ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

Généralisation du théorème de Ikehara

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 71, nº 3 (1954), p. 213-242

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1954_3_71_3_213_0>

GÉNÉRALISATION
DU THÉORÈME DE IKEHARA

PAR M. HUBERT DELANGE.

1. Introduction.

Dans tout ce qui suit, $\alpha(t)$ est une fonction réelle définie pour $t \geqq 0$, non décroissante et positive ou nulle (1).

On suppose que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\alpha(t)\,dt$ est convergente pour $\mathcal{R}s > a$, où a est un nombre réel positif, et l'on désigne sa valeur par $f(s)$.

Le théorème de Ikehara est le suivant :

S'il existe un nombre positif A tel que, pour chaque y réel, la différence $f(s) - \frac{A}{s-a}$ tende vers une limite finie quand s tend vers $a+iy$ en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, on a pour t tendant vers $+\infty$:

$$\alpha(t) \sim A\, e^{at}. \tag{1}$$

Ceci entraîne en particulier que, *si la fonction $f(s)$ a comme seule singularité sur la droite $\mathcal{R}s = a$ un pôle simple de résidu A au point a, on a* (1).

Il est naturel de chercher à obtenir des théorèmes susceptibles de fournir une conclusion dans le cas où $f(s)$, en étant encore holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que le point a, aurait en ce point une singularité autre qu'un pôle simple.

Un tel théorème est par exemple le suivant :

THÉORÈME I. — *Soit $\beta(t)$ une fonction réelle définie pour $t \geqq 0$, mesurable et*

(1) Cette dernière hypothèse n'est pas nécessaire pour la validité de nos énoncés, mais ne diminue pas réellement leur portée [si elle n'est pas satisfaite, on peut considérer la fonction $\alpha(t) - \alpha(0)$, par exemple, au lieu de $\alpha(t)$].

bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta(t)\,dt$ *soit convergente pour* $\mathcal{R}s > 0$ *et égale à* $G(s)$.

Supposons, en outre, qu'il existe un entier positif ou nul p et une fonction réelle $\gamma(u)$ *continue et non décroissante sur un intervalle* $[0, l]$, *et positive pour* $0 < u \leq l$, *tels que :*

1° *l'intégrale* $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ *soit convergente* (²).

2° *le produit* $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ *tende vers* 1 *quand* t *tend vers* $+\infty$ (³).

Ceci étant, supposons qu'il existe un nombre positif A *tel que la fonction* $F(s) = f(s) - AG(s-a)$ *ait les propriétés suivantes :*

1° *Pour chaque* y *réel différent de zéro,* $F^{(p)}(s)$ *tend vers une limite finie quand* s *tend vers* $a + iy$ *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > a$;

2° *Quand* s *tend vers* 0 *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > 0$, *on a*

$$F^{(p)}(a+s) = O\left[\frac{\psi(r)}{\gamma(r)}\right], \qquad \text{avec} \quad r = |s|,$$

$\psi(t)$ *étant une fonction réelle définie pour* t *positif assez petit, positive et non croissante, telle que les intégrales*

$$\int_0 \psi(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_0 \psi(t)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$$

soient convergentes (⁴).

Alors, quand t *tend vers* $+\infty$,

$$\alpha(t) \sim A\,e^{at}\beta(t).$$

On obtient comme cas particulier un théorème contenant celui de Ikehara en prenant $\beta(t) = 1$, avec $p = 0$ et $\gamma(u) = 1$ (l positif quelconque).

Bien que le théorème I soit suffisant pour les applications, nous en établirons un plus fort, dans lequel les hypothèses sur le comportement de $F^{(p)}(s)$ au voisinage de la droite $\mathcal{R}s = a$ seront plus larges. Ce sera le suivant :

THÉORÈME II. — *Soit* $\beta(t)$ *une fonction réelle définie pour* $t \geq 0$, *mesurable et*

(²) Cette condition est évidemment satisfaite si $\gamma(0) > 0$.

(³) Ceci entraîne évidemment que $\beta(t)$ soit positif pour t assez grand.

(⁴) Il est clair que, si $\gamma(0) \neq 1$, la convergence de la deuxième intégrale entraîne celle de la première. Si $\gamma(0) > 0$, la convergence de la première entraîne celle de la seconde.

Notons qu'il ne pourrait pas exister de fonction ψ satisfaisant aux conditions indiquées si l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ n'était pas convergente, comme nous le supposons.

bornée sur tout intervalle fini, et supposons que l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta(t)\,dt$ *soit convergente pour* $\mathcal{R}s > 0$ *et égale à* $G(s)$.

Supposons, en outre, qu'il existe un entier p positif ou nul et une fonction réelle $\gamma(u)$ *continue et non décroissante sur un intervalle* $[0, l]$, *et positive pour* $0 < u \leqq l$, *tels que :*

1° *l'intégrale* $\int_0^l \log \frac{1}{\gamma(u)}\,du$ *soit convergente;*

2° *le produit* $t^{p+1}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ *tende vers* 1 *quand t tend vers* $+\infty$.

Ceci étant, supposons qu'il existe un nombre positif A *tel que,* $F(s)$ *étant la fonction* $f(s) - AG(s-a)$, *pour chaque y réel l'une des circonstances suivantes se présente :*

Ou bien $F^{(p)}(s)$ *reste bornée quand s tend vers* $a+iy$ *dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > a$;

Ou bien il existe une fonction réelle $\psi_y(t)$ *définie pour t positif assez petit, positive et non croissante, telle que les intégrales* $\int_0 \psi_y(t)\,dt$ *et* $\int_0 \psi_y(t)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$ *soient convergentes et que l'on ait pour s tendant vers zéro dans le demi-plan* $\mathcal{R}s > 0$

$$F^{(p)}(a+iy+s) = O\left[\frac{\psi_y(r)}{\gamma(r)}\right], \qquad \textit{avec} \quad r = |s|.$$

Alors, quand t tend vers $+\infty$,

$$\alpha(t) \sim A\,e^{at}\beta(t).$$

Nous donnerons ensuite des corollaires particuliers dans lesquels l'hypothèse sur la fonction $f(s)$ sera simplement l'existence d'un point singulier d'une nature déterminée pour $s = a$, $f(s)$ étant holomorphe en tous les autres points de la droite $\mathcal{R}(s) = a$ (5).

Ces corollaires particuliers sont susceptibles d'applications arithmétiques que nous nous proposons de développer dans un travail ultérieur.

2. Préliminaires.

Avant de donner la démonstration du théorème II, nous établirons deux lemmes.

2.1. Lemme 1. — *Soit* $h(s)$ *une fonction holomorphe pour* $x_1 < x < x_2$ *et* $y_1 < y < y_2$ $(s = x+iy)$, *et bornée dans ce rectangle.*

---

(5) Les théorèmes que nous établissons ici sont, à de très petites modifications près, ceux que nous avons énoncés dans notre Note : *Sur le théorème taubérien de Ikehara* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 232, 1951, p. 465-467.

Alors, pour chaque valeur de y satisfaisant à $y_1 < y < y_2$, sauf peut-être pour des valeurs formant un ensemble de mesure nulle, $h(x+iy)$ tend vers une limite finie $g(y)$ quand x tend vers x_1 par valeurs supérieures.

Ce lemme se déduit aisément d'un théorème bien connu de Fatou, en faisant une représentation conforme du rectangle sur le cercle unité. Nous donnerons cependant une démonstration directe.

Nous supposerons $x_1 = 0$, ce qui ne restreint évidemment pas la généralité.

D'autre part, nous supposerons que, dans le rectangle considéré, $|h(s)| \leq M$.

2.1.1. La fonction h possède dans le rectangle une infinité de primitives, qui diffèrent entre elles par des constantes. Soit $H(s)$ l'une d'elles.

Il est clair que l'on a, quels que soient s' et s'' appartenant au rectangle,

$$(2) \qquad |H(s'') - H(s')| \leq M\,|s'' - s'|.$$

H est donc uniformément continue dans le rectangle et, par suite, on peut la définir sur la frontière de manière qu'elle soit continue sur le rectangle fermé [6].

