Annales scientifiques de l'É.N.S.

Robert Croisot

Demi-groupes inversifs et demi-groupes réunions de demi-groupes simples

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 4 (1953), p. 361-379

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_4_361_0>

DEMI-GROUPES INVERSIFS

ET

DEMI-GROUPES RÉUNIONS

DE

DEMI-GROUPES SIMPLES

PAR M. R. CROISOT.

Introduction.

Dans un Mémoire paru en 1941 [*cf.* note (5)], A. H. Clifford a étudié les demi-groupes qui sont *réunions de groupes*. Il a montré, en particulier, qu'un tel demi-groupe D est réunion de demi-groupes complètement simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, la partition de D ainsi déterminée étant telle que l'équivalence $\mathcal{R}$ correspondante soit régulière et que le demi-groupe quotient $D/\mathcal{R}$ soit un demi-treillis. Une grande partie de la démonstration peut être faite sous une hypothèse plus faible, imposant seulement à tout idéal bilatère de D d'être semi-premier (1). On voit alors, d'une part, que cette hypothèse entraîne que D est *réunion de demi-groupes simples* (*cf.* théorème 4) et, d'autre part, qu'un demi-groupe réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples disjoints qui sont ses sous-demi-groupes simples maximaux, l'équivalence $\mathcal{R}$ correspondante étant encore régulière et $D/\mathcal{R}$ étant encore un demi-treillis (*cf.* propriétés 8 et 9). Ayant obtenu ce résultat, il était naturel d'étudier le cas intermédiaire où l'on impose aux idéaux à gauche (par exemple) de D d'être semi-premiers. On voit

(1) Cette hypothèse est plus faible que la précédente car on voit qu'un demi-groupe est réunion de groupes si et seulement si tous ses idéaux à gauche et à droite sont semi-premiers (*cf.* corollaire 1 du théorème 1).

que cette condition est équivalente au fait que D soit *réunion de demi-groupes simples à gauche* (*cf.* théorème 3). Mais, bien que D soit alors réunion de demi-groupes simples à gauche disjoints, ses sous-demi-groupes simples à gauche maximaux, l'équivalence $\mathcal{R}_g$ correspondante n'est pas nécessairement régulière.

Ce cas intermédiaire qui est, à ce point de vue, moins intéressant que les deux autres, car il semble que les demi-groupes simples réunions de demi-groupes simples à gauche puissent être très compliqués, se rattache à un autre ordre de questions. Il est en effet à peu près immédiat (*cf.* propriété 5) que tous les idéaux à gauche d'un demi-groupe D sont semi-premiers si et seulement si la condition suivante est vérifiée :

(0, 2) *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = ux^2$.

Cette condition est à rapprocher de la condition

(1, 1) *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = xux$

introduite récemment par G. Thierrin [*cf.* note (2)] qui appelle demi-groupes *inversifs* les demi-groupes qui la vérifient. Par analogie, j'appelle demi-groupes *inversifs à gauche* les demi-groupes qui vérifient la condition (0, 2) et demi-groupes *inversifs à droite* les demi-groupes qui vérifient la condition symétrique (2, 0). Ce rapprochement suggère l'étude plus générale des demi-groupes qui satisfont à une condition du type suivant (avec m et n entiers positifs ou nuls) :

(m, n) *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = x^m u x^n$.

Le paragraphe I de ce travail est consacré en grande partie à la classification des demi-groupes vérifiant une ou plusieurs des conditions (m, n) avec $m+n>1$ et des conditions citées plus haut.

Les conditions (m, n) sont toutes vérifiées dans un demi-groupe qui est réunion de groupes, en particulier dans un groupe et dans un demi-treillis. Dans le paragraphe II, j'étudie certains renforcements de ces conditions. Je précise d'abord quels sont les demi-groupes qui satisfont à l'une de ces conditions avec, de plus, *l'unicité*, pour chaque élément x, de l'élément u vérifiant l'égalité $x = x^m u x^n$. Dans un autre ordre d'idées, si l'on se limite aux conditions (1, 1), (0, 2) et (2, 0), on constate que, dans un groupe, les rôles de x et u peuvent être échangés, ces deux éléments étant inverses l'un de l'autre. Je détermine quels sont les demi-groupes vérifiant une de ces conditions et, en même temps, cette *propriété de réciprocité*. Finalement, en considérant l'une quelconque des conditions (m, n), on voit que les demi-treillis satisfont à une propriété supplémentaire que l'on peut nommer anti-réciprocité : $x = x^m u x^n$ et $u = u^m x u^n$ entraînent $x = u$. Je détermine quels sont les demi-groupes qui vérifient une des conditions (m, n) renforcée par cette *propriété d'anti-réciprocité* [sauf dans les cas $(0, n)$ et $(m, 0)$ où de tels demi-groupes peuvent être très compliqués].

I. — Classification des demi-groupes considérés : équivalences et implications liant les conditions qui servent à les définir.

Nous considérons trois familles de conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe D.

a. La première famille se compose des conditions, représentées par les symboles (m, n) où m et n sont des entiers positifs ou nuls et définies de la façon suivante :

(m, n) *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = x^m u x^n$.

On convient que, dans le cas où m (ou n) est nul, x^m (ou x^n) doit être supprimé au second membre de cette égalité. La condition $(0, 0)$ est évidemment triviale; la condition $(0, 1)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à gauche et la condition $(1, 0)$ exprime que chaque élément de D possède un élément unité à droite; nous étudierons seulement les conditions pour lesquelles on a $m+n>1$. Les demi-groupes vérifiant la condition $(1, 1)$ sont les demi-groupes *inversifs* (²); par analogie, nous poserons les définitions suivantes :

Définition 1. — Un demi-groupe *inversif à gauche* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(0, 2)$ *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = ux^2$.

Définition 2. — Un demi-groupe *inversif à droite* est un demi-groupe vérifiant la condition

$(2, 0)$ *Pour tout* $x \in \mathrm{D}$, *il existe* $u \in \mathrm{D}$ *tel que l'on ait* $x = x^2 u$ (³).

b. La seconde famille se compose des quatre conditions suivantes :

(J) *Tout idéal (à gauche, à droite ou bilatère) de* D *est semi-premier* (⁴);
(IG) *Tout idéal à gauche de* D *est semi-premier;*
(ID) *Tout idéal à droite de* D *est semi-premier;*
(I) *Tout idéal bilatère de* D *est semi-premier.*

(²) Ces demi-groupes ont été introduits par G. THIERRIN, *Comptes rendus*, t. 232, 1951, p. 376.

(³) Naturellement, la classe des demi-groupes inversifs ne coïncide pas avec celle des demi-groupes qui sont à la fois inversifs à gauche et inversifs à droite. En fait, deux des trois conditions $(1, 1)$, $(0, 2)$, $(2, 0)$ entraînent la troisième et il n'y a pas d'autre relation entre ces conditions (*voir* plus loin le tableau de la figure 1).

