Annales scientifiques de l'É.N.S.

Taro Ura

Sur les courbes définies par les équations différentielles dans l'espace à *m* dimensions

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 4 (1953), p. 287-360
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_4_287_0>

SUR

LES COURBES DÉFINIES

PAR

LES ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES DANS L'ESPACE A m DIMENSIONS

PAR M. TARO URA.

INTRODUCTION.

Les travaux de H. Poincaré sur les courbes définies par les équations différentielles ont ouvert une nouvelle porte d'accès aux études des équations différentielles, c'est-à-dire que, par là, on a commencé les recherches qualitatives des solutions de ces équations. Après lui, beaucoup de géomètres ont repris ses idées et les ont approfondies et étendues à divers points de vue.

Je me propose de même de traiter les courbes définies par les équations, sous des conditions plus faibles de continuité et sous des hypothèses plus générales sur le domaine de définition des équations, autant qu'il est possible sans perdre des caractères intéressants des solutions.

Ainsi, envisageant des équations dans un domaine de l'espace à m dimensions, je ne suppose ni que les deuxièmes membres des équations soient holomorphes, ni que les points singuliers soient isolés, ni *a fortiori* qu'ils soient de première espèce. Cependant, pour confirmer l'existence et l'unicité des solutions, je suppose que les dérivées partielles du premier ordre des deuxièmes membres sont continues, et pour une autre raison, que le domaine de définition des équations est borné.

Au chapitre I, nous donnons les hypothèses précises, expliquons des notations spéciales et démontrons des théorèmes fondamentaux de la théorie des équations différentielles, les modifiant sous une forme convenable pour les chapitres suivants.

Outre les hypothèses, le paragraphe I est consacré à la démonstration de l'existence et à l'énoncé de l'unicité des solutions d'après les théorèmes de Cauchy et de Lipschitz, en portant l'attention sur l'intervalle de définition des solutions. Nous étudions au paragraphe II le prolongement primitif d'une solution et la continuité des solutions par rapport aux points initiaux.

Au paragraphe III, nous considérons les solutions périodiques et expliquons la notion de caractéristiques, d'après la terminologie de Poincaré, et la relation entre les caractéristiques et les arcs ou les courbes de Jordan représentés par les solutions. Enfin nous donnons au paragraphe IV la définition de surfaces sans contact dans l'espace, d'abord en un point, puis dans un sous-domaine du domaine de définition des équations. Cette dernière définition semble un peu curieuse, mais elle aura une commodité.

Au chapitre II, nous envisageons les points limites d'une caractéristique et les régions invariantes.

L'objet du paragraphe I est la définition des points limites d'une caractéristique et la démonstration des théorèmes fondamentaux, sans supposer ni que l'ensemble des points limites soit disjoint d'avec la frontière du domaine de définition, ni qu'il soit contenu dans l'ensemble des points singuliers ou dans l'ensemble des points réguliers. Contrairement au paragraphe I, nous supposons au paragraphe II que les points limites sont contenus dans le domaine de définition ; nous démontrons quelques théorèmes, surtout en vue de traiter les régions invariantes.

Au paragraphe III, définissant les régions invariantes, nous voyons des propriétés fondamentales, surtout leurs relations avec les points limites des caractéristiques. On remarque que nous ne supposons pas qu'une région invariante soit fermée.

Le chapitre III traite de notions nouvelles de prolongement. Nous définissons au paragraphe I un ensemble D relatif à une caractéristique ou à un point de la frontière du domaine de définition des équations. Nous appelons un point de l'ensemble D prolongement indirect d'une caractéristique ou d'un point de la frontière du domaine de définition des équations. Cette notion est une extension de celle de Poincaré de prolongement d'une caractéristique aboutissant à un col. Le paragraphe II est consacré à une extension de la notion de prolongement indirect, par la définition d'un autre ensemble E, à titre d'introduction à une troisième extension. Cette dernière extension nous amène à obtenir un ensemble F fermé, connexe, et à un certain point de vue, réversible.

Nous traitons au chapitre IV le problème de stabilité. Au début du paragraphe I, l'emploi de l'ensemble des points limites nous permet d'introduire la notion classique de stabilité (de Liapounoff) et de l'étendre à une région invariante fermée. En outre, nous étendons la notion de centres au sens de

Bendixson au cas général d'un nombre de dimensions arbitraire et montrons la relation entre la notion de centres et celle de stabilité. Le paragraphe II introduit une notion nouvelle de stabilité plus forte que celle du paragraphe I. Cette définition est établie à l'aide de l'ensemble E du chapitre III et nous exprimons des propriétés d'une région invariante fortement stable avec les ensembles E et F.

Au chapitre V, nous revenons à l'étude des points limites d'une caractéristique. Nous les considérons dans le domaine de l'espace R_m au paragraphe I, et dans celui du plan au paragraphe II. Mais laissant de côté les théorèmes classiques, nous étudions le cas où les points limites d'une caractéristique contiennent en même temps des points réguliers, des points singuliers, et des points de la frontière du domaine de définition des équations.

En terminant cette introduction, l'auteur se fait un honneur d'exprimer ses remercîments les plus vifs à MM. Chazy, Denjoy et Kunugi, pour l'intérêt qu'ils lui ont témoigné et pour les conseils qu'ils lui ont donnés au cours de la préparation de ce Mémoire.

CHAPITRE I.

Théorèmes fondamentaux.

I. — Hypothèses, existence et unicité des solutions.

1. Dans ce Mémoire, nous envisageons toujours les équations différentielles

$$(1)\qquad \frac{dx_1}{X_1(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \frac{dx_2}{X_2(x_1, x_2, \ldots, x_m)} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$$

dans un domaine borné A *de l'espace* R_m *à* m *dimensions,* dont les coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$ d'un point sont réelles. Nous supposons toujours que *les* m *fonctions* $X_i(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *dans les équations* (1) *sont continues partout dans le domaine* A, *ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport aux variables* $x_1, x_1, \ldots, x_m$.

Nous conviendrons de désigner le point $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ par P et le vecteur $\overrightarrow{(x_1, x_2, \ldots, x_m)}$ par $\vec{P}$, ce qui nous fait écrire les équations (1) sous la forme

$$(2)\qquad \frac{dx_1}{X_1(P)} = \frac{dx_2}{X_2(P)} = \ldots = \frac{dx_m}{X_m(P)} = dt = -\,ds,$$

introduisant deux paramètres réels t et s, dont le premier est habituellement appelé le temps, ou bien, sous la forme

$$(3)\qquad \frac{dx_i}{dt} = X_i(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m)$$

et

$$(3\ bis)\qquad \frac{dx_i}{ds} = -\,X_i(P) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

Remarquons que, par hypothèse, les deuxièmes membres des équations (3) et (3 *bis*) sont des fonctions des variables dépendantes $x_1, x_2, \ldots, x_m$, mais *elles ne contiennent pas les variables indépendantes t ou s*. On dit quelquefois que les équations (3) définissent un mouvement dans le domaine A.

Pour éviter de répéter l'exposition des notations, nous fixons une fois pour toutes quelques correspondances entre les deux sortes de notations qui représenteront un point :

1° le point P est le point de coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_m$;
2° le point P_i est le point $(x_1^i, x_2^i, \ldots, x_m^i)$;
3° le point Q est le point $(y_1, y_2, \ldots, y_m)$;
4° le point Q_i est le point $(y_1^i, y_2^i, \ldots, y_m^i)$; etc.

Dans la suite, quand on considère un point, par exemple Q_0, on doit savoir que ses coordonnées sont y_i^0 $(i = 1, 2, \ldots, m)$, même si nous ne précisons pas cette notation y_i^0, et inversement.

De plus pour simplifier l'exposition, nous définissons la distance de deux points quelconques P et Q comme suit :

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i|.$$

Suivant cette définition, le δ-voisinage d'un point P signifie l'ensemble des points Q tels que l'on ait

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} |x_i - y_i| < \delta.$$

Cette distance diffère de la distance euclidienne, mais elle donne, bien entendu, la topologie équivalente à celle de l'espace euclidien.

2. Nous désignons par S l'ensemble des points P du domaine A qui satisfont à la fois aux équations

$$X_1(P) = 0, \ X_2(P) = 0, \qquad \ldots, \qquad X_m(P) = 0;$$

nous traduisons ce fait par la formule

$$S = [P : X_1(P) = 0, \ X_2(P) = 0, \ldots, X_m(P) = 0, \ P \in A].$$

On appelle un point P de l'ensemble S point singulier des équations.

Soit R le complément de l'ensemble S par rapport au domaine A; nous appelons un point de l'ensemble R point régulier des équations ; par définition, si P est un point régulier, $P \in R$, il y a au moins un X_i qui ne s'annule pas au point P. Nous remarquons d'ailleurs que *l'ensemble* R *est ouvert dans* A *ainsi que dans* R_m, mais que l'ensemble S n'est pas toujours fermé dans R_m, bien qu'il le soit toujours dans le domaine A, puisque A est ouvert; cependant *la réunion de* *l'ensemble* S *et de la frontière* $\dot{\mathrm{A}}$ *du domaine* A *est fermée dans* R_m *et en conséquence compacte, puisque, par l'hypothèse, le domaine* A *est borné.*

3. Si m fonctions $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots,$ $x_m(t)$ définies dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres quelconques positifs ou infinis, satisfont aux équations (3), c'est-à-dire, si l'on a

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \mathrm{X}_i(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_m(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

pour toute valeur de t de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$ et que l'on a $x_i(0) = x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, on dit que le système des m fonctions $x_1(t)$, $x_2(t), \ldots, x_m(t)$ est une solution des équations (3) définie dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, passant par le point P à l'époque $t = 0$. Nous désignons cette solution par $\mathrm{P}(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$. Dans ce cas il est aisé de voir que $\mathrm{P}(-s)$ est une solution des équations (3 *bis*) définie dans l'intervalle $-\beta < s < \alpha$, passant par le même point P à l'époque $s = 0$, et réciproquement.

A cause de cette relation entre les équations (3) et (3 *bis*), si un théorème sur une propriété concernant $t > 0$ des solutions des équations (3) est établi, le même théorème subsiste pour la même propriété concernant $s < 0$ des solutions des équations (3 *bis*). Donc, si une hypothèse sur $t > 0$ des équations (3) entraîne une conclusion sur $t > 0$ (ou sur $t < 0$) des solutions des équations (3), sous la même hypothèse sur $t < 0$ des équations (3), la même conclusion sur $t < 0$ (ou $t > 0$ respectivement) subsiste automatiquement. Profitant de ce caractère, même si des théorèmes ou des définitions s'appliquent aux deux sens de t, nous ne les démontrons et quelquefois ne les énonçons que pour le sens positif.

On désigne par $\mathrm{P}(t_1)$ le point de la solution $\mathrm{P}(t)$ correspondant à l'époque $t = t_1$, si t_1 est contenu dans l'intervalle de définition de $\mathrm{P}(t)$.

4. Soit P_0 un point quelconque du domaine A ; pour un nombre positif assez petit ρ, l'ensemble fermé

$$\overline{\mathrm{U}} = [\mathrm{Q} : |y_i - x_i^0| \leqq \rho,\ i = 1, 2, \ldots, m]$$

est contenu dans A.

Les fonctions X_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ étant continues dans A et ne contenant pas la variable indépendante t, il existe, d'après le théorème de Cauchy, une solution $\mathrm{P}_0(t)$ passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$, définie et contenue dans l'ensemble $\overline{\mathrm{U}}$, pour les valeurs de l'intervalle $-\frac{\rho}{m\mathrm{M}} \leqq t \leqq \frac{\rho}{m\mathrm{M}}$, *a fortiori* pour celles de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, où α et β sont égaux à $\frac{\rho}{m\mathrm{M}} > 0$ et où M est une constante telle que l'on ait

$$|\mathrm{X}_i(\mathrm{P})| \leqq \mathrm{M} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

dans l'ensemble $\overline{U}$. Il est clair que le nombre M existe, puisque les fonctions X_i sont continues dans $\overline{U}$, et que l'ensemble $\overline{U}$ est compact.

D'autre part, utilisant la continuité des dérivées partielles $\frac{\partial X_i}{\partial x_l}(i, j = 1, \ldots, m)$, on démontre à l'aide du théorème de Lipschitz, que la solution $P_0(t)$ passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$ est unique, c'est-à-dire que, si l'on désigne par $P_0(t)$ et $P'_0(t)$ deux solutions arbitraires des équations (3) passant par le point P_0 à l'époque $t = 0$, la première étant définie pour $-\alpha_0 < t < \beta_0$, la seconde pour $-\alpha'_0 < t < \beta'_0$, on a identiquement

$$P_0(t) \equiv P'_0(t)$$

pour toutes les valeurs de t entre $-$ minimum (α_0, α'_0) et minimum (β_0, β'_0).

5. Soient P_0 un point qnelconque du domaine A et U et V deux voisinages du point P_0, tels que la fermeture $\overline{U}$ de U soit contenue dans V et la fermeture $\overline{V}$ de V dans A :

$$\overline{U} \subset V, \qquad \overline{V} \subset A :$$

je dis qu'alors *il existe un nombre positif* ε *indépendant des points* P *de la fermeture* $\overline{U}$, *tel que, pour tout point* P *de la fermeture* $\overline{U}$, *la solution* $P(t)$ *soit définie et contenue dans* V *pour* $|t| < \varepsilon$.

En effet, soit ρ une valeur positive inférieure à la distance de l'ensemble fermé $\overline{U}$ et de la frontière $\dot{V}$ de l'ensemble V :

$$\rho < \operatorname{dist}(\overline{U}, \dot{V}).$$

Cette valeur ρ existe, car dist $(\overline{U}, \dot{V})$ est positif, $\overline{U}$ étant contenu dans V. Désignons par $\overline{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$ l'intervalle fermé :

$$\overline{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right) = \left[Q : |y_i - x_i| \leqq \frac{m}{\rho},\ i = 1, 2, \ldots, m\right],$$

de sorte que, si l'on désigne par Q un point quelconque de l'intervalle $\overline{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$, on a

$$\operatorname{dist}(P, Q) = \sum_{i=1}^{m} |y_i - x_i| \leqq \frac{\rho}{m} m = \rho;$$

si l'on a $P \in U$, l'intervalle $\overline{I}\left(P, \frac{m}{\rho}\right)$ est contenu dans V. Or, il existe un nombre positif M, tel que l'on ait

$$|X_i(Q)| \leqq M.$$

pour tout point Q de l'ensemble $\overline{V}$ et pour tout indice $i = 1, 2, \ldots, m$; donc, d'après le théorème de Cauchy, si l'on désigne par P un point arbitraire de $\overline{U}$, la solution $P(t)$ est définie et contenue dans $\overline{I}\left(P, \frac{\rho}{m}\right)$ et *a fortiori* dans V pour $|t| < \varepsilon$, ε désignant le nombre positif $\frac{\rho}{mM}$.

Soit B un sous-ensemble du domaine A ; supposons que, pour tout point P de l'ensemble B, la solution $P(t)$ soit définie pour $-a < t < b$, a et b étant deux nombres positifs ou infinis indépendants du point P, et que t_1 soit une valeur quelconque comprise entre $-a$ et b ; nous désignons par $B(t_1)$ l'ensemble de toutes les positions à l'époque $t = t_1$ des points qui appartiennent à B à l'époque $t = 0$, et qui se meuvent selon les équations (3).

6. Supposons que la solution $P(t)$ soit définie $-\alpha < t < \beta$, et désignons par P_1 le point $P(t_1)$, t_1 étant une valeur quelconque de t entre $-\alpha$ et β. Comme les fonctions $X_i(P)$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ ne contiennent pas la variable indépendante t, nous avons identiquement

$$P(t_1 + t) \equiv P_1(t),$$

pour toutes les valeurs de t entre-minimum $(\alpha + t_1, \alpha_1)$ et minimum $(\beta - t_1, \beta_1)$, où $P_1(t)$ désigne la solution définie pour $-\alpha_1 < t < \beta_1$, passant par le point P_1 à l'époque $t = 0$.

Quand on a

$$\beta - t_1 < \beta_1,$$

$P(t)$ peut être une solution pour $-\alpha < t < \beta_1 + t_1$, si l'on définit $P(t)$ par l'équation

$$P(t) = P_1(t - t_1) \qquad \text{pour} \quad \beta \leqq t < \beta_1 + t_1 ;$$

on dit que la solution $P(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$ est prolongée pour $\beta \leqq t < \beta_1 + t_1$, ou pour $-\alpha < t < \beta_1 + t_1$.

De la même manière on peut prolonger la solution $P(t)$ pour $-\alpha_1 + t_1 < t \leqq -\alpha$, si l'on a

$$-\alpha_1 + t_1 < -\alpha.$$

7. On sait que, si P est un point singulier, $P(t) \equiv P$, pour $-\infty < t < \infty$, est l'unique solution qui passe par le point P à l'époque $t = 0$, et que, si P est un point régulier et si la solution $P(t)$ est définie dans l'intervalle $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres positifs ou infinis, $P(t)$ se place toujours dans l'ensemble R pour $-\alpha < t < \beta$.

Nous appelons régulière une solution qui passe par un point régulier à l'époque $t = 0$ et singulière une solution constante du point singulier. Ce que nous venons de voir montre que tout point d'une solution régulière est régulier, et que tout point d'une solution singulière est singulier.

II. — Continuité.

8. Soit $P(t)$ une solution des équations (3) définie pour $-\alpha < t < \beta$, α, β étant deux nombres positifs ou infinis, et soit t_1 une valeur comprise $-\alpha$ et β. Il est aisé de voir que l'on a

$$\lim_{t \to t_1} P(t) = P(t_1),$$

puisque la solution $P(t)$ est continue.

Soit P un point singulier et soit $P(t)$ la solution définie pour $-\alpha < t < \beta$. Même si α ou β est fini, comme nous l'avons vu, la solution $P(t)$ est prolongeable pour $-\infty < t < \infty$, et l'on a

$$P(t) \equiv P \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty,$$

et

$$\lim_{t \to \pm\infty} P(t) = P.$$

9. Soit P un point régulier. Supposons qu'une des extrémités, par exemple β, de l'intervalle de définition de la solution $-\alpha < t < \beta$, soit finie et qu'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n)\, Q \in A;$$

je dis qu'il existe $\lim\limits_{t \to \beta - 0} P(t)$, de sorte que l'on a

$$\lim_{t \to \beta - 0} P(t) = Q \in A.$$

En effet, soit U un voisinage assez petit du point Q, dont la fermeture $\overline{U}$ est contenue dans A. D'après le n° 5, il existe un nombre positif ε tel que, pour tout point $P \in U$, $P(t)$ soit définie pour $|t| < \varepsilon$, puisque, si l'on désigne par V un voisinage convenable du point Q, on peut avoir $\overline{U} \subset \overline{V}$, $V \subset A$. Or, par hypothèse, nous avons

$$-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q,$$

donc il existe un nombre entier positif n_1, tel que l'on ait

$$P(t_{n_1}) \in U, \qquad \text{et} \qquad 0 < \beta - t_{n_1} < \varepsilon.$$

Désignons par P_{n_1} le point $P(t_{n_1})$; les deux dernières relations montrent que la solution $P_{n_1}(t)$ est définie pour $|t| < \varepsilon$, et qu'en conséquence $P_{n_1}(t - t_{n_1})$ est défini pour $t_{n_1} - \varepsilon < t < t_{n_1} + \varepsilon$, *a fortiori* pour $\beta \leqq t < t_{n_1} + \varepsilon$. Comme nous avons $-\alpha < \beta < t_{n_1} + \varepsilon$, $\lim\limits_{t \to \beta - 0} P(t) = \lim\limits_{t \to \beta} P(t)$ existe et coïncide avec le point $Q \in A$.

D'après ce que nous venons de voir, pour qu'une solution $P(t)$ définie pour

$-\alpha < t < \beta$ ne soit pas prolongeable au delà de la valeur β de t, β étant finie, il faut que, pour toutes les suites $\{t_n\}$ telles que l'on ait $-\alpha < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta$, et telles qu'il existe $\lim\limits_{n \to \infty} P(t_n)$, ce point limite appartienne à la frontière $\dot{A}$ du domaine A.

On peut démontrer de même le théorème concernant l'autre extrémité $-\alpha$.

10. Profitant de cette propriété des solutions, nous conviendrons désormais de supposer que, si nous disons qu'une solution $P(t)$ est définie pour $-\alpha < t < \beta$, la solution $P(t)$ n'est pas prolongeable ni pour $t \geqq \beta$, ni pour $t \leqq -\alpha$, et nous fixons les notations de manière que, s'il s'agit des points P, P_j, P', Q, etc. du domaine A, les solutions $P(t)$, $P_j(t)$, $P'(t)$, $Q(t)$, etc. soient définies respectivement pour $-\alpha < t < \beta$, $-\alpha_j < t < \beta_j$, $-\alpha' < t < \beta'$, $-a < t < b$, etc., et que les solutions ne soient plus prolongeables en dehors de ces intervalles, même si nous ne faisons aucune remarque sur les notations α, β, a, b, etc.

Ainsi, par exemple, quand on considère un point Q_0 du domaine A, on doit savoir que la solution $Q_0(t)$ est définie pour $-a_0 < t < b_0$, et ou bien que b_0 est infini, ou bien que, b_0 étant fini, $\lim\limits_{n \to \infty} Q_0(t_n)$ est un point de la frontière $\dot{A}$ du domaine A, si la suite $\{Q_0(t_n)\}$ converge pour $n \to \infty$ et si l'on a

$$-a_0 < t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots < b_0.$$

Tout ce qui précède au sujet de b_0 est évidemment applicable à l'autre extrémité $-a_0$.

11. Théorème. — *Soient* P *un point du domaine* A *et* t_0 *une valeur quelconque fixe de* t *dans l'intervalle* $-\alpha < t < \beta$ *de définition de la solution* $P(t)$, *et posons*

$$P_0 = P(t_0).$$

Si l'on désigne par U_1 *un voisinage de l'arc fermé* $\overparen{P, P_0}$ *représenté par la solution* $P(t)$ *avec les valeurs de* t *comprises entre zéro et* t_0 *(deux extrémités incluses), et par* U_2 *un voisinage du point* P_0, *il existe un voisinage du point* P, *soit* V, *telle que* $V(t)$ *soit défini et contenu dans* U_1 *pour les valeurs de* t *entre zéro et* t_0 *(deux extrémités incluses), et qu'en particulier pour* $t = t_0$, $V(t_0)$ *soit contenu dans* U_2.

En effet, supposons que t_0 soit positif. Désignons par W un voisinage de l'arc fermé $\overparen{P, P_0}$ assez petit pour que sa fermeture $\overline{W}$ soit contenue dans l'intersection des deux ensembles ouverts U_1 et A : $\overline{W} \subset U_1 \cap A$, et par U_{ε_1} le ε_1-voisinage du point P_0, où ε_1 est un nombre positif assez petit pour que U_{ε_1} soit contenu dans U_2 : $U_{\varepsilon_1} \subset U_2$.