On va voir que, Γ étant le contour constitué par les segments

$$[iy_1,\, x_2 + iy_1],\ [x_2 + iy_1,\, x_2 + iy_2] \quad \text{et} \quad [x_2 + iy_2,\, iy_2],$$

parcouru dans le sens qui va du point iy_1 au point iy_2, on a pour tout s intérieur au rectangle

$$(3) \qquad \begin{aligned} h(s) = {} & \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma [H(\zeta) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta - s)^2} - \frac{1}{(\zeta - s')^2}\right] d\zeta \\ & - \frac{i}{\pi}\int_{y_1}^{y_2} [\Phi(t) - \Phi(y)]\frac{2x(t-y)}{[x^2 + (t-y)^2]^2}\, dt, \end{aligned}$$

où

$$s' = -x + iy \quad \text{et} \quad \Phi(t) = H(it).$$

En effet, soit R le pourtour du rectangle.

s étant intérieur au rectangle, on a

$$h(s) = H'(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R\circlearrowleft} \frac{H(\zeta)}{(\zeta - s)^2}\, d\zeta = \frac{1}{2\pi i}\int_{R\circlearrowleft} \frac{H(\zeta) - \Phi(y)}{(\zeta - s)^2}\, d\zeta.$$

s' étant extérieur, on a

$$0 = \frac{1}{2\pi i}\int_{R\circlearrowleft} \frac{H(\zeta) - \Phi(y)}{(\zeta - s')^2}\, d\zeta.$$

Par soustraction, on obtient

$$h(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{R\circlearrowleft} [H(\zeta) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta - s)^2} - \frac{1}{(\zeta - s')^2}\right] d\zeta,$$

(6) Nous faisons abstraction ici de la notion de prolongement analytique.

ce qui peut s'écrire

$$h(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}[\mathrm{H}(\zeta) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(\zeta - s)^2} - \frac{1}{(\zeta - s')^2}\right]d\zeta$$
$$-\frac{1}{2\pi}\int_{y_1}^{y_2}[\Phi(t) - \Phi(y)]\left[\frac{1}{(it - s)^2} - \frac{1}{(it - s')^2}\right]dt.$$

Mais

$$\frac{1}{(it - s)^2} - \frac{1}{(it - s')^2} = \frac{4ix(t - y)}{[x^2 + (t - y)^2]^2}.$$

2.1.2. Remarquons maintenant que, quels que soient t' et t'' appartenant à l'intervalle $[y_1, y_2]$, on a

$$|\Phi(t'') - \Phi(t')| \leq \mathrm{M}\,|t'' - t'|.$$

Cela résulte immédiatement de (2), puisque

$$\Phi(t'') - \Phi(t') = \lim_{\substack{z' \to it' \\ z'' \to it''}}[\mathrm{H}(z'') - \mathrm{H}(z')].$$

Il suit de là que *la fonction Φ est dérivable presque partout sur l'intervalle* $[y_1, y_2]$.

2.1.3. Nous allons voir maintenant que, pour toute valeur de y dans l'intervalle ouvert $]y_1, y_2[$ pour laquelle $\Phi'(y)$ existe, $h(x + iy)$ tend vers $-i\Phi'(y)$ quand x tend vers zéro par valeurs positives.

Nous savons que, si y appartient à l'intervalle ouvert $]y_1, y_2[$, $h(x + iy)$ peut s'exprimer, pour $0 < x < x_2$, par la formule (3).

y restant fixe, le premier terme du second membre tend vers zéro quand x tend vers zéro, car la fonction sous le signe $\int$ tend vers zéro uniformément sur Γ.

D'autre part, le second terme peut s'écrire, en faisant le changement de variable $t = y + xu$,

$$-\frac{i}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\Psi_{x,y}(u)\frac{2u}{(1 + u^2)^2}\,du,$$

avec

$$\Psi_{x,y}(u) = \begin{cases} \dfrac{\Phi(y + xu) - \Phi(y)}{x} & \text{pour} \quad \dfrac{y_1 - y}{x} \leq u \leq \dfrac{y_2 - y}{x}, \\[2ex] 0 & \text{pour} \quad u < \dfrac{y_1 - y}{x} \quad \text{ou} \quad u > \dfrac{y_2 - y}{x}. \end{cases}$$

Ici, la fonction sous le signe $\int$ est toujours de module au plus égal à $\frac{2\mathrm{M}u^2}{(1 + u^2)^2}$ et, si $\Phi'(y)$ existe, elle tend vers $\Phi'(y)\frac{2u^2}{(1 + u^2)^2}$ quand x tend vers zéro. L'intégrale tend alors vers

$$\Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{2u^2}{(1 + u^2)^2}\,du = \Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}u\,d\left[\frac{-1}{1 + u^2}\right] = \Phi'(y)\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{du}{1 + u^2} = \pi\Phi'(y).$$

2.2. Lemme 2. — *Soit $h(s)$ une fonction holomorphe dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$.*

Supposons que, pour chaque y réel, ou bien $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a + iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, ou bien il existe une fonction réelle $\varphi_y(t)$ définie pour t positif assez petit, positive et non croissante, telle que l'intégrale $\int_0 \varphi_y(t)\,dt$ soit convergente, et telle que l'on ait, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$h(a + iy + s) = O[\varphi_y(r)] \qquad (r = |s|).$$

Alors, il existe une fonction $g(y)$ sommable sur tout intervalle fini et telle que, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

1° *la fonction $h(a + \varepsilon + iy)$ converge presque partout vers $g(y)$;*

2° *quels que soient Y_1 et Y_2 satisfaisant à $Y_1 < Y_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$,*

$$\int_{Y_1}^{Y_2} h(a + \varepsilon + iy)\,\theta(y)\,dy \qquad \textit{tend vers} \qquad \int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

Dans le cas où $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a + iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, on peut dire encore que l'on a, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$h(a + iy + s) = O[\varphi_y(r)],$$

en prenant $\varphi_y(t) = 1$. Cette fonction satisfait encore aux conditions indiquées pour le second cas.

Notre hypothèse sur le comportement de $h(s)$ au voisinage de la droite $\mathcal{R}s = a$ peut donc s'exprimer de la façon suivante :

Pour chaque y réel, il existe deux nombres positifs $M(y)$ et $\rho(y)$ et une fonction $\varphi_y(t)$ définie pour $0 < t \leqq \rho(y)$, positive et non croissante sur cet intervalle, et telle que l'intégrale $\int_0^{\rho(y)} \varphi_y(t)\,dt$ soit convergente, tels que l'on ait pour $r \leqq \rho(y)$ et $\mathcal{R}s > 0$

$$|h(a + iy + s)| \leqq M(y)\,\varphi_y(r).$$

Pour simplifier, nous poserons

$$\rho(y) = r_0(y)\sqrt{2}.$$

Alors, pour

$$0 < |y - y_0| \leqq r_0(y_0) \qquad \text{et} \qquad 0 < \varepsilon \leqq r_0(y_0),$$

on a

$$|h(a + \varepsilon + iy)| \leqq M(y_0)\,\varphi_{y_0}\left(\sqrt{\varepsilon^2 + (y - y_0)^2}\right) \leqq M(y_0)\,\varphi_{y_0}(|y - y_0|).$$

En particulier, quel que soit $\omega > 0$ et $< r_0(y_0)$, on a

$$|h(x + iy)| \leqq M(y_0)\,\varphi_{y_0}(\omega)$$

dans chacun des rectangles

$$y_0 + \omega < y < y_0 + r_0(y_0), \qquad a < x < a + r_0(y_0),$$

et

$$y_0 - r_0(y_0) < y < y_0 - \omega, \qquad a < x < a + r_0(y_0).$$

D'après le lemme 1, ceci entraîne que, presque partout sur chacun des intervalles $]y_0 - r_0(y_0), y_0 - \omega[$ et $]y_0 + \omega, y_0 + r_0(y_0)[$, la fonction $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers une limite finie quand ε tend vers zéro par valeurs positives. Il en est donc ainsi presque partout sur l'intervalle

$$]y_0 - r_0(y_0), y_0 + r_0(y_0)[.$$

Tout intervalle fermé pouvant être recouvert par un nombre fini de tels intervalles, on voit que presque partout sur tout intervalle fini, donc presque partout sur $(-\infty, +\infty)$, $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers une limite finie quand ε tend vers zéro par valeurs positives.

Soit donc $g(y)$ la fonction définie presque partout comme limite de $h(a+\varepsilon+iy)$ pour ε tendant vers zéro par valeurs positives.

Considérons un intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$.

Comme on vient de le dire, il peut être recouvert par un nombre fini d'intervalles de la forme $]y - r_0(y), y + r_0(y)[$. Appelons $y_1, y_2, \ldots, y_p$ les valeurs correspondantes de y.

D'après ce que l'on a vu plus haut, pour chaque j, si $0 < \varepsilon \leqq r_0(y_j)$, on a pour $y_j - r_0(y_j) < y < y_j + r_0(y_j)$ et $y \neq y_j$

$$|h(a+\varepsilon+iy)| \leqq M(y_j)\,\varphi_{y_j}(|y - y_j|).$$

Il en résulte que, si $0 < \varepsilon \leqq \underset{j}{\mathrm{Min}}[r_0(y_j)]$, on a pour $Y_1 \leqq y \leqq Y_2$

$$|h(a+\varepsilon+iy)| \leqq U(y);$$

où $U(y)$ est défini de la façon suivante :

Si y n'est égal à aucun des y_j, $U(y)$ est le minimum de $M(y_j)\varphi_{y_j}(|y - y_j|)$ pour les j tels que y appartienne à l'intervalle $]y_j - r_0(y_j), y_j + r_0(y_j)[$.

Si y est égal à l'un des y_j, $U(y) = +\infty$.

La fonction $U(y)$ est sommable sur l'intervalle $[Y_1, Y_2]$.

Il en résulte d'abord que $g(y)$, comme limite de $h(a+\varepsilon+iy)$, est sommable sur $[Y_1, Y_2]$.

D'autre part, si $\theta(y)$ est une fonction continue sur $[Y_1, Y_2]$, l'intégrale $\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy$ tend vers $\int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy$ quand ε tend vers zéro par valeurs positives, puisque la fonction sous le signe $\int$ est majorée en module pour ε assez petit par $U(y)|\theta(y)|$, qui est une fonction sommable sur $[Y_1, Y_2]$, et tend presque partout sur $[Y_1, Y_2]$ vers $g(y)\theta(y)$ (7).

