ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HUBERT DELANGE

Théorèmes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet et les intégrales multiples de Laplace

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 70, nº 1 (1953), p. 51-103

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1953_3_70_1_51_0>

THÉORÈMES TAUBÉRIENS

POUR LES

SÉRIES MULTIPLES DE DIRICHLET

ET LES

INTÉGRALES MULTIPLES DE LAPLACE

PAR M. HUBERT DELANGE.

Introduction.

Il est bien connu que Tauber a établi en 1897 [19] (¹) le résultat suivant :

Si l'on suppose que na_n, ou même plus généralement $\frac{1}{n}\sum_{1}^{n} \nu a_\nu$, tend vers zéro pour n infini, le fait que la somme de la série entière $\sum_{0}^{+\infty} a_n X^n$ tende vers une limite finie S quand X tend vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne la convergence de la série $\sum_{0}^{+\infty} a_n$ avec pour somme S.

Il est bien connu aussi que la même chose a lieu si l'on suppose seulement na_n borné, ou même a_n réel et na_n borné inférieurement ou supérieurement.

Ces résultats ne sont d'ailleurs que des cas particuliers de résultats relatifs à la série de Dirichlet

$$\sum_{0}^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}, \tag{1}$$

(¹) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie placée à la fin du Mémoire.

où les a_n sont des coefficients réels ou complexes et les λ_n des nombres réels satisfaisant à

$$\lambda_0 \geqq 0, \qquad \lambda_n < \lambda_{n+1} \qquad \text{et} \qquad \lim_{n \to +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

En effet, sous l'hypothèse que $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, Littlewood a établi en 1911 [15] que, si les coefficients a_n satisfont pour $n \geqq 1$ à

$$(2) \qquad |a_n| \leqq M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n},$$

le fait que $\sum\limits_0^{+\infty} a_n e^{-\lambda_n z}$ tende vers une limite finie S quand z tend vers zéro par valeurs réelles positives entraîne la convergence de la série $\sum\limits_0^{+\infty} a_n$ avec pour somme S.

Hardy et Littlewood ont établi en 1914 [11], sous la même hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$, que la même chose a lieu si l'on suppose que a_n est réel et satisfait pour $n \geqq 1$ à

$$(3) \qquad a_n \geqq -M \frac{\lambda_n - \lambda_{n-1}}{\lambda_n}.$$

Si l'on pose $X = e^{-z}$, la série entière $\sum\limits_0^{+\infty} a_n X^n$ devient $\sum\limits_0^{+\infty} a_n e^{-nz}$, qui est le cas particulier de (1) correspondant à $\lambda_n = n$. Lorsque z tend vers zéro par valeurs réelles positives, X tend vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1. D'autre part, les conditions (2) et (3) deviennent ici

$$(4) \qquad n\,|a_n| \leqq M$$

et

$$(5) \qquad n a_n \geqq -M.$$

Ajoutons qu'Ananda-Rau ([1] et [2]) a montré que l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ est superflue dans le théorème de Littlewood avec la condition (2), mais non dans celui de Hardy et Littlewood avec la condition (3).

D'autre part, de nombreux auteurs ont donné d'autres conditions susceptibles de remplacer (2) ou (3) ([14], [16], [17], [18], etc.). On a montré par ailleurs [17] que, dans les théorèmes où l'hypothèse $\lim\limits_{n \to +\infty} \frac{\lambda_{n+1}}{\lambda_n} = 1$ n'est pas superflue, elle peut être remplacée par $\varliminf\limits_{n \to +\infty} a_n \geqq 0$. Nous avons établi nous-même ([6] et [8]) qu'en la supprimant totalement on peut encore obtenir une conclusion, mais qui n'est plus la convergence de $\sum\limits_0^{+\infty} a_n$.

Il est naturel de se demander s'il est possible d'établir des résultats analogues aux précédents pour les séries entières à plusieurs variables ou les séries multiples de Dirichlet.

A notre connaissance, seul le cas des séries entières à deux variables avait été étudié avant notre Note de 1948 [5].

Hardy et Littlewood avaient établi dès 1913 [10] le résultat suivant :

Soit la série double $\sum a_{m,n} X^m Y^n$, où m et n prennent tous les systèmes de valeurs entières tels que $m \geqq 1$ et $n \geqq 1$. Posons

$$S_{m,n} = \sum_{\substack{i \leqq m \\ j \leqq n}} a_{i,j}, \qquad p_{m,n} = \sum_{i=1}^{n} a_{m,j}, \qquad q_{m,n} = \sum_{i=1}^{m} a_{i,n}.$$

Si l'on suppose que $mp_{m,n}$ et $nq_{m,n}$ sont bornés pour toutes les valeurs de m et n et tendent vers zéro quand m et n tendent vers $+\infty$, le fait que la somme $f(X, Y)$ de la série double tende vers une limite finie S lorsque X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne que $S_{m,n}$ tende vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

L'hypothèse faite ici sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ est satisfaite en particulier si $(m^2+n^2)a_{m,n}$ est borné pour toutes les valeurs de m et n et tend vers zéro quand m et n tendent vers $+\infty$. On a ainsi un théorème complètement analogue au premier théorème de Tauber.