Posons

$$d = \operatorname{dist}(\overparen{P, P_0}, \dot{W}) \qquad \text{et} \qquad \varepsilon = \operatorname{minimum}(d, \varepsilon_1).$$

Soit V_δ le δ-voisinage du point P, δ étant un nombre positif inférieur à εe^{-mNt_0}, où N désigne une borne supérieure de $\left|\frac{\partial X_i}{\partial x_j}\right|$ $(i, j = 1, 2, \ldots, m)$ dans l'ensemble fermé $\overline{W}$, qui est contenu dans A et qui est, en conséquence, borné.

Si l'on désigne par Q un point quelconque du voisinage V_δ, de sorte que l'on ait dist(P, Q) $< \delta$, on a

$$\frac{dy_i}{dt} - \frac{dx_i}{dt} = X_i(Q(t)) - X_i(P(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

pour $0 \leqq t <$ minimum (b, β), où b est l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$.

Si le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ est contenu dans A, nous avons

$$X_i(Q(t)) - X_i(P(t)) = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j}(y_j(t) - X_j(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où

$$\vec{\Xi}_i(t) = \overrightarrow{P(t)} + \theta_i\left(\overrightarrow{Q(t)} - \overrightarrow{P(t)}\right) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

chaque θ_i étant un certain nombre positif inférieur à 1.

Comme, par hypothèse, l'arc fermé $\widehat{P, P_0}$ est contenu dans W et que l'on a $\overline{W} \subset A$ et dist$\left(\widehat{P, P_0}, \dot{W}\right) = d$, le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ est contenu dans W, *a fortiori* dans A, pour les valeurs de t telles que l'on ait

$$\text{dist}(Q(t), P(t)) < d.$$

Or, dist(Q, P) est inférieure à $\delta < d$, et dist$(Q(t), P(t))$ est continue par rapport à la variable t pour $0 \leqq t <$ minimum(b, β); donc ou bien il existe un nombre c inférieur à minimum (b, β) tel que l'on ait

$$\text{dist}(Q(t), P(t)) < d \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t < c,$$

et

$$\text{dist}(Q(c), P(c)) = d,$$

ou bien on a

$$\text{dist}(Q(t), P(t)) < d$$

pour toute valeur de t positive et inférieure à minimum(b, β).

En conséquence, ou bien pour $0 \leqq t \leqq c$ ou bien pour $0 \leqq t <$ minimum (b, β) on a

$$\frac{dy_i(dt)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{m} \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j}(y_j(t) - x_j(t)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Or, si $Q(t)$ satisfait à l'inégalité

$$\text{dist}(Q(t), P(t)) \leqq d,$$

on a $Q(t) \in \overline{W}$, puisque, par définition, on a $\operatorname{dist}(\widehat{P, P_0}, \dot{W}) = d$; donc le segment $\overline{Q(t), P(t)}$ appartient à $\overline{W}$, et en particulier, on a

$$\Xi_i(t) \in \overline{W} \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

de sorte que l'on a

$$\left| \frac{\partial X_i(\Xi_i(t))}{\partial x_j} \right| \leq N \qquad (i, j = 1, 2, \ldots, m);$$

en conséquence cette inégalité subsiste ou bien pour $0 \leq t \leq c$, ou bien pour $0 \leq t < \operatorname{minimum}(b, \beta)$, et nous avons

$$\left| \frac{dy_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} \right| \leq \sum_{j=1}^{m} N \,|y_j(t) - x_j(t)| \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

En faisant la somme de 1 à m de l'indice i, nous avons

$$\sum_{i=1}^{m} \left| \frac{dy_i(t)}{dt} - \frac{dx_i(t)}{dt} \right| \leq mN \sum_{i=1}^{m} |y_j(t) - x_j(t)|,$$

d'où

$$\left| \frac{d}{dt} \operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \right| \leq mN \operatorname{dist}(Q(t), P(t)).$$

En faisant l'intégrale de zéro à t, nous avons finalement

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leq \operatorname{dist}(Q, P)\, e^{mNt}$$

ou pour $0 \leq t \leq c$, ou pour $0 \leq t < \operatorname{minimum}(b, \beta)$.

Je dis qu'il n'existe pas de valeur $c < \operatorname{minimum}(b, \beta)$. En effet, si elle existait, nous aurions

$$d = \operatorname{dist}(Q(c), P(c)) \leq \operatorname{dist}(Q, P)\, e^{mNc} < \delta\, e^{mNc} < d\, e^{-mNt} e^{mNc} < d\, e^{mN(c-t_0)},$$

d'où une inégalité qui ne pourrait pas être vérifiée, puisque nous avons par hypothèse $c < t_0$.

En conséquence, nous avons

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) \leq \operatorname{dist}(Q, P)\, e^{mNt} \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < \operatorname{minimum}(b, \beta).$$

Je dis maintenant que nous avons $b > t_0$. En effet, dans le cas contraire, nous aurions pour t positif et inférieur à b,

$$\operatorname{dist}(Q(t), P(t)) < d,$$

d'où

$$Q(t) \in W \subset A \qquad \text{pour} \quad 0 \leq t < b.$$

Or, par hypothèse, la fermeture $\overline{W}$ est contenue dans A, donc $\lim Q(t)$ existe et elle est contenue dans A : ceci est en contradiction avec la définion du nombre b.

En conséquence nous avons

$$b > t_0.$$

Cette dernière inégalité montre que le critérium

$$\text{dist}(Q(t), P(t)) \leqq \text{dist}(Q, P)\, e^{mNt} < \delta\, e^{mNt} < d\, e^{mN(t-t_0)} \quad \text{et} \quad < \varepsilon_1\, e^{mN(t-t_0)}$$

est valable pour toute valeur de t, $0 \leqq t \leqq t_0$, ce qui montre que l'on a

$$Q(t) \in W \subset U_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq t_0,$$

et en particulier

$$Q(t_0) \in U_{\varepsilon_1} \subset U_2.$$

Or, Q est un point arbitraire du voisinage $V_\delta = V$, donc nous avons

$$V(t) \subset U_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq t_0;$$

et

$$V(t_0) \subset U_2.$$

De la même manière on démontre le théorème dans le cas où l'on a $t < 0$, et le théorème est trivial dans le cas où l'on a $t_0 = 0$.

12. Ce dernier théorème montre que, *si une suite de points* $\{P_n\}$ *converge vers un point* P *du domaine* A *et si la solution* $P(t)$ *est définie à la valeur* t_0, *les solutions* $P_n(t)$ *sont définies à la valeur* t_0 *pour* n *assez grand et la suite* $\{P_n(t_0)\}$ *converge vers le point* $P(t_0)$ *pour* $n \to \infty$.

Je dis en outre que, *si une suite* $\{t_n\}$ *des valeurs de t converge vers* t_0 *pour* $n \to \infty$, *les points* $P_n(t_n)$ *sont définis pour* n *assez grand et convergent vers* $P(t_0)$ *pour* $n \to \infty$.

En effet, soit U un voisinage quelconque du point $P(t_0)$. Désignons par V et V_1 deux voisinages du point $P(t_0)$ tels qu'on ait $U \cap A \supset \overline{V}_1$, $V_1 \supset \overline{V}$. D'après le théorème précédent, pour n assez grand, les points $P_n(t_0)$ sont définis et appartiennent au voisinage V; or, d'après le n° 5, les relations $A \supset \overline{V}_1$ et $V_1 \supset \overline{V}$ entraînent l'existence d'un nombre positif ε, tel que $V(t)$ soit défini et contenu dans V_1 pour $|t| < \varepsilon$. D'autre part la convergence de la suite $\{t_n\}$ vers t_0 montre que l'on a $|t_n - t_0| < \varepsilon$ pour n assez grand, donc nous avons $P_n(t_n) \in V_1 \subset U$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration.

Remarquons que la réciproque de ce que nous venons de démontrer n'est pas toujours vraie.

III. — Solutions périodiques et caractéristiques.

13. Soit P un point du domaine A; supposons qu'il existe deux nombres t_1 et t_2 tels que l'on ait

$$P(t_1) = P(t_2), \qquad -\alpha < t_1 < t_2 < \beta.$$

On sait qu'alors la solution $P(t)$ est définie pour $-\infty < t < \infty$ et que l'on a

$$P(t) = P(t + l(t_2 - t_1)) \qquad (l = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots) \qquad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty.$$

Comme conséquence directe de cette propriété, on voit que, pour qu'il existe une paire de valeurs $(t_1, t_2)(-\alpha < t_1 < t_2 < \beta)$ telle que l'on ait $P(t_1) = P(t_2)$, P étant un point du domaine A, il faut et il suffit qu'il existe une valeur positive τ satisfaisant à $P(o) = P(\tau)$.

Cette valeur τ s'appelle *période* de la solution $P(t)$, et l'on peut facilement démontrer que, quand τ_1, τ_2 sont deux périodes, $k_1\tau_1 + k_2\tau_2$ est une période, k_1, k_2 étant deux nombres entiers quelconques, si $k_1\tau_1 + k_2\tau_2$ est positif, c'est-à-dire qu'*une combinaison linéaire de deux périodes avec coefficients entiers est aussi une période, pourvu qu'elle soit positive.*

Soit $P(t)$ une *solution singulière*; on a

$$P(t) \equiv P$$

pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$. Donc, toute valeur positive de t est période de la solution singulière.

14. Supposons qu'une *solution régulière* $P(t)$ admette des périodes et désignons par $\{\tau\}$ l'ensemble de ses périodes. On sait que l'ensemble $\{\tau\}$ a un minimum T positif et que, si l'on désigne par τ une période arbitraire, il existe un nombre entier positif n tel que l'on ait

$$\tau = n\mathrm{T}.$$

Nous appelons ce minimum T de l'ensemble $\{\tau\}$ *période fondamentale* de la solution $P(t)$. Nous disons qu'une solution $P(t)$ est *périodique*, si sa période fondamentale est différente de zéro. D'après cette définition, les solutions singulières ne sont pas périodiques, bien qu'elles admettent comme période toute valeur positive de t; et les solutions régulières admettant des périodes sont toujours périodiques; autrement dit, pour qu'une solution $P(t)$ admettant des périodes soit périodique, il faut et il suffit que le point P soit régulier.

15. Si P désigne un point régulier, d'après les numéros précédents, ou bien $P(t)$ est périodique, étant définie pour $-\infty < t < \infty$, ou bien il n'existe pas de paire (t_1, t_2) telle que l'on ait

$$P(t_1) = P(t_2), \qquad t_1 \neq t_2.$$

Considérons le premier cas de l'alternative et désignons par T la période fondamentale; $P(t)$ définit une courbe de Jordan fermée pour $o \leqq t < \mathrm{T}$, ou pour tout intervalle de la forme $t_0 \leqq t < t_0 + \mathrm{T}$, car il n'existe plus de paire (t_1, t_2), telle que l'on ait $P(t_1) = P(t_2)$ et $t_0 \leqq t_1 < t_2 < t_0 + \mathrm{T}$. Nous appelons cette courbe de Jordan fermée caractéristique (totale).

Envisageons maintenant le second cas de l'alternative; comme la correspondance entre les points de la solution $P(t)$ et les valeurs de l'intervalle $-\alpha < t < \beta$ est biunivoque, la solution $P(t)$ pour $\gamma \leqq t \leqq \delta$ définit une courbe de Jordan non fermée, γ, δ étant deux nombres quelconques positifs ou négatifs, $\gamma < \delta$, compris entre $-\alpha$ et β. Nous appellons, toutefois, caractéristique (totale) la courbe définie par la solution $P(t)$ pour $-\alpha < t < \beta$, suivant la terminologie de Poincaré.

Dans les Chapitres suivants, nous traitons surtout de la courbe $P(t)$ correspondant aux valeurs de t comprises entre o et β (o inclus, β exclus), et appelons cette courbe demi-caractéristique positive partant du point P, et nous la désignons par $P(t)$. Si l'on considère la courbe correspondant aux valeurs de t de l'intervalle $-\alpha < t \leqq 0$, elle est appelée demi-caractéristique négative et représentée par $P(s)$. Dans ce cas, nous désignons la caractéristique totale par $P(t) \cup P(s)$.

On remarque que, si $P(t)$ est une solution périodique, la demi-caractéristique positive $P(t)$, la demi-caractéristique négative $P(s)$ et la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$ représentent la même courbe fermée.

IV. — Surfaces sans contact.

16. Soient P_0 un point du domaine A et U un voisinage du point P_0, tel que l'on ait $U \subset A$. *Soit $f(P)$ une fonction définie et continue dans le voisinage U; nous supposons d'ailleurs que ses dérivées partielles du premier ordre par rapport aux coordonnées x_i ($i = 1, 2, \ldots, m$) du point P sont continues dans U.*

Nous disons que la surface $f(P) = 0$ est une surface sans contact au point P_0 définie dans le voisinage U du point P_0, si la fonction $f(P)$ satisfait aux conditions suivantes :

$$1^\circ \quad f(P_0) = 0; \qquad 2^\circ \quad \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0.$$

Comme conséquence directe de la deuxième condition, pour que la surface $f(P) = 0$ soit sans contact au point P_0, il faut qu'il existe au moins une dérivée partielle $\frac{\partial f(P)}{\partial x_j}$ de la fonction $f(P)$ et une fonction $X_j(P)$ du même indice j qui ne s'annulent pas au point P_0. En conséquence, si P_0 est un point singulier, il n'existe pas de surface sans contact au point P_0. Inversement, si P_0 est un point régulier, il y a une fonction X_k qui ne s'annule pas au point P_0. Désignons par $\vec{\Xi}$ le vecteur non zéro $\overrightarrow{[X_1(P_0), X_2(P_0), \ldots, X_m(P_0)]}$ et posons

$$f(P) = (\vec{P} - \vec{P}_0)\vec{\Xi},$$

le deuxième membre étant le produit scalaire des deux vecteurs $\vec{P} - \vec{P}_0$ et $\vec{\Xi}$. Il est clair que $f(P) = 0$ est une surface sans contact au point P_0, définie dans l'espace R_m tout entier.

Si une fonction $g(P)$ satisfait à toutes les conditions excepté 2° pour que $g(P)=0$ soit une surface sans contact au point P_0 définie dans U, et si l'on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(P_0)}{\partial x_i} X_i(P_0) < 0,$$

la surface $g(P)=0$ est considérée comme surface sans contact, puisque alors on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial(-g(P_0))}{\partial x_i} X_i(P_0) > 0,$$

et que $g(P)=0$ et $-g(P)=0$ représentent la même surface. Mais pour simplifier l'exposition, nous conviendrons d'apprendre que, si $f(P)=0$ est une surface sans contact au point P_0, $f(P)$ satisfait à la condition 2°.

17. *Si $f(P)$ est une fonction continue, ayant ses dérivées partielles du premier ordre continues dans un domaine $B \subset A$, et si elle satisfait aux conditions suivantes :*

1° *il existe des points* P *dans* B, *tels que l'on ait* $f(P)=0$,

2° *on a pour tous les points* P *du domaine* B,

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P) > 0,$$

nous disons que la surface $f(P)=0$ *est une surface sans contact dans le domaine* B.

On voit qu'une surface $f(P)=0$ sans contact dans un domaine B est une surface sans contact en tous ses points appartenant à B, et le même raisonnement qu'au numéro précédent démontre que le domaine B ne contient pas de points singuliers.

Si une fonction $g(P)$ remplit dans un domaine $B \subset A$ la condition

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial g(P)}{\partial x_i} X_i(P) < 0$$

à la place de la condition 2° et si elle satisfait à toutes les autres conditions pour que $g(P)=0$ soit une surface sans contact dans B, on montre, de la même manière qu'au numéro précédent, que $g(P)=0$ est considérée comme surface sans contact dans B. Mais, comme au numéro précédent, nous ne disons pas que $g(P)=0$ soit une surface sans contact à P_0.

18. Soit $f(P)=0$ une surface sans contact au point P_0 définie dans un voisinage U du point P_0 ; je dis qu'il existe un voisinage du point P, soit V, tel que la surface $f(P)=0$ soit une surface sans contact dans V, n'y ayant qu'une branche.

En effet, par définition on a

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathrm{P}_0)}{\partial x_i} \mathrm{X}_i(\mathrm{P}_0) > 0$$

et $\dfrac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_i}$ et $\mathrm{X}_i(\mathrm{P})\,(i=1,\,2,\,\ldots,\,m)$ sont continues dans U, ce qui entraîne qu'il existe un voisinage U_1 du point P_0, tel que l'on ait

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_i} \mathrm{X}_i(\mathrm{P}) > 0$$

pour tout point P de U_1. D'ailleurs au point P_0, on a $f(\mathrm{P}_0)=0$. Donc $f(\mathrm{P})=0$ est une surface sans contact dans U_1.

En outre, l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathrm{P}_0)}{\partial x_1} \mathrm{X}_i(\mathrm{P}_0) > 0$$

entraîne qu'il existe une dérivée $\dfrac{\partial f(\mathrm{P}_0)}{\partial x_k} \neq 0$, soit >0. A cause de la continuité de $\dfrac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_k}$ dans U, cette dérivée partielle est positive dans un assez petit voisinage du point P_0, soit U_2. Donc dans U_2, $f(\mathrm{P})=0$ est soluble par rapport à la variable x_k, c'est-à-dire que la surface $f(\mathrm{P})=0$ n'a qu'une branche dans U_2.

Par conséquent, si l'on désigne par V un voisinage quelconque du point P_0 contenu dans l'intersection des deux voisinages U_1 et U_2, $\mathrm{V}\subset \mathrm{U}_1 \cap \mathrm{U}_2$, $f(\mathrm{P})=0$ est une surface sans contact dans V, n'y ayant qu'une branche.

Donc, *si l'on considère la topologie ordinaire de la surface* $f(\mathrm{P})=0$ *dans* V, *cette topologie est équivalente à la topologie de la surface* $f(\mathrm{P})=0$ *dans* V *induite par la topologie de l'espace* R_m. D'ailleurs, *s'il s'agit d'une surface sans contact* $f(\mathrm{P})=0$ *dans un domaine* B, *cette équivalence subsiste dans* B, *puisqu'elle subsiste dans un voisinage assez petit de chaque point de la surface* $f(\mathrm{P})=0$ *dans* B.

Remarquons que, si l'on a $m=2$, une surface se réduit à une courbe, et que la surface sans contact dans un assez petit domaine représente un arc connexe de cette courbe, ou encore une courbe de Jordan, si l'on y ajoute les deux points d'extrémité.

19. Revenons au cas où m est arbitraire. Soit $f(\mathrm{P})=0$ une surface sans contact dans un sous-domaine B du domaine A et soit $\mathrm{P}(t)$ une solution contenue dans B pour $|t|<\varepsilon$, ε étant un nombre positif; il est clair par définition que l'on a

$$\frac{df(\mathrm{P}(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(\mathrm{P})}{\partial x_i} \mathrm{X}_i(\mathrm{P}(t)) > 0 \qquad \text{pour} \quad |t|<\varepsilon.$$

Je dis qu'il n'existe au plus qu'une valeur de t telle que l'on ait

$$f(P(t)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon.$$

En effet, s'il existait deux valeurs distinctes t_1, t_2 de t qui satisfassent à ces deux conditions, d'après le théorème de la moyenne, on aurait une autre valeur de t entre t_1 et t_2, soit t_3, telle que l'on ait

$$f(P(t_1)) - f(P(t_2)) = \frac{df(P(t_3))}{dt}(t_1 - t_2),$$

dont le premier membre est zéro, puisque ses deux termes sont zéro. Or t_3 se place entre t_1 et t_2, donc on a $|t_3| < \varepsilon$, ce qui montre que $P(t_3)$ appartient au domaine B, donc

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P(t_3)) = \frac{df(P(t_3))}{dt} = 0$$

est en contradiction avec l'hypothèse que $f(P) = 0$ est une surface sans contact dans B.

Soit t_0 l'unique valeur de t, telle que l'on ait

$$f(P(t_0)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t_0| < \varepsilon;$$

à cause de la continuité de la fonction $f(P(t))$, cette fonction $f(P(t))$ doit être positive pour $t_0 < t < \varepsilon$, et négative pour $-\varepsilon < t < t_0$, puisque sa dérivée

$$\frac{df(P(t))}{dt} = \sum_{i=1}^{m} \frac{\partial f(P)}{\partial x_i} X_i(P(t))$$

est positive pour $-\varepsilon < t < \varepsilon$, pour lequel $P(t)$ se trouve dans B.

20. Théorème. — *Si $f(P) = 0$ est une surface sans contact au point P_0 définie dans un voisinage U du point P_0, pour tout point Q d'un voisinage assez petit U_1 du point P_0, il existe une et une seule valeur de t, telle que l'on ait*

$$f(Q(t)) = 0 \qquad \text{et} \qquad |t| < \varepsilon,$$

ε étant un nombre positif inférieur à un certain nombre positif et indépendant du point Q.

En effet, supposons que U soit assez petit pour que l'on ait $\overline{U} \subset A$ et pour que $f(P) = 0$ soit une surface sans contact dans U. Si V est un voisinage du point P_0, tel que l'on ait $\overline{V} \subset U$, il existe, d'après le n° 5, un nombre positif ε_1 indépendant du choix du point P, tel que, pour tout point $P \in \overline{V}$, la solution $P(t)$ soit définie pour $|t| < \varepsilon_1$ et que l'on ait $P(t) \in U$ pour les mêmes valeurs de t.

Par conséquent, pour tout point $P \in \overline{V}$, il n'existe au plus qu'une valeur de t qui satisfasse aux conditions

$$f(P(t)) = 0 \quad \text{et} \quad |t| < \varepsilon_1.$$

Posons

$$V_\varepsilon = [Q(t) : f(Q) = 0,\ Q \in V,\ |t| < \varepsilon],$$

désignant par ε un nombre positif quelconque inférieur à ε_1; je dis que cet ensemble V_ε est ouvert, de sorte que, si l'on désigne par U_1 un voisinage du point P_0 contenu dans V_ε, le voisinage U satisfait à toutes les conditions du théorème.

En effet, soit Q un point quelconque de l'ensemble V_ε; il existe un point Q_0 et une valeur t_0 de t, tels que l'on ait

$$Q_0 \in V, \qquad f(Q_0) = 0, \qquad Q = Q_0(t_0) \quad \text{ou} \quad Q(-t_0) = Q_0 \quad \text{et} \quad |t_0| < \varepsilon.$$

Soit $U(Q_0)$ un voisinage assez petit du point Q_0, dont la fermeture $\overline{U(Q_0)}$ est contenue dans V; il existe un nombre positif δ tel que, pour tout point P du voisinage $U(Q_0)$, la solution $P(t)$ soit contenue dans le voisinage V pour $-\delta < t < \delta$, et que l'on ait $-\varepsilon < -t_0 \pm \delta < \varepsilon$. Ces deux dernières inégalités sont vérifiées, puisque l'on a $-\varepsilon < -t_0 < \varepsilon$.

Désignons par δ_1 un nombre positif quelconque fixe inférieur à δ, tel que les deux points $Q' = Q_0(\delta_1)$ et $Q'' = Q_0(-\delta_1)$ appartiennent au voisinage $U(Q_0)$. D'après le n° 19, on a $f(Q') > 0$ et $f(Q'') < 0$, puisque δ_1 est positif.