(⁴) Un idéal I (à gauche, à droite ou bilatère) de D est dit semi-premier s'il vérifie la condition

$$x^2 \in \mathrm{I} \Rightarrow x \in \mathrm{I}.$$

Il en résulte immédiatement que l'on a $x \in \mathrm{I}$ dès que l'on a $x^n \in \mathrm{I}$, quel que soit n entier positif.

c. *La troisième famille* comprend également quatre conditions :

(G) D *est réunion de groupes* [5];

(SG) D *est réunion de demi-groupes simples à gauche;*

(SD) D *est réunion de demi-groupes simples à droite;*

(S) D *est réunion de demi-groupes simples.*

Nous allons montrer, grâce aux propriétés et théorèmes suivants, que toutes ces conditions se réduisent à cinq conditions logiquement distinctes.

PROPRIÉTÉ 1. — *Les conditions* $(0, n)$ *pour* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

Il est trivial que $(0, n)$ entraîne $(0, q)$ pour $q \leqq n$. D'autre part, avec $n \geqq 2$, $(0, n)$ entraîne $(0, 2n-1)$ car l'égalité $x = ux^n$ permet d'écrire

$$x = (ux)\,x^{n-1} = (u^2 x^n)\,x^{n-1} = u^2 x^{2n-1};$$

par suite, $(0, n)$ avec $n \geqq 2$ entraîne $(0, n+1)$, d'où l'on déduit, par induction, que $(0, 2)$ entraîne $(0, n)$ pour tout $n \geqq 2$.

PROPRIÉTÉ 2. — *Les conditions* $(1, n)$ *pour* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

La démonstration est analogue à celle de la propriété 1, l'égalité $x = xux^n$ permettant d'écrire

$$x = (xux)\,x^{n-1} = (xuxux^n)\,x^{n-1} = (xuxu)\,x^{2n-1}.$$

PROPRIÉTÉ 3. — *Les conditions* (m, n) *pour* $m \geqq 2$ *et* $n \geqq 2$ *sont équivalentes entre elles.*

Évidemment, (m, n) entraîne (p, q) pour $p \leqq m$ et $q \leqq n$. D'autre part, (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$ entraîne $(2m-1, 2n-1)$ car, de l'égalité $x = x^m ux^n$, on déduit

$$x = x^{m-1}(xux)\,x^{n-1} = x^{m-1}(x^m ux^n ux^m ux^n)\,x^{n-1} = x^{2m-1}(ux^n ux^m u)\,x^{2n-1};$$

donc (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$ entraîne $(m+1, n)$ et $(m, n+1)$, d'où résulte, par double induction, que $(2, 2)$ entraîne (m, n) pour tout $m \geqq 2$ et tout $n \geqq 2$.

PROPRIÉTÉ 4. — *La condition* $(1, 2)$ *est équivalente à la conjonction des conditions* $(1, 1)$ *et* $(0, 2)$.

Il est évident que $(1, 2)$ entraîne $(1, 1)$ et $(0, 2)$. Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie $(1, 1)$ et $(0, 2)$, pour tout $x \in D$, on peut trouver $a \in D$ et $b \in D$ satisfaisant aux égalités $x = xax$ et $x = bx^2$; on en déduit

$$x = xa(bx^2) = x(ab)\,x^2,$$

donc D vérifie $(1, 2)$.

---

[5] Les demi-groupes vérifiant la condition (G) ont été étudiés par A. H. CLIFFORD, *Ann. of Math.*, t. 41, 1941, p. 1037-1049.

PROPRIÉTÉ 5. — *La condition* (0, 2) *est équivalente à la condition* (IG).

Si (0, 2) est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal à gauche de D contient x^2, il contient tout élément de Dx^2, donc en particulier x. Réciproquement, si un demi-groupe D vérifie (IG), quel que soit $x \in D$, l'idéal à gauche Dx^2, qui contient x^3, contient aussi x, d'où l'existence de u satisfaisant à (0, 2).

COROLLAIRE. — *La conjonction des conditions* (0, 2) *et* (2, 0) *est équivalente à la condition* (J).

Ceci résulte de la propriété 5 et de la propriété symétrique et du fait que la condition (J) équivaut à la conjonction des conditions (IG) et (ID).

Par analogie avec la propriété 5, nous avons la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 6. — *La condition* (I) *peut se mettre sous la forme*

(I') *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $a \in D$ *et* $b \in D$ *tels que l'on ait* $x = ax^2b$.

En effet, si un demi-groupe D vérifie (I), pour tout $x \in D$, l'idéal Dx^2D qui contient x^4 doit contenir x, d'où l'existence de a et b satisfaisant à (I'). Réciproquement, si (I') est vérifiée dans un demi-groupe D, et si un idéal de D contient x^2, il contient tout élément de Dx^2D, donc en particulier x.

THÉORÈME 1. — *Un demi-groupe à la fois inversif à gauche et inversif à droite est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe D est réunion de groupes, il vérifie les conditions (0, 2) et (2, 0) : il suffit de prendre pour élément u l'élément inverse de l'élément x dans un groupe auquel appartient x. Réciproquement, considérons un demi-groupe D satisfaisant aux conditions (0, 2) et (2, 0) : à tout élément $x \in D$, nous pouvons faire correspondre $a \in D$ et $b \in D$ tels que l'on ait $x = ax^2$ et $x = x^2b$; on peut écrire

$$(ax)(xb) = a(xxb) = ax = (axx)b = xb,$$

d'où résulte que l'élément $e = ax = xb$ est idempotent. Les égalités

$$x = (ax)x = ex \quad \text{et} \quad x = x(xb) = xe$$

montrent que cet idempotent est élément unité à gauche et à droite pour x. De plus, l'élément axb satisfait aux relations

$$(axb)x = a(xb)x = a(ax)x = ax = e,$$
$$x(axb) = x(ax)b = x(xb)b = xb = e$$

qui montrent qu'il constitue un inverse relatif pour x. Par suite, le demi-groupe D est réunion de groupes [6].

[6] *Cf.* A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, théorème 1.

Corollaire 1. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de groupes, il faut et il suffit que tous ses idéaux (à gauche, à droite et bilatères) soient semi-premiers.*

D'après le théorème 1 et le corollaire de la propriété 5, ces deux conditions sont, en effet, équivalentes à la conjonction des conditions (0, 2) et (2, 0).

Corollaire 2. — *La condition* (2, 2) *est équivalente à la conjonction des conditions* (0, 2) *et* (2, 0) *et à la condition* (G).

En effet, la condition (2, 2) entraîne les conditions (0, 2) et (2, 0). Réciproquement, si un demi-groupe vérifie la condition (G), il vérifie la condition (2, 2) : il suffit de prendre pour u le cube de l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x.