2.2.1. On voit immédiatement que, *si l'on modifiait l'hypothèse du lemme 2 en remplaçant les mots « pour chaque y réel » par « pour chaque y réel appartenant à un certain intervalle fermé* $[Y_1, Y_2]$ », *on pourrait conclure l'existence d'une fonction* $g(y)$ *sommable sur* $[Y_1, Y_2]$ *telle que, quand* ε *tend vers zéro par valeurs positives*,

1° *la fonction* $h(a+\varepsilon+iy)$ *converge presque partout sur* $[Y_1, Y_2]$ *vers* $g(y)$;
2° *quelle que soit la fonction* $\theta(y)$ *continue sur l'intervalle fermé* $[Y_1, Y_2]$,

$$\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \qquad \textit{tend vers} \qquad \int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

3. Démonstration du théorème II.

3.1. Nous introduirons la fonction $\varphi(t)$ définie pour t réel par

$$\varphi(t)=\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du.$$

D'après nos hypothèses, quand t tend vers $+\infty$, le produit $t^{p+1}\varphi(t)\beta(t)$ tend vers 1.

Il suffit donc pour obtenir la conclusion du théorème de montrer que, quand t tend vers $+\infty$, le produit $t^{p+1}\varphi(t)e^{-at}\alpha(t)$ tend vers A.

3.2. Il est utile de faire d'abord les remarques suivantes sur la fonction $\varphi(t)$:

En premier lieu, il est clair que $\varphi(t)$ *est positive et décroissante*.

Ensuite, *quel que soit h positif, le rapport* $\dfrac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)}$ *tend vers* 1 *quand t tend vers* $+\infty$.

En effet, d'une part, comme $\dfrac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} < 1$, on a

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \leqq 1.$$

D'autre part, soit η satisfaisant à $0<\eta<l$.

On a pour $t\geqq 0$

$$\varphi(t+h)\geqq \int_0^{\eta} e^{-u(t+h)}\gamma(u)\,du > e^{-\eta h}\int_0^{\eta} e^{-ut}\gamma(u)\,du.$$

---

(7) Il suffirait évidemment que $\theta(y)$ soit mesurable et bornée sur $[Y_1, Y_2]$.

Comme

$$\int_0^{\eta} e^{-ut}\gamma(u)\,du = \varphi(t) - \int_{\eta}^{l} e^{-ut}\gamma(u)\,du$$

et

$$\int_{\eta}^{l} e^{-ut}\gamma(u)\,du < e^{-\eta t}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du,$$

de sorte que

$$\int_0^{\eta} e^{-ut}\gamma(u)\,du > \varphi(t) - e^{-\eta t}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du,$$

on obtient

$$\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} > e^{-\eta h}\left[1 - \frac{e^{-\eta t}}{\varphi(t)}\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du\right].$$

D'un autre côté, η' étant un nombre réel quelconque satisfaisant à $0 < \eta' < \eta$, on a

$$\varphi(t) > \int_0^{\eta'} e^{-ut}\gamma(u)\,du > e^{-\eta' t}\int_0^{\eta'}\gamma(u)\,du.$$

On voit donc que

$$\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} > e^{-\eta h}\left[1 - e^{(\eta'-\eta)t}\frac{\displaystyle\int_{\eta}^{l}\gamma(u)\,du}{\displaystyle\int_0^{\eta'}\gamma(u)\,du}\right].$$

On a par suite

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \geqq e^{-\eta h}.$$

En faisant tendre η vers zéro, on obtient

$$\varliminf_{t\to+\infty}\frac{\varphi(t+h)}{\varphi(t)} \geqq 1.$$

3.3. Introduisons maintenant la fonction $h(s)$ définie pour $\mathcal{R}s > a$ par

$$h(s) = (-1)^{p+1}\int_0^{l} \mathrm{F}^{(p+1)}(s+u)\gamma(u)\,du.$$

Cette fonction est évidemment holomorphe pour $\mathcal{R}s > a$.

3.3.1. On voit que, pour $\mathcal{R}s > a$,

$$h(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}t^{p+1}\varphi(t)\,]\alpha(t) - \mathrm{A}\,e^{at}\beta(t)[\,dt. \tag{4}$$

En effet, pour $\mathcal{R}s > a$,

$$\mathrm{F}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}[\alpha(t) - \mathrm{A}\,e^{at}\beta(t)]\,dt,$$

et par suite

$$(-1)^{p+1}\,F^{(p+1)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st}\,t^{p+1}\,[\alpha(t) - A\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt. \tag{5}$$

Donc, si $\mathcal{R}s > a$, on a pour u réel $\geqq 0$

$$(-1)^{p+1}\,F^{(p+1)}(s+u) = \int_0^{+\infty} e^{-(s+u)t}\,t^{p+1}\,[\alpha(t) - A\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt.$$

Pour s fixé, l'intégrale est uniformément convergente par rapport à u pour $0 \leqq u \leqq l$, puisque, si u parcourt cet intervalle, le point $s+u$ parcourt le segment fermé $[s, s+l]$, ensemble compact intérieur au demi-plan de convergence de l'intégrale du second membre de (5).

Il y a encore convergence uniforme après multiplication par $\gamma(u)$, qui est bornée sur l'intervalle $[0, l]$, et, par intégration sous le signe $\int$, on obtient (4).

3.3.2. Nous allons voir maintenant que la fonction $h(s)$ satisfait aux hypothèses du lemme 2.

Remarquons d'abord que notre hypothèse sur $F(s)$ peut se traduire en disant que, *quel que soit y réel*, il existe une fonction $\psi_y(t)$ satisfaisant aux conditions indiquées et telle que, quand s tend vers zéro en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$,

$$F^{(p)}(a+iy+s) = O\left[\frac{\psi_y(r)}{\gamma(r)}\right] \qquad (r = |s|).$$

En effet, dans le cas où $F^{(p)}(s)$ reste bornée quand s tend vers $a+iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, ceci est bien satisfait en prenant $\psi_y(t) = 1$.

Soit donc un y réel quelconque.

Il existe une fonction réelle $\psi_y(t)$ définie sur un intervalle semi-ouvert $]0, T]$, où $0 < T \leqq l$, positive et non croissante sur cet intervalle, telle que les intégrales $\int_0^T \psi_y(t)\,dt$ et $\int_0^T \psi_y(t) \log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$ soient convergentes, un nombre positif η au plus égal à $\frac{T}{2}$, et un nombre positif M, tels que, pour $\mathcal{R}s > 0$ et $0 < r \leqq 2\eta$,

$$|F^{(p)}(a+iy+s)| \leqq M\,\frac{\psi_y(r)}{\gamma(r)}.$$

En supposant $\mathcal{R}s > 0$, nous écrirons

$$\begin{aligned}(-1)^{p+1}\,h(a+iy+s) = &\int_0^{\eta} F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du \\ &+ \int_{\eta}^{l} F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du.\end{aligned}$$

Le second terme du second membre reste borné quand s tend vers zéro.

En effet, r_0 étant un nombre positif quelconque, si $r \leqq r_0$ et $\eta \leqq u \leqq l$, le point $a+iy+s+u$ se trouve sur l'ensemble des points $\sigma+i\tau$ tels que

$$a+\eta \leqq \sigma \leqq a+l+\sqrt{r_0^2-(\tau-y)^2}, \qquad |\tau-y| \leqq r_0,$$

ensemble sur lequel la fonction $F^{(p+1)}$ reste de module au plus égal à un nombre positif fixe K. Donc, pour $r \leqq r_0$,

$$\left|\int_\eta^l F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du\right| \leqq K\int_\eta^l \gamma(u)\,du.$$

Pour étudier le premier terme, nous écrirons, par intégration par parties,

$$\int_0^\eta F^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du = F^{(p)}(a+iy+s+\eta)\,\gamma(\eta) - F^{(p)}(a+iy+s)\,\gamma(0)$$
$$-\int_0^\eta F^{(p)}(a+iy+s+u)\,d\gamma(u).$$

$\mathcal{R}s$ étant >0, on a pour $0 \leqq u \leqq \eta$

$$\sqrt{r^2+u^2} \leqq |s+u| \leqq r+\eta.$$

Supposons $r \leqq \eta$, de sorte que $r+\eta \leqq 2\eta \leqq T$.

