque), pour que $(dF, \varphi) = 0$, il faut et il suffit que les α_0 correspondant aux points (P_ν) et les $\beta_\mu (\mu = 0, \dots, k-1)$, correspondant aux points (Q_ν) soient nuls. Si un point P_ν se confond avec un point Q_ν, on a la même condition nécessaire et suffisante, à moins que $\bar{a}_{-1} + \bar{b}_{-1} = 0$, c'est-à-dire, à moins que les résidus de φ soient opposés aux deux points symétriques P_ν et $\tilde{Q}_\nu$. On peut donc énoncer les deux propositions suivantes :

Proposition 2.4.1. — *Une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes* (2.4.1) *est orthogonale au sens principal à toute différentielle analytique exacte sur* $\bar{D}$, dF, *si* F *est multiple de* $[d_0, |d|]$. *Si de plus elle est de seconde espèce sur* $\bar{D}$, *il suffit que* F *soit multiple de* d_0.

Proposition 2.4.2. — *Une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes* (2.4.1), *dont* à chaque pôle de résidu non nul correspond un pôle symétrique de résidu opposé [9], *est orthogonale au sens principal à toute différentielle analytique exacte sur* $\bar{D}$, dF, *si* dF *est multiple de* d_0'.

---

[9] Cette famille contient les différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors de deuxième espèce.

Le lemme 2 d'Ahlfors [1] est le cas particulier, $s = t = 0$, où ces deux propositions sont identiques. Son lemme 3 est le cas particulier de la proposition 2.4.1 obtenu en faisant $s = 0$.

2.5. Décomposition des différentielles méromorphes sur $\overline{D}$. — Je vais maintenant décomposer additivement toute différentielle méromorphe sur $\overline{D}$ en une différentielle méromorphe de Schottky-Ahlfors et en une différentielle analytique exacte sur $\overline{D}$.

Soit Φ une différentielle méromorphe sur $\overline{D}$, multiple d'un diviseur d^{-1}, d ayant la forme (2.4.1); appelons $\Gamma_a(d^{-1})$ l'espace (10) de ces différentielles; soit $m = \sum m_\nu$ l'ordre total de d. D'après la proposition 2.3, l'espace $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles méromorphes de Schottky-Ahlfors multiples de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, a $\hat{g} + (m+n)'$ dimensions complexes $\left[d_0 \text{ ayant la forme } (2.4.1) \text{ et } n = \sum n_\nu\right]$. A chaque différentielle de $\Gamma_a(d^{-1})$, je fais correspondre un vecteur de l'espace Σ_a à $\hat{g} - (m+n)'$ dimensions complexes dont les composantes sont :

1° les $\hat{g}$ périodes de Φ;

2° les m_ν premiers coefficients du développement (11) de Φ en P_ν et les $n_\nu - 1$ premier coefficient de Φ en Q_ν [en un point $P_\nu \in (Q_\nu)$ on prend les $m_\nu + n_\nu - 1$ premier coefficient de Φ] : s'il n'y a pas de point Q_ν, on prendra seulement les m_ν premiers coefficients de Φ en $P_\nu (\nu = 2, 3, \ldots, s)$, et les $m_1 - 1$ premiers coefficients de Φ en P_1;

3° les $t - 1$ nombres complexes égaux à $\int_{Q_1}^{Q_\nu} \Phi (\nu = 2, 3, \ldots, t)$ [les intégrales sont prises sur des chemins bien déterminés (12)]; si Q_ν est confondu avec P_ν, on prendra le terme constant du développement de $\int_{Q_1}^{z} \Phi$, $Q_1 \notin (P_\nu)$, z voisin de Q_ν : si tous les Q_ν sont des points P_ν, on choisira un point Q_0 distinct de (P_ν) et l'on déterminera la constante c de façon que le terme constant du développement de $c + \int_{Q_0}^{z} \Phi$ soit nul pour z voisin de Q_1; les $t - 1$ dernières composantes sont alors les $t - 1$ coefficients constants des développements de $c + \int_{Q_0}^{z} \Phi$, z étant voisin de $Q_\nu (\nu = 2, 3, \ldots, t)$.

On a ainsi une application linéaire de $\Gamma_a(d^{-1})$ dans Σ_a; de plus, comme application de $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dans Σ_a elle est biunivoque car seul $\varphi = 0$ correspond au

(10) $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$ désignera le sous-espace de $\Gamma_a(d^{-1})$ des différentielles de deuxième espèce.

(11) Je suppose avoir choisi l'uniformisante locale en chaque point P_ν et Q_ν.

(12) C'est sous-entendu pour chacune des intégrales que je suis amené à écrire dans la suite de ce numéro.

vecteur de composantes nulles : cette différentielle est en effet multiple ([13]) de $\tilde{d}_0^{-1}$ et elle est exacte sur $\overline{D}$, $\varphi = df$, f étant multiple de d_0 ; d'après la proposition 2.4.1 elle est donc orthogonale à elle-même, c'est-à-dire de norme nulle. Il y a donc isomorphisme de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dans Σ_a et comme les deux espaces ont même dimension, c'est un isomorphisme « sur » (Bourbaki [1]). On peut donc énoncer :

Proposition 2.5.1. — *Étant donné d_0 arbitraire, et d de la forme* (2.4.1) *l'espace vectoriel $\Gamma_a(d^{-1})$ est la somme directe de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et de l'espace des différentielles analytiques exactes sur* $\overline{D}$, dF, F *multiple de d_0 (resp.* 1 *si $t = 0$, ou $t = s = 0$).*

On peut faire une autre décomposition en utilisant la proposition 2.4.2 : au lieu de Σ_a, on prend l'espace vectoriel Σ'_a à $\hat{g}+m+n-r$ dimensions complexes (r désigne le nombre total de points P_ν et Q_ν distincts), dont un vecteur a pour composantes les $\hat{g}$ périodes de Φ, les $m_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en $P_\nu \notin (Q_\nu)$, les $n_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en un point $Q_\nu \notin (P_\nu)$ et les $m_\nu + n_\nu - 1$ premiers coefficients du développement de Φ en un point $P_\nu \in (Q_\nu)$. Il y a alors (proposition 2.4.2) isomorphisme de Σ'_a sur le sous-espace $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles de $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ dont à chaque pôle de résidu non nul correspond un pôle symétrique de résidu opposé ; $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ a lui aussi $\hat{g}+m+n-r$ dimensions complexes. Ainsi :

Proposition 2.5.2. — *Étant donné d_0 arbitraire et d de la forme* (2.4.1), *l'espace vectoriel $\Gamma_a(d^{-1})$ est la somme directe de l'espace $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et de l'espace des différentielles analytiques de périodes nulles* ([14]) *multiples du diviseur $d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$. L'espace vectoriel des différentielles méromorphes de deuxième espèce sur $\overline{D}$ multiples de d^{-1}, $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$, est la somme directe de*

$$\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}) = \Gamma_{a,2}(d^{-1}) \cap \mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$$

et de l'espace des différentielles analytiques exactes multiples de d'_0.

2.6. Propriété de minimum des composantes de Schottky Ahlfors. — Dans la décomposition que je viens de donner, on peut choisir d_0 de façon que les deux composantes soient orthogonales au sens principal et donc que l'on puisse appliquer les propositions 2.4. Dans le premier cas (propositions 2.4.1 et 2.5.1), on voit que pour avoir $[d_0, |d|] \subset d_0$, il faut et il suffit que d_0 ait au moins un zéro simple en chaque zéro de d. Dans le second cas (propositions 2.4.2

([13]) Si $d_0 = 1$ elle est régulière car elle ne peut avoir au plus qu'un pôle simple P_1, donc aucun (théorème des résidus).

([14]) Ce ne sont plus alors des différentielles exactes, mais seulement des différentielles à périodes nulles (distinction dans le cas des différentielles de troisième espèce). Elles sont exactes si $|d| \subset d_0$.

et 2.5.2), pour avoir $d'_0 \subset d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$, il faut que le second terme n'ait pas de pôle parce que le premier n'en a pas, donc que $|d_0|$ soit multiple de $|d|$: ainsi tout pôle de d^{-1} doit être au moins un pôle simple de d_0^{-1} ; la condition est également suffisante. Si la différentielle est de deuxième espèce, d_0 peut être choisi quelconque.

Dans la suite, quand je considérerai une différentielle méromorphe de troisième espèce sur $\overline{D}$, je supposerai toujours d_0 choisi de façon que d_0 soit multiple de $|d|$. C'est la condition simple qui dans tous les cas, comme nous venons de le voir, entraîne l'orthogonalité. Au contraire, dans le cas d'une différentielle de deuxième espèce, je ne ferai aucune hypothèse sur d. Je parlerai de *composante stricte* de Schottky-Ahlfors d'une différentielle méromorphe Φ donnée par l'une des propositions 2.5.1 et 2.5.2 quand j'aurai choisi $d_0 = |d|$ dans le cas où Φ est de troisième espèce et $d_0 = 1$ dans le cas où Φ est de deuxième espèce.

Il est important de souligner dès à présent que les composantes strictes de Schottky-Ahlfors dans $\mathfrak{S}'_a$ d'une différentielle Φ dans un domaine D sont définies par les parties singulières et les périodes de Φ dans D, puisqu'alors $n_\nu = 1$ dans le raisonnement de 2.5.

Il faut remarquer qu'une relation d'inclusion entre deux diviseurs $d_{0,1}$ et $d_{0,2}$ analogues à d_0 donné par (2.4.1), entraîne une propriété de transitivité entre les composantes de Schottky-Ahlfors correspondantes, φ_1 et φ_2, prises au sens de la proposition 2.5.1 ou 2.5.2 [15]: Autrement dit :

PROPOSITION 2.6.1. — *Si $d_{0,2}$ est multiple de $d_{0,1}$ la composante φ_1 de Schottky-Ahlfors de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,1}^{-1})$ est aussi la composante dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,1}^{-1})$ de la composante φ_2 de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}\tilde{d}_{0,2}^{-1})$ (même résultat avec $\mathfrak{S}'_a$).*

Les propriétés d'orthogonalité des composantes de différentielles sur $\overline{D}$ entraînent des propriétés de minimum de la norme des composantes de Schottky-Ahlfors. Parce que ces normes ne sont pas finies, il faut étudier le comportement des normes relatives à des domaines D — V approchant D et ne contenant pas de singularité, quand D — V tend vers D, $V = (|z| \leqq r)$. On trouve alors qu'étant donné une différentielle sur $\overline{D}$ il existe un voisinage V de ses points singuliers tel que la norme dans D — V de sa composante de Schottky-Ahlfors soit arbitrairement voisine ou inférieure à la norme dans D — V de la différentielle envisagée.

En effet, soit Φ une différentielle méromorphe sur $\overline{D}$; soit φ sa composante de Schottky-Ahlfors (d_0 est choisi, je le rappelle, de façon que d_0 soit multiple

---

[15] Dans la suite, sauf mention expresse, j'entendrai par composante de Schottky-Ahlfors une composante prise au sens de l'une ou l'autre de ces propositions, mais toujours la même, dans une suite de raisonnements liés entre eux.

de $|d|$ si Φ est de troisième espèce). A cause de l'orthogonalité au sens principal de φ et de $\Phi-\varphi$ on peut dire qu'étant donné $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, il existe dans D un voisinage $W((P_\nu))$ des points singuliers (P_ν) de Φ, $(P_\nu \in D)$ tel que dans $D-V$, $V \subset W$:

$$(\varphi, \Phi-\varphi)=\varepsilon_\nu, \qquad (\Phi-\varphi, \varphi)=\bar{\varepsilon}_\nu, \qquad |\varepsilon_\nu|<\varepsilon).$$

Comme dans $D-V$:

$$\|\Phi\|^2=\|\varphi\|^2+2\mathcal{R}(\varphi, \Phi-\varphi)+\|\Phi-\varphi\|^2$$

il en résulte les inégalités, dans $D-V$:

$$\|\Phi-\varphi\|^2-2\varepsilon<\|\Phi\|^2-\|\varphi\|^2<\|\Phi-\varphi\|^2+2\varepsilon.$$

Ainsi on en conclut d'abord que

$$\lim_{V\in\mathcal{V}}(\|\Phi\|^2_{D-V}-\|\varphi\|^2_{D-V})\geqq 0, \tag{2.6.1}$$

$\mathcal{V}$ désignant une base $(r\to 0)$ du filtre des voisinages de (P_ν); en posant, pour simplifier :

$$\lim_{V\in\mathcal{V}}(\|\Phi\|^2_{D-V}-\|\varphi\|^2_{D-V})=[\|\Phi\|^2-\|\varphi\|^2]_D, \tag{2.6.2}$$

on voit ensuite que

$$\|\Phi-\varphi\|^2_D=[\|\Phi\|^2-\|\varphi\|^2]_D. \tag{2.6.3}$$

Proposition 2.6.2. — *Les normes des composantes de Schottky-Ahlfors des différentielles de $\Gamma_a(d^{-1})$ sur un domaine compact, satisfont, par rapport aux normes de ces différentielles, à la propriété de minimum au sens principal représentée par* (2.6.1) *et à la relation* (2.6.3).

On voit que les composantes strictes de Φ au sens de la proposition (2.5.2) sont composantes de toutes les composantes de Φ. Leur norme satisfait donc à une propriété de minimum minimorum.

2.7. Approximation. — Je vais maintenant montrer que l'on peut choisir d_0 de façon que la composante de Schottky-Ahlfors d'une différentielle Φ de $\Gamma_a(d^{-1})$ soit aussi voisine que l'on veut de Φ, au sens des normes; il faut donc montrer que, quel que soit $\varepsilon>0$ arbitrairement petit, il existe d_0 tel que la différence $\Phi-\varphi$ de Φ et de sa composante de Schottky-Ahlfors ait une norme dans D inférieure à ε :

$$\|\Phi-\varphi\|^2<\varepsilon.$$

Soit d'abord φ la composante de Schottky-Ahlfors de Φ dans $\mathfrak{S}_a(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|)$ [resp. $\mathfrak{S}'_a(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|)$]. $\Phi-\varphi$ est une différentielle exacte et de première espèce. On est ramené à montrer qu'on peut approcher une différentielle exacte et de première espèce dF sur $\bar{D}$ par une différentielle de Schottky-Ahlfors dont tous les points singuliers sont sur $\tilde{D}$. Soit Q un point de D et k un entier positif; soit ψ_k la composante de Schottky-Ahlfors ([16]) de dF dans $\mathcal{S}_a(\tilde{Q}^{-k})$. On sait que (Ahlfors [1] et proposition 2.6.2) $\|\psi_k\|^2 \leqq \|dF\|^2$. Quand k augmente indéfiniment, la suite (ψ_k) de différentielles exactes sur $\bar{D}$ à norme bornée croissante ([17]) forme une suite de Cauchy au sens de la norme et converge donc en norme vers une différentielle ψ identique à dF (identité du développement en Q). Si k est suffisamment grand on a donc bien la propriété annoncée.

Proposition 2.7. — *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors* $\mathcal{S}_a(d^{-1} \,|\, \tilde{d}^{-1} \,|\, \tilde{Q}^{-k})$ [*ou* $\mathcal{S}'_a(d^{-1} \,|\, \tilde{d}^{-1} \,|\, \tilde{Q}^{-k})$] $(k = 0, 2, \ldots)$, *est dense dans* $\Gamma_a(d^{-1})$; *l'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors de deuxième espèce sur* D, $\mathcal{S}_a(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ [*ou* $\mathcal{S}'_a(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})$] *est dense dans* $\Gamma_{a,2}(d^{-1})$.

3. Différentielles méromorphes sur une surface ouverte.

3.1. Décomposition des différentielles méromorphes sur une surface ouverte. — Je vais considérer sur une surface ouverte S des différentielles méromorphes, c'est-à-dire à singularités polaires isolées, ou, ce qui revient au même, à singularités en nombre fini dans tout compact. En utilisant les résultats obtenus au paragraphe précédent on peut montrer, et c'est ce qui fera l'objet de ce numéro, qu'une telle différentielle se décompose additivement en une différentielle limite de différentielles de Schottky-Ahlfors correspondantes aux domaines d'une exhanstion de S, et en une différentielle exacte de première espèce et de norme finie sur S. Je vais d'abord établir deux propositions qui me seront utiles dans la suite.

Étant donné une différentielle méromorphe Φ sur S, de pôles (P_ν) d'ordre $m_\nu \left(= d\prod_\nu P_\nu^{m_\nu}\right)$, je parlerai de ses composantes de Schottky-Ahlfors strictes ou au sens d'un diviseur d_0 choisi sur S (plus simplement de ses composantes-d_0), sur un domaine compact D de S ou sur un ouvert composé d'un nombre fini de domaines compacts D_ν, en entendant par là ses composantes dans l'espace $\mathcal{S}_\alpha(\hat{\delta}^{-1}\hat{\delta}_0^{-1})$ correspondant à D ou à chaque D_ν, δ et δ_0 indiquant les traces de d et d_0 dans D.

Le diviseur d_0 étant choisi sur S, l'inclusion de deux domaines A et B entraîne évidemment une propriété de transitivité entre les composantes-d_0 de Schottky-Ahlfors correspondantes :

Proposition 3.1.1. — *Si* $A \subset B$, *la composante-*d_0 *de* Φ *dans* A *est aussi la composante-*d_0 *de la composante-*d_0 *de* Φ *dans* B.

([16]) Comme il n'y a qu'un seul pôle $\mathcal{S}_a(\tilde{Q}^{-k}) = \mathcal{S}'_a(\tilde{Q}^{-k}) = \mathcal{S}_{a,2}(\tilde{Q}^{-k})$ (théorème des résidus).

([17]) ψ_k est la composante de ψ_{k+n} d'après la proposition 2.6.1.