Théorème 2. — *Un demi-groupe à la fois inversif et inversif à gauche est réunion de groupes et réciproquement.*

Si un demi-groupe est réunion de groupes, il vérifie les conditions (1, 1) et (0, 2) en prenant pour u l'élément inverse de x dans un groupe auquel appartient x. Pour établir la réciproque, nous pouvons considérer, d'après la propriété 4, un demi-groupe D qui vérifie la condition (1, 2); quel que soit $x \in D$, nous pouvons trouver $y \in D$ satisfaisant à l'égalité

$$x = xyx^2; \tag{1}$$

d'après la propriété 2, le demi-groupe D vérifie la condition (1, 3) et, à l'élément yx, nous pouvons associer un élément z satisfaisant à l'égalité

$$yx = (yx)z(yx)^3; \tag{2}$$

d'après (1), nous pouvons écrire

$$(yx)^3x = (yx)y(xyx^2) = (yx)^2 \tag{3}$$

d'où résulte, en utilisant d'abord (1) et (2),

$$x = x(yx)x = x(yxz(yx)^3)x = (xyxz)(yx)^3x = (xyxz)(yx)^2; \tag{4}$$

d'après la condition (1, 2), à l'élément $(yx)^2$, correspond un élément t vérifiant l'égalité

$$(yx)^2 = (yx)^2t(yx)^4$$

dont on déduit d'après (4)

$$x = (xyxz)(yx)^2 = (xyxz)(yx)^2t(yx)^4 = xt(yx)^4;$$

de cette égalité, résulte, compte tenu de (3),

$$x^2(yx) = x(xyx) = xt(yx)^4(xyx) = xt(yx)((yx)^3x)(yx) = xt(yx)^4 = x,$$

ce qui montre que la condition (2, 0) est vérifiée par le demi-groupe D qui est donc une réunion de groupes d'après le théorème 1.

COROLLAIRE 1. — *Un demi-groupe inversif dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier est une réunion de groupes et réciproquement.*

Ceci résulte immédiatement de la propriété 5 et du théorème 2.

COROLLAIRE 2. — *La condition* (1, 2) *est équivalente à la condition* (2, 2).

C'est une conséquence du théorème 2 et du corollaire 2 du théorème 1.

LEMME 1. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal à gauche est semi-premier. En désignant par* $\mathcal{R}_g$ *la relation d'équivalence définie par*

$$x \equiv y(\mathcal{R}_g) \Longleftrightarrow \mathrm{D}x = \mathrm{D}y,$$

chaque classe de la partition correspondant à $\mathcal{R}_g$ *est un sous-demi-groupe simple à gauche de* D.

Soit a un élément quelconque de D; posons $\mathrm{D}a = \mathrm{I}$ et considérons l'ensemble S des éléments $x \in \mathrm{D}$ tels que l'on ait $\mathrm{D}x = \mathrm{I}$. Quel que soit $x \in \mathrm{S}$, on a $x^2 \in \mathrm{S}$ car l'inclusion $\mathrm{D}x^2 \subseteq \mathrm{D}x$ est évidente et l'inclusion $\mathrm{D}x \subseteq \mathrm{D}x^2$ résulte du fait que l'idéal à gauche $\mathrm{D}x^2$ est semi-premier. De là, on déduit l'égalité

$$\mathrm{I}x = \mathrm{D}x^2 = \mathrm{D}x = \mathrm{I}$$

qui montre que S est un sous-demi-groupe de D car, quels que soient $x \in \mathrm{S}$ et $y \in \mathrm{S}$, on a

$$\mathrm{D}xy = \mathrm{I}y = \mathrm{I}.$$

Montrons que S est un demi-groupe simple à gauche. Pour tout $x \in \mathrm{S}$ et tout $y \in \mathrm{S}$, de l'égalité $\mathrm{I}x = \mathrm{I}$ et du fait que y appartient à $\mathrm{D}y = \mathrm{I}$, on déduit l'existence de $i \in \mathrm{I}$ tel que l'on ait $ix = y$; or, l'égalité $\mathrm{D}y = \mathrm{I}$ prouve que l'élément i peut se mettre sous la forme $i = dy$ avec $d \in \mathrm{D}$. Le demi-groupe D vérifiant la condition (0, 2) d'après la propriété 5, il existe $u \in \mathrm{D}$ tel que l'on ait $d = ud^2$. Nous pouvons donc écrire

$$y = ix = (dy)x = d(yx) = (ud^2)(yx) = (ud)(dyx) = (ud)y = u(dy) = ui$$

d'où l'on déduit l'inclusion $\mathrm{D}y \subseteq \mathrm{D}i$ ce qui, compte tenu de l'inclusion évidente $\mathrm{D}i = \mathrm{D}dy \subseteq \mathrm{D}y$, entraîne $\mathrm{D}i = \mathrm{D}y$, c'est-à-dire $i \in \mathrm{S}$.

THÉORÈME 3. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples à gauche, il faut et il suffit que tous ses idéaux à gauche soient semi-premiers, c'est-à-dire qu'il soit inversif à gauche.*

La condition est suffisante d'après le lemme 1 et elle est nécessaire car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples à gauche vérifie la condition (0, 2).

COROLLAIRE. — *Un demi-groupe inversif qui est en même temps réunion de demi-groupes simples à gauche est réunion de groupes et, par suite, réunion de demi-groupes simples à gauche inversifs.*

C'est une conséquence des théorèmes 2 et 3.

Remarque. — Dans l'hypothèse du lemme 1, deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple à gauche de D sont nécessairement équivalents modulo $\mathcal{R}_g$. Il en résulte que tout sous-demi-groupe simple à gauche de D est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique, son saturé par $\mathcal{R}_g$, et que deux-sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.

En fait, cette propriété est valable sans hypothèse sur D :

PROPRIÉTÉ 7. — *Dans un demi-groupe* D *quelconque, tout sous-demi-groupe simple à gauche, s'il en existe, est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal unique et deux sous-demi-groupes simples à gauche maximaux distincts sont disjoints.*

La réunion des sous-demi-groupes simples à gauche d'une chaîne croissante (par rapport à la relation d'inclusion) de sous-demi-groupe simples à gauche est un sous-demi-groupe simple à gauche. Par suite, d'après le théorème de Zorn, tout sous-demi-groupe simple à gauche est inclus dans un sous-demi-groupe simple à gauche maximal. Le reste de la propriété 7 résulte du fait que le sous-demi-groupe R engendré par la réunion de deux sous-demi-groupes simples à gauche S et T ayant un élément commun a est simple à gauche : en effet, on a $\mathrm{R}a \supseteq \mathrm{S}a = \mathrm{S}$ et $\mathrm{R}a \supseteq \mathrm{T}a = \mathrm{T}$, d'où $\mathrm{R}a \supseteq \mathrm{R}$ et par suite $\mathrm{R}a = \mathrm{R}$; on en déduit, pour tout $s \in \mathrm{S}$, $\mathrm{R}s = \mathrm{R}$ et, pour tout $t \in \mathrm{T}$, $\mathrm{R}t = \mathrm{R}$; chaque élément $r \in \mathrm{R}$ étant le produit d'un nombre fini d'éléments de S et d'éléments de T, ceci entraîne $\mathrm{R}r = \mathrm{R}$, c'est-à-dire que R est simple à gauche.