Par conséquent il existe deux voisinages $U(Q')$ et $U(Q'')$ respectivement du point Q' et du point Q'', tels que l'on ait

$$f(P) > 0 \quad \text{pour} \quad P \in U(Q') \qquad \text{et} \qquad f(P) < 0 \quad \text{pour} \quad P \in U(Q''),$$

et que l'on ait $U(Q') \cup U(Q'') \subset U(Q_0)$. Or, à cause de la continuité, si l'on désigne par $U(Q)$ un voisinage assez petit du point Q, on a

$$U(Q)(-t_0 + \delta_1) \subset U(Q') \qquad \text{et} \qquad U(Q)(-t_0 - \delta_1) \subset U(Q'').$$

Je dis que le voisinage $U(Q)$ est contenu dans V_ε : $U(Q) \subset V_\varepsilon$. En effe, soit P un point quelconque du voisinage $U(Q)$; en raison des relations précédentes, on a

$$f(P(-t_0 + \delta_1)) > 0 \quad \text{et} \quad f(P(-t_0 - \delta_1)) < 0,$$

donc pour une valeur t_1 de t comprise entre $-t_0 - \delta_1$ et $-t_0 + \delta_1$, on a

$$f(P_1) = f(P(t_1)) = 0$$

et

$$(-t_0 + \delta_1) - \delta < t_1 < -t_0 + \delta \quad \text{ou} \quad -t_0 - \delta_1 < t_1 < (-t_0 - \delta_1) + \delta,$$

où P_1 désigne le point $P(t_1)$.

Or, les relations

$$U(Q_0)(t) \subset V \quad \text{pour} \quad |t| < \delta \qquad \text{et} \qquad U(Q_0) \supset U(Q') \cup U(Q'')$$

entraînent

$$P_1 = P(t_1) \in V,$$

puisque l'on a

$$P(-t_0 + \delta_1) \in U(Q') \qquad \text{et} \qquad P(-t_0 - \delta_1) \in U(Q'').$$

Donc le point $P = P_1(-t_1)$ appartient à l'ensemble V_ε, car on a $-\varepsilon < -t_1 < \varepsilon$.

Or, P est un point arbitraire du voisinage $U(Q)$, donc on a $U(Q) \subset V_\varepsilon$; d'autre part Q est un point arbitraire de l'ensemble V_ε, donc V_ε est ouvert.

C. Q. F. D.

21. Soit P un point régulier quelconque et soit $P_1 = P(t_1)$ un point de la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$; désignons par Π et Π_1 deux surfaces sans contact respectivement aux points P et P_1. Considérons la topologie de la surface Π ou Π_1 induite par la topologie de l'espace entier R_m et désignons par V_1 un voisinage du point P_1 sur la surface Π_1; je dis qu'il existe un voisinage du point P sur la surface Π, soit V, tel que toutes les caractéristiques passant par un des points du voisinage V à l'époque $t = 0$, passent par un des points du voisinage V_1 une et une seule fois entre $t_1 - \varepsilon$ et $t_1 + \varepsilon$, ε étant un nombre positif inférieur à un certain nombre positif fixe.

En effet, d'après la définition de la topologie induite, le voisinage V_1 du point P_1 sur la surface Π_1 est représenté par l'intersection de Π_1 et d'un certain voisinage V' du point P_1 dans l'espace R_m; soit U_1 un voisinage de P_1 dans R_m et ε un nombre positif, tels que, pour tout point $Q \in U_1 \subset V'$, $Q(t)$ soit définie pour $|t| < \varepsilon$, et que $Q(t)$ passe par un point de la surface Π dans V' une et une seule fois entre $-\varepsilon$ et ε.

D'après le n° 11, il existe un voisinage U du point P (dans l'espace R_m), tel que l'on ait $U(t_1) \subset U_1$; posons

$$V = U \cap \Pi,$$

de sorte que V est un voisinage du point P sur la surface Π. On voit que V est le voisinage qu'on recherche.

22. Soient $f(P) = 0$ une surface sans contact du point P_0 et $\{Q_n\}$ une suite de points qui converge vers P_0 pour $n \to \infty$; je dis qu'il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait, pour n assez grand,

$$|\tau_n| < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad f(Q_n(\tau_n)) = 0,$$

ε étant un nombre positif donné, et que la suite $\{Q_n(\tau_n)\}$ de points converge vers P_0 pour $n \to \infty$.

En effet, soient U et V deux voisinages assez petits du point P_0, $U \supset \overline{V}$, pour que $f(P) = 0$ soit une surface sans contact dans U et que, pour tout point $Q \in V$, $Q(t)$ passe par un point de la surface $f(P) = 0$ dans U une et une seule fois entre $-\delta$ et δ, δ étant un nombre positif assez petit et inférieur à ε. Comme, par hypothèse, $\{Q_n\}$ converge vers P_0 pour $n \to \infty$, on a $Q_n \in V$ pour n assez grand; donc, pour n assez grand, $Q_n(t)$ passe par un point, soit $Q_n(\tau_n)$, de la surface $f(P) = 0$ dans U, $|\tau_n|$ étant inferieur à $\delta < \varepsilon$. Comme U peut être aussi petit que l'on veut, et que la topologie ordinaire et la topologie induite par celle de l'espace R_m de la surface $f(P) = 0$ sont équivalentes, la démonstration est achevée.

CHAPITRE II.

Points limites et régions invariantes.

I. — Points limites.

23. Définition. — *Soit* P *un point du domaine* A; *nous appelons un point* Q *point limite au sens positif de la solution* $P(t)$, *s'il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs de* t, *telle que l'on ait*

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta,$$

où β *désigne, comme d'habitude, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution* $P(t)$, *de sorte que* β *est positif ou infini.*

Nous désignons par $L^+(P)$ *l'ensemble des points limites au sens positif de la solution* $P(t)$. *On définit de même les points limites au sens négatif de la solution* $P(t)$, *dont l'ensemble est désigné par* $L^-(P)$. *Posons*

$$L(P) = L^+(P) \cup L^-(P).$$

On démontre que, P *désignant un point du domaine* A, $L^+(P)$, $L^-(P)$ *et a fortiori* $L(P)$ *sont non vides et* que *l'on a*

$$L^+(P), \quad L^-(P) \quad \text{et} \quad L(P) \subset \overline{A},$$

$\overline{A}$ *étant la fermeture du domaine* A.

24. Théorème. — *Si* P *est un point du domaine* A, *les ensembles* $L^+(P)$ *et* $L^-(P)$ *sont : 1° fermés et 2° connexes.*

1° En effet, soient Q un point quelconque de la fermeture $\overline{L^+(P)}$ et $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui converge vers le point Q pour $k \to \infty$ et soit, en outre, $\{\tau_n\}$ une suite de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots \to \beta.$$

Je dis que l'on peut extraire une suite de valeurs de t, soit $\{t_k\}$, vérifiant les relations

$$P(t_k) \in U_k(Q) \quad \text{et} \quad 0 \leqq t_{k-1} < t_k, \quad \tau_k < t \quad (k = 1, 2, \ldots),$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{k \to \infty} P(t_k) = Q \quad \text{et} \quad 0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta;$$

relations qui ne sont autres que les conditions pour que le point Q appartienne à $L^+(P)$.

En effet, posons

$$t_0 = 0.$$

Supposons que t_k soit déjà déterminé de manière que l'on ait

$$P(t_k) \in U_k(Q) \quad \text{et} \quad t_{k-1} < t_k, \quad \tau_k < t_k.$$

Comme Q est un point de la fermeture $\overline{L^+(P)}$ de l'ensemble $L^+(P)$, il existe un point de l'ensemble $L^+(P)$, soit Q_{k+1}, appartenant à $U_{k+1}(Q)$, et par conséquent, si l'on désigne par $U(Q_{k+1})$ un voisinage assez petit du point Q_{k+1}, on a

$$U(Q_{k+1}) \subset U_{k+1}(Q).$$

La relation $Q_{k+1} \in L^+(P)$ montre que, pour une certaine suite $\{t'_n\}$ de valeurs de t, on a

$$\lim_{n \to \infty} P(t'_n) = Q \quad \text{et} \quad 0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta,$$

d'où

$$P(t'_n) \in U(Q_{k+1}) \subset U_{k+1}(Q) \quad \text{et} \quad t_k < t'_n, \quad \tau_{k+1} < t'_n$$

pour n assez grand.

Fixons un nombre n_1 qui satisfasse à ces conditions et posons

$$t'_{n_1} = t_{k+1}.$$

Nous avons ainsi une suite $\{t_k\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$P(t_k) \in U_k(Q) \quad \text{et} \quad 0 \leqq t_{k-1} < t_k, \quad \tau_k < t_k \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Comme Q est un point arbitraire de la fermeture $\overline{L^+(P)}$, nous avons

$$\overline{L^+(P)} \subset L^+(P),$$

c'est-à-dire que l'ensemble $L^+(P)$ est fermé.

2° Si l'ensemble $L^+(P)$ n'était pas connexe, $L^+(P)$ serait décomposé en deux ensembles non vides et disjoints L_1 et L_2 :

$$L^+P) = L_1 \cup L_2, \quad L_i \neq \emptyset \quad (i = 1, 2), \quad L_1 \cap L_2 = \emptyset,$$

puisque $L^+(P)$ est fermé d'après ce que nous venons de démontrer.

$L^+(P)$ étant contenu dans l'ensemble borné $\overline{A}$, $L^+(P)$ est compact, donc L_1 et L_2 sont également compacts tous les deux. En conséquence il existe deux voisinages $U(L_1)$ et $U(L_2)$ respectivement de L_1 et de L_2, dont les fermetures $\overline{U(L_1)}$ et $\overline{U(L_2)}$ sont disjointes : $\overline{U(L_1)} \cap \overline{U(L_2)} = \emptyset$. Soient $Q_1 \in L_1$; $Q_2 \in L_2$; d'après la définition de l'ensemble $L^+(P)$, il existe deux suites $\{t_n\}$ et $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$P(t_n) \to Q_1, \qquad P(t'_n) \to Q_2, \qquad \text{pour} \quad n \to \infty,$$

et

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad 0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta.$$

Soient t_k un élément de la suite $\{t_n\}$ satisfaisant à la relation $P(t_k) \in U(L_1)$, et $t'_{k'}$ un élément de la suite $\{t'_n\}$ supérieur à t_k, tel que l'on ait $P(t'_{k'}) \in U(L_2)$; cet élément $t'_{k'}$ existe toujours, puisque l'on a

$$0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq t_k < \beta \qquad k = 1, 2, \ldots),$$

et que l'on a

$$P(t'_n) \to Q_2 \in U(L_2) \qquad \text{pour } n \to \infty.$$

A cause de la continuité de la solution $P(t)$ pour $0 \leqq t < \beta$, *a fortiori* pour $t_k < t < t'_{k'}$ et de la relation $\overline{U(L_1)} \cap \overline{U(L_2)} = \emptyset$, nous avons

$$P(\tau_k) \notin \overline{U(L_1)} \cup \overline{U(L_2)}$$

pour une certaine valeur τ_k de t entre t_k et $t'_{k'}$.

Or, nous avons $P(t_k) \in U(L_1)$ pour k assez grand, donc nous obtenons ainsi une suite $\{\tau_k\}$ de valeurs de t qui remplissent les conditions

$$P(\tau_k) \notin \overline{U(L_1)} \cup \overline{U(L_2)} \qquad \text{et} \qquad t_k < \tau_k < t'_k$$

pour k assez grand. Étant contenu dans le domaine borné A, l'ensemble $\{P(\tau_k)\}$ a des points limites, lesquels n'appartiennent ni à $U(L_1)$ ni à $U(L_2)$, d'après ce que nous venons de montrer. Nous désignons un de ces points limites de l'ensemble $\{P(\tau_k)\}$ par Q. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que la suite $\{P(\tau_k)\}$ converge vers le point Q pour $k \to \infty$. Or, $t_k < \tau_k$ et $t_k \to \beta$ entraînent

$$0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_k < \ldots \to \beta,$$

donc Q est un point de l'ensemble $L^+(P)$ qui n'appartient ni à $U(L_1)$ ni à $U(L_2)$ ni *a fortiori* à L_1 ou à L_2, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $L^+(P) = L_1 \cup L_2$. Par conséquent $L^+(P)$ est connexe.

On remarque que $L(P)$ n'est pas toujours connexe, tandis qu'il est toujours fermé.

25. Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *la fermeture* $\overline{P(t)}$ *de la demi-*

caractéristique positive $P(t)$ *coïncide avec la réunion de l'ensemble* $L^+(P)$ *et de la demi-caractéristique positive* $P(t)$:

$$\overline{P(t)} = L^+(P) \cup P(t).$$

En effet, il est clair que l'on a $\overline{P(t)} \supset L^+(P) \cup P(t)$. Il suffit donc de démontrer que l'on a $\overline{P(t)} \subset L^+(P) \cup P(t)$.

Soit Q un point quelconque de la fermeture $\overline{P(t)}$, de sorte qu'il existe une suite $\{P(t_n)\}$ de points, les t_n étant non négatifs, qui converge vers Q pour $n \to \infty$. Désignons $\overline{\lim\limits_{n+\infty}} t_n$ par t_0, de sorte que l'on a $0 \leqq t_0 \leqq \beta$. Sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} t_n = t_0.$$

Si t_0 est inférieur à β, où β désigne, suivant la règle d'emploi de notations du n° 10, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $P(t)$, on a, d'après le n° 8, $Q = P(t_0)$. Donc Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, *a fortiori* à la réunion $L^+(P) \cup P(t)$.

Supposons maintenant que l'on ait $t_0 = \beta$; on peut extraire une suite partielle $\{t_{n'}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telle que l'on ait

$$0 \leqq t_{1'} < t_{2'} < \ldots < t_{n'} < \ldots \to \beta,$$

ce qui montre que Q appartient à $L^+(P)$, puisque la suite $\{P(t_n)\}$ et en conséquence sa suite partielle $\{P(t_{n'})\}$ convergent vers Q pour $n \to \infty$ et pour $n' \to \infty$.

Par conséquent nous avons

$$\overline{P(t)} \subset L^+(P) \cup P(t),$$

ce qui achève la démonstration.

D'après un théorème de la théorie des ensembles, $\overline{P(t)}$ est connexe, puisque la demi-caractéristique $P(t)$ est évidemment connexe. Nous désignons par $K^+(P)$ cet ensemble $\overline{P(t)}$ fermé et connexe, et de la même manière nous posons

$$K^-(P) = \overline{P(s)}, \qquad K(P) = K^+(P) \cup K^-(P) = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)},$$

de sorte que $K(P)$ est la fermeture de la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$, puisque l'on a

$$\overline{P(t) \cup P(s)} = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)},$$

d'après un théorème fondamental de la théorie des ensembles.

26. Remarquons que le résultat du n° 9 avec la convention du n° 10 est exprimé par les notations de ce chapitre comme suit :

Si β *est fini*, $L^+(P)$ *est contenu dans la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A :

$$L^+(P) \subset \dot{A}.$$

Ou encore, on peut l'énoncer comme suit :

Si l'ensemble $L^+(P) \cap A$ *n'est pas vide, la solution* $P(t)$ *est définie pour toute valeur positive de* t.

27. Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'intersection de l'ensemble* $L^+(P)$ *et du domaine* A, $Q \in L^+(P) \cap A$, *nous avons*

$$K(Q) \subset L^+(P).$$

En effet, soit t_0 une valeur quelconque comprise entre $-a$ et b, $-a$ et b étant les deux extremités de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$; désignons par $U(Q_0)$ un voisinage du point $Q_0 = Q(t_0)$. D'après le n° 11, si l'on désigne par $U(Q)$ un voisinage assez petit du point Q, nous avons

$$U(Q)(t_0) \subset U(Q_0).$$

Or, $L^+(P) \cap A \ni Q$ signifie que l'ensemble $L^+(P) \cap A$ n'est pas vide. En conséquence, d'après la remarque du numéro précédent, la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t. Donc il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q \qquad \text{et} \qquad 0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty,$$

puisque, par hypothèse, Q appartient à $L^+(P)$; donc, pour n assez grand, on a

$$P(t_n) \in U(Q),$$

d'où

$$P(t_n + t_0) \in U(Q)(t_0) \subset U(Q_0)$$

et

$$0 \leqq t_n + t_0 < t_{n+1} + t_0 < \ldots < t_{n+m} + t_0 < \ldots \to \infty.$$

Par conséquent la suite $\{P(t_n + t_0)\}$ converge vers le point $Q_0 = Q(t_0)$ pour $n \to \infty$ et ce point $Q(t_0)$ appartient à l'ensemble $L^+(P)$. Or, par hypothèse, t_0 est une valeur arbitraire positive ou négative entre $-a$ et b, donc nous avons

$$Q(t) \cup Q(s) \subset L^+(P);$$

d'ailleurs, d'après le n° 24, $L^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$K(Q) = \overline{P(t) \cup P(s)} \subset L^+(P).$$

On remarque surtout que, même s'il s'agit de l'ensemble des points limites au sens *positif* $L^+(P)$ de la solution $P(t)$, l'ensemble $L^+(P)$ contient la demi-caractéristique *négative* $Q(s)$ et aussi l'ensemble des points limites au sens *négatif* $L^-(Q)$ de la solution $Q(t)$.

28. Comme nous l'avons vu au n° 24, si l'on désigne par P un point du domaine A, l'ensemble fermé non vide $L^+(P)$ est connexe, ce qui entraîne, d'après un théorème de la théorie des ensembles, ou bien que $L^+(P)$ se réduit à un point, ou bien que $L^+(P)$ est un ensemble qui a la puissance du continu.

Considérons le cas où $L^+(P)$ se réduit à un point Q, de sorte que l'on a

$$\lim_{t \to \beta} P(t) = Q.$$

Supposons d'abord que β soit fini. D'après le n° 26, $L^+(P) = Q$ est un point de la frontière $\dot{A}$.

Supposons maintenant que β soit infini. Le point Q est ou bien un point de la frontière $\dot{A}$, ou bien un point du domaine A. Si Q est un point du domaine A, la solution $Q(t)$ est définie pour un certain intervalle de t contenant zéro. Or, d'après le numéro précédent, on a

$$Q(t) \cup Q(s) \subset L^+(P) = Q,$$

donc l'ensemble $Q(t) \cup Q(s)$ se réduit au point Q, c'est-à-dire que, pour toute valeur positive ou négative de t dans l'intervalle de définition, on a identiquement

$$Q(t) \equiv Q,$$

donc le point Q est un point singulier.

Ainsi nous avons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME. — *Si la solution* $P(t)$ *est définie pour toute valeur de t, et si* $\lim_{t \to \infty} P(t)$ *existe, ce point limite est ou bien un point de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A, *ou bien un point singulier.*

THÉORÈME. — *Pour que l'on ait*

$$L^+(P) = P,$$

P *étant un point du domaine* A, *il faut et il suffit que le point* P *soit singulier.*

Ajoutons quelques remarques pour la démonstration de ce dernier théorème. La suffisance de cette dernière condition est claire d'après le n° 8. Si β était fini, on aurait $L^+(P) = P \in \dot{A}$, ce qui est en contradiction avec l'hypothèse; en conséquence β est infini, ce qui montre, avec ce que nous venons de voir, que la condition est nécessaire.

29. Nous envisageons encore le cas où, β étant infini, l'ensemble $L^+(P)$ se réduit à un point Q, et supposons que Q soit *un point de la frontière* $\dot{A}$. Désignons par ε et τ deux nombres positifs donnés, et posons

$$\delta = \varepsilon\tau.$$

La convergence $\lim\limits_{t \to \infty} P(t) = Q$ montre que l'on a

$$|x_i(t_1) - x_i(t_2)| < \delta \qquad \text{pour} \quad t_1, t_2 > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

où T désigne un nombre positif assez grand; en particulier on a

$$|x_i(t + \tau) - x_i(t)| < \delta \qquad \text{pour} \quad t > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Divisant les deux membres de ces inégalités par le nombre positif τ, nous avons

$$\left|\frac{x_i(t+\tau) - x_i(t)}{\tau}\right| < \frac{\delta}{\tau} = \varepsilon \qquad \text{pour} \quad t > T \qquad (i = 1, 2, \ldots, m.$$

Or, d'après le théorème de la moyenne, nous avons

$$\frac{x_i(t+\tau) - x_i(t)}{\tau} = \frac{dx_i(t'_i)}{dt} = X_i(P(t'_i)) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m),$$

t'_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ étant m certaines valeurs de t entre t et $t + \delta$. Par conséquent, nous avons

$$|X_i(P(t'_i))| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

Ainsi nous avons le

Théorème. — *Soient* ε *et* τ *deux nombres positifs quelconques; si la solution* $P(t)$ *est définie pour toute valeur positive de* t *et que* $P(t)$ *converge vers un point de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A *pour* $t \to \infty$, *il existe une valeur* T *de* t, *telle que, pour* m *certaines valeurs* t'_i $(i = 1, 2, \ldots, m)$ *de tout intervalle de la forme* $(t, t + \tau)$ *où* t *est supérieur à* T, *on ait*

$$|X_i(P(t'_i))| < \varepsilon \qquad (i = 1, 2, \ldots, m).$$

II. — Ensembles $L^+(P)$ contenus dans le domaine A.

30. Dans ce paragraphe nous supposons toujours que l'ensemble $L^+(P)$ est contenu dans le domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t.

Nous énonçons ici un théorème que l'on démontre facilement à l'aide des théorèmes fondamentaux de la théorie des ensembles.

Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A; *pour que l'ensemble* $L^+(P)$ *soit contenu dans le domaine* A, *il faut et il suffit qu'il existe un sous-domaine* B *du domaine* A, *tel que l'on ait*

$$P(t) \subset B$$

pour toute valeur positive de t, *et*

$$\bar{B} \subset A.$$

31. Soit Q un point quelconque de l'ensemble $L^+(P)$; d'après l'hypothèse du numéro précédent, Q appartient au domaine A, donc la solution $Q(t)$ est définie pour $-a < t < b$, a, b étant deux nombres positifs ou infinis. D'après le n° 27, on a

$$L^+(Q) \cup L^-(Q) \subset L^+(P);$$

l'hypothèse $L^+(P) \subset A$ entraîne en outre

$$L^+(Q) \subset A \quad \text{et} \quad L^-(Q) \subset A.$$

Par conséquent, d'après le n° 26, a et b sont infinis.

Donc nous avons le

Théorème. — *Soit l'ensemble* $L^+(P)$ *contenu dans le domaine* A, P *étant un point du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $L^+(P)$, *la solution* $Q(t)$ *est définie pour toute valeur positive ainsi que négative de* t, *et l'on a*

$$K(Q) \subset L^+(P).$$

Comme conséquence directe de ce théorème, on a le

Théorème. — *Supposons que, outre les mêmes hypothèses sur* $L^+(P)$ *qu'au théorème précédent, l'ensemble* $L^+(P)$ *et la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$ *ne soient pas disjoints; on a alors*

$$K(P) = L^+(P).$$

Le théorème est facile à démontrer, mais on remarque que l'on a

$$L^-(P) \subset L^+(P).$$

32. Soit $P(t)$ une solution périodique de période fondamentale T; d'après le n° 15, la demi caractéristique positive $P(t)$ est une courbe fermée représentée par $P(t)$ pour les valeurs de t de l'intervalle $0 \leqq t < T$, et elle est également fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m.