Considérons deux domaines adjacents A et B, c'est-à-dire sans points intérieurs communs mais ayant en commun une partie l de leurs courbes frontières; soit C le domaine global $A \cup B \cup l$; soit α, β et γ les composantes-d_0 de Φ dans A, B et C. La propriété représentée par la relation (2.6.3) nous permet d'énoncer :

PROPOSITION 3.1.2. — *Les composantes* α, β *et* γ *de* Φ *sur trois domaines* A, B *et* C *satisfaisant à*

$$\bar{A} \cap \bar{B} = \bar{l} \qquad (l \neq \emptyset), \qquad C = A \cup B \cup l,$$

sont telles que

$$(3.1.1) \qquad \|\Phi - \alpha\|_A^2 + \|\Phi - \beta\|_B^2 - \|\Phi - \gamma\|_C^2 = \|\gamma - \alpha\|_A^2 + \|\gamma - \beta\|_B^2,$$

ce qui entraîne en particulier l'inégalité

$$(3.1.2) \qquad \|\Phi - \alpha\|_A^2 + \|\Phi - \beta\|_B^2 \geq \|\Phi - \gamma\|_C^2.$$

En effet, d'après (2.6.3) et comme α et β sont aussi les composantes de γ, étant donné $\varepsilon > 0$ on peut trouver un voisinage V des singularités de Φ tel que les deux membres de (3.1.1) soient voisins d'ordre au plus égal à ε de la quantité (18)

$$\|\gamma\|_{C-V}^2 - \|\alpha\|_{B-V}^2 - \|\beta\|_{B-V}^2.$$

J'en viens maintenant à l'étude de la propriété annoncée au début de ce numéro. Considérons sur S une différentielle méromorphe Φ, de pôles (P_ν) d'ordre $m_\nu \left(d = \prod_\nu P_\nu^{m_\nu}\right)$. Soit (S_n) une exhaustion de $S\left[\bar{S}_{n-1} \subset S_n, (P_\nu) \cap S'_n = \emptyset\right]$; soit T_n les ouverts $S_n - \bar{S}_{n-1} (T_1 = S_1)$. Je choisis dans chaque composante de chaque T_n un point $Q_{\mu,\nu}$ et un entier $k_{\mu,\nu} \left(d_0 = |d| \prod_{\mu,\nu} Q_{\mu,\nu}^{k_{\mu,\nu}}\right)$ si Φ est de troisième espèce, $d_0 = \prod Q_{\mu,\nu}^{k_{\mu,\nu}}$ si Φ est de deuxième espèce, tel que si θ_n désigne la composante-d_0 de Φ dans T_n on ait

$$(3.1.3) \qquad \sum_n \|\Phi - \theta_n\|_{T_n}^2 < \infty.$$

Ceci est possible car, d'après le résultat de 2.7, on peut choisir les $k_{\mu,\nu}$ suffisamment grands pour que chaque terme de cette série soit suffisamment petit.

J'appelle φ_n la composante-d_0 de Schottky-Ahlfors de Φ dans S_n et je vais montrer la convergence de la suite (φ_n). Pour cela je considère la suite des nombres positifs :

$$\Delta_n = \|\Phi - \varphi_n\|_{S_n}^2 + \sum_{n+1}^{\infty} \|\Phi - \theta_\nu\|_{T_\nu}^2 \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

---

(18) C'est-à-dire que le module de la différence d'un des membres de (3.1.1) et de cette quantité est inférieure à ε.

C'est une suite non croissante car la différence

$$\Delta_n - \Delta_{n+1} = \| \Phi - \varphi_n \|^2_{S_n} + \| \Phi - \theta_{n+1} \|^2_{T_{n+1}} - \| \Phi - \varphi_{n+1} \|^2_{S_{n+1}}.$$

est non négative d'après (3.1.2). Le premier terme Δ_1 est égal au premier membre (3.1.3), donc fini. La suite (Δ_n) est donc convergente vers un nombre Δ non négatif. La suite $(\| \Phi - \varphi_n \|^2_{S_n})$ converge également vers Δ car

$$\lim_n \sum_{n+1}^{\infty} \| \Phi - \theta_\nu \|^2_{T_\nu} = 0.$$

La suite (φ_n) forme une suite de Cauchy car, toujours en vertu des propositions 3.1.1 et 3.1.2, étant donné ε, on a à partir d'un n, quel que soit p :

(3.1.4) $$\| \varphi_{n+p} - \varphi_n \|_{S_n} \leqq \Delta_n - \Delta_{n+p} \leqq \Delta_n - \Delta < \varepsilon'.$$

(φ_i) converge donc uniformément au sens de la norme vers une différentielle φ, sur tout compact de S. Cette différentielle a évidemment les mêmes périodes et les mêmes parties singulières que Φ. Si $\Delta = 0$, $\Phi = \varphi$; si $\Delta \neq 0$ la différence $\Phi - \varphi$ est exacte, de première espèce et de norme finie égale à Δ. Nous avons donc bien le résultat annoncé.

Pour compléter ce résultat je démontrerai les relations

(3.1.5) $$\begin{aligned} \| \Phi - \varphi \|^2_S &= \lim_n \lim_U (\| \Phi \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))})_{S_n} \\ &= \lim_U \lim_n (\| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \| \varphi \|^2_{S_n - U((P_\nu))}) \end{aligned}$$

U désignant un voisinage des pôles (P_ν) parcourant une base convenable du filtre de ces voisinages. Dans ce but j'utiliserai le résultat auxiliaire suivant :

LEMME. — *Étant donné deux différentielles méromorphes* Φ *et* Ψ *ayant une même partie singulière en un point* P, *il existe une base* $\mathfrak{U}$ *du filtre des voisinages de* P *telle que*

$$\lim_{U \in \mathfrak{U}} [\| \Phi \|^2 - \| \Psi \|^2]^U = 0.$$

En effet, il existe W suffisamment petit pour que Φ et Ψ ait même composante stricte α dans W. Alors, on peut appliquer deux fois la formule (2.6.3) et l'on obtient dans $U \subset W$:

$$[\| \Phi \|^2 - \| \Psi \|^2]_U = \| \Phi - \alpha \|^2_U - \| \Psi - \alpha \|^2_U.$$

Si l'on prend pour $\mathfrak{U} = (U)$ l'ensemble des cercles $|z| \leqq r < 1$, W suffisamment petit étant le cercle $|z| \leqq 1$, α est la composante stricte de Φ et Ψ dans tous ces U, c'est la partie singulière du développement de Φ et Ψ en P. Il est clair alors que, $\Phi - \alpha$ et $\Psi - \alpha$ étant les parties régulières de ces développements, ont une norme d'autant plus petite que r est petit. Ce qui démontre le lemme.

J'en viens maintenant à la démonstration de la relation (3.1.5). Les inégalités (3.1.4) montrent que

$$(3.1.6) \qquad \lim_n [\, \|\varphi\|^2 - \|\varphi_n\|^2]_{S_n} = \lim_n \|\varphi - \varphi_n\|^2_{S_n} = 0.$$

Avec les inégalités triangulaires écrites dans S_n :

$$\|\Phi - \varphi_n\| - \|\varphi - \varphi_n\| \leq \|\Phi - \varphi\| \leq \|\Phi - \varphi_n\| + \|\varphi - \varphi_n\|,$$

nous avons donc

$$\lim_n \|\Phi - \varphi\|^2_{S_n} = \lim_n \|\Phi - \varphi_n\|^2_{S_n}.$$

Mais la norme du deuxième membre peut encore s'écrire en utilisant de nouveau la proposition 3.1.2 et la relation (3.1.6) :

$$\lim_n [\, \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2 + \|\varphi\|^2 - \|\varphi_n\|^2]_{S_n} = \lim_n [\, \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n}.$$

Ceci démontre la première relation (3.1.5). Pour démontrer la seconde, il ne reste plus qu'à montrer qu'on peut définir un voisinage U qui permette d'intervertir les signes $\lim_n$ et [ ]. En chaque point P_ν je choisis un voisinage W et une base $\mathfrak{U}$ tels que (lemme précédent), étant donné ε, dès que $U \in \mathfrak{U}$ et $U \subset W$:

$$[\, \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{U(P_\nu)} = \eta_\nu(U),$$

$$\sum \eta_\nu = \eta, \qquad |\eta| < \varepsilon, \qquad \lim_{\mathfrak{U}} \eta_\nu = \lim_{\mathfrak{U}} \eta = 0,$$

On peut donc écrire, la somme étant étendue aux $P_\nu \in S_n$, $U = U((P_\nu))$:

$$[\, \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n} = \|\Phi\|^2_{S_n - U} - \|\varphi\|^2_{S_n - U} + \sum_{S_n} \eta_\nu.$$

En prenant alors la $\lim_n$:

$$\lim_n [\, \|\Phi\|^2 - \|\varphi\|^2]_{S_n} = \lim_n (\, \|\Phi\|^2_{S_n - U} - \|\varphi\|^2_{S_n - U}) + \eta.$$

En faisant parcourir à U le filtre $\mathfrak{U}(\eta \to 0)$, on a bien la deuxième relation (3.1.5).

Je résume les résultats obtenus par le théorème suivant :

Théorème 3.1. — *Étant donné, sur une surface de Riemann ouverte* S, *une différentielle méromorphe* Φ *on peut définir sur* S *un diviseur* d_0 *de façon que* Φ *soit égal, à une différentielle analytique exacte de première espèce et de norme finie près, à la limite* φ *de ses composantes-*d_0 *relatives aux domaines* S_n *d'une exhaustion de* S. *La norme de la différence* $\Phi - \varphi$ *est donnée par* (3.1.5).

3.2. L'espace des différentielles méromorphes $\mathcal{D}_a$ sur une surface de Riemann ouverte. — Le résultat du numéro précédent fait apparaître une classe particulière de différentielles, à savoir celles pour lesquelles la condition (3.1.3) est remplie sans qu'il soit nécessaire d'introduire des points $Q_{\mu,\nu}$. On peut prendre plus généralement comme définition :

DÉFINITION 3.2.1. — *$\mathcal{D}_a$ (resp. $\mathcal{D}'_a$) est l'espace des différentielles méromorphes Φ pour lesquelles il existe un domaine* D *contenant les pôles, dont chaque composante connexe est compacte, tel que, φ désignant la composante stricte dans* D *au sens de la proposition* 2.5.1 (*resp.* 2.5.2), *on ait*

$$\|\Phi\|^2_{S-D} + \|\Phi - \varphi\|^2_D < \infty. \tag{3.2.1}$$

Ces différentielles satisfont bien à une condition (3.1.3) pour $k_{\mu,\nu} = 0$: il suffit de prendre une exhaustion (S_n) telle que $S'_n \cap D = \emptyset$; dans chaque T_n on a l'inégalité qui découle des propositions 3.1.1 et 3.1.2 :

$$\|\Phi - \theta_n\|^2 < \|\Phi\|^2_{T_n - D} + \|\Phi - \varphi\|^2_{D \cap T_n},$$

ce qui montre bien que (3.2.1) entraîne (3.1.3).

On voit que cette classe $\mathcal{D}_a$ contient celle de Nevannlina [1] définie, dans le cas où Φ a seulement un nombre fini de pôles, par la propriété d'avoir une norme finie à l'extérieur d'un compact contenant les pôles.

Toutefois il n'est pas certain que la somme de deux différentielles de $\mathcal{D}_a$ (ou de $\mathcal{D}'_a$) soit encore une différentielle de $\mathcal{D}_a$ (ou $\mathcal{D}'_a$) car leur définition dépend de domaines qui peuvent avoir des points intérieurs en communs ce qui ne permet pas d'appliquer la proposition 3.1.2. Autrement dit, il n'est pas certain que $\mathcal{D}_a$ (ou $\mathcal{D}'_a$) forme un espace vectoriel. Ceci me conduit à définir une sous-classe de la classe précédente, qui soit effectivement un espace vectoriel.

Comme une surface de Riemann S est un espace localement compact, elle est uniformisable (Bourbaki [2]). Je choisis une structure uniforme dont le filtre des entourages $\mathfrak{U}$ a la propriété suivante : il existe un entourage $U^\star \in \mathfrak{U}$ tel que le voisinage $U^\star$ de tout point de S soit compact. On peut toujours définir de telles structures; par exemple, si $f(P)$ désigne la fonction réelle sur S égale à $x_n + n$ dans $S_{n+1} - \overline{S}_n$ (x_n désignant la fonction harmonique dans $S_{n+1} - \overline{S}_n$, égale à zéro sur S'_n et à 1 sur S'_{n+1}, x_0 continue et inférieure à 1 dans S_1, $x_0 = 1$ sur S'_1), on peut prendre la structure définie par l'écart $g(P, Q) = |f(P) - f(Q)|$ (Bourbaki [3]). Soit $\mathfrak{A}$ l'ensemble des applications de $\mathfrak{U}$ dans $\mathfrak{U}$ qui : 1° conservent la relation d'inclusion entre entourages; 2° fassent correspondre un entourage symétrique à un entourage symétrique; 3° fassent correspondre une base de $\mathfrak{U}$ à une base de $\mathfrak{U}$ (19).

(19) Une surface de Riemann étant un espace localement compact à base dénombrable, une telle structure uniforme sera définie en général par une métrique $ds = \lambda\,|dz|$. La donnée de l'application $A \in \mathfrak{A}$ équivaut alors à celle d'une application croissante f telle que $\lim_{r \to 0} f(r) = 0$. L'existence de $U^\star$ est alors une conséquence de la condition plus forte suivante : la longueur de toute courbe non compacte est infinie.

Soit Φ une différentielle méromorphe de pôles (P_ν). Soit φ la composante stricte de Φ dans $U((P_\nu))$, donnée par l'une des propositions 2.5. Je pose alors la définition suivante :

DÉFINITION 3.2.2. — *$\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (resp. $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$) est le sous-espace des différentielles méromorphes de $\mathcal{D}_a$ (resp. $\mathcal{D}'_a$), Φ, pour lesquelles il existe un entourage U_0 de la structure uniforme définie sur S et une application $A \in \mathfrak{A}$ tels que pour tout entourage $U \subset U_0$:*

1° *deux points de S appartenant à une composante connexe quelconque de $U((P_\nu))$ sont au moins voisins d'ordre $A(U) \subset U^\star$;*

2° *Φ et φ satisfont à la relation*

$$\|\Phi\|^2_{S-U((P_\nu))} + \|\Phi - \varphi\|^2_{\overline{U}((P_\nu))} < \infty. \tag{3.2.2}$$

Il faut remarquer ici la relation d'inclusion $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}} \subset \mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ qui découle des propriétés de minimum signalées au n° 2.6.

Il est bien évident que (3.2.2) entraîne une condition (3.1.3) de la même manière que (3.2.1). Montrons maintenant qu'étant donné une structure uniforme la somme de deux différentielles Φ et Ψ appartenant à $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$) est encore une différentielle de $\mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$). Soit (P_ν), U_0 et A, (Q_ν), V_0 et B les points singuliers, l'entourage et l'application utilisés dans la définition 3.2.2 et correspondant respectivement à Φ et Ψ. Cherchons à déterminer W_0 et C correspondant à $\Phi + \Psi$.

Un point P_ν est au plus voisin d'ordre W_0 de la frontière de la composante connexe de $W_0((P_\nu))$ qui le contient. Les composantes connexes de $W_0((Q_\nu))$ ont un diamètre au plus égal à $B(W_0)$ [c'est-à-dire que deux quelconques de leurs points sont au moins voisins d'ordre $B(W_0)$]. Ainsi, pour que la composante connexe de $W_0((P_\nu, Q_\nu))$ soit intérieure à la composante connexe de $U_0((P_\nu))$, il suffit de choisir W_0 tel que

$$\overline{W_0 \circ B(W_0)} \subset U_0,$$

ce qui est possible parce que B applique une base sur une base. Alors, à tout $W \subset W_0$, parcourant $\mathfrak{U}$, correspond $U \subset U_0$, $U = W \circ B(W)$, parcourant $\mathfrak{U}$, et la composante connexe de $W((P_\nu, Q_\nu))$ est contenue dans $U((P_\nu))$; elle a par suite un diamètre inférieur à $A(U)$: pour $C(W)$ on peut prendre l'application $A(U(W))$.

Il reste à voir qu'on a bien une relation analogue à (3.2.2) pour $\Phi + \Psi$. Or, toujours à l'aide des propositions 3.1.1 et 3.1.2, on peut montrer que la deuxième condition de la définition 3.2.2 entraîne

$$\|\Phi\|^2_{S-V} + \|\Phi - \varphi\|^2_{\overline{V}} < \infty,$$

pour toute différentielle, $\Phi \in \mathcal{D}_a^{\mathfrak{U}}$ (ou $\mathcal{D}_a'^{\mathfrak{U}}$), si V contient $U((P_\nu))$ et désigne un domaine dont toutes les composantes connexes soient compactes; φ désigne ici la composante stricte de Φ dans V. Ainsi, en prenant $V = W_0((P_\nu, Q_\nu))$, on a

$$\|\Phi+\Psi\|^2_{S-V}+\|\Phi+\Psi-\varphi-\psi\|^2_V \leqq \|\Phi\|^2_{S-V}+\|\Psi\|^2_{S-V}+\|\Phi-\varphi\|^2_V+\|\Psi-\psi\|^2_V;$$

ceci constitue la relation cherchée car, ψ désignant la composante stricte de Ψ dans V, $\varphi+\psi$ est la composante stricte de $\Phi+\Psi$ dans V.

Remarque. — La définition des classes $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$ dépend donc de la structure uniforme choisie sur S. Si l'on a deux structures uniformes comparables définies sur S, de filtre d'entourages $\mathfrak{U}_1$ et $\mathfrak{U}_2$, et si $\mathfrak{U}_1$ est plus fin que $\mathfrak{U}_2$, les espaces $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}_1}_a$ et $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}_2}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}_1}_a$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}_2}_a$) satisfont à la relation d'inclusion :

$$\mathcal{D}^{\mathfrak{U}_1}_a \subset \mathcal{D}^{\mathfrak{U}_2}_a \quad \text{ou} \quad \mathcal{D}'^{\mathfrak{U}_1}_a \subset \mathcal{D}'^{\mathfrak{U}_2}_a;$$

en effet, comme $\mathfrak{U}_2 \subset \mathfrak{U}_1$, une propriété vraie pour tous les ensembles de $\mathfrak{U}_1$ l'est également pour tous les ensembles de $\mathfrak{U}_2$. On en déduit que si deux différentielles Φ et Ψ appartiennent aux espaces $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$) relatifs à deux structures comparables, leur somme appartient à l'espace $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$) relatif à la structure la moins fine.

Les sous-espaces de $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$ des différentielles de deuxième espèce sont identiques.

Il est très vraisemblable qu'étant donné une différentielle appartenant à l'espace $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$) relatif à une structure $\mathfrak{U}_1$, on peut définir $\mathfrak{U}_2$ suffisamment fine pour que Φ n'appartienne pas à $D^{\mathfrak{U}_2}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}_2}_a$) : on peut en effet toujours construire un voisinage des singularités de Φ tel que la norme de Φ à l'extérieur de ce voisinage ne soit pas finie ([20]). Inversement, on voit qu'il existe des différentielles à un nombre fini de singularités, dans S, qui n'appartiennent à aucun espace $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$) : dans ce cas la définition de ces espaces est indépendante de la structure uniforme introduite sur S. Ceci laisse penser qu'il existe aussi toujours des différentielles à une infinité de singularités, qui n'appartiennent à aucun espace $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ (ou $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$), quelle que soit la structure uniforme qu'on introduise sur S.