Alors, comme ψ_y est non croissante et γ non décroissante sur $]0, 2\eta]$, on a pour $0 \leqq u \leqq \eta$

$$|F^{(p)}(a+iy+s+u)| \leqq M\frac{\psi_y(|s+u|)}{\gamma(|s+u|)} \leqq M\frac{\psi_y(\sqrt{r^2+u^2})}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} \leqq M\frac{\psi_y(r)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}.$$

Ceci donne d'abord

$$|F^{(p)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)| \leqq M\psi_y(r)\frac{\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} \leqq M\psi_y(r),$$

et en particulier

$$|F^{(p)}(a+iy+s+\eta)\,\gamma(\eta)| \leqq M\psi_y(r) \qquad \text{et} \qquad |F^{(p)}(a+iy+s)\,\gamma(0)| \leqq M\psi_y(r).$$

D'autre part, on en déduit

$$\left|\int_0^\eta F^{(p)}(a+iy+s+u)\,d\gamma(u)\right| \leqq M\psi_y(r)\int_0^\eta \frac{d\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}.$$

Mais

$$\int_0^\eta \frac{d\gamma(u)}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} = \frac{\gamma(\eta)}{\gamma(\sqrt{r^2+\eta^2})} - \frac{\gamma(0)}{\gamma(r)} + \int_0^\eta \gamma(u)\,d\left[\frac{-1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}\right],$$
$$\leqq 1+\int_0^\eta \gamma(\sqrt{r^2+u^2})\,d\left[\frac{-1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}\right] = 1+\log\frac{\gamma(\sqrt{r^2+\eta^2})}{\gamma(r)} \quad [8],$$
$$\leqq 1+\log\frac{\gamma(\eta\sqrt{2})}{\gamma(r)}.$$

---

[8] En posant $\dfrac{1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})} = \omega(u)$, de sorte que $\omega(u)$ est continue, positive, et non croissante sur

Au total, on voit que

$$\left|\int_0^{\eta} \mathrm{F}^{(p+1)}(a+iy+s+u)\,\gamma(u)\,du\right| \leqq \mathrm{M}\psi_y(r)\left[3+\log\frac{\gamma(\eta\sqrt{2})}{\gamma(r)}\right].$$

En définitive, on a montré que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$h(a+iy+s) = \mathrm{O}[\varphi_y(r)],$$

où la fonction φ_y est définie pour $0 < t \leqq \mathrm{T}$ par

$$\varphi_y(t) = \begin{cases} \psi_y(t)\log\dfrac{1}{\gamma(t)} & \text{dans le cas où } \gamma(0)=0, \\ \psi_y(t) & \text{dans le cas où } \gamma(0)>0. \end{cases}$$

De toute façon, cette fonction est positive et non croissante pour $0 < t \leqq \mathrm{T}$ et l'intégrale $\int_0^{\mathrm{T}} \varphi_y(t)\,dt$ est convergente.

Dans le cas où $\psi_y(t) = 1$ et $\gamma(0) > 0$, on pourrait dire simplement que $h(s)$ reste bornée quand s tend vers $a+iy$ dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$.

3.3.3. Ceci étant, il résulte du lemme 2 qu'il existe une fonction $g(y)$ sommable sur tout intervalle fini et telle que, quels que soient Y_1 et Y_2 satisfaisant à $\mathrm{Y}_1 < \mathrm{Y}_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[\mathrm{Y}_1, \mathrm{Y}_2]$, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_{\mathrm{Y}_1}^{\mathrm{Y}_2} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \quad \text{tend vers} \quad \int_{\mathrm{Y}_1}^{\mathrm{Y}_2} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

Donnons-nous donc un λ positif quelconque et soit $k(y)$ une fonction continue sur l'intervalle fermé $[-2\lambda, +2\lambda]$.

Alors, quel que soit ξ réel, quand ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy \quad \text{tend vers} \quad \int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy.$$

3.3.4. La formule (4) du paragraphe 3.3.1 montre que l'on a pour ε positif et y réel quelconque

$$h(a+\varepsilon+iy) = \int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,e^{-iyt}\,t^{p+1}\,v(t)\,[\alpha(t) - \mathrm{A}\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt.$$

De plus, l'intégrale est uniformément convergente pour $-2\lambda \leqq y \leqq +2\lambda$.

---

l'intervalle fermé $[0, \eta]$, on a

$$\int_0^{\eta} \gamma(\sqrt{r^2+u^2})\,d\left[\frac{-1}{\gamma(\sqrt{r^2+u^2})}\right] = -\int_0^{\eta}\frac{d\omega(u)}{\omega(u)} = \log\omega(0) - \log\omega(\eta).$$

On a donc

$$h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}=\int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,e^{i(\xi-t)y}\,k(y)\,t^{p+1}\,\varphi(t)[\alpha(t)-\mathrm{A}\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt,$$

l'intégrale étant encore uniformément convergente pour $-2\lambda \leqq y \leqq +2\lambda$.

Par intégration sous le signe $\int$, on obtient, en posant

$$\mathrm{K}(u)=\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} k(y)\,e^{iuy}\,dy,$$

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy=\int_0^{+\infty} e^{-(a+\varepsilon)t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,[\alpha(t)-\mathrm{A}\,e^{at}\,\beta(t)]\,dt,$$

ou, en ajoutant aux deux membres l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{A}\,e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt,$$

qui est absolument convergente puisque $t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)$ tend vers 1 pour t infini et $\mathrm{K}(\xi-t)$ est borné,

$$\begin{aligned}(6)\qquad &\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} h(a+\varepsilon+iy)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy+\mathrm{A}\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt\\ &\quad=\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,e^{-at}\,\alpha(t)\,dt.\end{aligned}$$

Si $\mathrm{K}(u)$ *est sommable sur* $(-\infty, +\infty)$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt$$

est absolument convergente et, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives,

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt \quad \text{tend vers} \quad \int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt.$$

On voit donc que, quel que soit ξ réel, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t}\,\mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,e^{-at}\,\alpha(t)\,dt$$

est convergente pour tout ε positif et, si $\mathrm{K}(u)$ est sommable sur $(-\infty, +\infty)$, elle tend vers

$$\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\,k(y)\,e^{i\xi y}\,dy+\mathrm{A}\int_0^{+\infty} \mathrm{K}(\xi-t)\,t^{p+1}\,\varphi(t)\,\beta(t)\,dt$$

quand ε tend vers zéro.

3.3.5. Si l'on prend $k(y) = \frac{1}{2}\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right]$, on a

$$K(u) = \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2}.$$

On arrive ainsi au résultat suivant :

Quels que soient λ positif et ξ réel, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-\varepsilon t} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente pour tout ε positif et tend vers

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right] e^{i\xi y}\, dy + A\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) \beta(t)\, dt$$

quand ε tend vers zéro.

La fonction $\frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) e^{-at} \alpha(t)$ étant positive ou nulle, ceci montre que l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente et égale à

$$\frac{1}{2}\int_{-2\lambda}^{+2\lambda} g(y)\left[1 - \frac{|y|}{2\lambda}\right] e^{i\xi y}\, dy + A\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) \beta(t)\, dt.$$

Quand ξ tend vers $+\infty$, le premier terme tend vers zéro d'après le théorème de Riemann-Lebesgue.

Le second s'écrit

$$A\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2} W_\xi(u)\, du,$$

avec

$$W_\xi(u) = \begin{cases} (\xi+u)^{p+1} \varphi(\xi+u) \beta(\xi+u) & \text{pour } u \geqq -\xi, \\ 0 & \text{pour } u < -\xi. \end{cases}$$

Comme la fonction $W_\xi(u)$ est bornée en module par un nombre fixe et tend vers 1 quand ξ tend vers $+\infty$, puisque $t^{p+1} \varphi(t) \beta(t)$ est bornée pour $t \geqq 0$ et tend vers 1 pour t infini, l'intégrale tend vers

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda u}{\lambda u^2}\, du = \pi$$

quand ξ tend vers $+\infty$.

En définitive, nous avons montré que, *quel que soit λ positif, l'intégrale*

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} t^{p+1} \varphi(t) e^{-at} \alpha(t)\, dt$$

est convergente quel que soit ξ réel et tend vers πA quand ξ tend vers $+\infty$.

3.4. Pour simplifier l'écriture, nous poserons

$$t^{p+1}\varphi(t)\,e^{-at}\alpha(t) = \mathrm{J}(t).$$

Nous devons alors prouver que $\mathrm{J}(t)$ tend vers A quand t tend vers $+\infty$.

3.4.1. Comme $\mathrm{J}(t) \geqq 0$, quel que soit h positif, on a pour $\xi \geqq h$ et λ positif quelconque

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt \geqq \int_{\xi-h}^{\xi+h} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt.$$

Mais, pour $\xi - h \leqq t \leqq \xi + h$, on a

$$t^{p+1} \geqq (\xi-h)^{p+1}, \qquad \varphi(t) \geqq \varphi(\xi+h), \qquad e^{-at} \geqq e^{-a(\xi+h)} \quad \text{et} \quad \alpha(t) \geqq \alpha(\xi-h),$$

et, par suite,

$$\mathrm{J}(t) \geqq (\xi-h)^{p+1}\varphi(\xi+h)\,e^{-a(\xi+h)}\alpha(\xi-h) = \mathrm{J}(\xi-h)\,e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}.$$

Donc

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt \geqq \mathrm{J}(\xi-h)\,e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt,$$

$$\geqq \mathrm{J}(\xi-h)\,e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{J}(\xi-h) \leqq e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\,\frac{1}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt.$$

Il résulte de là que

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\mathrm{J}(t) = \overline{\lim_{\xi\to+\infty}}\,\mathrm{J}(\xi-h) \leqq \frac{e^{2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\,\pi\mathrm{A}. \tag{7}$$

En faisant tendre d'abord λ vers $+\infty$, puis h vers zéro, on obtient

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\,\mathrm{J}(t) \leqq \mathrm{A}. \tag{8}$$

3.4.2. Ceci montre que $\mathrm{J}(t)$ est borné pour $t \geqq 0$. Autrement dit, il existe un nombre positif R tel que, quel que soit $t \geqq 0$,

$$|\mathrm{J}(t)| \leqq \mathrm{R}.$$

Alors, quel que soit h positif, on peut écrire pour $\xi > h$ et λ positif quelconque

$$\int_0^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt \leqq \mathrm{R}\int_0^{\xi-h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt + \int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt + \mathrm{R}\int_{\xi+h}^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt. \tag{9}$$

Au second membre, le premier terme est inférieur à

$$\mathrm{R}\int_{-\infty}^{\xi-h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt=\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

et le troisième est égal à $\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$.