LEMME 2. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. Quels que soient* $u \in \mathrm{D}$, $v \in \mathrm{D}$, *on a les relations :*

(1) $$\mathrm{D}u^2\mathrm{D} = \mathrm{D}u\mathrm{D},$$

(2) $$\mathrm{D}uv\mathrm{D} = \mathrm{D}vu\mathrm{D},$$

(3) $$\mathrm{D}u\mathrm{D}\mathrm{D}v\mathrm{D} = \mathrm{D}vu\mathrm{D}.$$

La relation (1) résulte immédiatement du fait que l'idéal $\mathrm{D}u^2\mathrm{D}$ est semi-premier.

L'idéal $\mathrm{D}uv\mathrm{D}$ contient $vuvu = (vu)^2$ donc aussi vu et, de même, l'idéal $\mathrm{D}vu\mathrm{D}$ contient uv, d'où la relation (2).

L'idéal $\mathrm{D}u\mathrm{D}\mathrm{D}v\mathrm{D}$ contient $vuvuvu = (vu)^3$, donc aussi vu; d'autre part, pour tout $d \in \mathrm{D}$, l'idéal $\mathrm{D}vu\mathrm{D}$ contient $(ud)vu(dv) = (udv)^2$, donc aussi udv et par suite tout élément de $u\mathrm{D}\mathrm{D}v$ et de $\mathrm{D}u\mathrm{D}\mathrm{D}v\mathrm{D}$, ce qui établit la relation (3).

LEMME 3. — *Soit* D *un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier. En désignant par* $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence définie par*

$$x \equiv y(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \mathrm{D}x\mathrm{D} = \mathrm{D}y\mathrm{D},$$

chaque classe de la partition correspondant à $\mathcal{R}$ *est un sous-demi-groupe simple de* D.

Si l'on a $x \equiv y(\mathcal{R})$, les relations (3) et (1) du lemme 2 entraînent

$$\mathrm{D}xy\mathrm{D} = \mathrm{D}y\mathrm{D}\mathrm{D}x\mathrm{D} = \mathrm{D}x\mathrm{D}\mathrm{D}x\mathrm{D} = \mathrm{D}x^2\mathrm{D} = \mathrm{D}x\mathrm{D}, \qquad \text{d'où} \qquad xy \equiv x(\mathcal{R}),$$

ce qui montre que chaque classe modulo $\mathcal{R}$ est un sous-demi-groupe de D.

Ce demi-groupe est simple : en effet, si l'on pose $\mathrm{D}x\mathrm{D} = \mathrm{I}$, on a $\mathrm{I}x\mathrm{I} = \mathrm{I}$ car l'idéal semi-premier $\mathrm{I}x\mathrm{I}$, évidemment inclus dans I, contient x; par suite, la relation $x \equiv y(\mathcal{R})$ entraîne l'existence de $h \in \mathrm{I}$ et $k \in \mathrm{I}$ tels que l'on ait $hxk = y$, d'où résulte $y \in \mathrm{D}h\mathrm{D}$ puisque cet idéal contient h; on en déduit $\mathrm{D}h\mathrm{D} = \mathrm{I}$, c'est-à-dire $x \equiv h(\mathcal{R})$ et l'on établit de même $x \equiv k(\mathcal{R})$.

THÉORÈME 4. — *Pour qu'un demi-groupe soit réunion de demi-groupes simples, il faut et il suffit que tous ses idéaux bilatères soient semi-premiers.*

La condition est suffisante d'après le lemme 3 et elle est nécessaire d'après la propriété 6 car un demi-groupe qui est réunion de demi-groupes simples vérifie la condition (I′).

La propriété suivante est conséquence immédiate du lemme 3 :

PROPRIÉTÉ 8. — *Dans un demi-groupe* D *qui est réunion de sous-demi-groupes simples, tout sous-demi-groupe simple est inclus dans un sous-demi-groupe simple maximal unique et deux sous-demi-groupes simples maximaux distincts sont disjoints* [7].

Il suffit, en effet, de remarquer que deux éléments d'un même sous-demi-groupe simple sont nécessairement équivalents modulo $\mathcal{R}$.

La propriété suivante précise, dans une certaine mesure, la structure des demi-groupes qui sont réunion de sous-demi-groupes simples :

PROPRIÉTÉ 9. — D *étant un demi-groupe dans lequel tout idéal bilatère est semi-premier, l'équivalence* $\mathcal{R}$ *définie dans le lemme* 2 *est régulière et le demi-groupe-quotient* $\mathrm{D}/\mathcal{R}$ *est un demi-treillis* [8].

La régularité de $\mathcal{R}$ résulte de la relation (3) du lemme 2 et le demi-groupe-quotient $\mathrm{D}/\mathcal{R}$ est un demi-treillis d'après les relations (1) et (2) de ce lemme.

---

(7) J'ignore si la propriété 8 est valable (comme la propriété 7) sans hypothèse sur D.

(8) La démonstration des lemmes 2 et 3 et de la propriété 9 n'est qu'une adaptation de la démonstration que fait A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, dans l'étude de la structure des demi-groupes qui sont réunions de groupes.

En groupant les résultats précédents et éventuellement les résultats symétriques, il nous reste cinq conditions logiquement différentes :

a. D *est réunion de groupes,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (G), (J), (m, n) avec $m \geqq 2$ et $n \geqq 2$, $(1, n)$ avec $n \geqq 2$, $(m, 1)$ avec $m \geqq 2$.

b. D *est inversif à gauche,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SG), (IG), $(0, n)$ avec $n \geqq 2$.

c. D *est inversif à droite,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (SD), (ID), $(m, 0)$ avec $m \geqq 2$.

d. D *est inversif,* ce qui se traduit par la condition $(1, 1)$.

e. D *est réunion de demi-groupes simples,* ce qui se traduit par une des conditions équivalentes : (S), (I), (I′).

Avant de résumer dans un tableau les implications liant ces cinq conditions, nous démontrons la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ 10. — *Un demi-groupe qui est à la fois inversif et réunion de demi-groupes simples est réunion de demi-groupes simples inversifs.*

Soit D un tel demi-groupe. Nous montrons que les classes modulo $\mathcal{R}$ définies dans le lemme 3 sont des demi-groupes inversifs : x étant un élément d'une telle classe X, puisque D est inversif, nous pouvons trouver $u \in D$ vérifiant l'égalité $x = xux$; cette égalité entraîne $x = (xux)ux = x(uxu)x$; en désignant par U la classe modulo $\mathcal{R}$ de l'élément u, nous avons, dans le demi-groupe-quotient $D/\mathcal{R}$ qui est un demi-treillis d'après la propriété 9,

$$X = XUX = XU \qquad \text{et} \qquad UXU = XU = X,$$

ce qui montre que l'élément uxu appartient à X; par conséquent, le demi-groupe simple X est inversif.