3.3. Exemple de différentielle de $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$. — Pour fixer les idées, je vais donner un exemple très simple de différentielle appartenant à $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$. Comme surface de Riemann S, je prendrai le plan complexe pointé à l'infini. Comme structure uniforme, je choisirai celle qui est définie naturellement par la distance euclidienne (métrique $ds = |dz|$); l'ensemble des ensembles U^s de couples de points dont la distance est inférieure ou égale à s (s positif) constitue un système

---

([20]) C'est M. Ahlfors qui me l'a fait observer au cours d'une conversation que j'ai eue avec lui en 1952. Cette remarque est à l'origine des considérations de structure uniforme qui figurent dans ce numéro et qui rectifient une incorrection de ma Note*. Je dois à M. Parreau d'avoir approfondi la question dans ce sens.

fondamental d'entourages de cette structure. Soit $z = 0, 1, \ldots, N, \ldots$ l'ensemble des points (P_ν) et soit Φ la différentielle définie par

$$\Phi = \sum_0^\infty \frac{B_N}{(z-N)^2} dz;$$

elle est analytique à l'extérieur de (N) si $|B_N| < 1$, par exemple. Le carré de la norme de $\frac{B\,dz}{z^2}$, à l'extérieur du cercle de rayon r, est égale à $\frac{2\pi|B|^2}{r^2}$. Le carré de la norme de Φ à l'extérieur des cercles de rayon $r < \frac{1}{2}$, centrés aux points (N), est donc inférieur à

$$\|\Phi\|^2_{S-U^r((N))} < \frac{2\pi}{r^2} \sum_0^\infty |B_N|^2.$$

D'autre part, le développement de Φ au voisinage de $z = N$ est

$$\Phi = dz \left[\frac{B_N}{(z-N)^2} + \sum_0^{\infty}{}' \frac{B_\nu}{(\nu-N)^2} + \ldots + (n+1)(z-N)^n \sum_0^{\infty}{}' \frac{B_\nu}{(\nu-N)^{n+2}} + \ldots \right],$$

l'accent $'$ indiquant qu'il faut omettre le terme $\nu = N$ dans la somme. La composante stricte de Schottky-Ahlfors de Φ (au sens de 2.5.2), dans le domaine $|z-N| < r < \frac{1}{2}$ est évidemment $\varphi = \frac{B_N}{(z-N)^2} dz$; la norme de $\Phi - \varphi$ dans ce domaine satisfait à l'inégalité

$$\|\Phi - \varphi\|^2_{|z-N|<r} \leqq 2\pi \sum_0^\infty n(n+1)^2 r^{2n} \sum_0^{\infty}{}' \frac{|B_\nu|^2}{(\nu-N)^{2(n+2)}}.$$

La norme de $\Phi - \varphi$ dans $U^r((N))$ satisfait alors à l'inégalité

$$\|\Phi - \varphi\|^2_{U^r((N))} \leqq 4\pi \sum_1^\infty n(n+1)^2 r^{2n} k_n B,$$

$$k_n = \sum_1^\infty \frac{1}{\nu^{2(r+2)}}, \qquad B = \sum_0^\infty |B_\nu|^2.$$

Ainsi on voit que Φ appartient à $\mathcal{O}'^{\mathfrak{U}}_a$ si $\sum^\infty |B_\nu|^2 < \infty$. Ici U_0 peut être pris égal à $U^{\frac{1}{2}}$ et est formé de cercles de rayon $\frac{1}{2}$ centrés aux points (N); A est l'application qui représente U^s sur U^{2s}.

Je soulignerai encore que l'introduction de l'application A permet la présence d'une forte densité de singularités : on peut, par exemple, avoir un nombre arbitrairement grand de points singuliers voisins d'un ordre donné. Dans l'exemple précédent, on peut ajouter aux points (N) les points $\Big(2N + \frac{1}{4},$

$2N + \frac{1}{4^n}, \ldots, 2N + \frac{3}{4^N}\big)$. Les composantes connexes de $U^{\varepsilon}((P_\nu))$, $\frac{1}{4^{n+1}} < \varepsilon < \frac{1}{4^n}$ ont alors un diamètre inférieur à $U^{6\varepsilon}$ car les plus grandes contiennent vers leur extrémité gauche le point $2N$ et vers leur extrémité droite le point $2N + \frac{1}{4^n}$. Ces composantes contiennent un nombre arbitrairement grand de singularités. L'application A serait dans ce cas celle qui fait passer de U^{ε} à $U^{6\varepsilon}$.

3.4. Propriétés des différentielles de $\mathcal{D}_a$ sur les surfaces de la classe C_{AD}. — Le théorème 3.1 appliqué aux différentielles de la classe $\mathcal{D}_a$ ou $\mathcal{D}'_a$ sur une surface de Riemann où toute différentielle analytique exacte de première espèce et de norme finie est nulle ([21]), donne alors :

Proposition 3.4. — *Sur une surface de Riemann* $S \in C_{AD}$, *toute différentielle* $\Phi \in \mathcal{D}_a$ *(ou* $\mathcal{D}'_a$*) est la limite uniforme, dans tout compact, de ses composantes strictes de Schottky-Ahlfors correspondant aux domaines* S_n *d'une exhaustion convenable de* S; *les composantes strictes dans* $\mathfrak{S}_a$ *ont au plus des pôles simples sur* S_i *en des points symétriques de leurs pôles sur* $\tilde{S}_n$; *les composantes strictes dans* $\mathfrak{S}'_a$ *ont en plus des résidus opposés en deux pôles symétriques sur* $\hat{S}_n$ *et sont définies par les parties singulières et les périodes de* Φ.

Comme conséquence directe de cette proposition, on obtient finalement le théorème d'unicité suivant :

Théorème 3.4. — *Les différentielles de* $\mathcal{D}'_a$ *sont déterminées* ([22]) *par leurs périodes et leurs parties singulières sur une surface de Riemann* $S \in C_{AD}$.

En effet dans chaque domaine d'approximaiton les composantes de Schottky-Ahlfors dans $\mathfrak{S}'_a$ sont définies par les parties singulières et les périodes (*voir* p. 257) et leur limite est donc déterminée sur la surface entière.

Ce théorème d'unicité semble être assez important car il étend directement aux différentielles de $\mathcal{D}'_a$, sur les surfaces ouvertes de C_{AD}, la propriété des intégrales abéliennes sur les surfaces closes, d'être déterminées par leurs parties singulières et leurs périodes.

Je terminerai ce chapitre en remarquant que la méthode suivie pourra peut-être donner des résultats au sujet de l'existence de différentielles de la classe $\mathcal{D}'_a$, par exemple, à partir de périodes et de parties singulières données. Mais c'est là un problème différent pour lequel il faudrait d'abord se placer dans le cas simple des différentielles de première espèce, cas qui ne semble pas avoir été abordé jusqu'à présent.

([21]) La classe de ces surfaces est désignée suivant les auteurs par C_{AD}(Parreau*), N_2(Ahlfors [1]) ou N_{AD}(Sario [1]).

([22]) Je dis que A est déterminé par B s'il existe au plus un A ayant la propriété B. S'il existe un A et un seul ayant la propriété B, je dis que A est défini par B.

CHAPITRE II.

Différentielles harmoniques a singularités polaires et leur intégrale de Dirichlet.

Dans ce chapitre je vais appliquer la même méthode qu'au premier chapitre à l'étude de différentielles harmoniques à singularités polaires isolées. Bien des résultats s'obtiennent par une démonstration tout à fait analogue et je me bornerai à signaler le fait sans entrer dans les détails. Au contraire, l'énoncé des résultats présente par rapport à ceux du premier chapitre plus de complexité : cela vient du fait qu'une différentielle harmonique est la somme d'une différentielle analytique et de l'imaginaire conjuguée d'une différentielle analytique. Bien des résultats seront d'ailleurs établis pour une classe de différentielles fermées beaucoup plus étendue que la classe des différentielles harmoniques.

Au lieu de considérer les différentielles harmoniques complexes introduites au chapitre I je me placerai toujours dans le cas de différentielles réelles : cela ne restreint pas la généralité et est plus conforme à l'habitude de considérer des fonctions harmoniques réelles ([23]).

1. Différentielles fermées et harmoniques sur des domaines compacts.

1.1. Développement et décomposition des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors. — A partir d'une différentielle harmonique $\omega = a\,dx + b\,dy$ et de sa différentielle adjointe $\omega^\star = -b\,dx + a\,dy$ on peut former la différentielle analytique $\varphi = \omega + i\omega^\star$. On peut donc écrire :

$$\omega = \frac{1}{2}(\varphi + \overline{\varphi}), \qquad \omega^\star = \frac{1}{2i}(\varphi - \overline{\varphi}). \tag{1.1.1}$$

Cette décomposition additive de ω en différentielle analytique et en imaginaire conjuguée de différentielle analytique est unique.

On peut écrire le développement de ω au voisinage d'un point $P(z = 0)$ suivant les puissances de l'uniformisante locale z :

$$\begin{aligned}\omega = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \frac{a_{-h+1}}{z^{h-1}} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + a_0 + a_1 z + \ldots\right) dz \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{-h}}{\overline{z}^h} + \frac{\overline{a}_{-h+1}}{\overline{z}^{h-1}} + \ldots + \frac{\overline{a}_{-1}}{\overline{z}} + \overline{a}_0 + \overline{a}_1 \overline{z} + \ldots\right) d\overline{z}\end{aligned} \tag{1.1.2}$$

([23]) Je rappelle qu'Ahlfors [1], au contraire, considère les différentielles harmoniques complexes : dans le cas des différentielles de première espèce la distinction entraîne moins de complication d'écriture.

L'ordre de ω sera celui de sa partie analytique φ; ω est régulière au voisinage de P si h est non positif. Je dirai que ω est de deuxième espèce si $a_{-1}=0$ en tout point singulier, de troisième espèce dans le cas général où il y a des points singuliers avec $a_{-1}\neq 0$.

On peut parler de la période d'une différentielle harmonique ω de deuxième espèce par rapport à des cycles d'une même classe d'homologie, ou de la période d'une différentielle de troisième espèce par rapport à un cycle bien déterminé : elles sont définies à l'aide de (1.1.1) par les périodes correspondantes de φ.

Les différentielles harmoniques de deuxième et de troisième espèce sur une surface de Schottky $\hat{D}$ seront de nouveau appelées différentielles de Schottky-Ahlfors. A partir d'une telle différentielle ω on peut former une autre différentielle harmonique sur $\hat{D}$, à savoir $\tilde{\omega}$:

$$(1.1.3) \qquad \tilde{\omega}=\frac{1}{2}(\tilde{\bar{\varphi}}+\tilde{\varphi})=\frac{1}{2}(\varphi^r-\varphi^i)+\frac{1}{2}(\bar{\varphi}^r-\bar{\varphi}^i),$$

On voit que le développement de $\tilde{\omega}$ en $\tilde{P}$, $\bar{z}$ étant pris comme uniformisante locale, est encore égal au développement (1.1.2).

A l'aide de $\tilde{\omega}$ on peut former une décomposition additive de ω en différentielles harmoniques ayant des propriétés remarquables sur D' :

$$(1.1.4) \qquad \omega=\frac{\omega+\tilde{\omega}}{2}+\frac{\omega-\tilde{\omega}}{2}=\frac{i}{2}(\varphi^r-\bar{\varphi}^r)^\star+\frac{1}{2}(\varphi^i+\bar{\varphi}^i).$$

La première composante $\frac{\omega+\tilde{\omega}}{2}=\frac{1}{2}(\varphi^r+\bar{\varphi}^r)=\frac{i}{2}(\varphi^r-\bar{\varphi}^r)^\star$ est la différentielle harmonique conjuguée de $\frac{i}{2}\varphi^r-\bar{\varphi}^r)$ qui est nulle sur D'; la seconde $\frac{\omega-\tilde{\omega}}{2}=-\frac{1}{2}(\varphi^i+\bar{\varphi}^i)$ est nulle sur D'. La décomposition en question est unique. En effet, soit $\mathfrak{S}_0$ la classe des différentielles ω nulles sur D', $\mathfrak{S}_0^\star$ celle des adjointes des précédentes. On peut encore dire que $\mathfrak{S}_0$ est définie par la propriété $\tilde{\omega}=-\omega$, et $\mathfrak{S}_0^\star$ par la propriété $\tilde{\omega}=\omega$. Il en résulte que $\mathfrak{S}_0\cap\mathfrak{S}_0^\star=(0)$, donc que la somme $\mathfrak{S}_0+\mathfrak{S}_0^\star$ est directe; cette somme est égale à $\mathfrak{S}_h$ espace des différentielles de Schottky-Ahlfors harmoniques. D'autre part, si $\omega\in\mathfrak{S}_0$, $\varphi=\omega+i\omega^\star\in\mathfrak{S}_i$ et si $\omega\in\mathfrak{S}_0^\star$, $\varphi\in\mathfrak{S}_r$. La correspondance entre $\mathfrak{S}_h$ et $\mathfrak{S}_a$ définie par $\omega\to\omega+i\omega^\star$, qui est biunivoque puisque réciproquement $\varphi\to\frac{1}{2}(\varphi+\bar{\varphi})$, applique donc $\mathfrak{S}_0$ sur $\mathfrak{S}_i$, $\mathfrak{S}_0^\star$ sur $\mathfrak{S}_r$. La proposition (2.2.1) du chapitre I se traduit donc par :

PROPOSITION 1.1.1. — *Sur le corps des nombres réels l'espace vectoriel $\mathfrak{S}_h$ est la somme directe des sous-espaces $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_0^\star$.*

Je dirai qu'une différentielle harmonique ω est multiple d'un diviseur d si sa partie analytique est multiple de ce diviseur.

En désignant par $\mathfrak{S}_h(\delta^{-1})$ l'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors harmoniques multiples de δ^{-1} on a, dans les mêmes conditions que pour la proposition 2.3 du chapitre I :

PROPOSITION 1.1.2. — *L'espace $\mathfrak{S}_h(\delta^{-1})$ a $2(\hat{g}+m')$ dimensions réelles. L'espace $\mathfrak{S}_0(\delta^{-1})$ a $\hat{g}+(2n)'$ dimensions réelles, $2n$ étant l'ordre total de $[\delta, \tilde{\delta}]$*

Pour les espaces $\mathfrak{S}_0$ et $\mathfrak{S}_0^*$ on a d'autre part les propriétés d'existence suivantes :

PROPOSITION 1.1.3. — *Étant donné des parties singulières en des points de* D, *et des périodes réelles (nulles sur les homologues des composantes de* D'*) et des demi-périodes réelles le long de cycles et demi-cycles de* D *(resp. des périodes réelles et des demi-périodes nulles), il existe une et une seule différentielle de $\mathfrak{S}_0$ (resp. $\mathfrak{S}_0^*$) ayant ces parties singulières, ces périodes et demi-périodes, si et seulement si la somme des résidus des parties analytiques des parties singulières données est réelle (resp. imaginaire pure).*

En effet s'il existe une telle différentielle $\omega \in \mathfrak{S}_0$ (resp. $\mathfrak{S}_0^*$) elle satisfait à $\omega = -\tilde{\omega}$ (resp. $\omega = \tilde{\omega}$). Ainsi le long d'un chemin $\tilde{\mathrm{C}}$ symétrique de C, on a

$$\int_{\tilde{\mathrm{C}}} \omega = -\int_{\mathrm{C}} \omega \qquad \left(\text{resp.} \int_{\tilde{\mathrm{C}}} \omega = \int_{\mathrm{C}} \omega\right).$$

Ce qui indique que les périodes sont opposées (resp. égales) sur deux cycles symétriques intérieurs à D et $\tilde{\mathrm{D}}$, que les périodes sur des cycles conjugués aux composantes de D' sont égales au double des demi-périodes correspondantes (resp. nulles). D'autre part le résidu en $\tilde{\mathrm{P}}$ de la partie analytique de ω est $-\bar{a}_{-1}$ (resp. $+\bar{a}_{-1}$) si en P il est a_{-1}. On voit donc que la condition de la proposition revient à annuler la somme des résidus de la partie analytique de ω sur $\hat{\mathrm{D}}$. Cette condition étant réalisée on sait qu'il existe une et une seule différentielle méromorphe φ (resp. $i\varphi$) ayant ces parties singulières et ces parties réelles de ses périodes sur $\hat{\mathrm{D}}$. La proposition est ainsi démontrée.

1.2. DIFFÉRENTIELLE FERMÉES d_0-HARMONIQUES, d^{-1}-POLAIRES. — Il est intéressant pour la suite de généraliser la notion de développement d'une différentielle harmonique en un point, à certaines différentielles fermées. Considérons à partir de maintenant uniquement des différentielles ω fermées, réelles et dont les coefficients a et b de $\omega = a\,dx + b\,dy$, sont des fonctions indéfiniment dérivables en x et y [24].

Je dirai qu'une différentielle fermée ω est *multiple* de P^k ($k > 0$), si a et b ainsi que leurs dérivées jusqu'à l'ordre $k-1$ s'annulent en P. Je dirai que ω est P^k-*harmonique* s'il existe dans le voisinage de P une différentielle

(24) *Voir* par exemple de Rham et Kodaïra*.

harmonique γ telle que $\omega - \gamma$ soit multiple de P^k. Je dirai que ω est P^{-k}-*polaire* s'il existe, dans un voisinage de P, une différentielle harmonique γ ayant une singularité d'ordre k en P, telle que $\omega - \gamma$ soit régulière en P.

Il découle de ces définitions que si ω, en un point P, est P^{-k}-polaire et P^h-harmonique, on peut parler des $h+k$ premiers coefficients de la partie analytique de ω en P : ce sont les $h+k$ premiers coefficients bien déterminés de la partie analytique de γ telle que $\omega - \gamma$ soit multiple de P^h.

De façon générale, sur un domaine D ou sur une surface S, je parlerai de différentielles fermées d_0-harmoniques et d^{-1}-polaires si d et d_0 sont deux diviseurs à exposants positifs : en chaque point P de d et Q de d_0 d'exposant h et k, ω est P^{-h}-polaire et Q^k-harmonique.

On dira que ω est de deuxième espèce si la différentielle harmonique γ correspondant à chacune de ses singularités a un résidu nul; en général, s'il y a des résidus non nuls, la différentielle est dite de troisième espèce.

Une différentielle fermée à singularités polaires, de deuxième espèce à l'intérieur d'un compact D a une intégrale nulle sur le bord de D $\left(\int_{D'} \omega = 0\right)$. Si elle est de troisième espèce, l'intégrale en question est la partie réelle du produit par $2i\pi$ de la somme des résidus des $\gamma + i\gamma^*$ relatifs aux pôles intérieurs à D. On obtient ces propriétés en appliquant la formule de Cauchy-Green à un compact D, comme nous l'avons fait au chapitre I pour les différentielles méromorphes (l'intégrale d'une différentielle fermée régulière, prise sur le bord d'un compact, est nulle). On pourra ainsi parler d'une période d'une différentielle fermée à singularités polaires de deuxième espèce par rapport à une classe d'homologie de cycles. Au contraire quand nous parlerons des périodes d'une différentielle fermée de troisième espèce, nous supposerons implicitement avoir choisi des cycles bien déterminés.