Comme, pour $\xi-h\leqq t\leqq\xi+h$,

$$\mathrm{J}(t)\leqq(\xi+h)^{p+1}\varphi(\xi-h)\,e^{-a(\xi-h)}\,\alpha(\xi+h)=\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)},$$

le second terme est au plus égal à

$$\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{\xi-h}^{\xi+h}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,dt=\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du.$$

Finalement, (9) donne

$$\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt\leqq 2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du+\mathrm{J}(\xi+h)\,e^{2ah}\frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)}\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

d'où l'on tire

$$\mathrm{J}(\xi+h)\geqq e^{-2ah}\frac{\varphi(\xi+h)}{\varphi(\xi-h)}\,\frac{1}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\left[\int_{0}^{+\infty}\frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,\mathrm{J}(t)\,dt-2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\right].$$

Il résulte de là que

$$\varliminf_{t\to+\infty}\mathrm{J}(t)=\varliminf_{\xi\to+\infty}\mathrm{J}(\xi+h)\geqq\frac{e^{-2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du}\left[\pi\mathrm{A}-2\mathrm{R}\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du\right].$$

En faisant tendre d'abord λ vers $+\infty$, puis h vers zéro, on obtient

$$\varliminf_{t\to+\infty}\mathrm{J}(t)\geqq\mathrm{A},$$

ce qui, avec (8), montre que $\mathrm{J}(t)$ tend vers A quand t tend vers $+\infty$.

4. Remarques.

4.1. Remarquons d'abord que, si l'on veut établir seulement le théorème I, on n'a pas besoin des lemmes 1 et 2.

En effet, avec les hypothèses du théorème I, si l'on attribue à $\mathrm{F}^{(p)}(s)$, en tout point de la droite $\mathcal{R}s=a$ autre que a, une valeur égale à sa limite pour s tendant vers ce point dans le demi-plan $\mathcal{R}s>a$, on obtient une fonction continue sur l'ensemble des s satisfaisant à $\mathcal{R}s\geqq a$ et $s\neq a$.

Comme, pour $\mathcal{R}s > a$, on a par intégration par parties

$$h(s) = (-1)^{p+1} F^{(p)}(s+l)\gamma(l) + (-1)^p F^{(p)}(s)\gamma(0) + (-1)^p \int_0^l F^{(p)}(s+u)\,d\gamma(u),$$

on voit que, pour y réel $\neq 0$, $h(a+\varepsilon+iy)$ tend vers

$$g(y) = (-1)^{p+1} F^{(p)}(a+iy+l)\gamma(l) + (-1)^p F^{(p)}(a+iy)\gamma(0) \\ + (-1)^p \int_0^l F^{(p)}(a+iy+u)\,d\gamma(u)$$

quand ε tend vers zéro par valeurs positives. La convergence est d'ailleurs uniforme sur tout intervalle fermé ne contenant pas la valeur zéro [et, par suite, la fonction $g(y)$ est continue pour $y \neq 0$].

D'autre part, en raisonnant comme au paragraphe 3.3.2, on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$h(a+s) = O[\varphi(r)] \qquad (r = |s|),$$

où φ est une certaine fonction définie sur un intervalle semi-ouvert $]0, T]$, positive et non croissante sur cet intervalle, et telle que l'intégrale $\int_0^T \varphi(t)\,dt$ soit convergente.

Il existe donc deux nombres positifs N et ρ, le second au plus égal a T, tels que, si $|s| \leq \rho$ et $\mathcal{R}s > 0$, $|h(a+s)| \leq N\varphi(r)$.

Alors, si $\varepsilon \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$, on a pour $|y| \leq \frac{\rho}{\sqrt{2}}$ et $y \neq 0$

$$|h(a+\varepsilon+iy)| \leq N\varphi\left(\sqrt{\varepsilon^2+y^2}\right) \leq N\varphi(|y|).$$

En définitive, on voit que, quels que soient Y_1 et Y_2 réels satisfaisant à $Y_1 < 0 < Y_2$ et quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[Y_1, Y_2]$, lorsque ε tend vers zéro par valeurs positives, l'intégrale $\int_{Y_1}^{Y_2} h(a+\varepsilon+iy)\theta(y)\,dy$ tend vers $\int_{Y_1}^{Y_2} g(y)\theta(y)\,dy$, intégrale qui est absolument convergente.

On peut alors continuer comme aux paragraphes 3.3.3 à 3.4.2.

4.2. Remarquons également que, si l'on élargissait les hypothèses du théorème II en supposant que $F^{(p)}(s)$ se comporte de la façon indiquée au voisinage du point $a+iy$, non plus pour tout y réel, mais pour tout y réel de module au plus égal à un certain nombre positif L, on pourrait conclure que l'on a

$$AP\left(\frac{L}{a}\right) \leq \varliminf_{t \to +\infty} \frac{e^{-at}\alpha(t)}{\beta(t)} \leq \varlimsup_{t \to +\infty} \frac{e^{-at}\alpha(t)}{\beta(t)} \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right),$$

$P(\mu)$ et $Q(\mu)$ étant deux fonctions déterminées une fois pour toutes et qui tendent vers 1 lorsque μ tend vers $+\infty$ ([9]).

En effet, la fonction $h(s)$ satisferait maintenant aux hypothèses du lemme 2 modifiées comme il a été dit au paragraphe 2.2.1, avec $Y_1 = -L$ et $Y_2 = +L$.

On pourrait en conclure l'existence d'une fonction $g(y)$ sommable sur l'intervalle $[-L, +L]$ telle que, quand ε tend vers zéro par valeurs positives :

1° La fonction $h(a+\varepsilon+iy)$ converge presque partout sur $[-L, +L]$ vers $g(y)$;

2° Quelle que soit la fonction $\theta(y)$ continue sur l'intervalle fermé $[-L, +L]$,

$$\int_{-L}^{+L} h(a+\varepsilon+iy)\,\theta(y)\,dy \quad \text{tend vers} \quad \int_{-L}^{+L} g(y)\,\theta(y)\,dy.$$

Les raisonnements des paragraphes 3.3.4 et 3.3.5 montreraient alors que, *pour* $\lambda = \frac{L}{2}$, l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\, t^{p+1}\varphi(t)\, e^{-at}\alpha(t)\,dt$$

est convergente quel que soit ξ réel et tend vers πA quand ξ tend vers $+\infty$.

En posant toujours

$$t^{p+1}\varphi(t)\,e^{-at}\alpha(t) = J(t),$$

on arriverait à l'inégalité (7) *pour h positif quelconque et* $\lambda = \frac{L}{2}$.

En prenant, par exemple, $\lambda = \frac{L}{2}$ et $h = \frac{1}{\sqrt{aL}}$, on obtiendrait

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\, J(t) \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right),$$

avec

$$Q(\mu) = \frac{\pi e^{2\sqrt{\frac{1}{\mu}}}}{\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}} \frac{\cos^2 u}{u^2}\,du}.$$

Ceci permettrait de conclure que $J(t)$ est bornée pour $t \geq 0$ et que l'on a pour λ et h positifs quelconques

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}} \int_0^{\xi-h} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,J(t)\,dt \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right)\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du$$

et

$$\overline{\lim_{\xi\to+\infty}} \int_{\xi+h}^{+\infty} \frac{\sin^2\lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2}\,J(t)\,dt \leq AQ\left(\frac{L}{a}\right)\int_{\lambda h}^{+\infty}\frac{\sin^2 u}{u^2}\,du,$$

([9]) La même remarque a été faite pour le théorème classique de Ikehara par H. Heilbronn et E. Landau (*Math. Z.*, t. 37, 1933, p. 10-16).

de sorte que, pour $\lambda = \frac{L}{2}$ et h positif quelconque,

$$\underline{\lim}_{\xi \to +\infty} \int_{\xi-h}^{\xi+h} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\, dt \geqq \pi A - 2AQ\left(\frac{L}{a}\right) \int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du.$$

Alors, en tenant compte de ce que, comme on l'a vu au paragraphe 3.4.2, on a pour $\xi > h$

$$\int_{\xi-h}^{\xi+h} \frac{\sin^2 \lambda(t-\xi)}{\lambda(t-\xi)^2} J(t)\, dt \leqq J(\xi+h)\, e^{2ah} \frac{\varphi(\xi-h)}{\varphi(\xi+h)} \int_{-\lambda h}^{+\lambda h} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du,$$

on en déduirait que, pour $\lambda = \frac{L}{2}$ et h positif quelconque,

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} J(t) \geqq \frac{e^{-2ah}}{\displaystyle\int_{-\lambda h}^{+\lambda h} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du} \left[\pi A - 2AQ\left(\frac{L}{a}\right) \int_{\lambda h}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du\right].$$

Pour $h = \frac{1}{\sqrt{aL}}$, ceci donnerait

$$\underline{\lim}_{t \to +\infty} J(t) \geqq AP\left(\frac{L}{a}\right),$$

avec

$$P(\mu) = \frac{e^{-2\sqrt{\frac{1}{\mu}}}}{\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du} \left[\pi - 2Q(\mu) \int_{\frac{1}{2}\sqrt{\mu}}^{+\infty} \frac{\sin^2 u}{u^2}\, du\right].$$

Les plus petite et plus grande limite de $J(t)$ pour t tendant vers $+\infty$ étant les mêmes que celles de $\frac{e^{-at}\alpha(t)}{\beta(t)}$, du fait que $t^{p+1}\varphi(t)\beta(t)$ tend vers 1, on aurait bien le résultat annoncé.