Posons

$$t_n = nT \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

de sorte que l'on a $0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty$. D'après la définition de la période, on a $P(t_n) = P$, d'où $\lim\limits_{n \to \infty} P(t_n) = P$, ce qui montre que P appartient à l'ensemble $L^+(P)$.

Donc, d'après le numéro précédent, nous avons

$$L^+(P) = P(t) \cup P(s) = K(P)$$

et

$$K(P) = \overline{P(t)} \cup \overline{P(s)} = P(t) \cup P(s) = P(t) = P(s) = L^+(P) = L^-(P).$$

33. Réciproquement, supposons que l'on ait

$$L^+(P) = P(t),$$

P étant un point régulier; je dis que la solution $P(t)$ est périodique.

En effet, supposons que $P(t)$ ne soit pas périodique. Soient $f(Q) = 0$ une surface sans contact au point P et U un voisinage du point P assez petit pour que $f(Q) = 0$ soit une surface sans contact dans U. Désignons par V un autre voisinage du point P dont la fermeture $\overline{V}$ est contenue dans U, de sorte que $\overline{V}(t)$ est défini et contenu dans U pour $|t| < \varepsilon$, ε désignant un nombre positif assez petit.

Soit Π la partie de la surface $f(Q) = 0$ contenue dans V, de sorte que la fermeture $\overline{\Pi}$ de Π est contenue dans la fermeture $\overline{V}$ de V. Posons

$$M_1 = \overline{\Pi} \cap P(t) \qquad \text{et} \qquad M = \Pi \cap P(t);$$

on voit que l'ensemble M_1 est fermé, puisque la demi-caractéristique positive $P(t)$ est fermée, étant égale à l'ensemble fermé $L^+(P)$ par hypothèse, et en conséquence l'on a

$$M_1 \supset \overline{M},$$

ce qui montre que tout point Q de l'ensemble $\overline{M} - M$, s'il existe, appartient à $\overline{V} \subset U$ ainsi qu'à la demi-caractéristique positive $P(t)$ et satisfait à l'équation $f(Q) = 0$.

Je dis que l'ensemble $\overline{M}$ est dense en lui-même, c'est-à-dire que, si l'on désigne par Q_0 un point quelconque de l'ensemble $\overline{M}$, il existe une suite de points de $\overline{M}$ qui converge vers Q_0 dont tous les éléments diffèrent du point Q_0.

En effet, supposons d'abord que Q_0 soit un point de l'ensemble M, de sorte que Q_0 satisfait à l'équation $f(Q) = 0$ et que Q_0 appartient à V ainsi qu'à la demi-caractéristique positive $P(t)$, qui coïncide avec l'ensemble $L^+(P)$ par hypothèse. La relation $U \supset V \ni Q_0$ montre que la surface $f(Q) = 0$ est une surface sans contact au point Q_0, et la relation $L^+(P) = P(t) \ni Q$ montre qu'il existe une suite $\{t_n\}$, $0 \leq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty$, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q_0:$$

donc, d'après le n° 22, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs de t, telle que les points $P(\tau_n)$ satisfassent à l'équation $f(Q) = 0$, et appartiennent à V pour n assez grand, de sorte que les points $P(\tau_n)$ appartiennent à l'ensemble M pour n assez grand et que l'on ait $\lim\limits_{n \to \infty} P(\tau_n) = Q_0$. Or, $P(t)$ n'étant pas périodique, tous les points $P(\tau_n)$ diffèrent du point Q_0.

Supposons maintenant que Q_0 soit un point de l'ensemble $\overline{M} - M$, il est clair, d'après la définition de la fermeture, qu'il existe une suite de points de l'ensemble M qui converge vers Q_0.

Donc l'ensemble fermé $\overline{M}$ est dense en lui-même.

Si l'on désigne de nouveau par Q_0 un point quelconque de l'ensemble $\overline{M}$, on a $Q_0 = P(\tau(Q_0))$ pour une certaine valeur positive $\tau(Q_0)$ de t, et l'on a $f(P(\tau(Q_0))) = 0$. Puisque Q_0 appartient à V, $Q_0(t)$ ne satisfait à l'équation $f(Q) = 0$ pour aucune valeur de t entre $-\varepsilon$ et ε, excepté zéro, *a fortiori* entre zéro et ε (deux extrémités exclues).

Or, d'après un théorème de la théorie des ensembles, un ensemble fermé dense en lui-même a la puissance du continu. Donc nous obtenons ainsi une correspondance biunivoque entre tout intervalle $[\tau(Q_0), \tau(Q_0)+\varepsilon]$ de longueur ε et un point d'un ensemble ayant la puissance du continu, tandis que tous ces intervalles sont disjoints et que la réunion de tous ces intervalles est contenue dans l'ensemble des nombres réels positifs; ceci est impossible d'après un théorème de la théorie des ensembles. Donc l'hypothèse faite que $P(t)$ n'est pas périodique est absurde. Par conséquent, pour que l'on ait $L^+(P) = P(t)$, il faut que $P(t)$ soit périodique.

34. Soit P un point quelconque de l'ensemble R; si la demi-caractéristique positive $P(t)$ est fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m, on a

$$K^+(P) = \overline{P(t)} = P(t) \supset L^+(P),$$

d'où

$$L^+(P) \subset R \quad \text{et} \quad P(t) \cap L^+(P) \neq \emptyset,$$

puisque l'ensemble $L^+(P)$ n'est pas vide, d'après le n° 23.

En conséquence nous avons

$$P(t) \subset L^+(P), \quad \text{d'où} \quad P(t) = L^+(P).$$

Par conséquent, d'après le numéro précédent, la solution $P(t)$ est périodique.

En combinant les résultats obtenus depuis le n° 32, nous avons le

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* P *un point régulier, les trois conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *la solution* $P(t)$ *est périodique;*
2° *la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *coïncide avec* $L^+(P)$;
3° *la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *est fermée en tant qu'ensemble dans* R_m.

III. — Régions invariantes.

35. Soit M un sous-ensemble *du domaine* A; nous désignons par $L^+(M)$ la réunion $\bigcup_{P \in M} L^+(P)$ et par $K^+(M)$ la réunion $\bigcup_{P \in M} K^+(P)$.

De la même manière on définit l'ensemble $L^-(M)$ et l'ensemble $K^-(M)$ et l'on pose

$$L(M) = L^+(M) \cup L^-(M) \quad \text{et} \quad K(M) = K^+(M) \cup K^-(M).$$

Comme nous avons, pour tout point P du domaine A,

$$L^+(P) \subset \overline{A}, \quad L^-(P) \subset \overline{A}, \quad \ldots,$$

nous avons

$$L^+(M) \subset \overline{A}, \quad L^-(M) \subset \overline{A}, \quad \ldots.$$

Définition. — *Soit* M *un sous-ensemble du domaine* A, *tel que* $M(t)$ *soit défini pour toute valeur de* t, $-\infty < t < \infty$; *nous appelons l'ensemble* M *région invariante, ou simplement invariant, si l'on a*

$$M(t) = M$$

pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, *et si l'on a*

$$L(M) \subset M.$$

Nous remarquons que, même si chaque ensemble $L^+(P)$ est fermé, la réunion $L^+(M)$ n'est pas toujours fermée, en accord avec la théorie générale des ensembles.

36. Soit M un sous-ensemble du domaine A; supposons qu'il existe un nombre positif ε, tel que $M(t)$ soit défini et contenu dans M pour $|t| < \varepsilon$; je dis que $M(t)$ est défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, et que l'on a

$$M(t) = M \quad \text{pour} \quad -\infty < t < \infty.$$

En effet, soient t_0 une valeur positive quelconque de t inférieure à ε et P un point quelconque de l'ensemble M. Désignons par P_0 le point $P(t_0)$, de sorte que P_0 appartient à l'ensemble $M(t_0)$.

L'hypothèse $M(t_0) \subset M$ entraîne $P_0 \in M$, de sorte que $P_0(t) = P(t_0 + t)$ est défini et contenu dans M pour $|t| < \varepsilon$; en conséquence, d'après le n° 9, $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < t_0 + \varepsilon$. Or, t_0 peut prendre toute valeur positive inférieure à ε, donc $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < 2\varepsilon$.

Ainsi de suite, on démontre que $P(t)$ est défini et contenu dans M pour $-\varepsilon < t < n\varepsilon$, n étant un nombre entier quelconque; en conséquence $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur positive de t.

De même on démontre que $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur négative de t, et en conséquence pour toute valeur positive ou négative de t.

Supposons que, pour une valeur t_0 de t, $M - M(t_0)$ ne soit pas vide, et désignons par P un point de l'ensemble $M - M(t_0)$; l'hypothèse $P \in M$ entraîne $P_0 = P(-t_0) \in M$, d'où l'on a

$$P_0(t_0) = P \in M(t_0),$$

ce qui est en contradiction avec la conséquence directe $P \notin M(t_0)$ de l'hypothèse $P \in M - M(t_0)$.

Donc nous avons le

Lemme. — *Soit* M *un sous-ensemble du domaine* A ; *si* $M(t)$ *est défini et contenu dans* M *pour* $|t| < \varepsilon$, ε *étant un nombre positif*, $M(t)$ *est défini et coïncide avec l'ensemble* M *pour toute valeur positive ou négative de* t.

37. **Théorème.** — *Pour qu'un sous-ensemble* M *du domaine* A *soit invariant, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$K(P) = L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M.$$

En effet, si M est invariant, pour tout point P de l'ensemble M, $P(t)$ est défini et contenu dans M pour toute valeur positive ou négative de t et en outre nous avons $L(P) \subset M$, donc nous avons

$$K(P) = L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M.$$

Réciproquement, supposons que, pour tout point P de l'ensemble M, on ait

$$L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M\,;$$

M étant contenu dans A, on a $L(P) \subset A$, donc la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur de t. Or, l'hypothèse $P(t) \cup P(s) \subset M$ pour tout point de M entraîne $M(t) \subset M$, pour toute valeur de t; donc, d'après le lemme précédent, on a

$$M(t) = M$$

pour toute valeur de t.

En outre l'autre hypothèse $L(P) \subset M$ pour tout point P de M entraîne $L(M) \subset M$, ce qui achève la démonstration.

38. Le théorème du numéro précédent montre que la région invariante, à laquelle un point P du domaine A appartient, contient l'ensemble K(P). En conséquence, si K(P) contient un point de la frontière $\dot{A}$ du domaine A, soit Q, il n'existe pas de région invariante contenant le point P, puisque $Q(t)$ n'est pas défini.

Supposons que K(P) soit disjoint d'avec la frontière $\dot{A}$ du domaine A, c'est-à-dire que K(P) soit contenu dans le domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ soit définie pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$. Si l'on désigne par Q un point quelconque de l'ensemble $L(P) \subset K(P)$, on a

$$K(Q) \subset K(P),$$

$Q(t)$ étant défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$, d'après le n° 31 ; d'autre part, si Q est un point de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, on a $K(Q) = K(P)$, et $Q(t)$ est défini pour toute valeur de t, $-\infty < t < \infty$.

Donc K(P) est une région invariante et d'ailleurs, la plus petite parmi les régions invariantes contenant le point P.

Ainsi nous avons le

Théorème. — *Pour qu'il existe une région invariante contenant un point* P *du domaine* A, *il faut et il suffit que l'ensemble* K(P) *soit contenu dans le domaine* A.

S'il en existe au moins une, K(P) *est la plus petite région invariante contenant le point* P.

39. Théorème. — *Si les ensembles* $M_i (i \in I)$ *sont des régions invariantes,* I *désignant l'ensemble d'indices, la réunion* $\bigcup_{i\in I} M_i$ *et l'intersection* $\bigcap_{i\in I} M_i$ *sont également invariantes.*

Si M_1 *et* M_2 *sont deux régions invariantes,* M_2 *étant contenu dans* M_1, *l'ensemble* $M_1 - M_2$ *est invariant, pourvu que* $M_1 - M_2$ *soit fermé.*

En effet, soit P un point quelconque de la réunion $\bigcup_{i\in I} M_i$; pour un certain indice $k \in I$, on a $P \in M_k$; l'hypothèse que M est invariant entraîne que, $P(t)$ étant défini pour $-\infty < t < \infty$, on a

$$K(P) = L(P) \cup P(t) \cup P(s) \subset M_k,$$

d'où

$$K(P) \subset \bigcup_{i\in I} M_i;$$

or, P est arbitraire, donc $\bigcup_{i\in I} M_i$ est invariant, d'après le n° 37.

Soit P un point quelconque de l'intersection $\bigcap_{i\in I} M_i$, de sorte que le point P appartient à M_k pour tout indice $k \in I$, donc, $P(t)$ étant défini pour $-\infty < t < \infty$, on a, pour tout indice $k \in I$, $K(P) \subset M_k$, d'où

$$K(P) \subset \bigcap_{i\in I} M_i.$$

Comme P est arbitraire $\bigcap_{i\in I} M_i$ est invariant.

Soit P un point quelconque de l'ensemble $M_1 - M_2$, de sorte que l'on a $P \in M_1$, $P \notin M_2$. L'hypothèse que M_1 est invariant entraîne que l'on a $K(P) \subset M_1$ et que $P(t)$ est défini pour $-\infty < t < \infty$.

Je dis que l'on a

$$\{P(t) \cup P(s)\} \cap M_2 = \emptyset,$$

de sorte que l'on a

$$P(t) \cup P(s) \subset M_1 - M_2.$$

En effet, dans le cas contraire, pour une valeur t_0 de t, on aurait $P(t_0) \in M_2$.

Désignons par P_0 le point $P(t_0)$, de sorte que P_0 appartient à M_2. Comme, par hypothèse, M_2 est invariant, nous avons

$$P_0(t) \cup P_0(s) \subset M_2,$$

en particulier,

$$P = P_0(-t_0) \in M_2,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse $P \in M_1 - M_2$. Donc nous avons

$$P(t) \cup P(s) \subset M_1 - M_2$$

pour tout point P de l'ensemble $M_1 - M_2$.

Or, si $M_1 - M_2$ est fermé, nous avons

$$K(P) = \overline{P(t) \cup P(s)} \subset M_1 - M_2$$

pour tout point P de l'ensemble $M_1 - M_2$, donc la démonstration est achevée.

40. Théorème. — *Si* M *est une région invariante dont la fermeture* $\overline{M}$ *est contenue dans* A, *la fermeture* $\overline{M}$ *est une région invariante.*

En effet, si P est un point de M, $K(P) \subset M$ est trivial. Donc nous pouvons supposer que P est un point de $\overline{M} - M$; alors il existe une suite $\{P_n\}$ de points de l'ensemble M qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Soit $P(t_0)$ un point quelconque de la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$; d'après le n° 11, on a $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(t) = P(t_0)$. Or, les points P_n appartenant à l'ensemble M, on a $P_n(t_0) \in M$, puisque, par hypothèse, M est invariant. Donc nous avons $P(t_0) \in \overline{M}$. Comme t_0 est arbitraire, nous avons

$$P(t) \cup P(s) \subset \overline{M}, \qquad \text{d'où} \qquad K(P) = \overline{P(t) \cup P(s)} \subset \overline{M}.$$

Or, P est un point arbitraire de l'ensemble $\overline{M}$, donc $\overline{M}$ est invariant.

Comme conséquence directe des deux théorèmes précédents, on a le

Corollaire. — *Si* B *est un sous-domaine invariant du domaine* A *dont la fermeture* $\overline{B}$ *est contenue dans* A, *la fermeture* $\overline{B}$ *et la frontière* $\dot{B}$ *du domaine* B *sont invariantes.*

CHAPITRE III.

Prolongement.

1. — Prolongement indirect.

41. Définition. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A ; *nous appelons un point* Q *point de prolongement indirect au sens positif du point* P, *s'il existe une suite* $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *et une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs non*

négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q.$$

On définit de même les points de prolongement indirect au sens négatif d'un point de la fermeture $\bar{A}$.

Nous désignons par $D^+(P)$ et par $D^-(P)$ les ensembles des points de prolongement du point P au sens positif et au sens négatif respectivement, et nous posons

$$D(P) = D^+(P) \cup D^-(P).$$

Théorème. — *Si P est un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A, l'ensemble $D^+(P)$ contient le point P et, de plus, si P appartient au domaine A, il contient la demi-caractéristique positive $P(t)$.*

En effet, puisque P est un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Posons $t_n = 0$; nous avons $P_n(t_n) = P_n$, d'où $\lim\limits_{n\to\infty} P_n(t_n) = P$; par conséquent P est un point de l'ensemble $D^+(P)$.

Supposons que P soit un point du domaine A, de sorte que la solution $P(t)$ soit définie pour $-\alpha < t < \beta$. Soit t_0 une valeur positive quelconque inférieure à β ; posons

$$P_n = P \quad \text{et} \quad t_n = t_0 ;$$

on voit facilement que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = P(t_0).$$

Par conséquent $P(t_0)$ appartient à $D^+(P)$. Or, t_0 est une valeur positive quelconque inférieure à β, donc la demi-caractéristique positive $P(t)$ est contenue dans $D^+(P)$.

42. Soit Q un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, P étant un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A ; supposons que le point Q appartienne au domaine A, de sorte que la solution $Q(t)$ soit définie pour $-a < t < b$, a, b étant positifs ou infinis. Soit t_0 une valeur quelconque de t comprise entre $-a$ et b, et posons $Q_0 = Q(t_0)$.

Désignons par $U(Q_0)$ un voisinage quelconque du point Q_0 ; d'après le théorème du n° 11, pour un voisinage assez petit $U(Q)$ du point Q, on a

$$U(Q)(t_0) \subset U(Q_0).$$

Or, par hypothèse, Q appartient à $D^+(P)$, donc il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q,$$

d'où

$$P_n(t_n) \in U(Q)$$

pour n assez grand.

Par conséquent, on a, pour n assez grand,

$$P_n(t_n + t_0) \in U(Q)(t_0) \subset U(Q_0), \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(t_n + t_0) = Q_0 = Q(t_0).$$

Donc, si l'on peut extraire une infinité d'éléments non négatifs $t'_n + t_0$ de la suite $\{t_n + t_0\}$, $Q(t_0)$ appartient à l'ensemble $D^+(P)$.

Posons

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} t_n = \bar{t} \geqq 0,$$

de sorte que, si l'on désigne par ε un nombre positif quelconque, on a, pour n assez grand,

$$t_n > \bar{t} - \varepsilon, \qquad \text{d'où} \qquad t_n + t_0 > 0,$$

si l'on a $t_0 > -\bar{t}$; en conséquence $Q(t_0)$ appartient à $D^+(P)$.

Supposons d'abord que l'on ait $-a < -\bar{t} \leqq 0$, de sorte que $Q(-\bar{t})$ soit défini et appartienne à la demi-caractéristique négative $Q(s)$.

D'après la définition de $\bar{t}$ donnée ci-dessus, on peut extraire une suite partielle $\{t_{n'}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telle que l'on ait $\lim\limits_{n' \to \infty} t_{n'} = \bar{t}$, de sorte que l'on ait

$$\lim_{n' \to \infty} (t_{n'} - \bar{t}) = 0.$$

Désignons par $Q_{n'}$ les points $P_{n'}(t_{n'})$, de sorte que l'on a

$$Q_{n'}(-\bar{t}) = P_{n'}(t_{n'} - \bar{t});$$

d'autre part nous avons

$$\lim_{n' \to \infty} Q_{n'} = Q \qquad \text{et} \qquad \lim_{n' \to \infty} Q_{n'}(-\bar{t}) = Q(-\bar{t}).$$

Or, on a, pour n' assez grand,

$$Q_{n'}(-t_{n'}) = P(t_{n'} - t_{n'}) = P, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n' \to \infty} Q_{n'}(-t_{n'}) = Q(-\bar{t}) = \lim_{n' \to \infty} P_{n'} = P,$$

d'après le n° 12, puisque l'on a $\lim\limits_{n' \to \infty} (-t_{n'}) = -t$, et que la suite $\{P_{n'}\}$ est une suite partielle de la suite $\{P_n\}$, cette dernière étant convergente vers P.

L'égalité $Q(-\bar{t}) = P$ signifie que le point P appartient à la demi-caractéristique négative $Q(s)$, ce qui revient à dire que le point Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, et l'on a $Q = P(\bar{t})$. Donc la condition $-a < -\bar{t} \leqq 0$ est équivalente à la condition $0 \leqq \bar{t} < \beta$.

Supposons maintenant que l'on ait

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} t_n = \bar{t} \geqq a;$$

pour toute valeur t_0 de t, $-a < t_0 < b$, il existe une infinité d'éléments non négatifs $t_n + t_0$, donc la caractéristique totale $Q(t) \cup Q(s)$ est contenue dans $D^+(P)$.

En conséquence, s'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\varliminf_{n\to\infty} P_n(t) = Q \qquad \text{et} \qquad \varliminf_{n\to\infty} t_n \geqq a,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$, la caractéristique totale $Q(t) \cup Q(s)$ est contenue dans $D^+(P)$.

Ainsi nous avons démontré le théorème suivant :

Théorème. — *Soit* Q *un point quelconque de l'ensemble* $D^+(P)$, P *étant un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A ; *si le point* Q *appartient au domaine* A, *ou bien la caractéristique totale* $Q(t) \cup Q(s)$ *est contenue dans* $D^+(P)$, *ou bien il existe une valeur* $-\bar{t}$, $0 \leqq \bar{t} < a$, *telle que* $Q(t)$ *soit contenu dans* $D^+(P)$ *pour* $-\bar{t} \leqq t < b$. *Pour que l'on soit dans le second cas de l'alternative, il faut et il suffit que le point* Q *soit un point* $P(\bar{t})$, $\bar{t} \geqq 0$, *de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, P *appartenant au domaine* A *et que l'on ait*

$$0 \leqq \bar{t} = \varliminf_{n\to\infty} t_n < \beta$$

pour toute suite $\{t_n\}$ *telle que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *qui converge vers le point* P *pour* $n \to \infty$.

43. Considérons d'un peu plus près le second cas de l'alternative du théorème précédent, et conservons les notations. On peut cependant supposer sans restreindre la généralité que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} t_n = \bar{t}.$$

Soit P' un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P'_n(t'_n) = P', \qquad \varliminf_{n\to\infty} t' = t' \geqq \beta,$$

avec une certaine suite $\{P'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$.

Désignons par Q_n les points $P'_n(t_n)$ ($n = 1, 2 \ldots$), de sorte que l'on a, d'après le n° 12,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = \lim_{n\to\infty} P'_n(t_n) = Q = P(\bar{t}),$$

puisque l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} P'_n = P$ et $\lim\limits_{n\to\infty} t_n = \bar{t}$, par hypothèse. Or, nous avons

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\tau_n) = \lim_{n\to\infty} P'_n(t_n + \tau_n) = P',$$

où τ_n désignent les différences $t'_n - t_n$, qui sont positives pour n assez grand, puisque, comme on l'a vu, $\underline{\lim}_{n\to\infty} t'_n$ est au moins égale à β, donc supérieure à $\bar{t}$.