Comme l'adjointe ω^* d'une différentielle ω multiple de P^k est aussi multiple de P^k, la propriété de ω d'être d_0-harmonique et d^{-1}-polaire se reporte sur ω^*.

1.3. Décomposition des différentielles fermées sur un domaine $\bar{D}$. — Avant d'aborder la décomposition des différentielles fermées à singularités polaires isolées sur un domaine compact D, je vais signaler les propriétés d'orthogonalité — au sens du produit scalaire principal sur D — qu'il est important de considérer dans ce cas. Je vais chercher dans quelles conditions une différentielle harmonique de Schottky-Ahlfors ω représentée par (1.1.4) est orthogonale au sens principal à une différentielle fermée exacte dU de première espèce.

Comme les différentielles harmoniques exactes dU correspondent à une classe plus étendue de différentielles analytiques que les différentielles analytiques exactes considérées au chapitre I, il faut s'attendre à ce que les différentielles de Schottky-Ahlfors qui leurs sont orthogonales appartiennent à une sous-classe de $\mathfrak{S}_h$: c'est ce qui explique l'apparition de la classe $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}$ dans ce qui suit.

Soit C_ν les cercles de rayon r ($z = re^{i\theta}$ uniformisante locale) centrés aux points singuliers; soit V le voisinage de ces points intérieurs à $C_\nu \left(V \subset D;\ D - V = \underset{D}{\complement} V \right)$. Le produit scalaire de la première composante de la décomposition (1.1.4) par dU donne

$$\left[dU, \frac{i}{2}(\varphi^r - \bar{\varphi}^r)^\star \right]_{D-V} = \left[dU, \frac{1}{2}(\varphi^r + \bar{\varphi}^r) \right]_{D-V} = \frac{1}{2}\int_{D-V} dU\,(\varphi^r + \bar{\varphi}^r)^\star$$
$$= -\frac{i}{2}\int_{D-V} dU\,(\varphi^r - \bar{\varphi}^r) = -\frac{i}{2}\sum_\nu \int_{C_\nu} U\,(\varphi^r - \bar{\varphi}^r).$$

L'intégrale étant prise dans le sens direct par rapport à D — V. En supposant dU $(h-1)$-harmonique en P_ν où φ^r a une singularité d'ordre h :

$$U = \frac{1}{2}(\alpha_0 + \alpha_1 z + \ldots + \alpha_{h-1} z^{h-1}) + \frac{1}{2}(\bar{\alpha}_0 + \bar{\alpha}_1 \bar{z} + \ldots + \bar{\alpha}_{h-1}\bar{z}^{h-1}) + \int_{P_\nu} du_1,$$
$$\varphi^r = \left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{a_{-1}}{z} + \ldots \right) dz,$$

du_1 fermée multiple de P^{h-1} et, en faisant tendre r vers zéro on obtient

$$\lim_{r=0} -\frac{i}{2}\int_{C_\nu} U\,(\varphi^r - \bar{\varphi}^r) = \pi\,\mathcal{R}[\alpha_0(a_{-1} + \bar{a}_{-1}) + \alpha_1 a_{-2} + \ldots + \alpha_{h-1} a_{-h}],$$
$$= \lim_{r=0} \mathcal{R}\left[-\frac{i}{2}\int_{C_\nu} (U + iU^\star)(\varphi^r - \bar{\varphi}^r) \right],$$

qui est la partie réelle d'une somme d'expressions analogues à celles de la page 255. Pour ce qui est de la seconde composante de ω, $\frac{1}{2}(\varphi^i + \bar{\varphi}^i)$, on remarque que l'expression de son produit scalaire par dU ne porterait pas uniquement sur les coefficients de leur développement aux points singuliers, si l'on ne supposait pas que c'est une différentielle exacte d'une fonction harmonique nulle sur D'. On est donc amené à supposer ([25]) :

$$\frac{1}{2}(\varphi^i + \bar{\varphi}^i) = d\mathfrak{g}.$$

Alors

$$(dU, d\mathfrak{g})_{D-V} = (d\mathfrak{g}, dU)_{D-V} = \int_{D-V} d\mathfrak{g}\, dU^\star = \sum_\nu \int_{C_\nu} \mathfrak{g}\, dU^\star.$$

En posant, au voisinage d'une singularité :

$$\varphi^i = \left(\frac{b_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{b_{-1}}{z} + \ldots \right) dz,$$

([25]) La lettre $\mathfrak{g}$ rappelle la fonction de Green dont la différentielle est un cas particulier des différentielles considérées ici. Ces différentielles ont été utilisées dans un cas particulier par Ahlfors [1].

on a pour dU^* et $\mathfrak{g}$ les expressions [26] :

$$dU^* = \frac{1}{2i}\Big[[\alpha_1 + 2\alpha_2 z + \ldots + (h-1)\alpha_{h-1} z^{h-2}]\, dz$$
$$- [\bar{\alpha}_1 + 2\bar{\alpha}_2 \bar{z} + \ldots + (h-1)\bar{\alpha}_{h-1} \bar{z}^{h-2}]\, d\bar{z} + du_1^*\Big],$$
$$\mathfrak{g} = \frac{1}{2}\left[\frac{b_{-h}}{(-h+1)z^{h-1}} + \ldots + \frac{b_{-2}}{-z} + b_{-1}\log z + b + b_0 z + \ldots\right]$$
$$+ \frac{1}{2}\left[\frac{\bar{b}_{-h}}{(-h+1)\bar{z}^{h-1}} + \ldots + \frac{\bar{b}}{-\bar{z}} + \bar{b}_{-1}\log\bar{z} + \bar{b} + \bar{b}_0\bar{z} + \ldots\right],$$

et l'on trouve

$$\lim_{r=0}\int_{C_\nu} \mathfrak{g}\, dU^* = -\pi\mathcal{R}[\alpha_1 b_{-2} + \alpha_2 b_{-3} + \ldots + \alpha_{h-1} b_{-h}].$$

C'est encore une expression conformément invariante : comme

$$\lim_{r=0}\frac{1}{i}\int_{C_\nu}(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)\left(\frac{dU - i\,dU^*}{2}\right) = 0,$$

elle est égale à

$$\lim_{r=0}\mathcal{R}\,\frac{1}{i}\int_{C_\nu}(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)\left(\frac{dU + i\,dU^*}{2}\right)$$

qui représente une quantité proportionnelle à la partie réelle du résidu de $(\mathfrak{g} + i\mathfrak{g}^*)(dU + i\,dU^*)$.

En groupant les résultats et en observant que les quantités $b_{-h} - a_{-h}\,(h > 1)$ sont nulles si et seulement si ω a au plus un pôle simple au point symétrique, sur $\hat{D}$, du point singulier considérée, on peut énoncer les propositions suivantes :

Proposition 1.3.1. — *Une différentiele harmonique de Schottky-Ahlfors de la forme* $\frac{1}{2}(\varphi^r + \bar{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = 0$ *sur* D′, *multiple sur* $\hat{D}$ *d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, *d et* d_0 *ayant les formes*

$$(1.3.1)\qquad \begin{cases} d = \sum_1^s P_\nu^{m_\nu} & (m_\nu > 0), \qquad m = \sum_1^s m_\nu, \\ d_0 = \sum_1^t Q_\nu^{n_\nu} & (n_\nu > 0), \qquad n = \sum_1^t n_\nu, \end{cases}$$

est orthogonale au sens principal à toute différentielle fermée exacte sur D, dU, *d′-harmonique,* U *multiple de* $[d_0, |d|]$. *Si, de plus, elle est de deuxième espèce sur* D, *il suffit que* U *soit multiple de* d_0 [27].

---

[26] b_{-1} est réel parce que $d\mathfrak{g}$ est exacte.

[27] U est multiple de d_0 si dU est multiple de d'_0 et si les constantes qui s'introduisent par intégration sont nulles.

PROPOSITION 1.3.2. — *Une différentielle harmonique de Schottky-Ahlfors de la forme* $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$, $\mathfrak{g} = 0$ *sur* D′, *multiple d'un diviseur* $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$, d *et* d_0 *ayant les formes* (1.3.1), *dont la composante* φ^r *a ses résidus imaginaires est orthogonale au sens principal à toute différentielle fermée exacte sur* $\overline{\mathrm{D}}$, $d\mathrm{U}$, d'*-harmonique et multiple de* d'_0.

C'est dans la démonstration que nous venons de faire qu'apparaît le fait nouveau relatif aux différentielles harmoniques, par rapport aux différentielles analytiques. Si l'on compare les deux démonstrations d'orthogonalité correspondantes aux différentielles analytiques et aux différentielles harmoniques on voit qu'elles sont fondamentalement distinctes. Dans le premier cas on utilise essentiellement la propriété de nullité du produit de deux différentielles analytiques, propriété qui permet le passage d'une intégrale relative à D′ à des intégrales relatives à C_ν. Dans le second cas on utilise essentiellement et uniquement le comportement simple des différentielles harmoniques sur D′. C'est ce qui permet de travailler sur la classe plus étendue de différentielles fermées.

J'en viens maintenant à la décomposition d'une différentielle fermée Ω, d^{-1}-polaire et d'_0-harmonique sur $\overline{\mathrm{D}}$, d et d_0 ayant la forme (1.3.1); $\Gamma_f(d^{-1}; d'_0)$ désignera l'espace de ces différentielles. Le sous-espace $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ de $\mathfrak{S}_h(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles harmoniques de la forme $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$ multiples de $d^{-1}\tilde{d}_0^{-1}$ a $\hat{g} + 2(m+n)' - (r)'$ dimensions réelles [28], r étant le nombre total de points P_ν et Q_ν distincts. A chaque différentielle $\Omega = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}) + \Omega_1$ (Ω_1 multiple de d'_0) je fais correspondre un vecteur de l'espace Σ_h à $\hat{g} + 2(m+n)' - (r)'$ dimensions réelles dont les composantes sont :

1° les $\hat{g}$ périodes réelles de Ω;

2° les $m_\nu - 1$ premiers coefficients complexes du développement de $\frac{1}{2}\Phi$ et la partie réelle du résidu de $\frac{1}{2}\Phi$ en un point $P_\nu \notin (Q_\nu)$; s'il n'y a pas de points Q_ν on prend seulement la partie réelle du résidu de $\frac{1}{2}\Phi$ aux points $P_\nu (\nu = 2, 3, \ldots, s)$;

3° les $m_\nu + n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu \in (Q_\nu)$;

---

(28) L'espace $\mathfrak{S}_h(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ a en effet $2\hat{g} + 2(m+n)'$ dimensions réelles et pour obtenir $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ il faut annuler $2g$ périodes de $\frac{1}{2}(\varphi^i + \overline{\varphi}^i)$, $c - 1$ constantes ($\hat{g} = 2g + c - 1$) égales aux valeurs prises par $\frac{1}{2}\int \varphi^i + \overline{\varphi}^i$ sur D′ et $(r)'$ parties imaginaires des résidus de φ^i.

4° les $n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $Q_\nu \notin (P_\nu)$;

5° les $t-1$ quantités [29] réelles $\int_{Q_1}^{Q_\nu} \Omega (\nu = 2, 3, \ldots, t)$; si $Q_\nu \in (P_\nu)$ on prend la valeur constante du développement de $\int_{Q_1}^{z} \Omega$, z voisin de Q_ν; si tous les Q_ν sont des points P_ν on prend un point $Q_0 \notin (Q_\nu)$ et l'on détermine c_0 réel de façon que le développement de $c_0 + \int_{Q_0}^{z} \Omega$ pour z voisin de Q_1 commence par un terme de la forme $z^n\, dz (n \geqq 1)$; les composantes sont alors les constantes des développements de $c_0 + \int_{Q_0}^{z} \Omega$ pour z voisin de $Q_\nu (\nu = 2, 3, \ldots, t)$.

A l'aide de la proposition 1.3.1 on montre qu'il y a isomorphisme de $\mathcal{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ sur Σ_h. En effet, au vecteur de composantes nulles correspond une différentielle exacte, du, multiple de $\tilde{d}_0^{-1}$, u étant multiple de d_0 sur $\overline{\mathrm{D}}$; aux points $P_\nu \notin (Q_\nu)$ elle est régulière car sa composante méromorphe $\varphi = \varphi^r + \varphi^i$ satisfait à

$$\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi = 0 = \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^r - \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^i;$$

donc [30] $\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^r = \operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi^i$ est réel et $\operatorname*{résidu}_{P_\nu} \varphi$ est aussi réel, donc nul, du est donc orthogonale à elle-même et par suite identiquement nulle. On peut donc énoncer :

Proposition 1.3.3. — *L'espace vectoriel $\Gamma_f(d^{-1};\, d'_0)$ est la somme directe de $\mathcal{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et de l'espace des différentielles fermées $|d_0|[|d|, |d_0|]^{-1}$-polaires, de périodes nulles sur $\overline{\mathrm{D}}$, Υ, multiples de $d_0[|d|, |d_0|]^{-1}$, dont les résidus de la partie analytique sont imaginaires purs en $P_\nu \notin (Q_\nu)$ et telles que $\int_{Q_1} \Upsilon$ soit nulle en Q_ν.*

On peut aussi définir une décomposition correspondant à la proposition 1.3.2. Le sous-espace $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ de $\mathcal{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors dont la partie analytique de la composante $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$ a des résidus imaginaires ($\mathcal{R}$ résidu $\varphi^r = 0$) en chaque pôle, a $\hat{g} + 2(m+n) - 2r$ dimensions réelles [31]. Le vecteur de l'espace Σ'_h correspondant aura pour composantes :

1° les $\hat{g}$ périodes réelles de Ω;

---

(29) Toutes les intégrales sont à prendre sur des chemins bien déterminés.

(30) Il ne faut pas oublier, en effet, que les différentielles $d\mathfrak{g} = \frac{1}{2}(\varphi^i + \overline{\varphi}^i)$ sont telles que $\mathcal{J}$ résidu $\varphi^i = 0$.

(31) Il faut annuler r' parties réelles des résidus de φ^r dans une différentielle de $\mathcal{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$.

2° les $m_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu \notin (Q_\nu)$;

3° les $m_\nu + n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $P_\nu \in (Q_\nu)$;

4° les $n_\nu - 1$ premiers coefficients complexes de $\frac{1}{2}\Phi$ en $Q_\nu \notin (P_\nu)$.

On a alors un isomorphisme de Σ'_k sur $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ et l'on peut énoncer :

Proposition 1.3.4. — *L'espace vectoriel* $\Gamma_f(d^{-1};\ d'_0)$ *est la somme directe de* $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ *et de l'espace des différentielles fermées* $|d_0|[|d|,\ |d_0|]^{-1}$*-polaire, de périodes nulles sur* $\overline{D}$, Υ, *multiples de* $d_0[|d|,\ |d_0|]^{-1}$. *L'espace vectoriel* $\Gamma_{f,2}(d^{-1};\ d'_0)$ *des différentielles fermées* d'_0*-harmoniques de deuxième espèce, multiples de* d^{-1}, *sur* D, *est la somme directe de* $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_0^{-1})$ *et de l'espace des différentielles fermées exactes multiples de* d'_0 *sur* D.

1.4. Composantes strictes. Propriétés de minimum et approximation. — On peut choisir le diviseur d_0 qui apparaît dans les propositions 1.3.3 et 1.3.4 de façon que les composantes d'une différentielle $\Omega \in \Gamma_f(d^{-1};\ [d',\ d'_0])$ soient orthogonales au sens principal ([32]). Dans le cas général ou Ω est de troisième espèce il faut et il suffit que d_0 soit multiple de $|d|$. Si Ω est de deuxième espèce d_0 peut être pris quelconque. Les circonstances sont analogues à celles du n° 2.6 du chapitre I. J'appellerai de nouveau composantes strictes de Ω les différentielles obtenues dans les propositions 1.3.3 et 1.3.4 en choisissant $d_0 = |d|$ (resp. $d_0 = 1$ si Ω est de deuxième espèce).

La composante stricte de Schottky-Ahlfors $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$ dans $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}$ est telle que $\left[\Omega = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi}) + \Omega_1,\ \Omega_1 \text{ multiple de } d'_0\right]$:

$$(1.4.1)\qquad \begin{cases} \mathcal{R}\text{ résidu }\Phi = \mathcal{R}\text{ résidu }\varphi^i, & \mathcal{I}\text{ résidu }\Phi = \mathcal{I}\text{ résidu }\varphi^r, \\ \text{coefficient de}\underset{\Phi,P_\nu}{} \dfrac{dz}{z^n} = 2\ \underset{\varphi^r,P_\nu}{\text{coef.}} \dfrac{dz}{z^n} = 2\ \underset{\varphi^i,P_\nu}{\text{coef.}} \dfrac{dz}{z^n} & (n > 1). \end{cases}$$

Les dernières relations sont obtenues en remarquant que φ a au plus un pôle simple en un point symétrique $\tilde{P}$ d'un pôle P sur D, donc que $\tilde{\tilde{\varphi}} = \varphi^r - \varphi^i$ a au plus un pôle simple en P. La composante stricte de Schottky-Ahlfors dans $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}$.est donc définie par les parties singulières et les périodes de Ω dans D.

La proposition correspondante à la proposition 2.6.1 du chapitre I s'énonce :

Proposition 1.4.1. — *Si* d_2 *est multiple de* d_1, *la composante* ω_1 *de Schottky-Ahlfors de* $\Omega \in \Gamma_f(d^{-1};\ [d',\ d'_2])$ *dans* $\mathcal{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$ [*ou* $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$] *est aussi*

([32]) C'est ce que je supposerai toujours en parlant de composante d'une différentielle fermée au sens des propositions 1.3.4 et 1.3.3.

la composante dans $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})$ $[$*ou* $\mathfrak{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_1^{-1})]$ *de la composante* ω_2 *de* Ω *dans* $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_2^{-1})$ $[$*ou* $\mathfrak{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}\tilde{d}_2^{-1})]$.