Dans le tableau de la figure 1, nous avons ajouté aux cinq conditions précédentes la condition

(SI) D *est réunion de demi-groupes simples inversifs*

qu'on peut encore mettre sous la forme

(SI′) *Pour tout* $x \in D$, *il existe* $a \in D$ *et* $b \in D$ *tels que l'on ait* $x = xax^2bx$.

Grâce à cette adjonction, le tableau est un sous-demi-treillis (par rapport à la conjonction logique) du treillis des conditions susceptibles d'être vérifiées dans un demi-groupe. Pour nous en assurer, nous utiliserons, d'une part, quatre contre-exemples destinés à montrer que les six conditions examinées sont effectivement distinctes, d'autre part, la propriété 10, le théorème 1, le théorème 2 et le symétrique du théorème 2 qui montrent que l'on a bien un sous-demi-treillis du treillis des conditions.

Exemple 1. — Le demi-groupe de Baer et Levi [9] est simple à gauche; par conséquent, il est inversif à gauche. Il n'est ni inversif ni inversif à droite car chacune de ces conditions entraîne, pour chaque élément, l'existence d'un élément unité à droite, ce qui n'est pas vérifié [10].

Exemple 2. — Le produit du demi-groupe de Baer et Levi et d'un demi-groupe anti-isomorphe au demi-groupe de Baer et Levi est simple; donc, il vérifie la condition (S). Il ne vérifie pas les conditions (1, 1), (0, 2), (2, 0) puisque le demi-groupe de Baer et Levi ne vérifie pas les conditions (1, 1) et (2, 0).

Exemple 3. — Le demi-groupe de toutes les applications d'un ensemble E dans lui-même est inversif; en effet, soit α une de ces applications et considérons

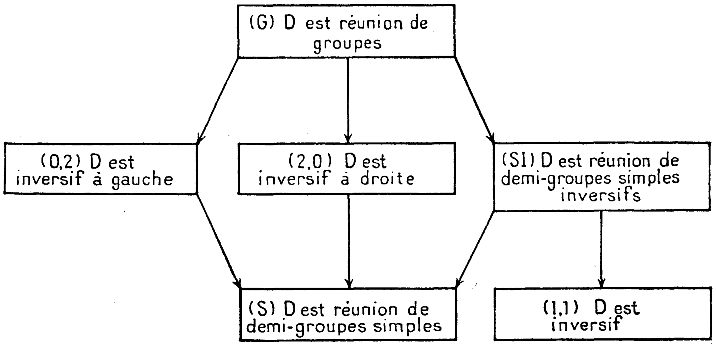

Fig. 1.

une application β telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$, pour tout $x \in \alpha(E)$; il existe évidemment toujours au moins une application vérifiant cette condition et elle satisfait à l'égalité $\alpha\beta\alpha = \alpha$. Ce demi-groupe n'est pas réunion de demi-groupes simples si E possède au moins trois éléments car il ne vérifie pas alors la condition (I') de la propriété 6; en effet, soient x et y deux éléments distincts de E et soit α l'application définie par $\alpha(x) = \alpha(y) = x$ et $\alpha(z) = y$ pour tout élément z de E différent de x et y; on a $\alpha^2(x) = \alpha^2(y) = \alpha^2(z) = x$, donc l'application α^2 est une application constante; par suite, quelles que soient les applications β et γ, l'application $\gamma\alpha^2\beta$ est également une application constante qui ne peut donc être égale à α.

---

(9) *Cf.* R. Baer et F. Levi, *Sitzungsb. der Heidelberger Akad. der Wissenschaften*, t. 18, 1932, p. 7. On entend d'ordinaire sous le nom de demi-groupe de Baer et Levi un demi-groupe plus général que celui qui a été utilisé par ces auteurs : il s'agit du demi-groupe de toutes les applications biunivoques α d'un ensemble E infini dans lui-même telles que le complémentaire de $\alpha(E)$ dans E ait une puissance déterminée au moins égale au dénombrable. *Cf.* M. Teissier, *C. R. Acad. Sc.*, t. 236, 1953, p. 1120.

(10) *Cf.* M. Teissier, *loc. cit.*, II, 2°.

Exemple 4. — E étant un ensemble infini quelconque, nous considérons les applications α de E dans E satisfaisant à la condition suivante :

(F) *Pour tout* $x \in E$, *l'ensemble* $\alpha^{-1}(x)$, *s'il n'est pas vide, est fini* ([11]).

Il est immédiat que ces applications forment un sous-demi-groupe D du demi-groupe de toutes les applications de E dans E. Nous allons montrer que le demi-groupe D vérifie la condition (SI) sans vérifier les conditions (0, 2) et (2, 0). Pour cela, nous établissons successivement que D est simple, qu'il est inversif et qu'il n'est pas réunion de groupes.

D'après la condition (F), quel que soit $\alpha \in D$, l'ensemble $\alpha(E)$ est équipotent à E. Considérons deux éléments quelconques, α et β, de D et montrons qu'il est possible de trouver deux éléments, γ et δ, de D tels que l'on ait $\beta = \delta\alpha\gamma$. Les ensembles $\beta(E)$ et $\alpha(E)$ étant équipotents d'après la remarque précédente, nous pouvons déterminer une application biunivoque π de $\beta(E)$ sur $\alpha(E)$. Considérons d'autre part une application τ (évidemment biunivoque) de $\alpha(E)$ dans E vérifiant $\tau(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Posons $\gamma = \tau\pi\beta$ et déterminons δ de façon à ce que sa trace sur $\alpha(E)$ coïncide avec π^{-1} et de façon à ce que la condition (F) soit réalisée, ce qui est toujours possible; nous aurons alors $\delta\alpha = \pi^{-1}\alpha$ et nous pourrons écrire

$$\delta\alpha\gamma = \pi^{-1}\alpha\tau\pi\beta = \pi^{-1}(\alpha\tau)\pi\beta = \pi^{-1}\pi\beta = \beta,$$

ce qui montre que D est simple.

Quel que soit $\alpha \in D$, nous pouvons déterminer une application β de E dans E satisfaisant à la condition (F) et telle que l'on ait $\beta(x) \in \alpha^{-1}(x)$ pour tout $x \in \alpha(E)$. Nous avons $\alpha\beta\alpha = \alpha$ et par suite D est inversif.

D n'est pas réunion de groupes. En effet, puisque D est simple, s'il était réunion de groupes, il serait complètement simple ([12]). Il ne peut en être ainsi car nous pouvons trouver dans D un idempotent non primitif : les idempotents de D sont les applications ε de E dans E vérifiant la condition (F) et la condition suivante :

(C) *Pour tout* $x \in \varepsilon(E)$, *on a* $\varepsilon(x) = x$;

ε étant l'un quelconque de ces idempotents, on peut trouver un idempotent φ différent de ε tel que l'on ait $\varphi\varepsilon = \varepsilon\varphi = \varphi$; il suffit pour cela que φ satisfasse aux conditions supplémentaires $\varphi(E) \subset \varepsilon(E)$ et $\varepsilon(x) = \varepsilon(y) \Rightarrow \varphi(x) = \varphi(y)$.