Par conséquent P′ appartient à $D^+(Q)$ et d'ailleurs P′ n'appartient pas à la demi-caractéristique positive $Q(t)$, puisque cette dernière est contenue dans la demi-caractéristique positive $P(t)$, qui, par hypothèse, ne contient pas le point P′.

Réciproquement, supposons que Q′ soit un point de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $Q(t)$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $\{\tau_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} Q'_n(\tau_n) = Q', \qquad \underline{\lim}_{n\to\infty} \tau_n \geqq b,$$

où $\{Q'_n\}$ désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers Q pour $n \to \infty$.

Comme nous avons $Q = P(\bar{t})$, nous avons $\lim\limits_{n\to\infty} Q'_n(-\bar{t}) = P$; donc, si l'on désigne par P''_n les points $Q'_n(-\bar{t})$, on a

$$\lim_{n\to\infty} P''_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P''_n(\tau_n + \bar{t}) = \lim_{n\to\infty} Q'_n(\tau_n) = Q'.$$

Or, les valeurs t_n sont non négatives et l'on a $\lim\limits_{n\to\infty} t_n \geqq b$, donc on a

$$\lim_{n\to\infty} (\tau_n + \bar{t}) \geqq b + \bar{t}.$$

Puisque, par hypothèse, on a $Q = P(\bar{t})$, on a

$$\beta = b + \bar{t}, \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{n\to\infty} (\tau_n + \bar{t}) \geqq \beta,$$

c'est-à-dire que le point Q est un point de l'ensemble $D^+(P)$ n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$.

Par conséquent nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* Q *un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, P *étant un point du domaine* A ; *si la demi-caractéristique négative* $Q(s)$ *n'est pas contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$, *l'ensemble* $D^+(Q) - Q(t)$ *coïncide avec l'ensemble*

$D^+(P) - P(t)$, *où* $Q(t)$ *et* $P(t)$ *désignent les demi-caractéristiques positives partant des points* Q *et* P *respectivement*.

44. Revenons au premier cas de l'alternative du théorème du n° 42, et supposons que Q soit un point de la demi-caractéristique positive $P(t)$, P étant un point du domaine A, de sorte que l'on ait $P(t_0) = Q$, où t_0 désigne une certaine valeur non négative de t, $0 \leqq t_0 < \beta$.

Soit Q' un point quelconque de la caractéristique positive $P(t)$, de sorte que l'on ait $Q' = P'(t')$, où t' est une certaine valeur non négative de t; je dis qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t et une suite $\{P'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P'_n(t'_n) = Q' \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n \to \infty} t'_n \geqq \beta.$$

En effet, d'après le théorème du n° 42, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q \quad \text{et} \quad \underline{\lim}_{n \to \infty} t_n = \bar{t} \geqq \beta,$$

où $\{P_n\}$ désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Posons

$$P_n = P'_n \quad \text{et} \quad t'_n = t_n + (t' - t_0),$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} P'_n(t'_n) = \lim_{n \to \infty} P_n(t_n + (t' - t_0)) = Q';$$

donc il ne reste plus à démontrer que la condition

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} t'_n \geqq \beta.$$

Si $t' - t_0$ est non négatif, ou si β est infini, la démonstration est déjà achevée. Supposons donc que $t' - t_0$ soit négatif et que β soit fini. Or, les inégalités $\underline{\lim}_{n \to \infty} t_n \geqq \beta > t_0$ entraînent

$$\underline{\lim}_{n \to \infty} t'_n = \bar{t}' \geqq \beta + (t' - t_0) > t',$$

donc, si nous avions $\lim_{n \to \infty} t'_n = \bar{t}' < \beta$, nous aurions

$$\lim_{n \to \infty} P'_n(t'_n) = P(\bar{t}') = Q' = P(t'),$$

c'est-à-dire que $P(t)$ serait périodique, de sorte que β serait infini, contrairement à notre hypothèse. Donc on a $\underline{\lim}_{n \to \infty} t' \geqq \beta$.

Par conséquent, d'après le théorème du n° 42, la caractéristique totale $Q'(t) \cup Q'(s)$ est également contenue dans l'ensemble $D^+(P)$, pour tout point Q' de la caractéristique positive $P(t)$. Je dis en outre que $D^+(Q)$ coïncide avec

$D^+(P)$. En effet, soit P' un point quelconque de l'ensemble $D^+(Q)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait $\lim\limits_{n\to\infty} Q'_n(t'_n) = P'$, où Q' désigne une certaine suite de points du domaine A qui converge vers le point $Q = P(\bar{t})$ pour $n \to \infty$. A cause de cette dernière convergence, on a $\lim\limits_{n\to\infty} Q'_n(-\bar{t}) = P$. Désignons par P_n les points $Q'_n(-\bar{t})$ $(n = 1, 2, \ldots)$, de sorte que l'on a

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} P_n(t'_n + \bar{t}) = P' ;$$

donc le point P' appartient à $D^+(P)$.

Soit Q' un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, de sorte qu'il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} Q'_n(t_n) = Q' \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} t_n \geqq \beta,$$

avec une certaine suite $\{Q'_n\}$ de points du domaine A qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Désignons par Q''_n les points $Q'_n(\bar{t})$ $(n = 1, 2, \ldots)$; on a

$$\lim_{n\to\infty} Q''_n(t_n - \bar{t}) = Q' \quad \text{et} \quad \lim_{n\to\infty} Q''_n = Q,$$

puisque l'on a $Q'_n = Q''_n(-\bar{t})$; et les deux inégalités $\varliminf\limits_{n\to\infty} t_n \geqq \beta$ et $\bar{t} < \beta$ entraîne $t_n - \bar{t} \geqq 0$ pour n assez grand, ce qui achève la démonstration.

En conséquence nous avons le

Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *si une caractéristique totale passant par un point* Q *de la demi-caractéristique positive* $P(t)$ *est contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$, *pour tout point* Q' *de la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$, *l'ensemble* $D^+(Q')$ *coïncide avec l'ensemble* $D^+(P)$.

En rappelant le second cas de l'alternative du théorème du n° 42, on voit facilement le

Théorème. — *Soit* P *un point du domaine* A ; *supposons qu'il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs non négatives de t, dont la limite inférieure soit supérieure ou égale à* β *et une suite* $\{P_n\}$ *de points du domaine* A *qui converge vers le point* P *pour* $n \to \infty$, *ces deux limites étant telles que la suite* $\{P_n(t_n)\}$ *converge, pour* $n \to \infty$, *vers un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$. *Alors la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$ *est contenue dans l'ensemble* $D^+(P)$; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de la caractéristique totale* $P(t) \cup P(s)$, *l'ensemble* $D^+(Q)$ *coïncide avec l'ensemble* $D^+(P)$.

45. Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A ; *les ensembles* $D^+(P)$, $D^-(P)$ *et* $D(P)$ *sont : 1° fermés et 2° connexes.*

En effet, soit Q un point quelconque de la fermeture $\overline{D^+(P)}$, de sorte qu'il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de l'ensemble $D^+(P)$ qui converge vers Q pour $n \to \infty$. L'hypothèse $Q_n \in D^+(P)$ entraîne que, pour chaque nombre n, il existe une suite $\{t_{nk}\}$ de valeurs non négatives de t et une suite $\{P_{nk}\}$ de points du domaine A, telles que l'on ait

$$\lim_{k\to\infty} P_{nk}(t_{nk}) = Q_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} P_{nk} = P \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soient $\{U_l(P)\}$ et $\{U_l(Q)\}$ deux suites de voisinages de P et Q qui tendent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$; l'hypothèse $\lim\limits_{n\to\infty} Q_n = Q$ montre que l'on a $Q_n \in U_l(Q)$ pour n assez grand. Soit n_l un nombre n qui satisfasse à cette condition ; si l'on désigne par $U(Q_{n_l})$ un voisinage assez petit du point Q_{n_l}, on a $U(Q_{n_l}) \subset U_l(Q)$. Or, les hypothèses $\lim\limits_{k\to\infty} P_{nk} = P$ pour tout nombre n et $\lim\limits_{k\to\infty} P_{nk}(t_{nk}) = Q_n$ entraînent, pour k assez grand,

$$P_{n_l k} \in U_l(P) \qquad \text{et} \qquad P_{n_l k}(t_{n_l k}) \in U(Q_{n_l}) \subset U_l(Q).$$

Soit k_l un nombre k qui satisfasse à cette condition ; posons

$$P_{n_l k_l} = P_l, \qquad t_{n_l k_l} = t_l,$$

de sorte que t_l soit non négatif et que l'on ait

$$P_l \in U_l(P) \qquad \text{et} \qquad P_l(t_l) \in U_l(Q).$$

Comme les deux suites $\{U_l(P)\}$ et $\{U_l(Q)\}$ tendent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$, les suites $\{P_l\}$ et $\{P_l(t_l)\}$ ainsi déterminées convergent respectivement vers P et Q pour $l \to \infty$.

Par conséquent le point Q appartient à l'ensemble $D^+(P)$. Donc nous avons $\overline{D^+(P)} \subset D^+(P)$, ce qui montre que l'ensemble $D^+(P)$ est fermé.

De la même manière on démontre que l'ensemble $D^-(P)$ est fermé ; en conséquence la réunion $D(P)$ des deux ensembles fermés $D^+(P)$ et $D^-(P)$ est fermée.

Étant donné que $D^+(P)$ est fermé, si $D^+(P)$ n'était pas connexe, il existerait deux ensembles fermés non vides et disjoints, soient F_1 et F_2, dont la réunion serait $D^+(P)$:

$$D^+(P) = F_1 \cup F_2, \qquad F_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2), \qquad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Soient $U(F_1)$ et $U(F_2)$ deux voisinages des ensembles fermés F_1 et F_2 respectivement, tels que l'on ait

$$\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \emptyset.$$

Supposons que le point P appartienne à l'ensemble F_1 et désignons par Q un point de l'ensemble F_2. La relation $Q \in D^+(P)$ entraîne qu'il existe une suite $\{t_n\}$

de valeurs non négatives de t et une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n\to\infty} P_n(t_n) = Q,$$

de sorte que l'on ait

$$P_n \in U(F_1) \qquad \text{et} \qquad P_n(t_n) \in U(F_2)$$

pour n assez grand.

Or, les solutions $P_n(t)$ sont continues, donc pour chaque valeur assez grande de n, il existe une valeur τ_n de t comprise entre zéro et t_n, telle que l'on ait

$$P_n(\tau_n) \notin \overline{U(F_1)} \cup \overline{U(F_2)}.$$

Soit Q' un point d'accumulation de l'ensemble $\{P_n(\tau_n)\}$; on voit que l'on a

$$Q' \notin U(F_1) \cup U(F_2),$$

donc, on peut extraire une suite $\{P_{n'}(\tau_{n'})\}$ de l'ensemble $\{P_n(\tau_n)\}$, de manière que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_{n'}(\tau_{n'}) = Q'.$$

Or, la suite $\{P_n\}$ converge vers P pour $n \to \infty$, donc sa suite partielle $\{P_{n'}\}$ converge vers P pour $n' \to \infty$, ce qui montre que le point Q' appartient à $D^+(P)$. Puisque Q' n'appartient ni à $U(F_1)$, ni à $U(F_2)$, ni *a fortiori* à F_1 ou à F_2, cette conclusion $Q' \in D^+(P)$ conduit à une contradiction avec l'hypothèse

$$D^+(P) = F_1 \cup F_2.$$

Par conséquent $D^+(P)$ est connexe.

On démontre de même que l'ensemble $D^-(P)$ est connexe. Étant donné que les deux ensembles $D^+(P)$ et $D^-(P)$ sont connexes, leur réunion $D(P)$ est connexe, puisque le point P appartient à $D^+(P)$ ainsi qu'à $D^-(P)$.

46. Soit P un point quelconque de la fermeture $\overline{A}$ du domaine A; si Q est un point de l'ensemble $D^+(P)$ appartenant au domaine A qui ne soit pas situé sur la demi-caractéristique positive $P(t)$, on a, d'après le théorème du n° 42,

$$Q(t) \cup Q(s) \subset D^+(P).$$

Or, l'ensemble $D^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$K(Q) = \overline{Q(t)} \cup \overline{Q(s)} \subset D^+(P).$$

Même si Q appartient à la demi-caractéristique positive $P(t)$, on a $Q(t) \subset D^+(P)$, d'où

$$K^+(Q) = \overline{Q(t)} \subset D^+(P).$$

En conséquence nous avons le

Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $D^+(P)$ *appartenant au domaine* A, *nous avons toujours*

$$K^+(Q) \subset D^+(P).$$

En outre si Q *n'appartient pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *nous avons*

$$K(Q) = K^+(Q) \cup K^-(Q) \subset D^+(P).$$

47. Théorème. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *pour qu'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\overline{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in D^+(P_n) \qquad (n = 1, 2, \ldots),$$

il faut et il suffit que Q *appartienne à* $D^+(P)$.

En effet, il est clair que la condition est suffisante, puisque $D^+(P_n)$ contient la demi-caractéristique positive $P_n(t)$ et le point P_n.

Pour démontrer qu'elle est nécessaire, désignons par $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui tend vers Q pour $k \to \infty$. L'hypothèse $Q_n \in D^+(P_n)$ entraîne qu'il existe, pour chaque nombre n, une suite $\{P_{ln}\}$ de points domaine A et une suite $\{t_{ln}\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{l\to\infty} P_{ln} = P_n \qquad \text{et} \qquad \lim_{l\to\infty} P_n(t_{ln}) = Q_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Soit $\{U_k(P)\}$ une suite de voisinages du point P qui tend vers P pour $k \to \infty$; nous avons, pour n assez grand,

$$P_n \in U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_n \in U_k(Q).$$

Soit $n(k)$ un nombre n qui satisfasse à ces conditions; si l'on désigne par $U(P_{n(k)})$ et $U(Q_{n(k)})$ deux voisinages assez petits des points $P_{n(k)}$ et $Q_{n(k)}$ respectivement, on a, pour l assez grand,

$$P_{ln(k)} \in U(P_{n(k)}) \subset U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_{ln(k)} \in U(Q_{n(k)}) \subset U_k(Q).$$

Désignant par $l(k)$ un nombre l qui satisfait à ces conditions, posons

$$P_{l(k)n(k)} = P'_k, \qquad 0 < t_{l(k)n(k)} = t'_k.$$

Comme la suite $\{U_k(P)\}$ et la suite $\{U_k(Q)\}$ tendent vers P et Q respectivement pour $k \to \infty$, nous avons

$$\lim_{k\to\infty} P'_k = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{k\to\infty} P'_k(t'_k) = Q,$$

ce qui montre que le point Q appartient à $D^+(P)$.

48. THÉORÈME. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *pour qu'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points du domaine* A, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in K^+(P_n) \qquad (n=1, 2, \ldots),$$

il faut et il suffit que Q *appartienne à* $D^+(P)$.

En effet, d'après le théorème précédent, il faut que l'on ait $Q \in D^+(P)$, car l'on a

$$K^+(P_n) \subset D^+(P_n);$$

et, par définition, il suffit que l'on ait $Q \in D^+(P)$, puisque l'on a

$$K^+(P_n) \supset P_n(t).$$

49. Si M est un sous-ensemble *de la fermeture* $\overline{A}$ du domaine A, nous posons comme toujours

$$D^+(M) = \bigcup_{P\in M} D^+(P), \qquad D^-(M) = \bigcup_{P\in M} D^-(P)$$

et

$$D(M) = D^+(M) \cup D^-(M).$$

Supposons que U soit un sous-ensemble ouvert du domaine A; soit Q un point quelconque de l'ensemble $D^+(U)$, de sorte qu'il existe un point P de l'ensemble ouvert U, tel que l'on ait $Q \in D^+(P)$. D'après le théorème précédent, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$, et telle qu'une certaine suite $\{Q_n\}$, chaque Q_n étant extrait de l'ensemble $D^+(P_n)$, converge vers Q pour $n \to \infty$.

En conséquence on a, pour n assez grand,

$$P_n \in U \qquad \text{et} \qquad Q_n \in K^+(P_n) \subset K^+(U),$$

d'où

$$Q \in \overline{K^+(U)};$$

comme Q est un point arbitraire de l'ensemble $D^+(U)$, nous avons le

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* U *un sous-ensemble ouvert du domaine* A, *on a*

$$\overline{K^+(U)} \supset D^+(U).$$

50. Supposons que M soit une région invariante et désignons par P un point de la fermeture $\overline{A}$ n'appartenant pas à la fermeture $\overline{M}$. Supposons que l'intersection de l'ensemble $D^+(P)$ et de l'intérieur $\mathring{M}$ de la région M ne soit pas vide et désignons par Q un point de l'intersection $D^+(P) \cap \mathring{M}$.

L'hypothèse $Q \in \mathring{M}$ entraîne que, pour un assez petit voisinage $U(Q)$ de Q, on a $U(Q) \subset \mathring{M}$ et l'hypothèse $P \notin \overline{M}$ montre qu'il existe un voisinage $U(P)$ du point P, tel que l'on ait $U(P) \cap \overline{M} = \emptyset$; en conséquence on a

$$U(P) \cap U(Q) = \emptyset.$$

A cause de l'hypothèse $Q \in D^+(P)$, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telle que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q,$$

avec une certaine suite $\{P_n\}$ de points du domaine A qui converge vers P pour $n \to \infty$. Donc, pour n assez grand, on a

$$P_n \in U(P) \quad \text{et} \quad Q_n = P_n(t_n) \in U(Q),$$

d'où

$$Q_n \in U(Q) \subset \mathring{M} \subset M \quad \text{et} \quad P_n = Q_n(-t_n) \in \overline{M},$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que M est une région invariante.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Si* M *est une région invariante, pour tout point* P *en dehors de la fermeture* $\overline{M}$ *de la région* M, *l'ensemble* $D^+(P)$ *est disjoint d'avec l'intérieur* $\mathring{M}$ *de* M.

Si M est ouvert, l'intérieur $\mathring{M}$ de M coïncide avec M. En conséquence nous avons le

COROLLAIRE. — *Si* M *est une région invariante ouverte, et si l'on désigne par* P *un point quelconque en dehors de la fermeture* $\overline{M}$ *de* M, *l'ensemble* $D^+(P)$ *est disjoint d'avec l'ensemble* M.

51. THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $L^+(P)$, *l'ensemble* $D^+(Q)$ *ainsi que l'ensemble* $D^-(Q)$ *contiennent l'ensemble* $L^+(P)$.

En effet, soit Q' un point quelconque de l'ensemble $L^+(P)$; comme Q appartient également à $L^+(P)$, il existe deux suites $\{t_n\}$ et $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t'_n) = Q'$$

et

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad 0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \beta;$$

à cause des deux dernières conditions, on peut extraire une suite partielle $\{t'_{k(n)}\}$ de la suite $\{t'_n\}$ et une suite partielle $\{t_{l(n)}\}$ de la suite $\{t_n\}$, telles que l'on ait

$$t_n < t'_{k(n)} \quad \text{et} \quad 0 \leqq t'_{k(1)} < t'_{k(2)} < \ldots < t'_{k(n)} < \ldots \to \beta,$$

et

$$t'_n < t_{l(n)} \quad \text{et} \quad 0 \leqq t_{l(1)} < t_{l(2)} < \ldots < t_{l(n)} < \ldots \to \beta,$$

pour tout nombre n.

Posons

$$P_n = P(t_n), \qquad \bar{t}_n = t'_{k(n)} - t_n > 0 \qquad \text{et} \qquad \bar{\bar{t}}_n = t'_n - t_{l(n)} < 0;$$

on voit qu'en tant que suite partielle de la suite $\{P(t'_n)\}$, chacune des deux suites $\{P_n(\bar{t}_n)\}$ et $\{P_{l(n)}(\bar{\bar{t}}_n)\}$ converge vers le point Q' pour $n \to \infty$, puisque l'on a

$$P_n(\bar{t}_n) = P(t'_n) \qquad \text{et} \qquad P_{l(n)}(\bar{\bar{t}}_n) = P(t'_n).$$

Donc nous avons

$$D^+(Q) \ni Q' \qquad \text{et} \qquad D^-(Q) \ni Q',$$

puisque nous avons

$$P_n = P(t_n) \to Q \qquad \text{pour} \quad n \to \infty.$$

Or, Q est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$, donc nous avons

$$D^+(Q) \supset L^+(P) \qquad \text{et} \qquad D^-(Q) \supset L^+(P).$$

On remarque que l'ensemble des points de prolongement indirect au sens *négatif* d'un point limite Q au sens *positif* du point P contient l'ensemble des points limites au sens *positif* du point P.

52. Considérons encore l'ensemble $D^+(P)$, P étant un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A. Si l'on désigne par Q un point quelconque de l'ensemble $D^+(P)$, il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non négatives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q.$$

Posons

$$Q_n = P_n(t_n) \qquad \text{et} \qquad t'_n = -t_n,$$

de sorte que les valeurs t'_n sont non positives, et que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n(t'_n) = P.$$

Par conséquent nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $D^+(P)$, *on a*

$$D^-(Q) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette propriété du prolongement indirect.

53. Soient P un point de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A et Q un point de l'ensemble $D^+(P)$. Le théorème précédent montre que l'on a

$$D^-(Q) \ni P;$$

donc, d'après le théorème du n° 42, si le point Q n'appartient pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$, ou si le point P n'appartient pas à la demi-caractéristique négative $Q(s)$, on a

$$D^-(Q) \supset P(t) \cup P(s)$$

et dans le cas contraire, on a

$$D^-(Q) \supset P(t),$$

d'où

$$D^-(Q) \supset K(P) \quad \text{et} \quad D^-(Q) \supset K^+(P)$$

respectivement.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si* Q *désigne un point de l'ensemble* $D^+(P)$, *on a*

$$D^-(Q) \supset K^+(P)$$

si le point Q *appartient à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *et*

$$D^-(Q) \supset K(P)$$

si le point Q *n'appartient pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$.

II. — Prolongement secondaire.

54. DÉFINITION. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *on dit qu'un point* Q *est point de prolongement secondaire direct au sens positif du point* P, *s'il existe un nombre fini, soit* $N-1$, *de points* $P_1, P_2, P_3, \ldots, P_{N-1}$, *tels que l'on ait*

$$P_i \in D^+(P_{i-1}) \qquad (i = 1, 2, \ldots, N),$$

P_0, P_N *désignant les points* P *et* Q *respectivement.*

On définit de même les points de prolongement secondaire direct au sens négatif du point P. *Nous désignons par* $E^+(P)$ *et* $E^-(P)$ *les ensembles de points de prolongement secondaire direct du point* P *respectivement au sens positif et au sens négatif. Nous posons comme toujours*

$$E(P) = E^+(P) \cup E^-(P).$$

55. On démontre facilement le théorème suivant :

THÉORÈME. — 1° *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset D^+(P) \ni P \quad \text{et} \quad E^-(P) \supset D^-(P) \ni P.$$

2° *Soit* Q *un point de l'ensemble* $E^+(P)$, P *étant un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset E^+(Q) \supset D^+(Q) \ni Q \qquad et \qquad E^-(Q) \supset E^-(P) \supset D^-(P) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette dernière propriété du prolongement secondaire direct.