En introduisant les notations utilisées aux n^{os} 2.6 et 2.7 du chapitre I et en raisonnant de façon analogue, on obtient les résultats suivants :

Proposition 1.4.2. — *Les normes des composantes de Schottky-Ahlfors* $\omega = \frac{1}{2}(\varphi^r + \bar{\varphi}^r) + d\mathfrak{g}$ *de différentielles* Ω *de* $\Gamma_f(d^{-1}; [d', d'_0])$, *sur un domaine compact* $\overline{D}$, *satisfont par rapport aux normes de ces différentielles, aux propriétés de minimum au sens principal représentées par*

$$\lim_{V\in U}(\|\Omega\|^2_{\overline{D}-V} - \|\varphi\|^2_{\overline{D}-V}) \geqq 0$$

et à la relation

$$\|\Omega - \omega\|^2_{\overline{D}} = [\|\Omega\|^2 - \|\omega\|^2]_{D}. \tag{1.4.3}$$

Proposition 1.4.3. — *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors* $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}|\tilde{d}|^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ $[$*ou* $\mathfrak{S}'_{h\mathfrak{g}}(d^{-1}|\tilde{d}^{-1}|\tilde{Q}^{-k})]$ $(k = 0, 2, 3, \ldots)$, *est dense dans* $\Gamma_h(d^{-1})$. *L'espace des différentielles de Schottky-Ahlfors de deuxième espèce sur* D, $\mathfrak{S}_{h\mathfrak{g},2}(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})$ $[$*ou* $\mathfrak{S}'_{h\mathfrak{g},2}(d^{-1}\tilde{Q}^{-k})]$ *est dense dans* $\Gamma_{h,2}(d^{-1})$.

2. Différentielles fermées et harmoniques sur une surface ouverte.

2.1. Décomposition des différentielles fermées. — La décomposition faite au chapitre I pour les différentielles méromorphes peut être opérée, de façon identique, pour les différentielles harmoniques à singularités polaires isolées, grâce aux résultats du paragraphe précédent. Je ne ferai donc pas de démonstration et me contenterai d'énoncer le résultat, sans énoncer les propositions qui généralisent les propositions 3.1.1 et 3.1.2 du chapitre I, pour le cas des différentielles harmoniques.

Théorème 2.1.1. — *Étant donné sur une surface de Riemann* S, *une différentielle harmonique,* Ω, d^{-1}*-polaire, on peut définir sur* S *un diviseur* d_0, *tel que* Ω *soit la somme d'une différentielle harmonique, exacte, de première espèce et de norme finie et de la limite* ω *de ses composantes-*d_0 *relatives aux domaines* S_n *d'une exhaustion de* S. *La norme de la différence* $\Omega - \omega$ *est donnée par*

$$\begin{aligned}\|\Omega - \omega\|^2_S &= \lim_n \lim_U (\|\Omega\|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \|\omega\|^2_{S_n - U((P_\nu))}) \\ &= \lim_U \lim_n (\|\Omega\|^2_{S_n - U((P_\nu))} - \|\omega\|^2_{S_n - U((P_\nu))}),\end{aligned} \tag{2.1}$$

U *désignant un voisinage des pôles* (P_ν) *de* Ω *parcourant une base* $\mathfrak{U}$ *convenable du filtre de ces voisinages.*

Il faut dire un mot sur le lemme qui permet d'établir ces relations (2.1) :

Lemme. — *Étant donné deux différentielles harmoniques polaires* Ω *et* Π *ayant* *une même partie singulière en un point* P, *il existe une base* $\mathfrak{U}$ *du filtre des voisinages de* P *telle que*

$$\lim_{U\subset\mathfrak{U}} [\, \|\Omega\|^2 - \|\Pi\|^2]_{U(P)} = 0.$$

La démonstration est la même que celle du lemme correspondant du chapitre I; il suffit de voir que la partie singulière de Ω et Π, $\frac{1}{2}(\alpha+\overline{\alpha})$, est bien la composante stricte de Schottky-Ahlfors (proposition 1.3.4) dans l'espace $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}$ correspondant aux domaines $|z|\leq r$; en effet $\alpha=\alpha^r+\alpha^i$ a un pôle simple à l'infini et son résidu en ce point est opposé à son résidu à l'origine; on a donc

$$\operatorname*{résidu}_0 (\alpha^r+\alpha^i) = - \operatorname*{résidu}_\infty (\alpha^r+\alpha^i) = - \overline{\operatorname*{résidu}_0 (\alpha^r-\alpha^i)}.$$

et par suite :

$$\mathcal{R} \text{ résidu } \alpha^r = 0 = \mathcal{I} \text{ résidu } \alpha^i,$$

et ces dernières égalités montrent bien que $\frac{1}{2}(\alpha+\overline{\alpha})$ appartient à l'espace $\mathcal{S}'_{h\mathfrak{g}}$ relatif aux cercles de centre origine du plan z.

Le théorème 2.1.1 n'est relatif qu'aux différentielles harmoniques parce que, pour le cas général des différentielles fermées, nous n'avons pas de propriété d'approximation analogue à celle donnée par la proposition 1.4.3. Il faut alors faire une hypothèse suplémentaire et l'on peut énoncer :

THÉORÈME 2.1.2. — *Étant donné sur une surface de Riemann* S, *une différentielle fermée* Ω, d^{-1}*-polaire, si l'on peut définir sur* S *un diviseur* d_0, *tel que* Ω *soit* $[d', d'_0]$*-harmonique et que,* ρ_n *désignant les composantes-*d_0 *de* ω *dans les ouverts* $T_n = S_n - \overline{S}_{n-1}$ (S_n *étant une exhaustion de* S)

$$\sum_n \|\Omega-\rho_n\|^2_{T_n} < \infty,$$

alors Ω *est égale à la somme d'une différentielle fermée exacte, de première espèce et de norme finie, et de la limite* ω *de ses composantes-*d_0 *relatives aux* S_n. *Les relations* (2.1) *sont valables.*

Le théorème 2.1.1 ne peut être obtenu directement à partir du théorème 3.1 du chapitre I. Le théorème qu'on obtiendrait ainsi pour les différentielles harmoniques donnerait une limite $\omega=\lim_n \omega_n$ qui aurait non seulement mêmes périodes que Ω mais dont l'adjointe aurait également mêmes périodes que Ω^*. Par contre les composantes $\frac{1}{2}(\varphi^i_n+\overline{\varphi}^i_n)$ des ω_n ne seraient pas de la forme $d\mathfrak{g}_n$.

2.2. L'ESPACE $\mathcal{D}_f$ DE DIFFÉRENTIELLES FERMÉES A SINGULARITÉS POLAIRES SUR UNE SURFACE OUVERTE. — Pour les mêmes raisons qu'au chapitre I, le théorème précédent conduit à considérer des classes particulières $\mathcal{D}_f$ et $\mathcal{D}'_f$ de différentielles fermées sur une surface ouverte.

Définition 2.2.1. — *$\mathcal{D}_f$ (resp. $\mathcal{D}'_f$) est l'espace des différentielles fermées Ω d'-harmoniques, d étant le diviseur à exposants positifs maximum tel que Ω soit multiple de d^{-1}, pour lesquelles il existe un domaine* D *contenant les pôles de Ω, dont chaque composante connexe est compacte, et telles que, ω désignant la composante stricte de Ω au sens des propositions* 1.3.3 *ou* 1.3.4, *on ait*

$$\|\Omega\|^2_{S-D} + \|\Omega - \omega\|^2_D < \infty. \tag{2.2.1}$$

Avec les notations relatives à l'introduction d'une structure uniforme sur S, utilisées au n° 3.2 du chapitre I, on peut aussi poser :

Définition 2.2.2. — *$\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_f$ (resp. $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_f$) est le sous-espace de $\mathcal{D}_f$ (resp. $\mathcal{D}'_f$) des différentielles Ω pour lesquelles il existe un entourage* U_0 *de la structure uniforme définie sur* S *et une application* $A \in \mathfrak{A}$ *tels que pour tout entourage* $U \subset U_0$:

1° *deux points de* S *appartenant à une composante connexe quelconque de* $U((P_\nu))$, (P_ν) *désignant les pôles de Ω, sont au moins voisins d'ordre* $A(U) \subset U^*$;

2° *Ω et sa composante stricte ω dans* $U((P_\nu))$ *satisfont à la relation*

$$\|\Omega\|^2_{S-U} + \|\Omega - \omega\|^2_U < \infty. \tag{2.2.2}$$

Ces espaces $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_f$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_f$ sont vectoriels et ont entre eux la relation d'inclusion $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_f \subset \mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_f$. On peut également transposer pour les espaces $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_f$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_f$ les autres remarques faites au n° 3.2 sur les espaces $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_a$ et $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_a$.

Je désignerai par $\mathcal{D}_h$, $\mathcal{D}'_h$, $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_h$, $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_h$ les sous-espaces de $\mathcal{D}_f$, $\mathcal{D}'_f$, $\mathcal{D}^{\mathfrak{U}}_f$, $\mathcal{D}'^{\mathfrak{U}}_f$ dont les différentielles sont non seulement fermées mais harmoniques sur S.

En désignant par C_{HD} la classe des surfaces de Riemann où toute différentielle harmonique de première espèce et de norme finie est nulle, on peut appliquer le théorème 2.1.1 aux classes de différentielles $\mathcal{D}_h$ et $\mathcal{D}'_h$ et l'on obtient :

Proposition 2.2. — *Sur une surface* $S \in C_{HD}$, *toute différentielle harmonique* $\Omega \in \mathcal{D}_h$ (*ou* $\mathcal{D}'_h$) *est la limite uniforme dans tout compact, de ses composantes strictes de Schottky-Ahlfors prises au sens de la proposition* 1.3.3 (*ou* 1.3.4) *correspondant aux domaines* S_n *d'une exhaustion de* S; *les composantes prises au sens de la proposition* 1.3.4 *ont des parties singulières données par les relations* (1.4.1) *et sont définies par ces relations et les périodes de Ω.*

La classe $\mathcal{D}'_h$ joue un rôle particulier sur les surfaces appartenant à C_{HD}, car, si deux différentielles Ω_1 et Ω_2 de cette classe ont mêmes périodes et parties singulières, leur différence est nulle. On a donc le théorème d'unicité :

Théorème 2.2. — *Les différentielles de $\mathcal{D}'_h$ sont déterminées par leurs périodes et leurs parties singulières sur une surface de Riemann* $S \in C_{HD}$.

2.3. Sur l'existence de différentielles de deuxième espèce de $\mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}}$. — Virtanen* a donné une condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique Ω de première espèce et de norme finie dont la composante $\Phi\left[\Omega = \frac{1}{2}(\Phi + \overline{\Phi})\right]$ a des périodes données sur les cycles A (les A-périodes) d'une surface de Riemann ([33]) $S \in C_0$. Il ne semble pas qu'on connaisse actuellement de condition analogue pour le cas où l'on se donne les périodes de Ω. Par rapport à la classe $\mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}}$ introduite dans ce travail, il est donc raisonnable de poser la question de l'existence d'une différentielle harmonique Ω dont la partie analytique Φ a des A-périodes et des parties singulières données. Comme $\mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}}$ est vectoriel, on peut utiliser le résultat de Virtanen et l'on est ramené à chercher une condition d'existence d'une différentielle harmonique $\Omega \in \mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}}$ dont la partie analytique a ses A-périodes nulles (par rapport à des cycles A donnés) et dont les parties singulières sont données. Je n'ai obtenu qu'une condition suffisante et non nécessaire. Cette condition est également suffisante pour l'existence d'une différentielle $\Omega \in \mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}}$ harmonique de périodes nulles (par rapport à des cycles A et B donnés) de parties singulières données.

Pour simplifier l'exposé je me placerai d'abord dans le cas de parties singulières de deuxième espèce $\left(\text{coefficient de } \frac{dz}{z} \text{ nul; ce sous-espace de } \mathcal{D}_h'^{\mathfrak{U}} \text{ est identique au sous-espace correspondant de } \mathcal{D}_h^{\mathfrak{U}}\right)$ puis dans le cas où toutes les parties singulières sont des pôles simples.

Le résultat est basé sur l'estimation de la norme d'une différentielle harmonique $\varpi_P \in \mathcal{D}_h^{\mathfrak{U}}$, ayant un seul point singulier P, de partie singulière :

$$(2.3.1)\qquad \sigma_P = \frac{1}{2}\left(\frac{a_{-h}}{z^h} + \ldots + \frac{a_{-2}}{z^2}\right)dz + \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{a}_{-h}}{\overline{z}^h} + \ldots + \frac{\overline{a}_{-2}}{\overline{z}^2}\right)d\overline{z}\qquad (h \geqq 2),$$

et de partie analytique A-exacte, la norme étant calculée à l'extérieur d'un cercle $|z| \leqq r$ centré en P sur $S \in C_0$. L'existence d'une telle différentielle a été démontrée par Virtanen*. Pour calculer la norme de ϖ_P à l'extérieur de $|z| \leqq r$ il faut couper S suivant les cycles A_ν; sur la surface S^* obtenue, ϖ_P est exacte, soit $du_{A,P}$. On estime alors $\|du_{A,P}\|^2_{S^* - (|z| \leqq r)}$ de la façon suivante (S_n étant une exhaustion de S) :

$$\begin{aligned}\|\varpi_P\|^2_{S^* - (|z| \leqq r)} &= \lim_n \|\varpi_P\|^2_{S^* - (|z| \leqq r)} \\ &= \int_{|z| = r} u_{A,P}\, du^\star_{A,P} + \lim_n \int_{S'_n} u_{A,P}\, du^\star_{A,P};\end{aligned}$$

([33]) C_0 désigne la classe des surfaces paraboliques (nullberandet), c'est-à-dire celle dont la « frontière idéale » est de mesure harmonique nulle (Nevanlinna*). Parmi la classe des surfaces ouvertes c'est une de celles qui se rapprochent le plus des surfaces closes du point de vue de l'extension des propriétés des intégrales abéliennes (Sario [1]).

les intégrales portant sur les cycles A_ν intérieurs à S_n sont nulles parce que la partie analytique de ϖ_P est A-exacte. Comme $du_{A,P}$ est une différentielle de norme finie à l'extérieur de $|z| \leqq r$, $u_{A,P}$ convenablement normée, est bornée sur $S^\star - (|z| \leqq r)$ (Nevanlinna*). D'autre part on sait (Nevanlinna*) que l'on peut choisir l'exhaustion (S_n) de façon que $\lim\limits_n \int_{S'_n} |du_{A,P} + i du^\star_{A,P}| = 0$. En faisant augmenter n indéfiniment on obtient donc :

$$(2.3.2) \qquad \|\varpi_P\|^2_{S-(|z|\leqq r)} = -\int_{|z|=r} u_{A,P}\, du^\star_{A,P},$$

l'intégrale étant prise dans le sens direct par rapport à $|z| \leqq r$. Supposons qu'au voisinage de P, $\varpi_P = du_{A,P}$ est donnée par

$$\begin{aligned} du_{A,P} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-k}}{z^k} + \ldots + \frac{p_{-2}}{z^2} + p_0 + p_1 z + \ldots\right) dz \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_{-h}}{\bar{z}^h} + \ldots + \frac{\bar{p}_{-2}}{\bar{z}^2} + \bar{p}_0 + \bar{p}_1 \bar{z} + \ldots\right) d\bar{z}. \end{aligned}$$

Alors on obtient

$$\begin{aligned} \|\varpi_P\|^2_{S-(|z|\leqq r)} = \pi \Bigg[& |p_{-h}|^2 \frac{1}{(h-1)\, r^{2h-2}} + \ldots + \frac{|p_{-2}|^2}{r^2} \\ & - |p_0|^2 r^2 - |p_1|^2 \frac{r^4}{2} - \ldots - |p_n|^2 \frac{r^{2n+2}}{n+1} - \ldots \Bigg]. \end{aligned}$$

Ainsi on a les deux inégalités :

$$(2.3.3) \qquad \|\varpi_P\|^2_{S-(|z|\leqq r)} \leqq \pi \sum_2^h \frac{|p_{-\nu}|^2}{(\nu-1)\, r^{2\nu-2}},$$

$$(2.3.4) \qquad \sum_2^k \frac{|p_{-\nu}|^2}{(\nu-1)\, r^{2\nu-2}} \geqq \sum_0^\infty \frac{|p_\nu|^2 r^{2\nu+2}}{\nu+1}.$$

Donnons-nous maintenant, sur une surface de Riemann $S \in C_0$ munie d'une structure uniforme $\mathfrak{U}$, un ensemble de points (P_ν) tel que la première condition de la définition 2.2.2 soit remplie (existence de U_0 et de A). Représentons [34] chaque $U_0(P_\nu)$ sur $|z| \leqq 1$ ($z = 0 \leftrightarrow P_\nu$); supposons que la famille des cercles $|z| \leqq r < 1$ forme une base du filtre des voisinages de l'ensemble (P_ν) sur S. Soit σ_{P_ν} :

$$\begin{aligned} (2.3.5) \qquad \sigma_{P_\nu} = {} & \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-k_\nu,\nu}}{z^{k_\nu}} + \ldots + \frac{p_{-2,\nu}}{z^2}\right) dz \\ & + \frac{1}{2}\left(\frac{\bar{p}_{-k_\nu,\nu}}{\bar{z}^{k_\nu}} + \ldots + \frac{\bar{p}_{-2,\nu}}{\bar{z}^2}\right) d\bar{z}, \end{aligned}$$

---

[34] Il faut supposer en plus $U_0(P_\nu)$ suffisamment petit pour que la représentation conforme et biunivoque sur $|z| \leqq 1$ soit possible.

les parties singulières données en chaque P_ν. Considérons l'expression formelle :

$$\Omega = \sum_{\nu} \varpi_{P_\nu}, \tag{2.3.6}$$

et cherchons dans quelles conditions Ω est une différentielle de la classe $\mathcal{D}_k^{\mathfrak{u}}$.

Dans tout compact ne contenant pas de point P_ν, il existe une limite Ω de $\sum_1^n \varpi_{P_\nu}$ pour n tendant vers l'infini, dès que

$$\sum_1^\infty \sum_2^{k_\nu} \frac{|p_{-\mu,\nu}|^2}{(\mu-1)r^{2\mu-2}} < \infty, \tag{2.3.7}$$

car cette somme majore la norme des différentielles $\sum_1^n \varpi_{P_\nu}$, d'après (2.3.3); ainsi Ω est bien une différentielle harmonique si (2.3.7) est réalisée, et l'on voit facilement qu'elle a en P_ν la singularité σ_{P_ν}. Je vais montrer que cette condition suffit pour que $\Omega \in \mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$.