5. Théorèmes particuliers.

Nous allons maintenant donner des théorèmes particuliers, d'énoncés simples, qui se déduisent aisément du théorème I.

5.1. Nous avons besoin de trois nouveaux lemmes.

5.1.1. Lemme 3. — *Soient l positif et < 1, ρ réel $\geqq 0$ et m entier $\geqq 0$. On a pour t tendant vers $+\infty$:*

$$\int_0^l e^{-tu} u^\rho \left(\log \frac{1}{u}\right)^{-m} du \sim \Gamma(\rho+1)\, t^{-\rho-1} (\log t)^{-m}.$$

Ce lemme est un cas particulier d'un théorème abélien connu relatif à l'intégrale de Laplace ([10]). On peut le démontrer très simplement de la façon suivante :

En faisant le changement de variable $u = \frac{X}{t}$, on a pour $t > \frac{1}{l^2}$ (de sorte que $lt > \sqrt{t}$)

$$\int_0^l e^{-tu} u^\rho \left(\log\frac{1}{u}\right)^{-m} du = t^{-\rho-1}\int_0^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} dX,$$

$$= t^{-\rho-1}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} dX + t^{-\rho-1}\int_{\sqrt{t}}^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} dX.$$

Comme on a, pour $\sqrt{t} \leqq X \leqq lt$,

$$e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} \leqq e^{-\sqrt{t}} (lt)^\rho \log\frac{1}{l}\Big)^{-m},$$

on voit que

$$t^{-\rho-1}\int_{\sqrt{t}}^{lt} e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} dX \leqq (lt - \sqrt{t})t^{-1} l^\rho \left(\log\frac{1}{l}\right)^{-m} e^{-\sqrt{t}},$$

$$= o[t^{-\rho-1}(\log t)^{-m}].$$

D'autre part, on peut écrire

$$t^{-\rho-1}\int_0^{\sqrt{t}} e^{-X} X^\rho \left(\log\frac{t}{X}\right)^{-m} dX = t^{-\rho-1}(\log t)^{-m}\int_0^{+\infty} \varpi_t(X)\, dX,$$

avec

$$\varpi_t(X) = \begin{cases} e^{-X} X^\rho \left(\dfrac{\log t}{\log\frac{t}{X}}\right)^m & \text{pour } 0 < X \leqq \sqrt{t}, \\ 0 & \text{pour } X > \sqrt{t}. \end{cases}$$

Comme, pour $0 < X \leqq \sqrt{t}$, $\log\frac{t}{X} \geqq \frac{1}{2}\log t$, on voit que, pour tout t supérieur à $\frac{1}{l^2}$, on a quel que soit X positif

$$0 < \varpi_t(X) \leqq 2^m e^{-X} X^\rho.$$

D'autre part, quand t tend vers $+\infty$, $\varpi_t(X)$ tend vers $e^{-X} X^\rho$ (d'ailleurs, quel que soit ε positif et inférieur à 1, la convergence est uniforme pour $\varepsilon \leqq X \leqq \frac{1}{\varepsilon}$).

Par suite, quand t tend vers $+\infty$, $\int_0^{+\infty} \varpi_t(X)\, dX$ tend vers

$$\int_0^{+\infty} e^{-X} X^\rho\, dX = \Gamma(\rho + 1).$$

([10]) *Cf.* Doetsch, *Theorie und Anwendung der Laplace-Transformation* (Springer, Berlin, 1937), p. 202.

5.1.2. Lemme 4. — *Quel que soit* ρ *réel ou complexe non égal à un entier* < 0, *on a pour* $\mathcal{R}s > 0$

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} t^\rho \, dt = \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1} + \textit{fonction entière de } s,$$

$s^{-\rho-1}$ *étant pris avec sa détermination principale* $\Bigl($c'est-à-dire celle qui est égale à $r^{-\rho-1} e^{-(\rho+1)i\theta}$ si $s = re^{i\theta}$ avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}\Bigr)$.

Si $\mathcal{R}\rho > -1$, on sait que, pour $\mathcal{R}s > 0$,

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} t^\rho \, dt = \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1},$$

et l'on a immédiatement le résultat en écrivant

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} t^\rho \, dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^\rho \, dt - \int_0^1 e^{-st} t^\rho \, dt.$$

Sinon, on voit que, pour $\mathcal{R}s > 0$, la différence

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} t^\rho \, dt - \Gamma(\rho+1) s^{-\rho-1}$$

a pour dérivée $m^{\text{ième}}$

$$(-1)^m \left[\int_1^{+\infty} e^{-st} t^{\rho+m} \, dt - \Gamma(\rho+m+1) s^{-\rho-m-1} \right].$$

Si m est choisi de manière que $\mathcal{R}[\rho + m] > -1$, il résulte de ce que l'on vient de voir que cette dérivée $m^{\text{ième}}$ est une fonction entière. Ceci entraîne que la fonction elle-même soit une fonction entière.

5.1.3. Lemme 5. — ω *désignant un nombre réel quelconque et* q *un entier* $\geqq 0$, *définissons la fonction* $\beta_{\omega,q}$ *par*

$$\beta_{\omega,q}(t) = \begin{cases} 0 & \textit{pour } 0 < t < 1, \\ t^{\omega-1} \displaystyle\sum_{j=0}^{q} \binom{q}{j} c_j(\omega) (\log t)^{q-j} & \textit{pour } t \geqq 1, \end{cases}$$

avec $c_0(\omega) = \dfrac{1}{\Gamma(\omega)}$ *et, pour* $j > 0$, $c_j(\omega) = \dfrac{d^j}{d\omega^j}[c_0(\omega)]$.

Alors on a pour $\mathcal{R}s > 0$

$$\int_0^{+\infty} e^{-st} \beta_{\omega,q}(t) \, dt = s^{-\omega} \left(\log \frac{1}{s} \right)^q + \textit{fonction entière de } s,$$

$s^{-\omega}$ *et* $\log \frac{1}{s}$ *étant pris avec leur détermination principale* $\Bigl($c'est-à-dire que, si $s = re^{i\theta}$, avec $-\frac{\pi}{2} < \theta < +\frac{\pi}{2}$, on a $s^{-\omega} = r^{-\omega} e^{-i\omega\theta}$ et $\log \frac{1}{s} = -\log r - i\theta\Bigr)$.

Le cas $q=0$ résulte du lemme précédent si ω n'est pas un entier $\leqq 0$ et est évident si ω est un entier $\leqq 0$, car alors $c_0(\omega)=0$ et $\beta_{\omega,q}(t)=0$. Il n'y a donc à traiter que le cas $q \geqq 1$.

1° Nous poserons, pour $t>0$,

$$b_{\omega,q}(t)=t^{\omega-1}\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}c_j(\omega)(\log t)^{q-j}=\frac{d^q}{d\omega^q}[c_0(\omega)t^{\omega-1}],$$

de sorte que

$$\beta_{\omega,q}(t)=\begin{cases} b_{\omega,q}(t) & \text{pour } t\geqq 1, \\ 0 & \text{pour } 0<t<1. \end{cases}$$

Notons que $b_{\omega,q}$ a pour dérivée $b_{\omega-1,q}$, car

$$\frac{d}{dt}\left\{\frac{d^q}{d\omega^q}[c_0(\omega)t^{\omega-1}]\right\}=\frac{d^q}{d\omega^q}\left\{\frac{d}{dt}[c_0(\omega)t^{\omega-1}]\right\}$$

et

$$\frac{d}{dt}[c_0(\omega)t^{\omega-1}]=(\omega-1)c_0(\omega)t^{\omega-2}=c_0(\omega-1)t^{\omega-2}.$$

2° Si $\omega>0$, on a pour s réel >0

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}c_0(\omega)t^{\omega-1}\,dt=\left(\frac{1}{s}\right)^{\omega}$$

et, en dérivant q fois sous le signe $\int$ par rapport à ω, on obtient

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}b_{\omega,q}(t)\,dt=\left(\frac{1}{s}\right)^{\omega}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{q}=s^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{q}.$$

En raison de l'analyticité, cette relation subsiste pour s complexe tel que $\mathcal{R}s>0$.