3° *Pour tout point* Q *de* $E^+(P)$, *si* P *est un point de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A, *ou pour les points n'appartenant pas à la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *quand bien même* P *serait un point du domaine* A, *on a*

$$E^+(P) \supset Q(t) \cup Q(s).$$

On remarque que les ensembles $E^+(P)$, $E^-(P)$ et $E(P)$ ne sont pas toujours fermés, mais on démontre facilement qu'*ils sont connexes*.

Soit M un sous-ensemble *de la fermeture* $\overline{A}$ du domaine A; on pose

$$E^+(M) = \bigcup_{P \in M} E^+(P), \qquad E^-(M) = \bigcup_{P \in M} E^-(P)$$

et

$$E(M) = E^+(M) \cup E^-(M).$$

56. Définition. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\overline{A}$ *du domaine* A; *nous appelons un point* Q *de la fermeture* $\overline{A}$ *point de prolongement secondaire indirect au sens positif du point* P, *s'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\overline{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad E^+(P_n) \ni Q_n.$$

On définit de même les points de prolongement secondaire indirect au sens négatif du point P.

Nous désignons par $F^+(P)$ *et* $F^-(P)$ *les ensembles de points de prolongement secondaire indirect du point* P *respectivement au sens positif et au sens négatif, et posons*

$$F(P) = F^+(P) \cup F^-(P).$$

Soit Q un point quelconque de l'ensemble $E^+(P)$, P étant un point de la fermeture $\overline{A}$ du domaine A; posons

$$P_n = P \qquad \text{et} \qquad Q_n = Q,$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n = Q, \qquad E^+(P_n) \ni Q_n,$$

ce qui montre que le point Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$; or, Q est un point arbitraire de l'ensemble $E^+(P)$, donc nous avons le

THÉORÈME. — *Si* P *est un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$F^+(P) \supset E^+(P).$$

57. Soient P et Q deux points de la fermeture $\bar{A}$ du domaine A; supposons qu'il existe deux suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad F^+(P_n) \ni Q_n.$$

Soient $\{U_k(P)\}$ et $\{U_k(Q)\}$ deux suites de voisinages des points P et Q qui tendent respectivement vers les points P et Q pour $k \to \infty$; la convergence des suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ entraîne que l'on a, pour n assez grand,

$$U_k(P) \ni P_n \qquad \text{et} \qquad U_k(Q) \ni Q_n;$$

en conséquence il existe deux voisinages $U(P_n)$ et $U(Q_n)$ des points P_n et Q_n respectivement, tels que l'on ait

$$U(P_n) \subset U_k(P) \qquad \text{et} \qquad U(Q_n) \subset U_k(Q).$$

Or, l'hypothèse $Q_n \in F^+(P_n)$ montre que, pour chaque nombre n, il existe deux suites $\{P_{ln}\}$ et $\{Q_{ln}\}$, telles que l'on ait

$$\lim_{l\to\infty} P_{ln} = P_n, \qquad \lim_{l\to\infty} Q_{ln} = Q_n \qquad \text{et} \qquad Q_{ln} \in E^+(P_{ln}),$$

donc on a, pour l et n assez grands,

$$P_{ln} \in U_k(P) \qquad \text{et} \qquad Q_{ln} \in U_k(Q).$$

Soit $[l(k), n(k)]$ une paire des deux nombres m et n, qui satisfasse à ces conditions; posons

$$P'_k = P_{l(k)n(k)}, \qquad Q'_k = Q_{l(k)n(k)},$$

de sorte que l'on a

$$\lim_{k\to\infty} P'_k = P, \qquad \lim_{k\to\infty} Q'_k = Q \qquad \text{et} \qquad Q'_k \in E^+(P_k);$$

c'est-à-dire que Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$.

Réciproquement, si l'on désigne par Q un point de l'ensemble $F^+(P)$, il est clair qu'il existe deux suites $\{P_n\}$ et $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n),$$

puisque l'on a

$$E^+(P_n) \subset F^+(P_n),$$

d'après le n° 56.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Soient* P *et* Q *deux points de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *pour* *qu'il existe deux suites* $\{P_n\}$ *et* $\{Q_n\}$ *de points de la fermeture* $\bar{A}$, *telles que l'on ait*

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P, \qquad \lim_{n\to\infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n),$$

il faut et il suffit que le point Q *appartienne à l'ensemble* $F^+(P)$.

58. Théorème. — *Si* P *est un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *l'ensemble* $F^+(P)$ *est : 1° fermé et 2° connexe.*

1° En effet, soit Q un point d'accumulation quelconque de l'ensemble $F^+(P)$, de sorte qu'il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de l'ensemble $F^+(P)$, telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$. Posons

$$P_n = P;$$

nous avons

$$\lim_{n\to\infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad Q_n \in F^+(P_n);$$

donc Q appartient à l'ensemble $F^+(P)$, d'après le théorème du numéro précédent. Par conséquent l'ensemble $F^+(P)$ est fermé, puisque, par hypothèse, Q est un point d'accumulation arbitraire de l'ensemble $F^+(P)$.

2° Supposons que $F^+(P)$ ne soit pas connexe; nous pouvons décomposer l'ensemble $F^+(P)$ qui est fermé, d'après ce que nous venons de démontrer, en deux ensembles fermés non vides et disjoints F_1 et F_2 :

$$F^+(P) = F_1 \cup F_2, \qquad F_i \neq \emptyset \qquad (i = 1, 2), \qquad F_1 \cap F_2 = \emptyset.$$

Soient $U(F_1)$ et $U(F_2)$ deux voisinages des deux ensembles fermés F_1 et F_2 respectivement, tels que l'on ait

$$\overline{U(F_1)} \cap \overline{U(F_2)} = \emptyset.$$

Supposons que le point P appartienne à l'ensemble F_1, et désignons par Q un point de l'ensemble F_2.

Comme l'on a $Q \in F^+(P)$, il existe une suite $\{Q_n\}$ de points, dont chaque élément Q_n appartient à l'ensemble $E^+(P_n)$, où $\{P_n\}$ est une certaine suite qui converge vers le point P, et telle que l'on ait $\lim_{n\to\infty} Q_n = Q$. Donc nous avons

$$P_n \in U(F_1) \qquad \text{et} \qquad Q_n \in U(F_2),$$

pour n assez grand. A cause de ces relations et de la connexité de l'ensemble $E^+(P_n)$, on peut extraire un point Q'_n de chaque ensemble $E^+(P_n)$, tel que l'on ait, pour n assez grand,

$$Q'_n \notin \overline{U(F_1)} \cup \overline{U(F_2)};$$

en conséquence on peut extraire une suite partielle $\{Q'_{n'}\}$ de la suite $\{Q'_n\}$, telle que l'on ait

$$\lim_{n'\to\infty} Q'_{n'} = Q',$$

Q' étant un point de la fermeture $\bar{A}$ n'appartenant ni à $U(F_1)$, ni à $U(F_2)$, ni *a fortiori* à F_1 ou F_2.

Or, la suite $\{P_{n'}\}$, en tant que suite partielle de la suite $\{P_n\}$, doit converger vers le point P, donc le point Q' est un point de l'ensemble $F^+(P)$, puisque l'on a

$$Q'_{n'} \in E^+(P_{n'}),$$

ce qui nous conduit à une contradiction avec l'hypothèse

$$F^+(P) = F_1 \cup F_2.$$

Par conséquent $F^+(P)$ est connexe.

Corollaire. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A, *on a*

$$F^+(P) \supset \overline{E^+(P)}.$$

En effet, d'après le n° 56, nous avons

$$F^+(P) \supset E^+(P);$$

or, $F^+(P)$ est fermé, donc nous avons

$$F^+(P) \supset \overline{E^+(P)}.$$

59. Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *si* Q *est un point de l'ensemble* $F^+(P)$, *on a*

$$F^-(Q) \ni P.$$

Nous appellerons réversibilité cette propriété du prolongement secondaire indirect.

En effet, il existe une suite $\{Q_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, qui converge vers Q pour $n \to \infty$, et dont chaque élément Q_n est extrait de l'ensemble $E^+(P_n)$, $\{P_n\}$ étant une certaine suite de points de la fermeture $\bar{A}$ qui converge vers le point P pour $n \to \infty$. Or, en raison de la réversibilité du prolongement secondaire direct, on a

$$E^-(Q_n) \ni P_n, \qquad \text{d'où} \qquad F^-(Q) \ni P.$$

60. Soit M un ensemble *contenu dans la fermeture* $\bar{A}$ du domaine A; nous posons, comme toujours,

$$F^+(M) = \bigcup_{P \in M} F^+(P), \qquad F^-(M) = \bigcup_{P \in M} F^-(P)$$

et

$$F(M) = F^+(M) \cup F^-(M).$$

Théorème. — *Si* U *désigne un sous-ensemble ouvert du domaine* A, *on a*

$$\overline{E^+(U)} \supset F^+(U).$$

On démontre ce théorème en remplaçant K et D par E et F respectivement dans la démonstration du théorème du n° 49.

61. Théorème. — *Soit* P *un point de la fermeture* $\bar{A}$ *du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point de l'ensemble* $F^+(P)$ *appartenant au domaine* A, *on a*

$$K^+(Q) \subset F^+(P);$$

en outre, si l'on suppose que, quand P *appartient au domaine* A, *le point* Q *n'est pas un point de la demi-caractéristique positive* $P(t)$, *on a*

$$K(Q) \subset F^+(P).$$

En effet, par définition, il existe deux suites $\{Q_n\}$ et $\{P_n\}$ de points de la fermeture $\bar{A}$, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P, \qquad \lim_{n \to \infty} Q_n = Q \qquad \text{et} \qquad Q_n \in E^+(P_n).$$

Soit t_0 une valeur quelconque de l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$, et désignons par $\{U_k(Q(t_0))\}$ une suite de voisinages du point $Q(t_0)$ qui tend vers le point $Q(t_0)$ pour $k \to \infty$.

D'après le n° 11, il existe une suite $\{U_k(Q)\}$ de voisinages du point Q, telle que l'on ait

$$U_k(Q)(t_0) \subset U_k(Q(t_0)) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Or, la convergence de la suite $\{Q_n\}$ vers le point Q pour $n \to \infty$ entraîne que l'on a, pour n assez grand,

$$Q_n \in U_k(Q) \qquad (k = 1, 2, \ldots),$$

donc si l'on désigne par $n(k)$ un nombre n qui satisfasse à cette condition, on a

$$Q_{n(k)}(t_0) \in U_k(Q)(t_0) \subset U_k(Q(t_0)) \qquad (k = 1, 2, \ldots).$$

Posons

$$P_{n(k)} = P'_k \qquad \text{et} \qquad Q_{n(k)}(t_0) = Q'_k \qquad (k = 1, 2, \ldots);$$

par hypothèse, on a

$$E^+(P'_k) \supset Q'_k(-t_0) = Q_{n(k)}.$$

Or, d'après le n° 55, on a

$$E^+(P'_k) \supset E^+(Q_{n(k)}) \supset Q_{n(k)}(t)$$

et, si P est un point de la frontière $\dot{A}$ du domaine A, ou si Q n'appartient pas à la demi-caractéristique positive $P(t)$, quand bien même P serait un point du domaine A, on a

$$E^+(P'_k) \supset E^+(Q_{n(k)}) \supset Q_{n(k)}(t) \cup Q_{n(k)}(s);$$

donc nous avons

$$E^+(P'_k) \ni Q'_k,$$

ou bien pour toute valeur t_0 de t, ou bien pour toute valeur non négative t_0 de t dans l'intervalle de définition de la solution $Q(t)$. En conséquence nous avons

$$F^+(P) \supset Q(t) \cup Q(s) \quad \text{ou} \quad F^+(P) \supset Q(t).$$

Or, $F^+(P)$ est fermé, donc le théorème est démontré.

CHAPITRE IV.

Stabilité.

I. — Stabilité faible.

62. Définition. — *Nous disons qu'une région invariante fermée* M *est faiblement stable au sens positif, si, pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *il existe un voisinage* V *de* M, *tel que nous ayons*

$$K^+(V) \subset U.$$

La région invariante fermée M étant contenue dans le domaine A, si l'on désigne par U un voisinage assez petit de M, U est contenu dans A. Donc $K^+(V)$ est contenu dans A, *a fortiori* $L^+(V)$ également, ce qui montre que $V(t)$ est défini pour toute valeur positive de t.

On définit de même une région invariante fermée faiblement stable au sens négatif.

Nous ajoutons le mot « faible » ou « faiblement » afin de distinguer une autre sorte de stabilité que nous définirons dans le prochain paragraphe. Mais, si nous ne considérons que la stabilité faible, comme dans ce paragraphe, nous supprimons le mot « faible » ou « faiblement ».

Nous disons qu'une région invariante fermée est stable aux deux sens, si elle est stable au sens positif ainsi qu'au sens négatif. Une région invariante stable aux deux sens, soit M, *est dite centre au sens de Bendixson, si, pour tout point* P *en dehors de* M, *on a*

$$L(P) \cap M = \emptyset.$$

63. Théorème. — *Soient* M *une région invariante fermée, et* U *un voisinage quelconque de l'ensemble fermé* M; *chacune des trois paires de conditions suivantes est équivalente.*

1° M *est stable au sens positif; il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D^+(V) \subset U;$$

2° M *est stable au sens négatif; il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D^-(V) \subset U;$$

3° M *est stable aux deux sens; il existe un voisinage de* M, *soit* V, *tel que l'on ait*

$$D(V) \subset U.$$

En effet, supposons que M soit stable au sens positif, et désignons par U_1 un voisinage de l'ensemble fermé M, dont la fermeture $\overline{U}_1$ est contenue dans le voisinage donné U de M. Par définition, il existe un voisinage V de M tel que l'on ait $K^+(V) \subset U_1$. En conséquence, d'après le n° 49, nous avons

$$D^+(V) \subset \overline{K^+(V)} \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

On démontre facilement la réciproque de ce que nous venons de démontrer, car, d'après le théorème du n° 42, on a toujours $D^+(P) \supset K^+(P)$, pourvu que le point P appartienne au domaine A, d'où

$$D^+(V) \supset K^+(V),$$

puisque, si V est assez petit, V est contenu dans A.

On démontre de même l'équivalence de la deuxième paire de conditions et celle de la troisième.

Nous remarquons que, d'après ce théorème, même si l'on remplaçait K^+, K^- par D^+, D^-, on ne pourrait pas faire extension de la notion de stabilité.

64. Théorème. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à* M, *on ait*

$$D^-(P) \cap M = \emptyset.$$

En effet, supposons que M soit une région invariante stable au sens positif et que l'intersection des deux ensembles $D^-(P)$ et M ne soit pas vide, P étant un point n'appartenant pas à M, et désignons par Q un point de l'intersection de $D^-(P)$ et de M : $Q \in D^-(P) \cap M$. L'hypothèse $M \not\ni P$ entraîne que, si l'on désigne par U(M) un voisinage assez petit de M et par U(P) un voisinage assez petit du point P, on a $U(M) \cap U(P) = \emptyset$.

Soit V(M) un voisinage quelconque de l'ensemble fermé M contenu dans U(M). L'hypothèse $D^-(P) \ni Q$ montre qu'il existe une suite $\{P_n\}$ de points du domaine A et une suite $\{t_n\}$ de valeurs non positives de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n \to \infty} P_n = P \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to \infty} P_n(t_n) = Q,$$

de sorte qu'à cause de l'hypothèse $Q \in M$, on a, pour n assez grand,

$$P_n \in U(P) \qquad \text{et} \qquad P_n(t_n) \in V(M).$$

Soit n_1 un nombre n satisfaisant à ces conditions et posons

$$Q' = P_{n_1}(t_{n_1}) \qquad \text{et} \qquad t' = -t_{n_1},$$

de sorte que l'on a $Q'(t') = P_{n_1} \in U(P)$, t' étant non négatif. Or, par hypothèse, nous avons $U(P) \cap U(M) = \emptyset$, donc nous avons

$$Q'(t') \notin U(M).$$

En conséquence, pour tout voisinage $V(M)$ de l'ensemble M, la condition

$$V(M)(t) \subset U(M)$$

n'est pas vérifiée pour une certaine valeur non négative de t.

Par conséquent, pour que M soit stable au sens positif, il faut que, pout tout point P n'appartenant pas à M, on ait

$$D^-(P) \cap M = \emptyset.$$

Supposons réciproquement que, pour tout point P n'appartenant pas à M, on ait $D^-(P) \cap M = \emptyset$, M n'étant pas stable au sens positif. Je dis que cette hypothèse conduit à une contradiction. En effet, soit $\{V_n(M)\}$ une suite de voisinages de l'ensemble fermé M qui tend vers M pour $n \to \infty$; il existe un voisinage U de M, tel que, pour un certain point P_n de chaque voisinage $V_n(M)$, on ait

$$P_n(t_n) \notin U,$$

t_n étant une certaine valeur non négative de t, puisque, par hypothèse, M n'est pas stable au sens positif. Comme les points $P_n(t_n)$ sont contenus dans le domaine borné A, l'ensemble $\{P_n(t_n)\}$ a des points d'accumulation dans la fermeture $\bar{A}$ du domaine A; nous désignons un de ces points par P, de sorte que l'on peut extraire de la suite $\{P_n(t_n)\}$ une suite partielle $\{P_{n'}(t_{n'})\}$, telle que cette suite converge vers le point P pour $n' \to \infty$ et que la suite correspondante $\{P_{n'}\}$ soit également convergente; désignons par Q le point limite de la suite $\{P_{n'}\}$, de sorte que l'on a $D^+(Q) \ni P$, d'où $D^-(P) \ni Q$.

Comme, par hypothèse, $\{V_{n'}(M)\}$ tend vers M pour $n' \to \infty$, en tant que suite partielle de la suite $\{V_n(M)\}$, $P_{n'}$ étant contenu dans $\{V_{n'}(M)\}$, on a $Q \in M$, ce qui entraîne que l'on a

$$D^-(P) \cap M \neq \emptyset,$$

P n'appartenant pas à M, contrairement à notre hypothèse.

Donc, pour que M soit stable au sens positif, il suffit que l'on ait

$$D^-(P) \cap M = \emptyset,$$

pour tout point P n'appartenant pas à la région M.

Comme conséquence directe du théorème que nous venons de démontrer, on a le

Corollaire. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à la région* M, *on ait*

$$E^-(P) \cap M = \emptyset.$$

65. THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *n'appartenant pas à la région* M, *on ait*

$$D(P) \cap M = \emptyset \quad \textit{ou} \quad E(P) \cap M = \emptyset.$$

En effet, en combinant les deux conditions pour la stabilité au sens positif et au sens négatif, on démontre ce théorème.

Bien que nous ayons supposé dans la définition des centres au sens de Bendixson que, pour tout point P en dehors de la région invariante fermée M stable aux deux sens, nous avons $L(P) \cap M = \emptyset$, le théorème précédent montre que cette dernière condition est automatiquement remplie par toutes les régions invariantes M stables aux deux sens, car nous avons $D(P) \supset L(P)$ pour tout point P du domaine A.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit centre au sens de Bendixson, il faut et il suffit que* M *soit stable aux deux sens.*

66. THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de la région* M, *on ait*

$$D^+(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$D^+(M) \subset M.$$

En effet, s'il existait un point de M, soit P, tel que l'on ait $D^+(P) \not\subset M$, on aurait $D^-(Q) \ni P \in M$, de sorte que l'on aurait

$$D^-(Q) \cap M \neq \emptyset,$$

où Q désigne un point de $D^+(P)$ n'appartenant pas à M.

Or, d'après le théorème du n° 64, alors M n'est pas stable au sens positif, donc pour que M soit stable au sens positif, il faut que, pour tout point de M, on ait

$$D^+(P) \subset M.$$

Réciproquement, si M n'était pas stable au sens positif, pour un point Q en dehors de la région M, on aurait $D^+(Q) \cap M \neq \emptyset$, d'après le n° 63. Désignons par P un point de l'intersection $D^-(Q) \cap M$; l'hypothèse $D^-(Q) \ni P$ entraîne $D^+(P) \ni Q \notin M$, P étant un point de la région M.

Donc, pour que M soit stable au sens positif, il suffit que, pour tout point P de la région M, on ait

$$D^+(P) \subset M.$$

Comme au n° 64, on déduit facilement le

COROLLAIRE. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit stable au sens* *positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de la région* M, *on ait*

$$E^{+}(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$E^{+}(M) \subset M.$$

67. De la même manière qu'au n° 65, on voit que la condition nécessaire et suffisante pour la stabilité aux deux sens d'une région invariante fermée M est

$$D(M) \subset M.$$

Examinons cette dernière condition d'un peu plus près. Cette condition entraîne que, pour tout point P de l'ensemble M, la caractéristique totale $P(t) \cup P(s)$ est contenue dans M, puisque l'on a $P(t) \cup P(s) \subset D(P)$. Donc nous avons

$$M(t) \subset M,$$

pourvu que $M(t)$ soit défini. Or, par hypothèse, M est fermé, donc, il existe un nombre positif ε, tel que $M(t)$ soit défini pour $|t| < \varepsilon$. A l'aide du lemme du n° 39, considérant que M est fermé, on démontre que l'ensemble M est invariant. Donc, même si l'on ne suppose pas que M soit invariant, M doit être une région invariante stable aux deux sens, pourvu que l'ensemble M soit fermé et que l'on ait $D^{+}(M) \subset M$.

Ainsi nous avons le

THÉORÈME. — *Pour qu'un sous-ensemble fermé* M *du domaine* A *soit une région invariante aux deux sens, il faut et il suffit que l'on ait*

$$D(M) \subset M.$$

On remarque que les trois conditions suivantes sont équivalentes :

$$D(M) \subset M, \qquad D(M) = M, \qquad E(M) = M,$$

M étant un sous-ensemble du domaine A.

II. — Stabilité forte.

68. Par analogie avec la définition des points isolés, *nous disons qu'un ensemble fermé satisfaisant à une condition* (C) *est isolé en tant qu'ensemble satisfaisant à la condition* (C), *s'il existe un voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *dans lequel il n'y a plus d'ensembles satisfaisant à la condition* (C), *excepté les sous-ensembles de* M.

69. DÉFINITION. — *Nous disons qu'une région invariante fermée* M *est fortement*

stable au sens positif, si, pour tout voisinage U *de l'ensemble* M, *il existe un voisinage de* M, *tel que l'on ait*

$$E^+(V) \subset U.$$

On définit de même la stabilité forte au sens négatif.

Une région invariante fermée fortement stable au sens positif ainsi qu'au sens négatif est dite fortement stable aux deux sens. Une région invariante fermée M *fortement stable aux deux sens est appelée centre au sens fort, si, pour tout point* P *en dehors de la région* M, *on a*

$$E(P) \cap M = \emptyset.$$

Si l'on désigne par B un sous-ensemble quelconque de l'ensemble A et par P un point quelconque de A, nous avons, d'après le n° 55,

$$E^+(B) \supset K^+(B), \qquad E^-(B) \supset K^-(B), \qquad E(B) \supset K(B)$$

et

$$E(P) \supset K(P).$$

Donc on démontre facilement le

THÉORÈME. — *Une région invariante fermée fortement stable au sens positif, au sens négatif, ou aux deux sens est respectivement faiblement stable au sens positif, au sens négatif, ou aux deux sens.*

Un centre au sens fort est un centre au sens de Bendixson.