Évaluons la quantité $\|\Omega\|^2_{S-U^r} + \|\Omega - \omega\|^2_{U^r}$, où ω est la composante stricte de Schottky-Ahlfors (au sens de la proposition 1.3.4) de Ω dans le domaine $U^r((P_\nu))$ [$U^r((P_\nu))$ désigne l'intérieur des cercles de rayon r centrés en (P_ν)]. Si D désigne une composante connexe de $U^r((P_\nu))$ on peut écrire, en faisant le même raisonnement qu'au premier chapitre (n° 3.2), et en désignant par ω_{P_ν} la composante stricte de Schottky-Ahlfors de ϖ_{P_ν} dans D, et par I l'ensemble des indices ν des points $P_\nu \in D$ en écrivant U^r à la place de $U^r(P_\nu)$:

$$\begin{aligned}\|\Omega-\omega\|^2_D &= \left\| \sum_1^\infty \varpi_{P_\nu} - \sum_{\nu\in I} \omega_{P_\nu} \right\|^2_D \leq \sum_{\nu \in I} \|\varpi_{P_\nu} - \omega_{P_\nu}\|^2_D + \sum_{\nu\notin I} \|\varpi_{P_\nu}\|^2_D \\ &\leq \sum_{\nu\in I} \|\varpi_{P_\nu}\|^2_{D-U^r} + \sum_{\nu\notin I} \|\varpi_{P_\nu}\|^2_D + \sum_{\nu\in I} \|\varpi_{P_\nu} - \sigma_{P_\nu}\|^2_{U^r};\end{aligned}$$

en effet, σ_{P_ν} est la composante stricte de Schottky-Ahlfors de ϖ_{P_ν} dans $U^r(P_\nu)$. Ainsi en utilisant (2.3.3) et (2.3.4) :

$$\|\Omega\|^2_{S-U^r((P_\nu))} + \|\Omega-\omega\|^2_{U^r((P_\nu))} \leq \sum_1^\infty \|\varpi_{P_\nu}\|^2_{S-U^r} + \sum_1^\infty \|\varpi_{P_\nu} - \sigma_{P_\nu}\|^2_{U^r} \leq 2\pi \sum_1^\infty \sum_2^{k_\nu} \frac{|p_{-\mu,\nu}|^2}{(\mu-1)r^{2\mu-2}}$$

Si (2.3.7) est réalisée, Ω appartient bien à $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$ et par suite est définie de façon unique sur $S \in C_0 \subset C_{HD}$.

Si l'on se propose de chercher une condition suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique Ω exacte de parties singulières (2.3.5) on obtient le même résultat en utilisant les différentielles du_{P_ν} harmoniques exactes, régulières en dehors de P_ν, appartenant à $\mathcal{D}_h$ et ayant en P_ν la partie singulière σ_{P_ν} (leur existence est démontrée par Nevanlinna*, par exemple). On obtient directement une relation analogue à (2.3.2) et la suite des raisonnements est identique.

Formulons sur l'ensemble (P_ν) l'hypothèse suivante :

Hypothèse H_1. — 1° Étant donné la structure uniforme $\mathfrak{U}$, il existe un entourage U_0 et une application A satisfaisant à la première condition de la définition 2.2.2.

2° Chaque $U_0(P_\nu)$ est représentable conformément et biunivoquement sur le cercle $|z| \leq 1$; il existe une base U^r du filtre des entourages telle que $U^r(P_\nu)$ soit représenté sur $|z| \leq r$.

On peut énoncer :

Proposition 2.3. — *Sur une surface parabolique, étant donné d'une part une suite de points* (P_ν) *convenablement répartis par rapport à une structure uniforme* $\mathfrak{U}$ *définie sur* S *(c'est-à-dire satisfaisant à l'hypothèse* H_1*), et d'autre part, des parties singulières* σ_ν *analogues à* (2.3.5), *la condition* (2.3.7) *est suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique* Ω *de deuxième espèce dont la partie analytique est A-exacte (resp. d'une différentielle harmonique exacte) qui appartient à* $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{U}}$ *et qui possède les singularités* σ_{P_ν} *en* P_ν.

2.4. Les différentielles harmoniques normales sur $S \in C_{HD}$. — On sait qu'on appelle différentielle harmonique normale de deuxième espèce les différentielles exactes admettant un seul point singulier P et la singularité

$$\sigma_P = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z^k} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}^k}\right) \qquad (k > 1),$$

en ce point, et qui est d'autre part de norme finie à l'extérieur d'un voisinage de P. Une différentielle normale de troisième espèce est une différentielle de périodes nulles admettant deux points singuliers P_1 et P_2 et les singularités :

$$\sigma_{P_1} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right), \qquad \sigma_{P_2} = \frac{1}{2}\left(\frac{dz}{z} + \frac{d\bar{z}}{\bar{z}}\right)$$

en ces points, et qui est de norme finie à l'extérieur d'un voisinage de P_1 et P_2. Leur existence sur une surface $S \in C_0$ a été démontrée par Nevanlinna. Il faut souligner ici que leur existence sur une surface $S \in C_{HD}$ résulte du théorème 2.1.2. En effet, il existe toujours des différentielles fermées normales $\Omega \in \mathcal{D}'_f$; il suffit de les choisir nulles en dehors d'un compact simplement connexe contenant les singularités; leurs composantes strictes de Schottky-Ahlfors convergent vers une différentielle harmonique ω qui appartient à $\mathcal{D}'_h$.

2.5. Remarque sur la condition (2.3.7). — La condition (2.3.7) qui intervient dans la proposition 2.3 n'est pas sans rapport avec le résultat de la pro-

([35]) Je rappelle que $C_0 \subset C_{HD}$.

position 2.2. Je vais montrer qu'en effet, c'est une condition suffisante pour qu'une différentielle de deuxième espèce $\Omega \in \mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$ ayant les parties singulières (σ_{P_ν}) en (P_ν), sur une surface S de la classe C_{IID}, soit décomposable en deux différentielles harmoniques appartenant à $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$, la première étant limite des différentielles $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$, la seconde des différentielles $d\mathfrak{g}$, différentielles relatives aux domaines S_n d'une exhaustion de S et données par la proposition 1.3.4.

Pour vérifier cette propriété, il suffit de calculer la norme de $d\mathfrak{g}$ dans la partie de S_n extérieur à $U^r((P_\nu))$ (mêmes notations qu'au numéro précédent) :

$$(2.5)\qquad \| d\mathfrak{g} \|^2_{S_n - U^r((P_\nu))} \leqq \sum_{P_\nu \in S_n} \| d\mathfrak{g}_\nu \|^2_{S_n - U^r((P_\nu))} = -\sum_{P_\nu \in S_n} \int_{|z|=r} \mathfrak{g}_\nu \, d\mathfrak{g}_\nu^\star,$$

$d\mathfrak{g}_\nu$ désigne la différentielle de Schottky-Ahlfors singulière en P_ν et $\tilde{P}_\nu$ seulement, et ayant en P_ν la même partie singulière que $d\mathfrak{g}\left(d\mathfrak{g} = \sum_{P_\nu \in S_n} d\mathfrak{g}_\nu\right)$; l'intégrale est à prendre dans le sens direct par rapport au domaine $|z| \leqq r$. On sait [relations (1.4.1)] que l'expression de $d\mathfrak{g}_\nu$ au voisinage de P_ν a la forme (Ω ayant la singularité σ_{P_ν}) :

$$\begin{aligned} d\mathfrak{g}_\nu = {} & \frac{1}{4}\left(\frac{p_{-k_\nu,\nu}}{z^{k_\nu}} + \ldots + \frac{p_{-2,\nu}}{z^2} + \alpha_{0,\nu} + \alpha_{1,\nu} z + \ldots\right) dz \\ & + \frac{1}{4}\left(\frac{\overline{p}_{-k_\nu,\nu}}{\overline{z}^{k_\nu}} + \ldots + \frac{\overline{p}_{-2,\nu}}{\overline{z}^2} + \overline{\alpha}_{0,\nu} + \overline{\alpha}_{1,\nu} \overline{z} + \ldots\right) d\overline{z}. \end{aligned}$$

On trouve alors que pour chaque point P_ν :

$$-\int_{|z|=r} \mathfrak{g}_\nu \, d\mathfrak{g}_\nu^\star = \frac{1}{4\pi}\left[\sum_{k_\nu}^{2} \frac{|p^2_{-\mu,\nu}|}{(\mu - 1) r^{2\mu-2}} - \sum_{\infty}^{0} \frac{|\alpha^2_{\mu,\nu}| \, r^{2\mu+2}}{\mu + 1}\right].$$

Avec les relations (2.5) ceci montre immédiatement que si la condition (2.3.7) est réalisée, les différentielles $d\mathfrak{g}$ relatives aux S_n convergent vers une différentielle $d\mathcal{G}$ qui appartient à $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$. Si $S \in C_{\text{IID}}$ on sait que Ω est la limite de

$$\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r) + d\mathfrak{g},$$

et l'on en conclut donc que les différentielles $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$ convergent également vers une différentielle $\frac{1}{2}(\Phi^r + \overline{\Phi}^r)$ appartenant à $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$. On peut énoncer :

Proposition 2.5. — *Sur une surface* S *appartenant à* C_{IID}, *une différentielle harmonique* $\Omega \in \mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$, *de deuxième espèce, se décompose en deux différentielles harmoniques* $\frac{1}{2}(\Phi^r + \overline{\Phi}^r)$ *et* $d\mathcal{G}$, *appartenant à* $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{u}}$ *et limites des différentielles* $\frac{1}{2}(\varphi^r + \overline{\varphi}^r)$

et $d\mathfrak{g}$, relatives aux domaines S_n d'une exhaustion de S, dès que la condition (2.3.7) sur les parties singulières de Ω est réalisée.

2.6. Sur l'existence des différentielles de $\mathcal{D}_h^{\mathfrak{U}}$ n'ayant que des pôles simples. — Étudions la norme d'une différentielle harmonique ([36]) $\omega_{A,P_1,P_2} \in \mathcal{D}'_h$, dont la partie analytique a des A-périodes nulles sur $S \in C_0$ et qui a deux pôles simples de résidus opposés en P_1 et P_2; ω_{A,P_1,P_2} est exacte sur $S_l^\star$, c'est-à-dire sur S coupée suivant des cycles A et un chemin l allant de P_1 à P_2. Cette norme est finie à l'extérieur de deux cercles de rayon r centrés en P_1 et P_2. Donnons-nous les développements suivants ($\omega_{A,P_1,P_2} = du_{A,P_1,P_2}$ au voisinage de P_1 et P_2) :

$$\begin{aligned} du_{A,P_1,P_2} &= \frac{1}{2}\left(\frac{p_{-1}}{z} + p_{0,1} + p_{1,1}z + \ldots\right)dz \\ &+ \frac{1}{2}\left(\frac{\overline{p}_{-1}}{\overline{z}} + \overline{p}_{0,1} + \overline{p}_{1,1}\overline{z} + \ldots\right)d\overline{z} \quad \text{en } P_1, \\ du_{A,P_1,P_2} &= \frac{1}{2}\left(-\frac{p_{-1}}{z} + p_{0,2} + p_{1,2}z + \ldots\right)dz \\ &+ \frac{1}{2}\left(-\frac{\overline{p}_{-1}}{\overline{z}} + \overline{p}_{0,2} + \overline{p}_{1,2}\overline{z} + \ldots\right)d\overline{z} \quad \text{en } P_2. \end{aligned}$$

A partir de ces développements on obtient aisément ceux de u_{A,P_1,P_2}, $u^\star_{A,P_1,P_2}$ et $du^\star_{A,P_1,P_2}$ en P_1 et P_2. Je désigne par p_1 et p_2 (resp. $p_1^\star$ et $p_2^\star$) les coefficients constants réels des développements de u_{A,P_1,P_2} (resp. $u^\star_{A,P_1,P_2}$) en P_1 et P_2. Comme au n° 2.3 on peut choisir une exhaustion S de façon que

$$\begin{aligned} \|\omega_{A,P_1,P_2}\|^2_{S-(|z|\leq r)} &= \int_{|z|=r,P_1} u\,du^\star + \int_{|z|=r,P_2} u\,du^\star \\ &+ 2\pi\mathcal{I}p_{-1}\int_l du^\star \qquad (u = u_{A,P_1,P_2}). \end{aligned}$$

Les deux premières intégrales sont à prendre dans le sens direct par rapport au domaine envisagé, la dernière, sur le bord de la coupure l parcourue dans le sens direct en allant de P_1 à P_2 : en effet, si u_{A,P_1,P_2} désigne la valeur de la fonction harmonique sur ce bord, $u_{A,P_1,P_2} - 2\pi\mathcal{I}p_{-1}$ est sa valeur sur l'autre bord. Les calculs effectués donnent

$$\begin{aligned} \|\omega_{A,P_1,P_2}\|^2_{S-(|z|\leq r)} &= -4\pi|p_{-1}^2|\log r + 2\pi[\mathcal{R}p_{-1}(p_2 - p_1) \\ &+ \mathcal{I}p_{-1}(p_2^\star - p_1^\star)] - \pi\sum_0^\infty(|p_{\nu,1}^2| + |p_{\nu,2}^2|)\frac{r^{2\nu+2}}{\nu+1}. \end{aligned}$$

Ce calcul est valable ([37]) pour $r = 1$ et montre que le crochet qui figure au

---

([36]) Son existence a été établie par Virtanen ⋆.

([37]) Je suppose les cercles $|z| \leq 1$ centrés en P_1 et P_2 suffisamment petits pour qu'ils soient sans points communs.

second membre est positif, soit a^2; cette quantité dépend non seulement de p_{-1} mais encore de z par l'intermédiaire de $p_1 - p_2$ et $p_1^\star - p_2^\star$.

Supposons maintenant donnée une suite de points (P_ν) et de quantités complexes $(p_{-1,\nu})$, les points (P_ν) satisfaisant par rapport à la structure uniforme définie sur $S \in C_0$, à l'hypothèse H_1. On peut évidemment toujours supposer les points rangés dans un ordre tel que les voisinages $U_r(P_\nu)(U^r \subset U_0)$ de deux points successifs soient sans points communs. Appelons $\omega_{A, P_\nu, P_{\nu+1}}$ les différentielles harmoniques, exactes sur $S_{l_\nu}^\star$(l_ν joignant P_ν à $P_{\nu+1}$), dont la partie analytique est A-exacte sur S_{l_ν}, singulières en P_ν et $P_{\nu+1}$, de résidus égaux à

$$\sum_1^\nu p_{-1,\mu} \quad \text{en } P_\nu, \qquad -\sum_1^\nu p_{-1,\mu} \quad \text{en } P_{\nu+1}. \tag{2.6.1}$$

Soit a_ν^2 la quantité positive relative à $\omega_{A, P_\nu, P_{\nu+1}}$ qui intervient dans le calcul de sa norme, comme coefficient indépendant de r. Par une vérification tout à fait analogue à celle que nous avons faite dans le cas des différentielles de deuxième espèce, on peut montrer que si

$$\sum_1^\infty \left| \sum_1^\nu p_{-1,\mu} \right|^2 + \sum_1^\infty a_\nu^2 < \infty, \tag{2.6.2}$$

la différentielle harmonique $\sum_1^\infty \omega_{A, P_\nu, P_{\nu+1}}$ appartient à $\mathcal{D}_h'^{\mathfrak{u}}$, a une partie analytique A-exacte sur S coupée suivant les chemins l_ν et possède bien aux points P_ν un pôle simple de résidu $p_{-1,\nu}$.

Au lieu de $\omega_{A, P_\nu, P_{\nu+1}} \in \mathcal{D}_h'$ on aurait pu utiliser les différentielles $du_{P_\nu, P_{\nu+1}} \in \mathcal{D}_h'$ exactes sur S coupée le long des chemins l_ν et possédant seulement en P_ν et $P_{\nu+1}$ les pôles simples de résidus (2.6.1) (leur existence est donnée par Nevanlinna*). La quantité a^2 relative à ω_{A, P_1, P_2} doit être remplacée par une quantité b^2 car $p_2 - p_1$ et $p_2^\star - p_1^\star$ sont remplacés par des quantités $p_2' - p_1'$ et $p_2'^\star - p_1'^\star$ qui dépendent de r (définie de façon analogue). La condition (2.6.2) doit être remplacée par

$$\sum_1^\infty \left| \sum_1^\nu p_{-1,\mu} \right|^2 + \sum_1^\infty b_\nu^2 < \infty ; \tag{2.6.3}$$

et l'on peut énoncer :

Proposition 2.6. — *Sur une surface* $S \in C_0$, *la condition* (2.6.2) [*resp.* (2.6.3)] *est suffisante pour l'existence d'une différentielle harmonique* $\in \mathcal{D}_h'^{\mathfrak{u}}$ *dont la partie analytique est* A-*exacte sur* $S_l^\star$ (*resp. d'une différentielle harmonique exacte sur* S_l) *ayant des pôles simples en des points* (P_ν), *satisfaisant à l'hypothèse* H_1, *et de résidus* $(p_{-1,\nu})$ *donnés en ces points.*

Remarque. — Dans le cas où une différentielle $\Omega \in \mathcal{D}_h'^{\mathfrak{u}}$ n'a que des pôles simples, un calcul facile montre que ses composantes $d\mathfrak{g}$ et $\frac{1}{2}(\varphi^r + \bar{\varphi}^r)$ par rapport aux domaines S_n, sont orthogonales dans S_n.

CHAPITRE III.

Fonctions multiplicatives et fonctions uniformes.

Je me propose maintenant d'étudier plus particulièrement, sur une surface de Riemann ouverte S, des fonctions méromorphes uniformes c'est-à-dire des intégrales de différentielles analytiques de deuxième espèce exactes, qui peuvent admettre une infinité de singularités polaires isolées. Suivant une idée qu'on trouve par exemple chez H. Weyl*, je vais considérer ces fonctions comme un cas particulier des fonctions multiplicatives, c'est-à-dire des fonctions méromorphes dont la valeur en un point P de S, suivie par continuité le long d'un cycle, est multipliée par un facteur constant dépendant seulement de la classe d'homologie du cycle, quand on parcourt le cycle

$$f(\mathrm{CP}) = \mu_{\mathrm{C}} f(\mathrm{P});$$

$f(\mathrm{CP})$ indique la valeur de la fonction f en P, obtenue après avoir parcouru le cycle C, en supposant que cette valeur au point initial soit $f(\mathrm{P})$; μ_{C} est le multiplicateur que l'on suppose être de module 1. On est alors amené à considérer une classe particulière de fonctions uniformes, à savoir celle dont le maximum et le minimum du module sont compris entre deux constantes positives, à l'extérieur d'un voisinage convenable des zéros et des pôles.

1. Fonctions multiplicatives sur un compact.

1.1. Décomposition des fonctions multiplicatives sur une surface de Schottky. — Soit f une fonction multiplicative sur une surface de Schottky $\hat{\mathrm{D}}$. Pour fixer les idées, nous supposerons tracées sur $\hat{\mathrm{D}}$ un système de rétrosections symétriques (si R désigne une rétrosection, $\tilde{\mathrm{R}}$ est aussi une rétrosection du système) qui rend $\hat{\mathrm{D}}$ simplement connexe; nous entendons alors par $f(\mathrm{P})$ (ou simplement f) une détermination bien choisie de la fonction sur ce domaine simplement connexe. Nous appellerons D'_0 la composante de D' le long de laquelle $\hat{\mathrm{D}}$ n'est pas coupée.