On peut ensuite écrire, pour $\mathcal{R}s>0$,

$$\int_0^{+\infty}e^{-st}\beta_{\omega,q}(t)\,dt=\int_0^{+\infty}e^{-st}b_{\omega,q}(t)\,dt-\int_0^{1}e^{-st}b_{\omega,q}(t)\,dt,$$
$$=s^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s}\right)^{q}+\text{fonction entière de } s.$$

3° Supposons maintenant $\omega\leqq 0$.

En tenant compte de ce que $b_{\omega,q}$ est la dérivée de $b_{\omega+1,q}$, $b_{\omega+1,q}$ celle de $b_{\omega+2,q}$, et ainsi de suite, on voit que, pour $\mathcal{R}s>0$, m intégrations par parties successives donnent

$$(10)\qquad \int_0^{+\infty}e^{-st}\beta_{\omega,q}(t)\,dt=\int_1^{+\infty}e^{-st}b_{\omega,q}(t)\,dt$$
$$=-e^{-s}\sum_{j=1}^{m}b_{\omega+j,q}(1)\,s^{j-1}+s^m\int_1^{+\infty}e^{-st}b_{\omega+m,q}(t)\,dt.$$

Si m est assez grand pour que $\omega+m>0$, on a

$$\int_1^{+\infty} e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt = \int_0^{+\infty} e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt - \int_0^1 e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt,$$

$$= s^{-\omega-m}\left(\log\frac{1}{s}\right)^q - \int_0^1 e^{-st} b_{\omega+m,q}(t)\,dt$$

et la formule (10) donne

$$\int_0^{+\infty} e^{-st}\beta_{\omega,q}(t)\,dt = s^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s}\right)^q + \text{fonction entière de } s.$$

5.1.4. Ajoutons les observations suivantes :

Si ω *n'est pas un entier négatif ou nul*, on a

$$c_0(\omega) = \frac{1}{\Gamma(\omega)} \neq 0,$$

et par suite *on a pour* t *tendant vers* $+\infty$

$$\beta_{\omega,q}(t) \sim \frac{1}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1}(\log t)^q.$$

Si $\omega = -m$, *avec* m *entier* $\geqq 0$, on a

$$c_0(\omega) = 0 \qquad \text{et} \qquad c_1(\omega) = (-1)^m m\,!,$$

et par suite, *si* $q \geqq 1$, *on a pour* t *tendant vers* $+\infty$

$$\beta_{\omega,q}(t) \sim (-1)^m m\,!\; q t^{-m-1}(\log t)^{q-1}.$$

5.2. Nous sommes maintenant en mesure d'établir les théorèmes annoncés. Il est entendu que, dans nos énoncés les fonctions $(s-a)^{-\omega}$, $(s-a)^{-\lambda_j}$, $\log(s-a)$ et $\log\frac{1}{s-a}$, qui ne sont considérées que dans le demi-plan $\mathcal{R}s>a$, sont prises avec leur détermination principale, c'est-à-dire que, si $s=a+r_1 e^{i\theta_1}$, avec $r_1>0$ et $-\frac{\pi}{2}<\theta_1<+\frac{\pi}{2}$, on a

$$(s-a)^{-\omega} = r_1^{-\omega} e^{-i\omega_1\theta}, \qquad (s-a)^{-\lambda_j} = r_1^{-\lambda_j} e^{-i\lambda_j\theta_1},$$

$$\log(s-a) = \log r_1 + i\theta_1, \qquad \log\frac{1}{s-a} = \log\frac{1}{r_1} - i\theta_1.$$

De plus, les fonctions $g(s)$ et $h(s)$ qui figurent dans nos énoncés ne sont évidemment plus celles que nous avions introduites dans les raisonnements du chapitre 3.

5.2.1. Nous établirons d'abord le théorème suivant :

THÉORÈME III. — *Soit* ω *un nombre réel qui ne soit pas un entier* $\leqq 0$. *Supposons* *que la fonction $f(s)$ soit holomorphe en tous les points de la droite $\Re s = a$ autres que a et que l'on ait au voisinage du point a*

$$f(s) = (s-a)^{-\omega} g(s) + h(s), \tag{11}$$

avec g et h holomorphes en ce point et $g(a) \neq 0$, ou même

$$\begin{aligned}(12)\quad f(s) = {} & (s-a)^{-\omega} g(s) \\ & + \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{-\lambda_j} \{ g_j(s) \cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j(s) \sin[\mu_j \log(s-a)] \} + h(s) \quad ({}^{11}),\end{aligned}$$

avec g, h, les g_j et les h_j holomorphes au point a, $g(a) \neq 0$, les λ_j et les μ_j réels, les λ_j inférieurs à ω, et aucun $\lambda_j + i\mu_j$ n'étant un entier $\leqq 0$,

Alors on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\alpha(t) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1}.$$

Nous démontrerons ce théorème en supposant que l'on a (12), les modifications qu'il faudrait faire si l'on avait (11) sont évidentes.

Nous appliquerons le théorème I en distinguant deux cas suivant que l'on a $\omega \geqq 1$ ou bien $-m < \omega < 1-m$, avec m entier $\geqq 0$.

Dans les deux cas, nous prendrons

$$\beta(t) = \begin{cases} 0 & \text{pour } 0 \leqq t < 1, \\ \dfrac{g(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1} + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) + ih_j(a)}{2} \frac{t^{\lambda_j - 1 + i\mu_j}}{\Gamma(\lambda_j + i\mu_j)} & \\ \qquad + \displaystyle\sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) - ih_j(a)}{2} \frac{t^{\lambda_j - 1 - i\mu_j}}{\Gamma(\lambda_j - i\mu_j)} & \text{pour } t \geqq 1, \end{cases}$$

et $A = 1$.

Ainsi, on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\beta(t) \sim \frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1}$$

et la conclusion du théorème I donne bien le résultat indiqué.

---

(11) On peut remarquer que

$$\begin{aligned}(s-a)^{-\lambda_j} \{ g_j(s) \cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j(s) \sin[\mu_j \log(s-a)] \} \\ = \frac{1}{2} \{ [g_j(s) + ih_j(s)](s-a)^{-\lambda_j - i\mu_j} + [g_j(s) - ih_j(s)](s-a)^{-\lambda_j + i\mu_j} \}.\end{aligned}$$

D'autre part, d'après le lemme 4,

$$G(s) = s^{-\omega}g(a) + \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) + ih_j(a)}{2} s^{-\lambda_j - i\mu_j}$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} \frac{g_j(a) - ih_j(a)}{2} s^{-\lambda_j + i\mu_j} + \text{fonction entière de } s,$$
$$= s^{-\omega}g(a) + \sum_{j=1}^{n} s^{-\lambda_j}[g_j(a)\cos(\mu_j \log s) + h_j(a)\sin(\mu_j \log s)] + \text{fonction entière de } s.$$

$F(s)$ est donc holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a, et l'on a au voisinage du point a

$$F(s) = (s-a)^{-\omega}[g(s) - g(a)]$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{-\lambda_j}\{[g_j(s) - g_j(a)]\cos[\mu_j \log(s-a)] + [h_j(s) - h_j(a)]\sin[\mu_j \log(s-a)]\}$$
$$+ h(s) + \text{fonction entière de } s,$$
$$= (s-a)^{1-\omega}g^*(s)$$
$$+ \sum_{j=1}^{n} (s-a)^{1-\lambda_j}\{g_j^*(s)\cos[\mu_j \log(s-a)] + h_j^*(s)\sin[\mu_j \log(s-a)]\} + h^*(s),$$

avec g^*, h^*, les g_j^* et les h_j^* holomorphes en a.

1° *Cas* $\omega \geqq 1$.

Remarquons d'abord que $g(a) > 0$.

En effet, quand s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$f(s) \sim (s-a)^{-\omega}g(a).$$

Or $f(s)$ est $\geqq 0$ pour s réel $> a$, puisque $\alpha(t) \geqq 0$.

Alors, les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p = 0$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \frac{u^{\omega-1}}{g(a)}.$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$, l'intégrale $\int_0^l \log \frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a pour t tendant vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du \sim \frac{\Gamma(\omega)}{g(a)} t^{-\omega},$$

de sorte que $t\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\, du$ tend vers 1.

---

(12) Ainsi $\frac{g(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1} > 0$.

D'autre part, $F(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F(a+s) = O[r^{1-\omega}], \\ = O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right],$$

avec $r = |s|$.

2° *Cas* $-m < \omega < 1-m$, *avec* m *entier* $\geqq 0$.

Ici, $g(a)$ est du signe de $(-1)^m$ (12).

En effet, si $m = 0$, le même raisonnement que plus haut montre que l'on a $g(a) > 0$.