70. THÉORÈME. — *Soit* M *une région invariante fermée; pour que* M *soit fortement stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M, *il existe un voisinage* V *de l'ensemble fermé* M, *tel que l'on ait*

$$F^+(V) \subset U.$$

En effet, soit U_1 un voisinage assez petit de M, dont la fermeture $\overline{U}_1$ est contenue dans U. Si l'on suppose que M est fortement stable au sens positif, par définition, il existe un voisinage V de M tel que l'on ait $E^+(V) \subset U_1$, de sorte que l'on a

$$\overline{E^+(V)} \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

Or, V étant ouvert, on a, d'après le n° 60, $F^+(V) \subset \overline{E^+(V)}$, d'où

$$F^+(V) \subset U.$$

Par conséquent la condition du théorème est nécessaire.

Réciproquement, la relation générale $F^+(V) \supset E^+(V)$ montre que, pour que M soit fortement stable au sens positif, la condition du théorème est suffisante.

71. Profitant de la réversibilité énoncée au n° 59, on démontre les deux théorèmes suivants, de la même manière que les théorèmes des n^{os} 64 et 65.

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit fortement stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *en dehors de la région* M, *on ait*

$$F^{-}(P) \cap M = \emptyset.$$

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée soit un centre au sens fort, il faut et il suffit qu'elle soit fortement stable aux deux sens.*

72. On démontre, de la même manière qu'aux nos 66 et 67, les deux théorèmes suivants.

THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *soit fortement stable au sens positif, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$F^{+}(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$F^{+}(M) \subset M.$$

THÉORÈME. — *Pour qu'un ensemble fermé* M *soit une région invariante fermée fortement stable aux deux sens, il faut et il suffit que, pour tout point* P *de l'ensemble* M, *on ait*

$$F(P) \subset M,$$

c'est-à-dire que l'on ait

$$F(M) \subset M.$$

D'ailleurs, cette dernière condition est équivalente à

$$F(M) = M.$$

73. THÉORÈME. — *Pour qu'une région invariante fermée* M *faiblement stable au sens positif soit fortement stable au sens positif, il suffit que la région* M *soit isolée en tant que région invariante fermée qui n'est pas fortement stable au sens positif, ou* a fortiori *en tant que région invariante.*

En effet, si la région invariante fermée M faiblement stable au sens positif n'était pas fortement stable au sens positif, il existerait un point P en dehors de la région M tel que l'on ait

$$D^{-}(P) \cap M = \emptyset \qquad \text{et} \qquad F^{-}(P) \cap M \neq \emptyset.$$

Soient U un voisinage quelconque de la région fermée M, et U_1 un voisinage de M dont la fermeture $\overline{U}_1$ est contenue dans U et ne contient pas le point P. D'après la définition de la stabilité faible au sens positif, il existe un voisinage V de M, tel que l'on ait $K^{+}(V) \subset U_1$. Nous supposons que ce voisinage V est assez petit pour que l'on ait $V \cap D^{-}(P) = \emptyset$. Puisque l'ensemble fermé $D^{-}(P)$ est disjoint d'avec l'ensemble fermé M, cette hypothèse ne restreint pas la généralité.

Or, d'après le n° 58, $F^-(P)$ est connexe, donc il existe un point de $F^-(P)$, soit Q, contenu dans V et n'appartenant pas à M. Les relations $Q \in V$ et $V \cap D^-(P) = \emptyset$ montrent que Q n'est pas un point de la demi-caractéristique négative $P(s)$ et que l'on a

$$L^+(Q) \subset F^-(P) \quad \text{et} \quad Q(t) \subset U_1,$$

d'où

$$L^+(Q) \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

Donc nous avons démontré qu'il y a dans U une région invariante fermée $L^+(Q)$.

Or $F^-(P) \ni Q$ montre $F^-(P) \cap L^+(Q) \neq \emptyset$, P n'appartenant pas à U, ni *a fortiori* à $L^+(Q)$, donc la région invariante $L^+(Q)$ n'est pas fortement stable au sens positif, ce qui achève la démonstration.

CHAPITRE V.

Points limites (II).

I. — Cas où m est arbitraire.

74. Nous revenons à l'étude des points limites, et considérons l'ensemble $L^+(P)$, P étant un point régulier du domaine A.

Nous commençons par le cas où β est fini, de sorte que $L^+(P)$ est contenu dans la frontière $\dot{A}$ du domaine A. Supposons que $L^+(P)$ ne se réduise pas à un seul point; désignons par M l'ensemble des points Q pour lesquels il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))| = \infty.$$

On voit sans peine que M est contenu dans $L^+(P)$. Je dis d'abord que l'ensemble M est partout dense dans $L^+(P)$.

En effet, désignons par Q_1 un point quelconque de $L^+(P)$ et par U un voisinage quelconque du point Q_1. Comme, par hypothèse, $L^+(P)$ ne se réduit pas à un seul point, il existe un point Q_2 de $L^+(P)$ différent de Q_1. Soient U_1 et U_2 deux voisinages bornés du point Q_1, tels que la fermeture $\overline{U}_1$ de U_1 soit contenue dans U et ne contienne pas le point Q_2 et que la fermeture $\overline{U}_2$ soit contenue dans U_1.

Les hypothèses $Q_1 \in L^+(P)$, $Q_2 \in L^+(P)$ entraînent qu'il existe deux suites

$\{\tau_n\}$, $\{\tau'_n\}$ de valeurs de t, telles que l'on ait

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau_n) = Q_1, \qquad 0 \leqq \tau_1 < \tau_2 < \ldots < \tau_n < \ldots \to \beta$$

et

$$\lim_{n\to\infty} P(\tau'_n) = Q_2, \qquad 0 \leqq \tau'_1 < \tau'_2 < \ldots < \tau'_n < \ldots \to \beta.$$

sans restreindre la généralité, on peut supposer que l'on a

$$0 \leqq \tau_1 < \tau'_1 < \tau_2 < \tau'_2 < \ldots < \tau_n < \tau'_n < \ldots \to \beta.$$

Or, le point Q_2 n'appartient pas à U_1, et U_2 contient le point Q_1, $\overline{U}_2$ étant contenue dans U_1, donc, à cause de la continuité de la solution $P(t)$, il existe des valeurs t'_n $(n = 1, 2, \ldots)$ de t, telles que l'on ait

$$P(t'_n) \subset U_1 - U_2, \qquad \tau_n < t'_n < \tau'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots)$$

et

$$P(t) \in U_1 \qquad \text{pour} \quad \tau_n \leqq t \leqq t'_n \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Comme U_1 est borné, l'ensemble $\{P(t'_n)\}$ a des points d'accumulation dans $\overline{U}_1 - U_2$. Nous désignons par Q_3 un de ces points d'accumulation, de sorte que l'on peut extraire de la suite $\{P(t'_n)\}$ une suite partielle $\{P(t'_{n'})\}$ telle que l'on ait $\lim\limits_{n'\to\infty} P(t'_{n'}) = Q_3$. Mais, sans restreindre la généralité, on peut supposer que la suite $\{P(t'_n)\}$ elle-même converge vers le point Q_3.

Le point Q_3 n'étant pas contenue dans U_2, il diffère du point Q_1, de sorte que, pour un certain indice de coordonnées des points Q_1 et Q_3, soit k, on a

$$y_k^3 - y_k^1 \neq 0.$$

A cause de la convergence des deux suites $\{P(\tau_n)\}$ et $\{P(t'_n)\}$ vers les points Q_1 et Q_3 respectivement, si l'on désigne par δ un nombre positif inférieur à $|y_k^3 - y_k^1|$, on a, pour n assez grand,

$$|x_k(t'_n) - x_k(\tau_n)| > \delta, \qquad \text{d'où} \qquad \left|\frac{x_k(t'_n) - x_k(\tau_n)}{t'_n - \tau_n}\right| > \frac{\delta}{t'_n - \tau_n},$$

les valeurs $t'_n - \tau_n$ étant positives.

Or, d'après le théorème de la moyenne, il existe une valeur t_n de t comprise entre τ_n et t'_n, telle que l'on ait

$$\frac{X_k(t'_n) - x_k(\tau_n)}{t'_n - \tau_n} = \frac{dx_k(t_n)}{dt} = X_k(P(t_n)),$$

donc on a

$$|X_k(P(t_n))| > \frac{\delta}{t'_n - \tau_n}.$$

En outre, la convergence des suites $\{\tau_n\}$ et $\{\tau'_n\}$ vers β entraîne celle de la suite $\{t'_n\}$ vers β, en conséquence celle de la suite $\{|t'_n - \tau_n|\}$ vers zéro pour $n \to \infty$. Donc on a $\lim\limits_{n \to \infty} |X_k(P(t_n))| = \infty$, *a fortiori*

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))| = \infty.$$

D'ailleurs, à cause de la condition

$$0 \leqq \tau_1 < t_1 < t'_1 < \tau'_1 < \tau_2 < t_2 < t'_2 < \tau'_2 < \ldots < \tau_n < t_n < t'_n < \tau'_n < \ldots \to \beta,$$

on a

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta.$$

Or, l'hypothèse $P(t) \in U_1$ pour $\tau_n < t < t'_n$ entraîne $P(t_n) \in U_1$ $(n = 1, 2, \ldots)$, donc les points d'accumulation de l'ensemble $\{P(t_n)\}$ sont contenus dans $\overline{U}_1$, *a fortiori* dans U. Désignons un de ces points d'accumulation par Q; on peut extraire de la suite $\{t_n\}$ une suite partielle $\{t_{n'}\}$ telle que l'on ait

$$\lim_{n' \to \infty} P(t_{n'}) = Q.$$

En outre, $\{t_{n'}\}$ étant une suite partielle de la suite $\{t_n\}$, on a

$$0 \leqq t_{1'} < t_{2'} < \ldots < t_{n'} < \ldots \to \beta,$$

ce qui montre que le point Q appartient à $L^+(P)$. On voit d'ailleurs qu'en tant que suite partielle de la suite $\left\{\sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_n))|\right\}$, la suite $\left\{\sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_{n'}))|\right\}$ tend vers l'infini pour $n' \to \infty$. Donc le point Q appartient à M.

Or, Q_1 est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$ et U est un voisinage arbitraire de Q_1, donc la démonstration que M est partout dense dans $L^+(P)$ est achevée.

75. Je dis maintenant que M coïncide avec $L^+(P)$. En effet, désignons de nouveau par Q un point quelconque de $L^+(P)$. Étant donné que M est partout dense dans $L^+(P)$, on peut extraire une suite de points de l'ensemble M, soit $\{Q_n\}$, qui converge vers le point Q pour $n \to \infty$.

L'hypothèse $Q_n \in M$ entraîne que, pour chaque n, il existe une suite $\{t_{nl}\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leqq t_{n1} < t_{n2} < \ldots < t_{nl} < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{l \to \infty} P(t_{nl}) = Q_n$$

et

$$\lim_{l \to \infty} \sum_{i=1}^{m} |X_i(P(t_{nl}))| = \infty.$$

Soit $\{U_k(Q)\}$ une suite de voisinages du point Q qui tend vers le point Q pour $k \to \infty$; posons

$$t_1 = t_{11}.$$

Supposons que t_k soit déterminée de manière que l'on ait

$$t_{k-1} < t_k, \qquad t_{1k} \leqq t_k, \qquad U_k(Q) \ni P(t_k)$$

et

$$k - 1 < \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) |.$$

La convergence $Q_n \to Q$ pour $n \to \infty$ montre $Q_n \in U_{k+1}(Q)$ pour n assez grand, et la convergence $P(t_{nl}) \to Q_n$ pour $l \to \infty$ entraîne

$$P(t_{nl}) \in U_{k+1}(Q) \qquad \text{et} \qquad \sum_{i=1}^{m} | X(P(t_{nl})) | > k,$$

pour l assez grand, et à cause de la convergence des suites $\{t_{nl}\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ vers β pour $l \to \infty$, on a

$$t_k < t_{nl} \qquad \text{et} \qquad t_{1k+1} \leqq t_{nl}$$

pour l assez grand. Soit $\{n, l\}$ une paire d'indices satisfaisant à ces conditions. Posons

$$t_{k+1} = t_{nl}.$$

Ainsi nous avons une suite $\{t_k\}$ qui satisfait aux conditions

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_k < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{k \to \infty} P(t_k) = Q$$

et

$$\lim_{k \to \infty} \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) | = \infty;$$

donc on a $Q \in M$ et en conséquence $L^+(P) \subset M$, puisque Q est un point arbitraire de l'ensemble $L^+(P)$.

Par conséquent on a

$$L^+(P) = M,$$

car, comme l'on a remarqué au numéro précédent, on a

$$L^+(P) \supset M.$$

Donc nous avons

Théorème. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A; *si la solution* $P(t)$ *n'est pas définie pour toute valeur positive de t, et que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduit pas à un seul point, pour tout point* Q *de l'ensemble* $L^+(P)$, *il existe une suite* $\{t_n\}$ *de valeurs de t telle que l'on ait*

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \beta, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q$$

et

$$\lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^{m} | X_i(P(t_k)) | = \infty,$$

où β désigne, comme toujours, l'extrémité supérieure de l'intervalle de définition de la solution $P(t)$.

76. Supposons désormais que la solution $P(t)$ est définie pour toute valeur positive de t, P étant un point régulier du domaine A.

Envisageons d'abord le cas où l'ensemble $L^+(P)$ ne contient pas de points réguliers, de sorte que l'on a

$$L^+(P) \subset \dot{A} \cup S.$$

Comme l'ensemble $L^+(P)$ est connexe, d'après le n° 24, $L^+(P)$ appartient à une composante connexe de l'ensemble fermé $\dot{A} \cup S$. De plus, $L^+(P)$ ne contient pas de points de l'intérieur $\mathring{S}$ de l'ensemble S, puisque tous les points d'une caractéristique régulière sont réguliers. Par conséquent $L^+(P)$ appartient à une composante connexe de la réunion de la frontière $\dot{A}$ et de la frontière $\dot{S}$.

Si une composante connexe de la frontière $\dot{S}$ qui n'est pas disjointe d'avec $L^+(P)$ est fermée en tant qu'ensemble dans l'espace R_m, la frontière $\dot{A}$ et cette composante connexe fermée sont séparées, donc $L^+(P)$ est contenu dans cette composante connexe fermée de la frontière $\dot{S}$.

Ainsi nous avons le

Théorème. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A. *Supposons que la solution* $P(t)$ *soit définie pour toute valeur positive de* t*; si l'ensemble* $L^+(P)$ *est disjoint d'avec l'ensemble* R *des points réguliers,* $L^+(P)$ *constitue un sous-ensemble connexe contenu dans une composante connexe de la réunion de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A *et de la frontière* $\dot{S}$ *de l'ensemble* S *des points singuliers.*

En particulier, *si l'ensemble* S *est fermé en tant qu'ensemble dans l'espace* R_m, $L^+(P)$ *est ou bien entièrement contenue dans une composante connexe de la frontière* $\dot{A}$, *ou bien entièrement contenue dans une composante connexe de la frontière* $\dot{S}$ *de l'ensemble* S.

On démontre le théorème suivant qui est un peu plus fort que la dernière partie du théorème précédent.

Théorème. — *Si les points singuliers appartenant à l'ensemble* $L^+(P)$ *constituent un ensemble non vide et fermé en tant qu'ensemble dans l'espace* R_m, *et que* $L^+(P) \cap \dot{A}$ *n'est pas vide,* $L^+(P)$ *contient des points réguliers.*

77. Supposons que l'ensemble $L^+(P)$ ne soit pas disjoint d'avec $\dot{A} \cup \dot{S}$, et posons

$$L^+(P) \cap (\dot{A} \cup \dot{S}) = M.$$

Chacun des trois ensembles du premier membre étant fermé, M est également fermé, donc nous pouvons décomposer l'ensemble M en composantes connexes fermées M_i ($i \in I$), I désignant l'ensemble d'indices.

Envisageons une composante connexe fermée M_0 ($0 \in I$) et supposons que M_0 ne coïncide pas avec $L^+(P)$, de sorte que l'on a ou bien $R \cap L^+(P) \neq \emptyset$, ou bien $M \neq M_0$. Mais le second cas de l'alternative montre que l'ensemble M n'est pas connexe, donc on a $L^+(P) \cap R \neq \emptyset$. Par conséquent on a, dans tous les cas,

$$L^+(P) \cap R \neq \emptyset.$$

Supposons de plus que, si l'on a $M \neq M_0$, M_0 est isolé en tant que sous-ensemble de M, et désignons par Q' un des points réguliers de l'ensemble $L^+(P)$. Soit U un voisinage quelconque de l'ensemble M_0; je dis qu'il existe deux points réguliers Q_1 et Q_2 de l'ensemble $L^+(P)$, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U.$$

En effet, soient U_1 et V deux voisinages bornés de M_0, tels que la fermeture $\overline{U}_1$ ne contienne ni le point Q' ni d'autres points de M que ceux de M_0, et $\overline{U}_1$ soit contenu dans U et que la fermeture $\overline{V}$ de V soit contenue dans U_1.

A cause de l'hypothèse $L^+(P) \supset M_0$, il existe une suite $\{t_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leqq t_1 < t_2 < \ldots < t_n < \ldots \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q,$$

Q désignant un point fixe de M_0, et l'autre hypothèse $L^+(P) \ni Q'$ entraîne qu'il existe une suite $\{t'_n\}$ de valeurs de t, telle que l'on ait

$$0 \leqq t'_1 < t'_2 < \ldots < t'_n < \ldots \to \infty, \qquad \lim_{n \to \infty} P(t'_n) = Q'.$$

Donc on a

$$P(t'_n) \notin \overline{U}_1 \qquad \text{et} \qquad P(t_n) \in V,$$

pour n assez grand. Nous pouvons supposer sans restreindre la généralité

$$0 \leqq t_1 < t'_1 < t_2 < t'_2 < \ldots < t_n < t'_n < \ldots \to \infty.$$

A cause de la continuité de la solution $P(t)$, il existe des valeurs τ_n et τ'_n ($n = 1, 2, \ldots$), telles que l'on ait, pour n assez grand,

$$P(\tau_n) \in U_1 - V, \qquad t'_n < \tau_n < t_{n+1}, \qquad P(\tau'_n) \in U_1 - V, \qquad t_n < \tau'_n < t'_n$$

et

$$P(t) \in U_1 \qquad \text{pour} \quad \tau_n < t < t_{n+1} \qquad \text{ou} \qquad t_n < t < \tau'_n.$$

L'ensemble $U_1 - V$ étant borné, on peut supposer qu'il existe $\lim_{n \to \infty} P(\tau'_n)$, soit Q_2, de sorte que Q_2 appartient à $\overline{U}_1 - V$. On voit facilement que Q_2 est un point régulier de $L^+(P)$.

Envisageons la demi-caractéristique négative $Q_2(s)$ et supposons qu'il existe une valeur négative τ_0 de t, telle que l'on ait $Q_2(\tau_0) \notin \overline{U}_1$. Soit W un voisinage de l'arc fermé $\widehat{Q_2, Q_2(\tau_0)}$ de la demi-caractéristique négative $Q_2(s)$, assez petit pour que $\overline{W}$ soit disjoint d'avec l'ensemble fermé M_0. D'après le n° 10, pour un voisinage assez petit $V(Q_2)$ du point Q_2, on a $V(Q_2)(t) \subset W$ pour $o \geqq t \geqq \tau_0$. Or, par hypothèse, on a $\lim\limits_{n \to \infty} P(\tau'_n) = Q_2$, donc on a, pour n assez grand,

$$P(\tau'_n) \in V(Q_2),$$

d'où

$$P(\tau'_n + t) \subset W \qquad \text{pour} \quad o \geqq t \geqq \tau_0.$$

Considérons la suite $\{t_n - \tau'_n\}$, et posons

$$o \geqq \overline{\lim_{n \to \infty}}\,(t_n - \tau'_n) = \tau.$$

On peut supposer sans perdre la généralité que l'on a

$$\lim_{n \to \infty}(t_n - \tau'_n) = \tau.$$

Supposons d'abord que l'on ait $\tau > \tau_0$. Nous avons $P(t_n) = P(\tau'_n + (t_n - \tau'_n))$, donc l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty}(t_n - \tau'_n) = \tau$ entraîne que l'on a $P(t_n) \in W$, pour n assez grand, d'où

$$\lim_{n \to \infty} P(t_n) = Q_2(\tau) \in \overline{W};$$

ceci est une conclusion contradictoire avec l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty} P(t_n) = Q \in M_0$, puisque W est assez petit pour que l'on ait $\overline{W} \cap M_0 = \emptyset$, donc l'hypothèse $\tau > \tau_0$ est absurde.

Supposons maintenant que l'on ait $\tau \leqq \tau_0$; soit ε un nombre positif quelconque inférieur à $|\tau_0|$. L'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty}(t_n - \tau'_n) = \tau \leqq \tau_0 < o$ entraîne, pour n assez grand, $o > \tau_0 + \varepsilon > t_n - \tau'_n$, d'où $\tau'_n > \tau'_n + \tau_0 + \varepsilon > t_n$, donc l'on a, pour n assez grand,

$$P(\tau'_n + \tau_0 + \varepsilon) \in U_1,$$

puisque, par hypothèse, on a $P(t) \in U_1$ pour $\tau'_n > t > t_n$.

Or, l'hypothèse $\lim\limits_{n \to \infty} P(\tau'_n) = Q_2$ entraîne

$$\lim_{n \to \infty} P(\tau'_n + \tau_0 + \varepsilon) = Q_2(\tau_0 + \varepsilon),$$

donc nous avons

$$Q_2(\tau_0 + \varepsilon) \in U_1,$$

conclusion qui n'est pas vérifiée, puisque, à cause de la continuité de la solution $Q_2(t)$, on a $Q_2(\tau_0 + \varepsilon) \notin U$ pour ε assez petit, $Q_2(\tau_0)$ n'appartenant pas à l'ensemble fermé $\overline{U}_1$. Donc l'hypothèse $\tau \leqq \tau_0$ est aussi absurde.

Étant donné que les deux hypothèses $\tau > \tau_0$, $\tau \leqq \tau_0$ sont toutes les deux absurdes, l'autre hypothèse qu'il existe une valeur τ_0 doit être également absurde, donc nous avons

$$Q_2(s) \subset \overline{U}_1 \qquad \text{d'où} \qquad L^-(Q_2) \subset \overline{U}_1 \subset U.$$

De la même manière on démontre que l'on a $L^+(Q_1) \subset U$, où Q_1 désigne un des points d'accumulation de l'ensemble $\{P(\tau_n)\}$.

Donc nous avons le

Théorème. — *Supposons que l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *ne soit pas vide; soit* M_0 *une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$. *Si* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0, *pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M_0, *ou bien il existe deux points régutiers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$ *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \textit{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U,$$

ou bien il existe dans U *des points de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *n'appartenant pas à* M_0.