A partir de f on peut former deux fonctions f_1 et f_0 données par

$$f_1 = f(\bar{\tilde{f}})^{-1}, \qquad f_0 = f(\bar{\tilde{f}}), \tag{1.1.1}$$

de sorte que

$$f = (f_1 f_0)^{\frac{1}{2}}, \tag{1.1.2}$$

f_1 jouit de la propriété caractéristique d'avoir son module égale à 1 sur la frontière D' de D. La propriété caractéristique de f_0 est d'avoir son argument constant sur chaque composante de D' (il est nul sur D'_0). L'ensemble des fonctions f forme un groupe abélien M par rapport à la multiplication. En désignant par M_1 (resp. M_0) les sous-groupes de M dont les éléments sont de module 1 (resp. d'argument constant, nul sur D'_0) sur D', on peut énoncer :

Proposition 1.1.1. *Tout élément de* M *se décompose de façon unique en la racine du produit d'un élément de* M_1 *par un élément de* M_0.

En effet, si f'_1 et f'_0 étaient deux autres composantes de f la fonction $f'_0(f_0)^{-1}$ aurait un module 1 sur D' et un argument constant sur chaque composante de D' (nul sur D'_0) : ainsi $f'_0(f_0)^{-1}=1$, et par suite, également $f_1=f'_1$.

Ce résultat est également moins fort que celui du chapitre I sur la décomposition additive de $\mathfrak{S}_a$, car la racine du produit d'un élément de M_1 par un élément de M_0 n'est pas forcément un élément de M : il ne peut être question ici de décomposition en produit direct.

Les éléments f_1 et f_0 de M_1 et M_0 satisfont aux relations

$$f_1=(\tilde{\bar{f}}_1)^{-1},\qquad \tilde{\bar{f}}_0=f_0, \tag{1.1.3}$$

où $\tilde{\bar{f}}_1$ et $\tilde{\bar{f}}_0$ désignent les valeurs imaginaires conjugées de f_1 et f_0 au point symétrique du point considéré (comme aux premiers chapitres). On voit qu'à un zéro ou un pôle de f_1 (resp, f_0) correspond un pôle ou un zéro (resp. un zéro ou un pôle) au point symétrique sur $\hat{D}$. Inversement si une fonction, méromorphe multiplicative sur $\hat{D}$, a un diviseur satisfaisant à $d^{-1}=\tilde{d}$ (resp. $d=\tilde{d}$), elle appartient à M_1 (resp. M_0) car elle est définie de façon unique par son diviseur et elle satisfait donc à la relation (1.1.3) qui caractérise l'appartenance à M_1 (resp. M_0). On peut donc énoncer :

Proposition 1.1.2. — *Pour qu'une fonction f appartienne à* M_1 (*resp.* M_0) *il faut et il suffit qu'à chaque zéro ou pôle d'ordre r sur* D *ou* $\tilde{D}$ *corresponde un pôle ou un zéro d'ordre r au point symétrique sur* $\tilde{D}$ *ou* D (*resp. un zéro ou un pôle d'ordre r*). *Les multiplicateurs de* f_1 (*resp.* f_0) *relatifs à des chemins symétriques sont égaux* (*resp. imaginaires conjugués*). *Enfin,* f_1 (*resp.* f_0) *a pour multiplicateurs* 1 *sur des cycles conjugués des composantes de* D' (*resp. sur des cycles homologues aux composantes de* D').

En effet les relations (1.1.3) donnent

$$\arg f_1(\tilde{P})=\arg f_1(P),\qquad \arg f_0(\tilde{P})=-\arg f_0(P),$$

et l'on voit que la propriété énoncée, relative aux multiplicateurs, est bien vérifiée parce que, par définition, on a (C et $\tilde{C}$ désignant deux chemins symétriques) :

$$\mu_C^1 = \exp i \int_C d(\arg f_1), \qquad \mu_C^0 = \exp i \int_C d(\arg f_0).$$

$$\mu_{\tilde{C}}^1 = \exp i \int_{\tilde{C}} d(\arg f_1), \qquad \mu_{\tilde{C}}^0 = \exp i \int_{\tilde{C}} d(\arg f_0).$$

D'autre part, sur un chemin $R = -\tilde{R}$, en désignant R_D et $R_{\tilde{D}}$ les parties de R situées dans D et $\tilde{D}$:

$$\mu_R^1 = \exp\left[i \int_{R_D} d(\arg f_1) + i \int_{R_{\tilde{D}}} d(\arg f_1) \right] = \exp\left[i \int_{R_D} d(\arg f_1) - i \int_{R_D} d(\arg f_1) \right] = 1.$$

La dernière propriété énoncée sur f_0 découle immédiatement du fait que $\arg_{D'} f_0 = \text{const}$.

1.2. Composante dans M_1 d'une fonction multiplicative sur D. — On sait que sur une surface de Riemann close une fonction multiplicative est déterminée de façon unique (à une constante multiplicative près, que je néglige systématiquement) par la donnée de son diviseur $d = \prod_{\nu,\mu} P_\nu^{h_\nu} Q_\mu^{k_\mu} (h_\nu > 0,\ k_\mu > 0)$, à la seule condition que la somme de ses zéros comptés avec leur ordre de multiplicité soit égale à la somme de ses pôles comptés également avec leur ordre de multiplicité, autrement dit si et seulement si $\sum_\nu h_\nu = h = k = \sum_\mu k_\mu$ (H. Weyl*).

Considérons une fonction F, multiplicative sur $\overline{D}$, à zéros et pôles situés dans D. Soit d son diviseur. Au diviseur $d\tilde{d}^{-1}$ correspond une et une seule fonction multiplicative sur $\hat{D}$, soit f. La fonction $\tilde{\bar{f}}$ a pour diviseur $\tilde{d}d^{-1}$; comme elle est également déterminée de façon unique, elle est égale à f^{-1}. Ainsi on voit que $f = f_1$ appartient à M_1 et l'on peut énoncer :

Proposition 1.2. — *A toute fonction multiplicative* F *sur* $\overline{D}$, *à zéros et pôles situés dans* D, *correspond une et une seule fonction multiplicative sur* $\hat{D}$, *appartenant à* M_1, *soit* f_1, *telle que la fonction* Ff_1^{-1} *soit sans zéros et sans pôles dans* $\overline{D}$.

1.3. Base des différentielles de première espèce sur $\hat{D}$. — Pour énoncer le théorème d'Abel relatif aux fonctions uniformes de M_1 et M_0, sur une surface de Schottky $\hat{D}$, sous la forme utilisée par H. Weyl pour les surfaces closes quelconques, nous avons besoin d'expliciter une base du système des différentielles de première espèce sur $\hat{D}$.

Considérons une base d'homologie canonique (n° 1.3 du chapitre I) du groupe d'homologie des cycles sur $\hat{D}$. Si g et c désignent le genre et le nombre de courbes frontières de D, on peut désigner les cycles de la base par

$$(1.3.1)\quad \left\{\begin{array}{llllllll} A_1, & B_1; & A_2, & B_2; & \ldots; & A_g, & B_g; \\ \tilde{A}_1, & -\tilde{B}_1; & \tilde{A}_2, & -\tilde{B}_1; & \ldots; & \tilde{A}_g, & -\tilde{B}_g; \\ A_{g+1}, & B_{g+1}; & A_{g+2}, & B_{g+2}; & \ldots; & A_{g+c-1}, & B_{g+c-1}. \end{array}\right.$$

J'ai désigné les $c-1$ composantes de D', distinctes de D', par les $c-1$ derniers A; $\tilde{A}$ (resp. $\tilde{B}$) désigne le cycle symétrique de A (resp. B), c'est pourquoi apparaît un signe moins qui assure que le nombre d'intersections de deux cycles $\tilde{A}$ et $\tilde{B}$ de même rang est toujours égal à $+1$. On a évidemment les relations

$$(1.3.2)\qquad A_\nu \sim \tilde{A}_\nu, \qquad B_\nu \sim -\tilde{B}_\nu \qquad (\nu > g).$$

Définissons les différentielles de première espèce φ_C, $C = A_\nu, B_\nu, \tilde{A}_\nu, \tilde{B}_\nu$, en choisissant la partie réelle de leurs périodes nulle pour tout cycle différent de C, égale à 1 pour C.

A partir de la relation générale [chap. I, formule (2.2.2)], vrai pour une différentielle φ et un cycle quelconque :

$$(1.3.3)\qquad \int_{\tilde{C}} \varphi = \int_C \tilde{\varphi},$$

on a

$$(1.3.4)\qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{A_\nu} = \varphi_{\tilde{A}_\nu}, \qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{B_\nu} = \varphi_{\tilde{B}_\nu} \qquad (\nu \leqq g);$$

d'autre part, en raison de (1.3.2), on a

$$(1.3.5)\qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{A_\nu} = \varphi_{A_\nu}, \qquad \tilde{\tilde{\varphi}}_{B_\nu} = -\varphi_{B_\nu} \qquad (\nu > g).$$

1.4. Le théorème d'Abel pour les fonctions uniformes de M_0 et M_1. — La propriété énoncée par le théorème d'Abel est que les zéros (P_ν) et les pôles (Q_ν) d'une fonction analytique uniforme sur une surface de Riemann close sont tels que la somme des valeurs aux zéros (P_ν) des intégrales de différentielles de première espèce φ est égale à la somme des valeurs aux pôles (Q_ν) de ces intégrales, modulo une somme de périodes de φ. Pour une fonction $f_1 \in M_1$ qui serait uniforme, on aurait alors, en désignant par (P_ν) et (Q_ν) ses zéros et ses pôles dans D:

$$(1.4.1)\quad \left\{\begin{array}{lll} 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{B_\mu} - 2\sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{A_\mu} = 0 & (\operatorname{mod} 1) & (\mu > g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{A_\mu} + \varphi_{\tilde{A}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{A_\mu} - \varphi_{\tilde{A}_\mu}) = 0 & (\operatorname{mod} 1) & (\mu \leqq g), \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} (\varphi_{B_\mu} - \varphi_{\tilde{B}_\mu}) - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} (\varphi_{B_\mu} - \varphi_{\tilde{B}_\mu}) = 0 & (\operatorname{mod} 1) & (\mu \leqq g); \end{array}\right.$$

P_0 désigne un point choisi arbitrairement sur D'. Le fait important de (1.4.1) est qu'il n'y figure aucun $\varphi_{B_\nu}(\nu > g)$, les relations correspondantes étant automatiquement satisfaites [38].

Pour une fonction $f_0 \in M_0$ qui serait uniforme on aurait de la même manière, en désignant également par (P_ν) et (Q_ν) ses zéros et ses pôles dans D (ils doivent être en nombre égal si on les compte avec leur ordre de multiplicité) :

$$(1.4.2)\quad \left\{\begin{array}{lll} 2\sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu}\varphi_{B_\mu} - 2\sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu}\varphi_{B_\mu} = 0 \pmod 1 & (\mu > g), \\ \sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu}(\varphi_{A_\mu}+\varphi_{\tilde{A}_\mu}) - \sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu}(\varphi_{A_\mu}+\varphi_{\tilde{A}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leqq g), \\ \sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu}(\varphi_{B_\mu}+\varphi_{\tilde{B}_\mu}) - \sum\limits_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu}(\varphi_{B_\mu}+\varphi_{\tilde{B}_\mu}) = 0 \pmod 1 & (\mu \leqq g). \end{array}\right.$$

2. Convergence des différentielles de Schottky-Ahlfors de $\mathfrak{S}_0$.

Au paragraphe 3 nous donnerons une généralisation du théorème d'Abel en approchant une fonction uniforme sur une surface de Riemann ouverte S par des fonctions multiplicatives de la classe M_1 sur les domaines S_n d'une exhaustion de S. Les égalités généralisant (1.4.1) seront obtenues par passage à la limite et c'est pourquoi il est intéressant de connaître la limite des différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} - \varphi_{\tilde{A}_\nu})$[resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} - \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] quand le domaine D parcourt (S_n). C'est l'objet du présent paragraphe.

Les différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu})$[resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] du paragraphe 1, appartiennent à l'espace $\mathfrak{S}_0^*$ des différentielles de Schottky (de première espèce) sur $\hat{D}$: en effet, sur D',

$$\mathcal{J}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu}) = 0 = [\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} + \varphi_{\tilde{A}_\nu})]^* \qquad (\text{resp. } 0 = \mathcal{J}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu}) = [\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} + \varphi_{\tilde{B}_\nu})]^*).$$

Quand D parcourt une exhaustion d'une surface de Riemann $S \in C_{HD}$, ces différentielles convergent donc vers une différentielle harmonique de norme finie qui a comme unique période non nulle et égale à 1, la période relative à B_ν (resp. A_ν) : c'est une conséquence des résultats d'Ahlfors [1] sur les différentielles de première espèce. Pour les différentielles $\mathcal{R}(\varphi_{A_\nu} - \varphi_{\tilde{A}_\nu})$[resp. $\mathcal{R}(\varphi_{B_\nu} - \varphi_{\tilde{B}_\nu})$] du paragraphe 1 les résultats d'Ahlfors ne permettent pas de conclure sur leur convergence quand D parcourt une exhaustion de S, car ces différentielles appartiennent à la classe [39] $\mathfrak{S}_0$. Pourtant nous allons voir qu'elles convergent encore vers la différentielle harmonique de norme finie qui a comme seule

---

(38) Dans les relations (1.4.1) et (1.4.2) il faut évidemment faire figurer un point P_ν ou Q_ν autant de fois que l'indique son ordre de multiplicité comme zéro ou pôle.

(39) Différentielles de Schottky harmoniques, de première espèce, nulles sur D'.

période non nulle et égale à 1 la période relative à B_1 (resp. A_1) sur une surface $S \in C_0$. Ce résultat pourra être atteint en utilisant une généralisation d'un lemme de Johansson* ; son application est possible car les différentielles considérées sont exactes en dehors d'un compact. De façon générale, je démontrerai la proposition suivante :

PROPOSITION 2. — *Supposons données, sur un compact* S_0 *d'une surface de Riemann* $S \in C_0$, *des périodes relatives à des cycles non homologues aux composantes de la frontière* S'_0 *de* S_0, *et des parties singulières relatives à un nombre fini de points de* S_0 ; *la suite des différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors appartenant aux espaces* $\mathfrak{S}_0$ *relatifs aux domaines* (S_n) *d'une exhaustion de* S *et ayant les périodes et les parties singulières données sur* S_0, *converge uniformément, sur tout compact extérieur aux singularités, vers la différentielle harmonique unique sur* S, *de norme finie à l'extérieur de* S_0, *ayant ces périodes et ces parties singulières aux points donnés sur* S_0, *si et seulement si la somme des résidus des singularités données est nulle.*

Je démontrerai d'abord la généralisation suivante d'un lemme de Johansson :

LEMME (JOHANSSON). — *Étant donné deux compacts* D_1 *et* D_2 $(\overline{D}_1 \subset D_2)$ *sur une surface de Riemann, et deux fonctions harmoniques dans* $\overline{D_2 - D_1}$, *u et v*, $u - v$ *étant harmonique dans* $\overline{D}_2$, *telles que*

$$O_{D'_2}(u) \leqq O_{D'_1}(u), \qquad O_{D''_2}(v) \leqq O_{D'_1}(v),$$

$O_{D'}(f)$ *désignant l'oscillation de f sur* D', *il existe un nombre positif* K *indépendant de u et v tel que*

$$O_{D'_1}(v) \leqq K O_{D'_1}(u).$$

En effet

$$O_{D'_2}(v-u) \leqq O_{D'_2}(v) + O_{D'_2}(u) \leqq O_{D'_1}(v) + O_{D'_2}(u).$$

Or un lemme de Sario ([40]) dit que

$$O_{D'_1}(v-u) \leqq q\, O_{D'_2}(v-u) \qquad (0 < q < 1).$$

q indépendant de $v - u$. Ainsi

$$O_{D'_1}(v) \leqq O_{D'_1}(v-u) + O_{D'_1}(u) \leqq q\, O_{D'_1}(v) + (1+q)\, O_{D'_1}(u),$$

ce qui démontre le lemme.

J'en viens maintenant à la proposition 2. Soit ω_ν les différentielles harmoniques de Schottky-Ahlfors appartenant aux espaces $\mathfrak{S}_0$ relatifs aux domaines (S_n) d'une exhaustion de S et définies par les périodes et les demi-périodes nulles et les parties singulières données sur S_0 (exactes et régulières

---

([40]) J'utilise le lemme sous sa forme énoncée par Sario [2] (lemme 2). Il a été énoncé et démontré par Sario [3] sous une forme très voisine.

en dehors de S_0 et $\tilde{S}_0$) : ces différentielles existent parce que la somme des résidus des parties singulières est nulle et d'après la proposition 1.1.3 du chapitre II, il suffit pour cela que cette somme soit réelle.

On peut utiliser le lemme de Johansson avec

$$v = \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu, \qquad u = \int_{P_1}^{P} \omega_1, \qquad (P_\nu \in S'_\nu,\ P \in S_1),$$

et les domaines S_0 et S_1 ; d'une part $O_{S'_1}(u) \equiv 0$; d'autre part

$$O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu \geqq O_{S'_1} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu,$$

car $\int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu$, $P \in S_\nu$ est exacte dans $S_\nu - S_0$, nulle sur S'_ν et [41] $\left[\omega_\nu = \frac{1}{2}(\varphi_\nu + \bar{\varphi}_\nu)\right]$:

$$\int_{S'_\nu} \omega_\nu^* = \frac{1}{i}\mathcal{I}\int_{S'_\nu} \varphi_\nu = 2\pi \sum \mathcal{R}\ \text{résidus}\ \varphi_\nu = 0,$$

ce qui entraîne que la moyenne sur S'_ν de la dérivée normale de v est nulle, c'est-à-dire que cette fonction prend la valeur zéro dans $S_\nu - S_0$. Ainsi donc le lemme de Johansson donne

$$O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu < B,$$

B désignant une borne finie indépendante de ν ; comme v prend au moins une fois la valeur zéro sur S'_0, on a dans $S_\nu - S_0$:

$$\left| \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu \right| < O_{S'_0} \int_{P_\nu}^{P} \omega_\nu < B.$$

On a la même inégalité en des points intérieurs à S_0, distincts des points singuliers, si l'on suppose tracées dans S_0 des coupures de façon à entraîner l'uniformité des intégrales considérées (la constante B est évidemment à remplacer par une quantité finie mais qui augmente indéfiniment quand on se rapproche des points singuliers). Les intégrales étant bornées dans leur ensemble à l'extérieur d'un voisinage des singularités, sur S coupée convenablement, forment une famille normale et l'on peut extraire de toute suite partielle une suite uniformément convergente sur tout compact de S (coupée convenablement) ne contenant pas de points singuliers. D'autre part, les limites des suites partielles convergentes diffèrent d'une constante. Ceci démontre que la condition énoncée dans la proposition est bien suffisante. Il est évident qu'elle est nécessaire en vertu du théorème des résidus vrai sur une surface parabolique pour une différentielle ayant un nombre fini de singularités et de périodes non nulles et appartenant à $\mathcal{D}'_h$ (Nevanlinna*).