Remarque. — Si D est un demi-groupe fini qui soit réunion de demi-groupes simples, il est réunion de groupes : en effet, tout demi-groupe simple fini

([11]) Il suffirait d'une condition plus faible que la condition (F) :
Pour tout $x \in E$, *la puissance de l'ensemble* $\alpha^{-1}(x)$ *est bornée par une puissance fixe strictement inférieure à celle de* E.

([12]) *Cf.* A. H. Clifford, *loc. cit.*, lemme 2,7.

contient un idempotent, donc il contient un idempotent primitif; par suite, il est complètement simple et est donc réunion de groupes. Il en résulte que, dans le cas d'un demi-groupe fini, les conditions (G), (0, 2), (2, 0), (SI) et (S) sont équivalentes; la condition (1, 1) est plus faible qu'elles comme le montre l'exemple 3 qui peut être fini.

II. — Étude des demi-groupes définis par certains renforcements des conditions (m, n).

Nous considérons d'abord les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, pour tout x, l'unicité de l'élément u satisfaisant à la condition (m, n). Nous dirons qu'un tel demi-groupe vérifie la condition (m, n) *avec unicité*. Nous appellerons, en particulier, demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) *avec unicité* les demi-groupes qui vérifient la condition (1, 1) [ou la condition (0, 2), ou la condition (2, 0)] avec unicité.

THÉORÈME 5. — *Les seuls demi-groupes inversifs avec unicité sont les groupes.*

Un demi-groupe inversif avec unicité ne peut posséder deux idempotents distincts. En effet, soient deux idempotents e et f d'un tel demi-groupe D. Il existe un élément $g \in$ D vérifiant l'égalité $(ef)g(ef) = ef$; or, on sait que, si l'élément u qui satisfait à $xux = x$ est unique, on a $uxu = u$ [13]; par suite, l'élément g vérifie aussi l'égalité $g(ef)g = g$. Mais, $(ef)g(ef) = ef$ peut s'écrire

$$(ef)(fg)(ef) = ef \qquad \text{et} \qquad (ef)(ge)(ef) = ef,$$

d'où résulte $fg = ge = g$ d'après la condition d'unicité. On en tire $(ge)(fg) = g^2$, ce qui, compte tenu de $g(ef)g = g$ implique que g est un idempotent. Par suite, on a $ggg = g$ et l'on en déduit $ef = g$ en utilisant encore la relation $g(ef)g = g$ et la condition d'unicité. L'élément ef étant un idempotent, on peut écrire

$$(ef)e(ef) = ef \qquad \text{et} \qquad (ef)f(ef) = ef,$$

d'où résulte $e = f$ d'après la condition d'unicité.

Un demi-groupe inversif avec unicité D possédant au moins un idempotent, il en possède un et un seul que nous désignons par e. Soit x un élément quelconque de D et u l'élément de D qui lui correspond par la condition (1, 1). De $xux = x$, résulte $xu = ux = e$ qui est donc élément unité de D par rapport auquel tout élément de D admet un élément inverse. Par suite, D est un groupe.

THÉORÈME 6. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions* $(0, n)$

---

[13] *Cf.* G. THIERRIN, *loc. cit.*

pour $n \geqq 2$ avec unicité sont les groupes à gauche [14]. *En particulier, les seuls demi-groupes inversifs à gauche avec unicité sont les groupes à gauche.*

Un demi-groupe D vérifiant l'une des conditions $(0, n)$ pour $n \geqq 2$ avec unicité est réunion de demi-groupes simples à gauche d'après la propriété 1 et le théorème 3. Soit S l'un quelconque de ces demi-groupes simples à gauche; pour tout $x \in S$, il existe $u \in S$ satisfaisant à $x = ux^n$ (puisque S est simple à gauche) et cet élément u est unique d'après la condition d'unicité; il en résulte que S est un groupe à gauche [15], donc que D est réunion de groupes.

Par suite, D est réunion de demi-groupes complètement simples qui sont ses classes modulo l'équivalence $\mathcal{R}$ définie au lemme 3 [16]. D'après la condition d'unicité, chacun de ces demi-groupes complètement simples est un groupe à gauche (sinon, il contiendrait un groupe à droite qui ne serait pas un groupe et qui mettrait la condition d'unicité en défaut). Supposons que l'équivalence $\mathcal{R}$ ne soit pas l'équivalence absolue. D'après la propriété 9, nous pourrions trouver deux classes modulo $\mathcal{R}$ distinctes, soient S_α et S_β, telles que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. La réunion de S_α et S_β serait un demi-groupe dont la structure est connue grâce à un théorème de A. H. Clifford [17]. En utilisant les notations de ce théorème, S_β étant un groupe à gauche, l'application Φ devrait être un homomorphisme de S_α dans S_β. En désignant par E un élément idempotent de S_α, $E\Phi$ serait nécessairement l'élément unité du groupe G; d'autre part, l'application $i \rightarrow Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existerait $i_0 \in J$ tel que l'on ait $Ei_0 = i_0$; on pourrait alors écrire, en négligeant le second indice des éléments de S_β puisque K se réduit ici à un seul élément :

$$E(e;\, i_0)^n = E(e;\, i_0) = (E\Phi . e;\, Ei_0) = (e;\, i_0),$$

ce qui contredirait la condition d'unicité puisqu'on a évidemment déjà

$$(e;\, i_0)(e;\, i_0)^n = (e;\, i_0).$$

Donc, l'équivalence $\mathcal{R}$ est l'équivalence absolue, c'est-à-dire que D est simple et est un groupe à gauche.

---

[14] On appelle groupe à gauche un demi-groupe qui vérifie l'existence des quotients à gauche et la règle de simplification à droite. On sait que cette deuxième condition est équivalente, en présence de la première, à l'existence d'au moins un élément idempotent et qu'un tel demi-groupe est isomorphe au produit d'un groupe et d'un anti-semi-groupe à droite (demi-groupe dans lequel tout élément est permis à droite).

[15] Un demi-groupe simple à gauche dans lequel il existe deux éléments a et b tels que $ub = vb = a$ entraîne $u = v$ est un groupe à gauche. *Cf.* R. Croisot, *C. R. Acad. Sc.*, t. 237, 1953, p. 778, lemme 2.

[16] *Cf.* A. H. Clifford, *loc. cit.*, § 2.

[17] *Loc. cit.*, théorème 4.