78. Nous envisageons ici les résultats du numéro précédent d'un peu plus près. Si M_0 est isolé en tant que sous-ensemble de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\} = M$, par définition, pour un voisinage assez petit U de l'ensemble M, il n'existe plus dans U de points de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ excepté ceux de M_0; or il existe deux points réguliers Q_1 et Q_2 de l'ensemble $L^+(P)$, d'après le numéro précédent, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \subset U \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset U.$$

D'autre part, la relation $Q_1 \in L^+(P)$ entraîne $L^+(Q_1) \subset L^+(P)$, donc, si l'on suppose que $L^+(Q_1)$ est disjoint d'avec M_0, $L^+(Q_1)$ est une région invariante fermée dont tous les points sont réguliers. Donc nous avons le

Théorème. — *Soit* M_0 *une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *que nous supposons non vide, et supposons que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0; *si* M_0 *est isolé en tant que sous-ensemble de* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$, *pour tout voisinage* U *de l'ensemble fermé* M_0, *ou bien il existe deux points réguliers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$, *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq \emptyset \qquad \textit{et} \qquad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq \emptyset,$$

ou bien il existe une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$ *et contenue dans* U.

79. Supposons par ailleurs que M_0 ne contienne pas de points de la frontière $\dot{A}$, de sorte que M_0 soit une région invariante fermée. Désignons par U un

voisinage de l'ensemble M_0, tel que U ne contienne pas de points de la frontière $\dot{A}$; et supposons qu'il existe un point régulier Q de l'ensemble $L^+(P)$, tel que l'on ait

$$L^+(Q) \subset U.$$

Dans ce cas, même si $L^+(Q)$ n'est pas disjoint d'avec M_0, $L^+(Q)$ est une région invariante, puisque M_0 ne contient pas de points de la frontière $\dot{A}$. Donc, si l'on suppose de plus que M_0 est isolé en tant que région invariante fermée contenue dans $L^+(P)$, il faut que $L^+(Q)$ soit contenu dans M_0. Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Supposons qu'une composante connexe* M_0 *non vide de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *soit disjointe d'avec la frontière* $\dot{A}$ *et que* $L^+(P)$ *ne coïncide pas avec* M_0; *si* M_0 *est isolé en tant que sous-ensemble de* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *ainsi que région invariante contenue dans* $L^+(P)$, *il existe deux points* Q_1 *et* Q_2 *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \subset M_0 \quad \text{et} \quad L^-(Q_2) \subset M_0.$$

80. Changeons maintenant de sujet et supposons que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, nous ayons

$$L^+(P) = K(Q);$$

je dis que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, on a

$$L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset.$$

En effet, supposons qu'il existe un point Q de $L^+(P)$ tel que l'on ait

$$L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset,$$

et désignons par Q_1 un point de $L(Q)$. Puisque l'hypothèse $Q_1 \in L(Q)$ entraîne $L(Q) \supset K(Q_1)$, nous avons

$$L^+(P) - K(Q_1) \supset Q(t) \cup Q(s) \neq \emptyset;$$

ceci est en contradiction avec l'hypothèse $L^+(P) = K(Q_1)$, puisque Q_1 appartient à $L^+(P)$.

Étant donné que, pour tout point Q de $L^+(P)$, on a $L(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset$, nous supposons que l'on a

$$L^+(Q) \cap \{Q(t) \cup Q(s)\} \neq \emptyset,$$

de sorte que

$$K(Q) = L(Q) = L^+(Q) = K^+(Q) \supset K^-(Q) \supset L^-(Q).$$

Supposons que $L^+(Q)$ ne coïncide pas avec $L^-(Q)$ et désignons par Q_1 un point de $L^-(Q)$, de sorte que l'on a $L^-(Q) \supset K(Q_1)$. Donc $K(Q_1)$ ne coïncide pas avec $L^+(P)$, conclusion contradictoire avec notre hypothèse. Donc on a, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$,

$$L^+(P) = L^+(Q) = L^-(Q) = K^+(Q) = \ldots.$$

Puisque la réciproque de ce que nous venons de démontrer est triviale, nous avons le

THÉORÈME. — *Soit* P *un point du domaine* A; *pour que l'on ait*

$$L^+(P) = K(Q)$$

pour tout point Q *de l'ensemble* $L^+(P)$, *il faut et il suffit que l'on ait*

$$L^+(P) = L^+(Q) = L^-(Q)$$

pour tout point Q *de l'ensemble* $L^+(P)$.

II. — Courbes dans le plan.

81. Comme application de résultats que nous avons obtenus, nous envisageons toujours dans ce chapitre le cas où l'on a $m = 2$, c'est-à-dire que nous étudions les courbes définies par les équations

$$\frac{dx_1}{X_1} = \frac{dx_2}{X_2} = dt$$

dans un domaine borné A dans le plan Π, où X_1 et X_2 sont deux fonctions continues dans le domaine A ainsi que leurs dérivées partielles du premier ordre par rapport à x_1 et x_2.

82. THÉORÈME. — *Soit* Q *un point régulier de l'ensemble* $L^+(P)$, P *étant un point régulier du domaine* A; *soit* eQe' *un arc sans contact au point* Q, *assez petit pour que l'arc* eQe' *soit sans contact en tout point de* eQe'. *Si, pour deux valeurs positives* t_0 *et* t'_0 *de* t $(t_0 < t'_0)$, *on a*

$$P(t_0) \in eQe' \qquad et \qquad P(t'_0) \in eQe',$$

ou bien le point $P(t'_0)$ *appartient à l'arc partiel* $\overset{\frown}{P(t_0), Q}$ *de l'arc* eQe, *ou bien les trois points* $P(t_0)$, $P(t'_0)$ *et* Q *coïncident.*

Pour que l'on soit dans le second cas de l'alternative, il faut et il suffit que $P(t)$ *soit périodique, et que* $t'_0 - t_0$ *soit une de ses périodes.*

On remarque que, dans ce théorème, on ne suppose pas que $L^+(P)$ soit contenu dans l'ensemble R des points réguliers.

Pour démontrer le théorème, supposons que les trois points $P(t_0)$, $P(t'_0)$ et Q ne coïncident pas. Soit t_1 une valeur de t plus grande que t_0, telle que l'on ait

$$P(t_1) \in eQe' \qquad \text{et} \qquad P(t) \notin eQe' \qquad \text{pour} \quad t_0 < t < t_1.$$

On voit, d'après le n° 25, que cette valeur t_1 existe toujours, puisque P est régulier. Je dis que les points $P(t_0)$ et $P(t_1)$ ne coïncident pas.

En effet, s'ils coïncidaient, la solution $P(t)$ serait périodique de période fondamentale $t_1 - t_0$, puisqu'il n'existe pas de valeurs de t comprises entre t_0 et t_1, pour lesquelles $P(t)$ appartient à l'arc eQe', *a fortiori* coïncide avec le point $P(t_0)$. Donc la caractéristique $P(t)$ est représentée par les points de la solution $P(t)$ correspondant aux valeurs de t comprises entre t_0 et t_1 (t_0 inclus et t_1 exclus). Or dans cet intervalle seul le point $P(t_0)$ appartient à l'arc eQe', donc le point $P(t'_0)$ doit coïncider avec le point $P(t_0)$; ceci est en contradiction avec notre hypothèse. En conséquence on a

$$P(t_0) \neq P(t_1).$$

Donc, d'après le nº 15, $P(t)$ pour $t_0 \leqq t \leqq t_1$ est une courbe de Jordan et, d'après le nº 18, l'arc partiel $\overparen{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' est une courbe de Jordan, donc ces deux courbes constituent une courbe de Jordan fermée, soit C, puisque, d'après la définition de la valeur t_1, l'arc $\overparen{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ et l'arc $\overparen{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' n'ont pas de points communs autres que leurs extrémités $P(t_0)$ et $P(t_1)$.

Par conséquent, d'après le théorème de Jordan, la courbe C décompose $\Pi - C$ en deux régions Π_1 et Π_2. Considérons les points $P(t_1 + \tau)$, où τ peut prendre toute valeur positive. On voit facilement que, si τ est assez petit, $P(t_1 + \tau)$ appartient à une même région, soit Π_1, entre les deux régions Π_1 et Π_2, de sorte que $P(t_0 - \tau')$ appartient à la région Π_2, τ' étant une valeur positive assez petite.

Je dis que, pour toute valeur positive de τ, le point $P(t_1 + \tau)$ appartient à la région Π_1. En effet, étant donné que, pour un nombre positif assez petit τ, $P(t_1 + \tau)$ appartient à Π_1, s'il existe une valeur positive de τ, soit τ_0, pour laquelle $P(t_1 + \tau_0)$ n'appartient pas à Π_1, il existe une valeur τ_1 entre zéro et τ_0, telle que l'on ait

$$P(t_1 + \tau_1) \in \text{o} \qquad \text{et} \qquad P(t_1 + \tau) \in \Pi_1 \qquad \text{pour} \quad 0 \leqq \tau < \tau_1.$$

Supposons que $P(t_1 + \tau_1)$ appartienne à l'arc $\overparen{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, de sorte que $P(t_1 + \tau_1)$ coïncide avec un point $P(t'')$, t'' étant une valeur de t comprise entre t_0 et t_1. Alors la solution $P(t)$ est périodique de période $t_1 + \tau_1 - t''$, donc on a

$$P(t'' + t) = P(t_1 + \tau_1 + t)$$

pour toute valeur positive ou négative de t.

Si t'' n'égale pas t_0, désignons par δ un nombre positif quelconque inférieur à $t'' - t_0$ et à τ_1, de sorte que l'on a

$$t_0 < t'' - \delta < t_1 \qquad \text{et} \qquad t_1 < t_1 + \tau_1 - \delta < t_1 + \tau_1$$

et

$$P(t'' - \delta) = P(t_1 + \tau_1 - \delta).$$

Le premier membre de cette égalité appartient à l'arc $\widehat{P(t_0), P(t_1)}$ et le second membre à la région Π_1; donc cette égalité n'est pas vérifiée et l'hypothèse faite est absurde.

Si t'' égale t_0, pour un nombre assez petit δ, on a

$$P(t_0 - \delta) \in \Pi_2$$

comme nous l'avons vu plus haut; mais, si δ est plus petit que τ_1, on a

$$t_1 < t_1 + \tau_1 - \delta < t_1 + \tau_1,$$

donc le point $P(t_1 + \tau_1 - \delta)$, qui doit coïncider avec le point $P(t_0 - \delta)$, appartient à Π_1; cette conclusion est également impossible.

Par conséquent l'hypothèse faite que $P(t_1 + \tau_1)$ appartient à l'arc $\widehat{P(t_0), P(t_1)}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ est absurde. Donc on a

$$P(t) \in \Pi_1 \qquad \text{pour} \quad t > t_1,$$

car aucune caractéristique ne peut traverser l'arc $\widehat{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe' de Π_1 à Π_2, eQe' étant sans contact en tous ses points.

Comme $P(t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur de t supérieure à t_1, si $P(t)$ traverse l'arc eQe' à une valeur de t plus grande que t_1, soit t', l'arc $\widehat{P(t_0), P(t')}$ de l'arc eQe' contient le point $P(t_1)$. Or, par hypothèse Q est un point de $L^+(P)$, donc, d'après le n° 22, Q est un point d'accumulation de l'intersection de $L^+(P)$ et de l'arc eQe'. En conséquence Q n'appartient ni à Π_2 ni à l'arc $\widehat{P(t_0), P(t_1)}$ de l'arc eQe', ni à l'arc $\widehat{P(t_0), P(t'_0)}$ de l'arc eQe', de sorte que l'arc $\widehat{P(t_0), Q}$ contient le point $P(t'_0)$.

Ce que nous venons de voir démontre en même temps que, pour que les trois points $P(t_0)$, $P(t'_0)$ et Q coïncident, il faut et il suffit que $P(t)$ soit périodique, *et que $t'_0 - t_0$ soit une de ses périodes.*

83. On démontre à l'aide du théorème précédent les deux lemmes suivants :

LEMME. — *Soit* P *un point du domaine* A; *si* $L^+(P)$ *contient le point* P, *ou bien* P *est un point singulier, ou bien la solution* $P(t)$ *est périodique, de sorte qu'on a toujours*

$$L^+(P) = L^-(P) = P(t) = P(s) = \ldots.$$

LEMME (THÉORÈME DE BENDIXSON). — *Soit* P *un point régulier du domaine* A; *si tous les points de* $L^+(P)$ *sont réguliers, pour tout point* Q *de* $L^+(P)$, *la solution* $Q(t)$ *est périodique.*

Cependant le sujet de ce paragraphe est d'établir la réciproque de ce dernier lemme. On remarque que, comme hypothèse, on ne suppose pas que l'ensemble $L^+(P)$ soit contenu dans l'ensemble R des points réguliers.

Lemme. — *Soit* P *un point régulier du domaine* A; *s'il existe un point régulier* Q *de* $L^+(P)$, *tel que la solution* $Q(t)$ *soit périodique*, $L^+(P)$ *coïncide avec la caractéristique fermée* $K(Q) = Q(t)$, *de sorte que tous les points de* $L^+(P)$ *sont réguliers.*

En effet, supposons que $L^+(P)$ ne coïncide pas avec la caractéristique fermée $K(Q)$, et désignons par Q' un point de l'ensemble non vide $L^+(P) - K(Q)$, et par T la période fondamentale de la solution périodique $Q(t)$. Soit eQe' un arc sans contact au point Q et soit U un voisinage du point Q assez petit pour que l'arc eQe' soit sans contact dans U et que U ne contienne pas le point Q'. D'après les n^{os} 5 et 20, si l'on désigne par ε un nombre positif assez petit et par V un voisinage du point Q assez petit, $V(t)$ appartient à U pour toute valeur de t, $|t| < \varepsilon$, et il existe une et une seule valeur de t, telle que l'on ait

$$Q''(t) \in eQe' \quad \text{et} \quad |t| < \varepsilon,$$

où Q'' désigne un point quelconque de V.

Désignons par W un voisinage de la caractéristique fermée $K(Q)$ qui ne contient pas le point Q'. D'après le n° 11, il existe un voisinage V' du point Q, tel que l'on ait

$$V'(t) \in W \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T \quad \text{et} \quad V'(T) \subset V,$$

car, comme Q et $Q(T)$ représentent le même point, V est un voisinage de $Q(T)$.

Or, l'hypothèse $L^+(P) \ni Q$ entraîne qu'il existe une valeur positive t_1 de t, telle que l'on ait

$$P(t_1 + t) \in W \quad \text{pour} \quad 0 \leqq t \leqq T \quad \text{et} \quad P(t_1 + T) \in V,$$

donc on a

$$P(t_1 + \tau) \in eQe' \quad \text{et} \quad P(t_1 + \tau) \in U,$$

τ étant un certain nombre tel que l'on ait $|T - \tau| < \varepsilon$.

Pour simplifier les notations, posons

$$P_1 = P(t_1) \quad \text{et} \quad P_2 = P(t_1 + \tau).$$

Le même raisonnement qu'à la démonstration du théorème du n° 81 démontre que l'arc $\widehat{P_1, P_2}$ de la caractéristique $P(t) \cup P(s)$ et l'arc $\widehat{P_1, P_2}$ de l'arc eQe' constituent une courbe de Jordan fermée, soit C'. D'ailleurs la caractéristique fermée $K(Q)$ est une courbe de Jordan, que nous désignons par C.

Puisque, par hypothèse, $L^+(P) - K(Q)$ n'est pas vide, Q n'appartient pas à la caractéristique $P(t) \cup P(s)$, donc les points P_1, P_2 et Q ne coïncident pas, ce qui montre, d'après le théorème du n° 81, que le point P_2 appartient à l'arc $\widehat{P_1, Q}$ de l'arc eQe', et que, si l'on désigne par Π_1 la région entourée par C et C',

$P(t)$ appartient à Π_1 pour $t > t_1 + \tau$. Or, Q' est un point de $L^+(P)$, et Q' n'appartient ni à W, en conséquence ni à Π_1, ni à C, ni à C'. Donc nous sommes conduits à une contradiction; l'hypothèse que $L^+(P) - K(Q)$ n'est pas vide est absurde.

84. En combinant les lemmes précédents, nous avons un théorème contenant celui de Bendixson.

THÉORÈME. — *Si l'on désigne par* P *un point du domaine* A, *les quatre conditions suivantes sont équivalentes :*

1° *il existe un point* Q *de* $L^+(P)$, *tel que la solution* $Q(t)$ *est périodique;*

2° *tous les points de l'ensemble* $L^+(P)$ *sont réguliers;*

3° *l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduisant pas à un seul point, on a, pour tout point* Q *de* $L^+(P)$,

$$L^+(P) = L^+(Q);$$

4° *l'ensemble* $L^+(P)$ *ne se réduisant pas à un seul point, il existe un point* Q *de* $L^+(P)$ *tel que l'on ait*

$$L^+(P) = L^+(Q).$$

Remarque. — Comme nous l'avons défini au chapitre I, dans ce Mémoire nous ne considérons pas les solutions singulières comme solutions périodiques.

85. Supposons que l'ensemble $L^+(P)$ ne soit disjoint ni d'avec l'ensemble R des points réguliers, ni d'avec la réunion de la frontière $\dot{A}$ du domaine A et de la frontière $\dot{S}$ de l'ensemble S des points singuliers. Soit Q un point régulier quelconque de $L^+(P)$. Comme conséquence directe du théorème précédent, on a

$$L^+(Q) \cap \{\dot{S} \cup \dot{A}\} \neq \emptyset;$$

mais je dis de plus que, pour tout point Q de l'ensemble $L^+(P)$, $L^+(Q)$ est contenu dans une composante connexe de $\dot{S} \cup \dot{A}$.

En effet, pour le voir, il suffit de démontrer que l'on a

$$L^+(Q) \cap R = \emptyset,$$

pour tout point régulier Q de l'ensemble $L^+(P)$, puisque l'on a

$$A = R \cup S \quad \text{et} \quad \bar{A} \supset L^+(Q).$$

Supposons que $L^+(Q)$ et R ne soient pas disjoints et désignons par Q' un point de l'intersection de $L^+(Q)$ et de R. Soit $eQ'e'$ un arc sans contact au point Q' assez petit pour que $eQ'e'$ soit sans contact en tous ses points.

L'hypothèse $Q' \in L^+(Q)$ montre qu'il existe une valeur t_0 de t, telle que l'on ait $Q(t_0) \in eQ'e'$. Soit t_1 la plus petite valeur de t supérieure à t_0, telle que l'on ait $Q(t_1) \in eQ'e'$. L'arc $\widehat{Q(t_0), Q(t_1)}$ de la caractéristique $Q(t) \cup Q(s)$ et l'arc $\widehat{Q(t_0), Q(t_1)}$ de l'arc $eQ'e'$ constituent une courbe de Jordan fermée, soit C, qui décompose $\Pi - C$ en deux régions Π_1 et Π_2.

D'après le théorème du n° 81, on a

$$\widehat{Q(t_0), Q'} \ni Q(t_1).$$

Donc, si l'on suppose que le point Q' appartient à Π_1, $Q(t_1 + \tau)$ appartient à Π_1 et $Q(t_0 - \tau)$ à Π_2, pour toute valeur positive de τ. Soit P' un point quelconque de la région Π_1; on peut montrer que $P'(t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur positive de t, par le même raisonnement qu'au n° 82. Or, les hypothèses $Q' \in \Pi_1$ et $Q' \in L^+(Q) \subset L^+(P)$ entraînent qu'il existe une valeur t' de t, telle que l'on ait

$$P(t') \in \Pi_1,$$

de sorte que $P(t' + t)$ appartient à Π_1 pour toute valeur positive de t; mais cela est impossible, puisque l'on a $Q(t_0 - \tau) \in L^+(P)$, $Q(t_0 - \tau)$ appartenant à Π_2, pour toute valeur positive de τ. Donc l'hypothèse $L^+(Q) \cap R \neq \emptyset$ est absurde et l'on a

$$L^+(Q) \subset \dot{A} \cup \dot{S}.$$

D'ailleurs, puisque $L^+(Q)$ est un sous-ensemble connexe de $L^+(P)$, $L^+(Q)$ est contenu dans une composante connexe de l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$.

De la même manière on démontre le même résultat pour $L^-(Q)$.

En combinant ces résultats avec le théorème du n° 76, nous avons le

THÉORÈME. — *Supposons que l'ensemble* $L^+(P)$ *ne soit disjoint ni d'avec la réunion de la frontière* $\dot{A}$ *du domaine* A *et de la frontière* $\dot{S}$ *de* S, *ni d'avec l'ensemble* R, P *étant un point régulier du domaine* A; *si l'on désigne par* Q *un point quelconque de l'ensemble* $L^+(P)$, $L^+(Q)$ *ainsi que* $L^-(Q)$ *sont contenus dans une composante connexe de l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$.

86. Avec les mêmes hypothèses sur $L^+(P)$ qu'au numéro précédent, nous considérons l'ensemble $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\} = M$ et décomposons cet ensemble fermé M en composantes connexes $M_i (i \in I)$, I étant l'ensemble d'indices.

Supposons qu'une composante connexe $M_0 (o \in I)$ soit isolée en tant que sous-ensemble de M, de sorte que, dans un voisinage assez petit U de l'ensemble fermé M, il n'y a plus de points de M sauf ceux contenus dans M_0. Or, d'après le théorème du n° 77, ou bien il existe deux points Q_1 et Q_2, tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq \emptyset \quad \text{et} \quad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq \emptyset,$$

ou bien il existe dans U une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$.

Je dis que ce dernier cas de l'alternative n'est pas vérifié. En effet, s'il existait une région invariante fermée constituée de points réguliers de $L^+(P)$, soit B, on aurait

$$L^+(Q) \subset B \subset R \qquad \text{et} \qquad L^+(Q) \subset B \subset L^+(P),$$

pour tout point Q de B. Donc, d'après le théorème du n° 84, $L^+(Q)$ coïnciderait avec une caractéristique fermée, en conséquence, toujours d'après le même théorème, on aurait

$$L^+(P) \subset R,$$

contrairement à notre hypothèse. Donc il existe deux points Q_1 et Q_2 tels que l'on ait

$$L^+(Q_1) \cap M_0 \neq \emptyset, \qquad L^-(Q_2) \cap M_0 \neq \emptyset$$

et

$$Q_i \in L^+(P) \cap R \qquad (i = 1, 2).$$

Or, d'après le théorème du numéro précédent, $L^+(Q_1)$ est contenu dans une composante connexe de M, dont il est contenu dans M_0 : $L^+(Q_1) \subset M_0$.

De la même manière on démontre que l'on a $L^-(Q_2) \subset M_0$.

Donc nous avons le

THÉORÈME. — *Avec les mêmes hypothèses sur* $L^+(P)$ *qu'au théorème précédent, désignons par* M *l'ensemble* $L^+(P) \cap \{\dot{A} \cup \dot{S}\}$ *et décomposons* M *en composantes connexes* $M_i (i \in I)$, I *étant l'ensemble d'indices.*

Si une composante connexe $M_0 (0 \in I)$ *est isolée en tant que sous-ensemble de* M, *il existe deux points réguliers* Q_1 *et* Q_2 *de l'ensemble* $L^+(P)$, *tels que l'on ait*

$$L^+(Q_1) \subset M_0 \qquad \text{et} \qquad L^-(Q_2) \subset M_0.$$