---

[41] On utilise ainsi dans sa totalité l'hypothèse faite sur la somme de résidus

3. Fonctions de la classe $\mathcal{B}_a$ sur une surface de Riemann ouverte.

Les résultats du paragraphe 2 relatifs aux fonctions multiplicatives sur un compact nous donnent moins de propriétés intéressantes que les résultats correspondants du paragraphe 2 du chapitre I relatifs aux fonctions considérées du point de vue additif. Ainsi nous ne pourrons pas obtenir pour les fonctions multiplicatives, sur une surface de Riemann ouverte, de théorème général analogue au théorème 3.1. Pourtant, la proposition particulière 1.2 nous suggère de considérer une classe $\mathcal{B}_a$ de fonctions multiplicatives analogue à $\mathcal{D}_a$.

3.1. L'ESPACE $\mathcal{B}_a$. — Au lieu de la norme de F nous considérons maintenant les maximums de $|F|$ et de $|F^{-1}|$ et nous posons :

DÉFINITION 3.1.1. — *L'espace $\mathcal{B}_a$ est l'ensemble des fonctions multiplicatives sur une surface de Riemann, de zéros et de pôles* (P_ν, Q_ν) *tels qu'il existe un voisinage* V *de* (P_ν, Q_ν) *dont chaque composante connexe est compacte et tel qu'à l'extérieur de* V, $|F|$ *et* $|F^{-1}|$ *soient bornés.*

En introduisant une structure uniforme $\mathcal{U}$ sur S et les notations U_0, A_a, $U^\star$ du chapitre I, on peut aussi considérer le sous-espace $\mathcal{B}_a^{\mathcal{U}}$ de $\mathcal{B}_a$ défini par :

DÉFINITION 3.1.2. — *L'espace $\mathcal{B}_a^{\mathcal{U}}$ est l'ensemble des fonctions multiplicatives sur une surface de Riemann, de zéros et de pôles* (P_ν, Q_ν), *telles qu'il existe* A *et* U_0 *satisfaisant à :*

1° *deux points de* S *appartenant à une composante connexe de* $U((P_\nu, Q_\nu))$, $U \subset U_0$, *sont au moins voisins d'ordre* $A(U) \subset U^\star$;

2° *il existe deux fonctions positives* $b(U)$ *et* $B(U)$ *satisfaisant à*

$$0 < b(U) < \min_{S-U} |F| < \max_{S-U} |F| < B(U) < \infty,$$

avec

$$\lim_{\mathcal{U}} b(U) = 0, \qquad \lim_{\mathcal{U}} B(U) = \infty, \qquad \textit{pour tout } U \subset U_0.$$

Le produit [42] de deux fonctions de $\mathcal{B}_a^{\mathcal{U}}$ est encore une fonction de $\mathcal{B}_a^{\mathcal{U}}$, ce qui n'est pas forcément vrai pour $\mathcal{B}_a$. En effet, comme au chapitre I (n° 3.2), si (P_ν, Q_ν), U_0, A, (H_ν, K_ν), V_0, B désignent les zéros, les pôles, l'entourage et l'application correspondant à F et G respectivement, on peut prendre pour W_0 et C un entourage satisfaisant à

$$\overline{W_0 \circ B(W_0)} \subset U_0,$$

et comme application C l'application $W \to A(W \circ B(W))$. Dans S-W on a évidemment, b_F, b_G, B_F et B_G désignant les bornes relatives à F et G :

$$0 < b_{FG}(W) = b_F(W)\, b_G(W) < |FG| < B_F(W) B_G(W) = B_{FG}(W) < \infty.$$

([42]) $\mathcal{B}_a^{\mathcal{U}}$ est un groupe abélien.

Exemple. — Considérons la fonction

$$F = \frac{\alpha^2(z)}{\alpha^2(-z)}, \qquad \alpha(z) = \beta(z)\beta\left(\frac{1}{z}\right)(1+z), \qquad \beta(z) = \prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{z}{k^n}\right),$$

où k est entier supérieur à 1, dans le plan z (surface S). Définissons comme métrique sur S la métrique du plan complexe à l'extérieur du cercle unité et la métrique $|dZ|$, $Z = \frac{1}{z}$, à l'intérieur du cercle unité. La fonction F est invariante quand on change z en kz. A l'extérieur d'un voisinage V_ε, $\varepsilon < \frac{k-1}{2}$, des points $z = \pm 1$, elle est bornée inférieurement et supérieurement, dans la couronne $\frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right) < |z| < \frac{k}{2}\left(1 - \frac{1}{k}\right)$, par $b(\varepsilon) > 0$ et $B(\varepsilon) < \infty$; elle est donc bornée inférieurement et supérieurement, par les mêmes bornes, dans $S - V_\varepsilon((P_\nu))$, $(P_\nu) = (\pm k^{\pm n})$, c'est-à-dire à l'extérieur d'un entourage quelconque des zéros et des pôles de F. Cette fonction est donc bien de la classe $\mathcal{B}_a^{\mathrm{u}}$. On pourrait donner de la même manière des exemples sur des surfaces plus générales, de genre infini.

3.2. Les fonctions de $\mathcal{B}_a$, limites de fonctions de M_1. — Soit F une fonction de $\mathcal{B}_a$ ayant pour pôles et zéros l'ensemble (P_ν) de points de S. Soit (S_n) une exhaustion de S telle que $V((P_\nu)) \cap S'_n = \varnothing$ (V désigne le voisinage intervenant dans la définition 3.1.1). Soit f_n les fonctions [43] de M_1 correspondant à F et aux domaines S_n, normées de façon à fixer la constante multiplicative arbitraire dont elles dépendent. La suite des fonctions harmoniques régulières $(\log|F| - \log|f_n|)$ est bornée dans son ensemble, parce que F appartient à $\mathcal{B}_a$ et que, sur S'_n, $|f_n| = 1$. Ainsi on peut en extraire une suite d'indice n', convergent uniformément sur tout compact vers une fonction harmonique bornée u; F est égale à la limite de la suite f_n, à une fonction $\exp(u + iv)$ multiplicative près, qui n'a ni zéros ni pôles et dont le module est logarithmiquement borné. Sur une surface où toute fonction multiplicative de module logarithmiquement borné, sans zéros et sans pôles est une constante, c'est-à-dire sur une surface où toute fonction harmonique bornée est constante (leur classe est notée C_{HB}), on peut donc énoncer :

Proposition 3.2. — *Sur une surface de Riemann* $S \in C_{HB}$, *toute fonction multiplicative* $F \in \mathcal{B}_a$ *est la limite uniforme sur tout compact, des fonctions* $f_n F(P_0) f_n^{-1}(P_0)$, *multiplicatives sur* S_n, f_n *données par la proposition* 1.2, P_0 *point choisi sur* S.

Comme conséquence directe de cette proposition on a le théorème d'unicité :

Théorème 3.2. — *Sur une surface de Riemann* $S \in C_{HB}$, *toute fonction multiplicative* $F \in \mathcal{B}_a$ *est déterminée de façon unique par son diviseur.*

---

[43] J'écris f_n au lieu de $f_{1,n}$, pour simplifier.

3.3. Une généralisation de la condition nécessaire d'Abel pour les fonctions uniformes de $\mathcal{B}_a$ sur $S \in C_{HB}$. — Considérons une fonction $F \in \mathcal{B}_a$, uniforme sur une surface de Riemann $S \in C_{AB}$. Soient (f_n) les fonctions multiplicatives sur (S_n) données par la proposition 3.2, convenablement normées qui convergent vers F; appelons μ_C^n leurs multiplicateurs relatifs à un cycle

$$\mu_C^n = \exp\left[i\int_C d(\arg f_n)\right].$$

Ces multiplicateurs μ_C^n convergent donc uniformément vers 1. C'est en explicitant ce fait que nous allons obtenir une condition nécessaire pour que F soit uniforme, condition qui généralise en partie le théorème d'Abel : dans le cas d'un nombre fini de singularités, le théorème d'Abel consiste précisément en ce que la condition est nécessaire et suffisante.

Soit donc A_ν^n, B_ν^n et leurs symétriques, les cycles d'une base ([44]) d'homologie canonique sur $\hat{S}_n$; $\varphi_{A_\nu^n}$, $\varphi_{B_\nu^n}$, $\varphi_{\tilde{A}_\nu^n}$, $\varphi_{\tilde{B}_\nu^n}$ les différentielles de Schottky correspondantes définies comme au n° 1.3. Si (P_ν) et (Q_ν) désignent les zéros et les pôles de F, appelons I_n et J_n l'ensemble des indices ν correspondant aux zéros et aux pôles contenus dans S_n, de genre g_n et dont le nombre de courbes frontières est c_n. On sait (H. Weyl*) que les multiplicateurs de f_n sont égaux aux caractères intégraux de son diviseur; on peut donc écrire, en tenant compte des propriétés de symétrie de f_n, comme au n° 1.4 ($P_{0,n} \in S'_n$) :

$$\mu_{B_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi\left[2\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{P_\nu}\varphi_{B_\mu^n} - 2\sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{Q_\nu}\varphi_{B_\mu^n}\right] \qquad (g_n < \mu \leqq g_n + c_n - 1),$$

$$\mu_{A_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi\left[\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{P_\nu}(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n}) - \sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{Q_\nu}(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n})\right] \qquad (\mu \leqq g_n),$$

$$\mu_{B_\mu^n}^n = \exp - 2i\pi\left[\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{P_\nu}(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n}) - \sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{Q_\nu}(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n})\right] \qquad (\mu \leqq g_n).$$

En choisissant convenablement les contours d'intégration, on voit donc que les zéros et les pôles d'une fonction uniforme de $\mathcal{B}_a$ sur $S \in C_{HB}$ doivent satisfaire aux conditions

$$(3.3.1)\quad \begin{cases} \lim\limits_n \left[\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{P_\nu}\varphi_{B_\mu^n} - \sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{Q_\nu}\varphi_{B_\mu^n}\right] = 0 & (g_n < \mu \leqq g_n + c_n - 1), \\ \lim\limits_n \left[\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{P_\nu}(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n}) - \sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_{0,n}}^{Q_\nu}(\varphi_{A_\mu^n} - \varphi_{\tilde{A}_\mu^n})\right] & (\mu \leqq g_n), \\ \lim\limits_n \left[\sum_{I_n}\mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu}(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n}) - \sum_{J_n}\mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu}(\varphi_{B_\mu^n} - \varphi_{\tilde{B}_\mu^n})\right] & (\mu \leqq g_n). \end{cases}$$

([44]) Quand $\nu \leqq g_n$, A_ν^n et B_ν^n sont égaux à A_ν, B_ν, les cycles (A_ν, B_ν) formant une base d'homologie canonique sur S; je leur laisse l'indice n pour indiquer que je les considère sur S; cela me permet de parler de $\tilde{A}_\nu^n$ et $\tilde{B}_\nu^n$ en sous-entendant que je considère les symétriques sur $\tilde{S}_n$.

On peut essayer de faire des hypothèses supplémentaires qui permettent d'énoncer cette condition dans des cas moins généraux mais sous une forme plus simple. Il se pose alors la question de savoir dans quelles conditions on peut intervertir le passage à la limite etla sommation qui figure dans (3.3.1). Considérant une surface S parabolique ($\in C_0$), on trouve ainsi qu'il faut faire des hypothèses sur la densité des zéros et des pôles sur S, hypothèses dont la plus simple est par exemple :

Hypothèse H_2. — 1° La suite des points (P_ν, Q_ν) est telle que pour toute suite convergente de fonctions harmoniques (u_n), définies dans les domaines (S_n) d'une exhaustion de S, bornées dans leur ensemble, $u_n(P_0) = 0$, $P_0 \in S_0$, on ait

$$\lim_n \sum_{I_n} u_n(P_\nu) = 0, \qquad \lim_n \sum_{J_n} u_n(Q_\nu) = 0,$$

I_n et J_n étant l'ensemble des indices ν des points P_ν et Q_ν appartenant à S_n.

2° Si p_n et q_n désignent le nombre des zéros et des pôles dans S_n, comptés avec leur ordre de multiplicité : $\lim_n (p_n - q_n) = 0$.

C'est bien là une hypothèse sur la densité de l'ensemble (P_ν, Q_ν) car si cet ensemble ne comprend qu'un nombre fini de points le nombre des zéros doit être égal au nombre des pôles et elle est automatiquement satisfaite, puisque toute suite convergente de fonctions harmoniques bornées dans leur ensemble, nulles en un point, converge vers zéro sur une surface parabolique.

Étudions maintenant l'effet qu'aurait l'hypothèse H_2, faite sur les pôles et les zéros d'une fonction uniforme F, sur l'énoncé de la condition (3.3.1). Celle-ci s'écrit aussi, en substituant au point $P_{0,n} \in S'_n$ un point P_0 indépendant de n, à condition d'ajouter alors dans les trois équations, au premier membre, respectivement :

$$(3.3.2) \qquad \left\{\begin{array}{ll} (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \varphi_{B^n_\mu} & (g_n < \mu \leqq g_n + c_n - 1), \\ (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \left(\varphi_{A^n_\mu} - \varphi_{\tilde{A}^n_\mu}\right) & (\mu \leqq g_n), \\ (p_n - q_n)\,\mathcal{R}\displaystyle\int_{P_{0,n}}^{P_0} \left(\varphi_{B^n_\mu} - \varphi_{\tilde{B}^n_\mu}\right) & (\mu \leqq g_n). \end{array}\right.$$

Or les résultats du paragraphe 2 donnent la convergence uniforme sur tout compact des fonctions

$$\left\{\begin{array}{ll} \displaystyle\int_{P_0} \varphi_{B^n_\mu} & (g_n < \mu \leqq g_n + c_n - 1), \\ \displaystyle\int_{P_0} \left(\varphi_{A^n_\mu} - \varphi_{A^n_\mu}\right) & (\mu \leqq g_n), \\ \displaystyle\int_{P_0} \left(\varphi_{B^n_\mu} - \varphi_{\tilde{B}^n_\mu}\right) & (\mu \leqq g_n). \end{array}\right.$$

respectivement vers zéro, $\int_{P_0} \varphi_{A_\mu}$, $\int_{P_0} \varphi_{B_\mu}$ et nous dit que ces fonctions (3.5) sont bornées dans leur ensemble sur S convenablement coupée. Dans le cas de l'hypothèse H_2 la condition (3.3.1) se réduit donc à la suivante [les termes (3.3.2) tendent vers zéro car $\lim_n (p_n - q_n) = 0$] :

$$(3.6) \qquad \begin{cases} \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{A_\mu} - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{A_\mu} = 0, \\ \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{P_\nu} \varphi_{B_\mu} - \sum_\nu \mathcal{R}\int_{P_0}^{Q_\nu} \varphi_{B_\mu} = 0. \end{cases}$$

On peut donc énoncer :

CONDITION D'ABEL. — Pour qu'une fonction analytique F appartenant à $\mathcal{B}_a$ de pôles et de zéros (P_ν, Q_ν), sur une surface $S \in C_{HB}$, soit uniforme il faut que les conditions (3.3.1) soient réalisées. Si $S \in C_0$ et si l'hypothèse H_2 est réalisée il faut que la somme des valeurs aux zéros de F d'une intégrale de différentielle harmonique de première espèce et de norme finie, à un nombre fini de périodes non nulles, soit égale à la somme de ses valeurs aux pôles de F.

BIBLIOGRAPHIE.

L. AHLFORS :

[1] *Open Riemann surfaces and extremal problems on compact subregions* (*Comm. Math. Helv.*, t. 24, 1950, p. 100-134).

[2] *Normalintegrale auf offenen Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. 35, 1947, p. 5-24).

P. APPEPL et E. GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales*, Paris, 1929.

R. BADER, *Différentielles sur une surface de Riemann ouverte* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 223, 1951, 1564-1565).

P. BIDAL et G. DE RHAM, *Les formes différentielles harmoniques* (*Comm. Math. Helv.*, t. 19, 1946, p. 1-49).

N. BOURBAKI :

[1] *Algèbre*, t. I, chap. 2 (*Algèbre linéaire*), Paris, 1947.

[2] *Topologie générale*, chap. 2 (*Structures uniformes*), Paris, 1940.

[3] *Topologie générale*, chap. 9 (*Utilisation des nombres réels*), Paris, 1948.

G. DE RHAM et K. KODAIRA, *Harmonic integrals*, Princeton, 1950.

S. JOHANSSON, *Herstellung automorpher Potentiale bei belibieger Hauptkreisgruppen* (*Acta Soc. Sc. Fenn.*, t. 41, 1912).

---

(45) Il est sous-entendu qu'on choisit des chemins d'intégration convenables et que les sommes en question sont définies comme limite des sommes correspondant aux S_n tels que $\lim_n (p_n - q_n) = 0$.

S. Lefschetz, *Topology*, New-York, 1930.

H. Meschkowski, *Einige Extremal probleme aus der Theorie der konformen Abbildung* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **117**, 1952).

P. Montel, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, Paris, 1927.

P. J. Myrberg, *Uber analytische Funktionen auf transzendenten zweiblattrigen Riemannschen Flächen mit reellen Verzweigungspunkten* (*Acta Math.*, t. 76, 1944).

R. Nevanlinna :

[1] *Quadratisch integrierbare Differentiale auf einer Riemannschen Mannigfaltigkeit* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **1**, 1941, 34 pages).

[2] *Uber das Anwachsen des Dirichletintegrals einer analytischer Funktion auf einer Riemannschen Fläche* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **45**, 1948).

[3] *Uniformisierung*, Berlin, 1953.

M. Parreau, *Sur les moyennes des fonctions harmoniques et analytiques et la classification des surfaces de Riemann* (*Ann. Inst. Fourier*, t. **3**, 1951, p. 103-197).

A. Pfluger, *Uber das Anwachsen eindeutiger analytischer Funktionen auf offene Riemannschen Flächen* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **64**, 1949).

L. Sario :

[1] *On open Riemann surfaces* (*Proc. Internat. Cong.*, t. **1**, 1950, p. 398-399).

[2] *Existence des fonctions d'allure donnée sur une surface de Riemann arbitraire* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **229**, 1949, p. 1293-1295).

[3] *A linear operator method on arbitrary Riemann surfaces* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **72**, 1952, p. 281-295).

[4] *Alternating method on arbitrary Riemann surfaces* (*Pac. J. Math.*, t. **3**, 1953, p. 631-645).

S. Stoïlow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Paris, 1938.

G. Valiron, *Équations fonctionnelles, Applications*, Paris, 1945.

K. I. Virtanen, *Uber Abelsche Integrale auf nullberandeten Riemannschen Flächen von unendlichen Geschlecht* (*Ann. Acad. Sc. Fenn.*, t. **56**, 1949, 44 pages).

H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Fläche*, Berlin, 1923.