THÉORÈME 7. — *Les seuls demi-groupes vérifiant l'une des conditions* (m, n) *pour* $m \geq 1$ *et* $n \geq 1$ *avec unicité sont les groupes.*

Pour $m = n = 1$, ceci a fait l'objet du théorème 5. Nous pouvons donc supposer qu'on a $m + n > 2$. Un demi-groupe D satisfaisant à l'hypothèse est alors nécessairement une réunion de groupes d'après le théorème 1, le théorème 2 ou le théorème symétrique du théorème 2. La condition d'unicité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent les classes modulo $\mathcal{R}$ sont des groupes, ce qui implique la permutabilité des idempotents de D [18]. Si e et f sont deux idempotents de D, nous pouvons donc écrire

$$(ef)^m e (ef)^n = (ef)^m f (ef)^n = ef,$$

d'où $e = f$ d'après la condition d'unicité. Le demi-groupe D contenant un seul idempotent, $\mathcal{R}$ est l'équivalence absolue et D est un groupe.

Remarquons maintenant que, dans un groupe, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) avec $m + n = 2$ est l'élément inverse de l'élément x; par suite, la correspondance entre x et u est alors réciproque. Il semble donc naturel d'étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) avec $m + n = 2$ auxquels on impose, de plus, cette réciprocité. Nous appellerons ces demi-groupes demi-groupes inversifs (ou inversifs à gauche, ou inversifs à droite) *avec réciprocité.*

LEMME 4. — *Un demi-groupe complètement simple est inversif avec réciprocité, inversif à gauche avec réciprocité, inversif à droite avec réciprocité.*

On sait [19] qu'un tel demi-groupe D peut être représenté de la façon suivante : G étant un groupe, J et K deux ensembles d'indices, et $(j, k) \to p_{kj}$ une application de $J \times K$ dans G, les éléments de D sont les triples $(a; j, k)$ avec $a \in G$, $j \in J$, $k \in K$, la loi de composition étant donnée par

$$(a; j, k)(a'; j', k') = (a p_{kj'} a'; j, k').$$

Soit alors $x = (a; j, k)$ un élément quelconque de D; cherchons comment doit être choisi $u = (a'; j', k')$ pour qu'on ait $xux = x$; on doit avoir pour cela :

$$(a p_{kj'} a' p_{k'j} a; j, k) = (a; j, k);$$

on peut donc choisir arbitrairement j' et k', puis déterminer a' par l'éga-

---

(18) En effet, soient A et B deux classes modulo $\mathcal{R}$; soient e et f leur élément unité respectif; il existe une classe modulo $\mathcal{R}$, soit C, telle que l'on ait $AB \subseteq C$ et $BA \subseteq C$; g étant l'élément unité de C, on peut écrire $(ef)g = e(fg) = eg = g$, d'où $ef = g$, et de même $fe = g$. On obtient ainsi une propriété caractéristique des demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les idempotents sont permutables : leurs sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes.

(19) *Cf.* D. REES, *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, t. 36, 1940, p. 387-400.

lité $(ap_{kj'})(a'p_{k'j}) = e$, élément unité de G. Mais cette égalité peut aussi se mettre sous la forme $(a'p_{k'j})(ap_{kj'}) = e$, ce qui établit la réciprocité entre x et u. Donc, D est inversif avec réciprocité.

En utilisant les mêmes notations, cherchons maintenant comment on doit choisir u pour qu'on ait $x = ux^2$; on doit alors vérifier l'égalité

$$(a'p_{k'j}ap_{kj}a;\, j',\, k) = (a;\, j,\, k);$$

donc, j' doit être égal à j, k' est arbitraire et a' doit satisfaire à $(a'p_{k'j})(ap_{kj}) = e$. Ceci s'écrit encore $(ap_{kj})(a'p_{k'j}) = e$, d'où la réciprocité entre x et u. Donc, D est inversif à gauche avec réciprocité et, par symétrie, inversif à droite avec réciprocité.

LEMME 5. — *Soit* D *un demi-groupe vérifiant la condition*

$$xyx = x \Rightarrow yxy = y;$$

soit $\mathcal{R}$ *la relation d'équivalence définie dans* D *par*

$$a \equiv b(\mathcal{R}) \Leftrightarrow \mathrm{D}a\mathrm{D} = \mathrm{D}b\mathrm{D};$$

si un produit d'éléments de D *est égal à un idempotent, tous les éléments de ce produit sont équivalents à cet idempotent modulo* $\mathcal{R}$.

Considérons d'abord le cas d'un produit de deux éléments : $uv = e$, idempotent de D; on a $e = euv \in \mathrm{D}u\mathrm{D}$; d'autre part, on peut écrire

$$(ve)\,u(ve) = ve(uv)e = veee = ve,$$

d'où résulte, d'après l'hypothèse, $u = u(ve)u = (uv)eu$, ce qui entraîne $u \in \mathrm{D}e\mathrm{D}$; on a donc $u \equiv e(\mathcal{R})$; par symétrie, on a également $v \equiv e(\mathcal{R})$.

Considérons maintenant le cas d'un produit de trois éléments : $uvw = e$, idempotent de D; cette égalité peut s'écrire $u(vw) = e$ ou $(uv)w = e$, d'où résulte, d'après ce qu'on vient d'établir $u \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$; d'autre part, on a

$$(weuv)(weuv) = we(uvw)e(uv) = w(eee)uv = weuv,$$

ce qui montre que cet élément est un idempotent, soit f; on peut alors écrire $(weu)v = f$ et $w(euv) = f$, d'où l'on déduit $v \equiv w \equiv f(\mathcal{R})$, et, par suite, $u \equiv v \equiv w \equiv e(\mathcal{R})$.

Le cas d'un nombre quelconque d'éléments en résulte immédiatement.

THÉORÈME 8. — *Les demi-groupes inversifs avec réciprocité sont les demi-groupes complètement simples.*

D'après le lemme 4, il suffit de montrer qu'un demi-groupe inversif avec réciprocité est un demi-groupe complètement simple.

Montrons d'abord qu'un tel demi-groupe D est simple; D étant inversif, on a $\mathrm{D}^3 = \mathrm{D}$ et il suffit d'établir que l'équivalence $\mathcal{R}$ définie dans le lemme 5 est l'équivalence absolue. Soient x et y deux éléments quelconques de D; on peut trouver $z \in D$ tel que l'élément $(xy)z$ soit idempotent ([20]); il en résulte, d'après le lemme 5, que les éléments x et y sont équivalents modulo $\mathcal{R}$, c'est-à-dire que l'équivalence $\mathcal{R}$ est bien l'équivalence absolue.

Soit e un idempotent de D; nous montrons qu'il est primitif. En effet, si f est un idempotent de D vérifiant les égalités $ef = fe = f$, on a $fef = f$, d'où $efe = e$, d'après la condition de réciprocité, ce qui entraîne $e = f$. Le demi-groupe simple D est donc complètement simple.

THÉORÈME 9. — *Les demi-groupes inversifs à gauche avec réciprocité sont les demi-groupes complètement simples.*

En vertu du lemme 4, il reste à établir qu'un demi-groupe D inversif à gauche avec réciprocité est complètement simple.