Si $m \geqq 1$, on voit que, lorsque s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a,

$$(-1)^m f^{(m)}(s) \sim \omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+m-1) g(a)(s-a)^{-\omega-m}.$$

Chacun des facteurs du produit $\omega(\omega+1)\ldots(\omega+m-1)$ est négatif. Or on a pour s réel $> a$

$$(-1)^m f^{(m)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^m \alpha(t)\, dt \geqq 0.$$

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites cette fois en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \frac{u^{\omega+m}}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+m) g(a)}.$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$, l'intégrale $\int_0^l \log \frac{1}{\gamma(u)}\, du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu} \gamma(u)\, du \sim \frac{\Gamma(\omega+m+1)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+m) g(a)} t^{-\omega-m-1} = \frac{\Gamma(\omega)}{g(a)} t^{-\omega-m-1},$$

de sorte que $t^{m+2} \beta(t) \int_0^l e^{-tu} \gamma(u)\, du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O[r^{-\omega-m}], \\ = O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

5.2.2. Nous allons maintenant établir le théorème suivant :

THÉORÈME IV. — *Soit* ω *un nombre réel quelconque. Supposons que la fonction* $f(s)$ *soit holomorphe en tous les points de la droite* $\mathcal{R}s = a$ *autres que* a *et que l'on ait au voisinage du point* a

$$f(s) = (s-a)^{-\omega} \sum_{j=0}^{q} g_j(s) \left[\log \frac{1}{s-a}\right]^j + h(s) \qquad (q \geqq 1),$$

les fonctions g_j *et la fonction* h *étant holomorphes en ce point, et* $g_q(a)$ *étant différent de zéro.*

Alors, 1° *Si* ω *n'est pas un entier* $\leqq 0$, *on a pour* t *infini*

$$\alpha(t) \sim \frac{g_q(a)}{\Gamma(\omega)} e^{at} t^{\omega-1} (\log t)^q;$$

2° *Si* $\omega = -m$, *avec* m *entier* $\geqq 0$, *on a pour* t *infini*

$$\alpha(t) \sim (-1)^m m!\, q g_q(a)\, e^{at} t^{-m-1} (\log t)^{q-1}.$$

Pour démontrer ce théorème, nous appliquerons le théorème I, en distinguant trois cas suivant les valeurs de ω.

Dans les trois cas, nous prendrons

$$\beta(t) = \sum_{j=0}^{q} g_j(a) \beta_{\omega,j}(t),$$

avec les notations du lemme 5, et $A = 1$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 5.1.4, on aura ainsi pour t tendant vers $+\infty$

$$\beta(t) \sim \frac{g_q(a)}{\Gamma(\omega)} t^{\omega-1} (\log t)^q \qquad \text{si } \omega \text{ n'est pas un entier} \leqq 0,$$

et

$$\beta(t) \sim (-1)^m m!\, q g_q(a) t^{-m-1} (\log t)^{q-1} \quad \text{si } \omega = -m, \text{ avec } m \text{ entier} \geqq 0.$$

La conclusion du théorème I donnera donc bien les résultats indiqués.

D'autre part, d'après le lemme 5, on aura

$$G(s) = s^{-\omega} \sum_{j=0}^{q} g_j(a) \left[\log \frac{1}{s}\right]^j + \text{fonction entière de } s.$$

On voit que $F(s)$ sera holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a.

Au voisinage de ce point, on aura

$$F(s) = (s-a)^{-\omega}\sum_{j=0}^{q}[g_j(s)-g_j(a)]\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^j + h(s) + \text{fonction entière de } s,$$
$$= (s-a)^{1-\omega}\sum_{j=0}^{q} g_j^\star(s)\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^j + h^\star(s),$$

les fonctions $g_j^\star$ et la fonction $h^\star$ étant holomorphes en a.

1° *Cas* $\omega \geqq 1$.

Dans ce cas, $g_q(a)$ est positif, car, quand s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$f(s) \sim g_q(a)\,(s-a)^{-\omega}\left(\log\frac{1}{s-a}\right)^q$$

et $f(s)$ est $\geqq 0$ du fait que $\alpha(t) \geqq 0$.

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p=0$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{1}{g_q(a)}\,u^{\omega-1}\left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{-q} & \text{pour } 0 < u \leqq l, \\ 0 & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$; l'intégrale $\int_0^l \log\frac{1}{\gamma(u)}\,du$ est convergente; et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du \sim \frac{\Gamma(\omega)}{g_q(a)}\,t^{-\omega}(\log t)^{-q},$$

de sorte que $t\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ tend vers 1.

D'autre part, $F(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F(a+s) = O\left[r^{1-\omega}\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right],$$
$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

2° *Cas* $-m < \omega < 1-m$, *avec* m *entier* $\geqq 0$.

Ici $g_q(a)$ est du signe de $(-1)^m$.

En effet, si $m=0$, le même raisonnement que plus haut montre que $g_q(a) > 0$.

Si $m \geqq 1$, on voit que, lorsque s tend vers a par valeurs réelles supérieures à a, on a

$$(-1)^m f^{(m)}(s) \sim \omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+m-1)g_q(a)\,(s-a)^{-\omega-m}\left[\log\frac{1}{s-a}\right]^q.$$

Chacun des facteurs du produit $\omega(\omega+1)(\omega+2)\ldots(\omega+m-1)$ est négatif. Or on a pour s réel supérieur à a

$$(-1)^m f^{(m)}(s) = \int_0^{+\infty} e^{-st} t^m \alpha(t)\, dt \geqq 0.$$

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites cette fois en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{u^{\omega+m}}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+m)g_q(a)}\left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{-q} & \text{pour } 0 < u \leqq l, \\ 0 & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est bien continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$, l'intégrale $\int_0^l \log\dfrac{1}{\gamma(u)}\,du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du \sim \frac{\Gamma(\omega+m+1)}{\omega(\omega+1)\ldots(\omega+m)g_q(a)} t^{-\omega-m-1}(\log t)^{-q} = \frac{\Gamma(\omega)}{g_q(a)} t^{-\omega-m-1}(\log t)^{-q},$$

de sorte que $t^{m+2}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et l'on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O\left[r^{-\omega-m}\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right],$$
$$= O\left[\frac{1}{\gamma(r)}\right].$$

3° *Cas* $-\omega = m$, *avec* m entier $\geqq 0$.

On voit comme dans le cas précédent que $g_q(a)$ est du signe de $(-1)^m$.

Les hypothèses du théorème I sont satisfaites en prenant $p = m+1$, l quelconque inférieur à 1 et

$$\gamma(u) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^m}{m!\,q g_q(a)}\left(\log\dfrac{1}{u}\right)^{1-q} & \text{pour } 0 < u \leqq l, \\ 0 \text{ si } q > 1, \quad 1 \text{ si } q = 1, & \text{pour } u = 0. \end{cases}$$

En effet, cette fonction est continue et non décroissante sur l'intervalle $[0, l]$ et positive pour $0 < u \leqq l$, l'intégrale $\int_0^l \log\dfrac{1}{\gamma(u)}\,du$ est convergente, et, d'après le lemme 3, on a lorsque t tend vers $+\infty$

$$\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du \sim \frac{(-1)^m}{m!\,q g_q(a)} t^{-1}(\log t)^{1-q},$$

de sorte que $t^{m+2}\beta(t)\int_0^l e^{-tu}\gamma(u)\,du$ tend vers 1.

D'autre part, $F^{(m+1)}(s)$ tend vers une limite finie quand s tend vers un point de la droite $\mathcal{R}s = a$ autre que a, en restant dans le demi-plan $\mathcal{R}s > a$, puisqu'elle est holomorphe en un tel point, et l'on voit que, quand s tend vers zéro dans le demi-plan $\mathcal{R}s > 0$, on a

$$F^{(m+1)}(a+s) = O\left[\left(\log\frac{1}{r}\right)^q\right],$$
$$= O\left[\frac{\log\frac{1}{r}}{\gamma(r)}\right].$$

Or l'intégrale $\int_0^l \left(\log\frac{1}{t}\right)\log\frac{1}{\gamma(t)}\,dt$ est convergente.

5.3. Nous ajouterons les deux observations suivantes :

1° Il est clair qu'en utilisant le théorème II au lieu du théorème I, on pourrait remplacer dans chacun des théorèmes III et IV l'hypothèse que la fonction $f(s)$ est holomorphe en tous les points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a par une hypothèse beaucoup plus générale, mais d'énoncé plus compliqué.

Nous avons voulu ici donner des énoncés simples.

2° Il résulte de ce qui a été dit au paragraphe 4.2 que, dans chacun des théorèmes III et IV, si l'on supprimait toute hypothèse sur le comportement de $f(s)$ au voisinage des points de la droite $\mathcal{R}s = a$ autres que a, pour ne conserver que celle faite sur le comportement de $f(s)$ au voisinage de a, on pourrait donner néanmoins une conclusion (ceci parce que l'hypothèse restante implique l'existence d'un nombre positif L tel que $F(s)$ soit holomorphe au point $a + iy$ pour tout y réel différent de 0 et de valeur absolue au plus égale à L).

La conclusion du théorème III deviendrait que, pour t infini, $\alpha(t)$ *est un infiniment grand du même ordre que* $e^{at}t^{\omega-1}$; celle du théorème IV que, pour t infini, $\alpha(t)$ *est un infiniment grand du même ordre que*

$$e^{at}t^{\omega-1}(\log t)^q \quad \textit{si } \omega \textit{ n'est pas un entier } \leq 0,$$
$$e^{at}t^{-m-1}(\log t)^{q-1} \quad \textit{si } \omega = -m, \quad \textit{avec } m \textit{ entier } \geq 0.$$