A tout élément $x \in D$, on peut faire correspondre $u \in D$ tel que l'on ait $x = ux^2$; on en déduit $u = xu^2$ d'après la condition de réciprocité, d'où résulte $x = xu^2x^2$, ce qui entraîne que D est inversif. D est donc réunion de groupes d'après le théorème 2.

Il suffit de montrer que D est simple. S'il n'en était pas ainsi, nous pourrions trouver deux sous-demi-groupes simples maximaux de D, soient S_α et S_β, tels que l'on ait $S_\alpha S_\beta \subseteq S_\beta$ et $S_\beta S_\alpha \subseteq S_\beta$. Considérons, dans cette hypothèse, un idempotent de S_α, soit E; en utilisant à nouveau les notations de A. H. Clifford ([17]), l'application $i \rightarrow Ei$ de l'ensemble J dans lui-même étant idempotente, il existe $j \in J$ tel que l'on ait $Ej = j$; prenons un élément x de S_β de la forme $(a; j, k)$, a étant un élément de G et k un élément de K fixé arbitrairement; le produit Ex^2 peut s'écrire

$$Ex^2 = E(ap_{kj}a; j, k) = (E\Phi.p_{1E,j}ap_{kj}a; j, k);$$

si l'on choisit alors a de façon à satisfaire à l'égalité $E\Phi.p_{1E,j}ap_{kj} = e$, élément unité de G, on a $Ex^2 = x$, ce qui contredit la condition de réciprocité, car l'élément xE^2 appartient à S_β et il ne peut être égal à E.

La fin de ce travail se justifie par la remarque suivante : dans un demi-treillis, l'élément u satisfaisant à une condition (m, n) appartient à l'idéal principal engendré par l'élément x; par suite, la correspondance entre x et u est alors anti-réciproque (u correspond à x et x correspond à u entraînent $x = u$). C'est pourquoi nous allons étudier les demi-groupes définis par l'une des conditions (m, n) auxquels on impose, de plus, cette anti-réciprocité. Nous dirons qu'ils vérifient la condition (m, n) considérée *avec anti-réciprocité*.

([20]) En réalité, nous utilisons seulement le fait que D est un demi-groupe inversé (*Cf.* G. THIERRIN, *C. R. Acad. Sc.*, t. 234, 1952, p. 1336). Par conséquent, les demi-groupes inversés vérifiant la condition du lemme 5 sont les demi-groupes complètement simples.

THÉORÈME 10. — *Les demi-groupes inversifs avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs* ([21]).

Soit D un demi-groupe inversif avec anti-réciprocité. Pour tout $x \in D$, il existe $u \in D$ tel que l'on ait $x = xux$; cette égalité entraîne

$$x = xu(xux) = x(uxu)x \quad \text{et} \quad uxu = ux(uxu)xu = (uxu)x(uxu),$$

d'où $x = uxu$, d'après la condition d'anti-réciprocité; on en tire

$$x^2 = (uxu)x = u(xux) = ux \quad \text{et} \quad x^2 = x(uxu) = (xux)u = xu, \quad \text{d'où} \quad ux = xu.$$

Par suite, l'égalité $x = xux$ peut s'écrire $x = ux^2$, ce qui montre que D est inversif à gauche et par conséquent réunion de groupes en vertu du théorème 2. La condition d'anti-réciprocité entraîne alors que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes et que ces groupes sont involutifs.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes involutifs. D est évidemment inversif. Supposons que x et u soient deux éléments de D vérifiant les égalités $x = xux$ et $u = uxu$. Si l'on désigne par X et U respectivement les sous-demi-groupes simples maximaux qui contiennent x et u, on a, dans le demi-treillis $D/\mathcal{R}$ défini dans la propriété 9,

$$X = XUX = XU \quad \text{et} \quad U = UXU = XU, \quad \text{d'où} \quad X = U,$$

c'est-à-dire que x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal. Celui-ci étant un groupe involutif, on a $x = u$, d'où la condition d'anti-réciprocité.

THÉORÈME 11. — *Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions* (m, n) *pour* $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $m + n \geqq 3$ *avec anti-réciprocité sont les demi-groupes réunions de groupes dans lesquels les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant, pour* $k = m + n$, *à la propriété*

(P_k) *Si l'ordre d'un élément divise* $k(k-2)$, *cet ordre divise* k ([22]).

Soit D un demi-groupe vérifiant une condition (m, n) pour $m \geqq 1$, $n \geqq 1$, $m + n \geqq 3$ avec anti-réciprocité. Il est réunion de groupes. La condition d'anti-réciprocité entraîne que les demi-groupes complètement simples qui constituent ses sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes. Si x est un élément quelconque d'un tel groupe, soit G, il existe dans G un élément et un seul u satisfaisant à l'égalité $x = x^m u x^n$; c'est l'élément $u = x^{1-m-n}$.

([21]) La structure de ces demi-groupes est connue d'après l'étude de A. H. CLIFFORD, *loc. cit.*, § 3, en vertu de la remarque de la note ([18]). Ils sont nécessairement commutatifs.

([22]) Il est remarquable que ceci n'impose aucune condition si $k = 3$.

Supposons alors que G possède un élément g dont l'ordre divise $k(k-2)$ pour $k=m+n$; en prenant $x=g$, nous avons $u=g^{1-k}$ et en prenant $x=g^{1-k}$, nous avons $u=g^{(1-k)^2}=g^{k(k-2)}g=g$; on en déduit, d'après la condition d'anti-réciprocité, $g=g^{1-k}$, c'est-à-dire que l'ordre de g divise k.

Réciproquement, soit D un demi-groupe réunion de groupes dans lequel les sous-demi-groupes simples maximaux sont des groupes satisfaisant à la propriété (P_k). On voit d'abord, comme dans la réciproque du théorème 10 que les égalités $x=x^m u x^n$ et $u=u^m x u^n$ peuvent être compatibles seulement si x et u appartiennent au même sous-demi-groupe simple maximal; s'il en est ainsi, nous pouvons écrire $u=x^{1-m-n}$ et $x=u^{1-m-n}$, d'où résulte, puisqu'on a $m+n=k$, la propriété (P_k) étant vérifiée,

$$x=x^{(1-k)^2}=x^{k(k-2)}x=x^{-k}x=x^{1-k}=u.$$

La condition d'anti-réciprocité est donc réalisée.

Remarque. — Les demi-groupes vérifiant l'une des conditions $(0, n)$ pour $n \geq 2$ avec anti-réciprocité peuvent avoir une structure très compliquée car il en est ainsi en particulier des demi-groupes réunions de demi-groupes simples dans lesquels chaque sous-demi-groupe simple maximal est un demi-groupe simple à gauche sans idempotent ou un groupe à gauche dont les sous-groupes maximaux sont involutifs si $n=2$ ou satisfont à la propriété (P_n) si $n>2$.