Ce n'est qu'en 1939 que Knopp [13] a établi, sous l'hypothèse supplémentaire que $f(X, Y)$ est borné pour X et Y réels satisfaisant à $0 \leqq X < 1$ et $0 \leqq Y < 1$ (²), que la condition $(m^2+n^2)|a_{m,n}| \leqq M$ est suffisante pour que la convergence de $f(X, Y)$ vers une limite finie S quand X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne la convergence de $S_{m,n}$ vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

Ce résultat est analogue à celui relatif à la condition (4) pour les séries simples.

Le résultat correspondant à celui relatif à la condition (5) a été établi en 1940 par Durañona y Vedia [9] :

Si les coefficients $a_{m,n}$ sont réels, si $f(X, Y)$ existe et est bornée pour X et Y réels satisfaisant à $0 \leqq X < 1$ et $0 \leqq Y < 1$, et s'il existe un nombre K tel que l'on ait quels que soient m et n :

$$mp_{m,n} \geqq -K \qquad \text{et} \qquad nq_{m,n} \geqq -K,$$

la convergence de $f(X, Y)$ vers une limite finie S quand X et Y tendent vers 1 par valeurs réelles inférieures à 1 entraîne que $S_{m,n}$ tende vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

(²) Nous verrons que cette hypothèse est superflue.

Le but du présent Mémoire est de généraliser ces résultats. Pour ne pas compliquer les notations, nous resterons dans le cas de deux variables, mais il n'y a aucune différence essentielle avec le cas de n variables, où $n > 2$.

On sait que les théorèmes taubériens relatifs aux séries de Dirichlet ordinaires peuvent s'établir simplement comme corollaires de résultats relatifs à l'intégrale de Laplace.

De même, les théorèmes sur les séries doubles de Dirichlet s'obtiendront ici comme corollaires de théorèmes sur les intégrales doubles de Laplace. Mais il apparaît tout de suite une différence avec le cas d'une variable :

Si l'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-zt}\,ds(t)$ est convergente pour $\mathcal{R}z > 0$, on sait qu'elle est égale à $\int_0^{+\infty} z e^{-zt} s(t)\,dt$, qui est absolument convergente. Il suffit donc de considérer une intégrale de cette dernière forme.

On n'a pas de théorème analogue pour l'intégrale double $\iint e^{-uz-vz'}\,ds(u, v)$.

Aussi, nous étudierons séparément les intégrales de la forme

$$\iint zz' e^{-uz-vz'} s(u, v)\,du\,dv$$

et celles de la forme

$$\iint e^{-uz-vz'}\,ds(u, v).$$

Les résultats relatifs à la seconde forme nous donneront ensuite ceux relatifs aux séries doubles de Dirichlet.

Nous donnerons pour ces séries doubles des théorèmes correspondant exactement à ceux cités plus haut pour les séries simples, et aussi d'autres qui ne peuvent pas avoir d'analogues pour les séries simples, du fait qu'il y a moins de possibilités pour le comportement d'une suite simple que pour celui d'une suite double ([3]).

Les méthodes que nous emploierons ici seront tout à fait semblables à celles que nous avons utilisées pour les séries ou les intégrales simples dans notre article [6].

1. Préliminaires.

1.1. Dans tout ce qui suit, $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\,du\,dv$, où a, b, c, d sont finis et $a < b$, $c < d$, représente l'intégrale de la fonction $f(u, v)$ sur le rectangle $a \leq u \leq b$, $c \leq v \leq d$. Si $f(u, v)$ est réelle, c'est l'intégrale de Lebesgue ordinaire. Si $f(u, v)$ est à valeur réelle ou complexe, nous la supposons définie à l'aide de celles de la partie réelle et de la partie imaginaire.

([3]) Ces différents théorèmes ont été énoncés dans notre Note [5].

L'intégrale de $f(u, v)$ sur le quadrant $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, que l'on peut désigner par $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$, est définie comme limite pour A et B tendant vers $+\infty$ de $\int_0^{A}\int_0^{B} f(u, v)\,du\,dv$. Son existence implique donc d'abord que, quels que soient A et B positifs, f soit sommable sur le rectangle $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$, ensuite que l'intégrale de f sur ce rectangle tende vers une limite finie quand A et B tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

On sait que, la première condition étant supposée remplie, l'intégrale $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$ existe certainement si $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} |f(u, v)|\,du\,dv$ existe, auquel cas *on dit qu'elle est absolument convergente*, ou que f est sommable sur le quadrant $u \geqq 0$, $v \geqq 0$.

Toutes les fois que nous écrirons $\iint f(u, v)\,du\,dv$ sans mentionner explicitement le champ d'intégration, il sera entendu qu'il s'agit de l'intégral $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u, v)\,du\,dv$.

1.2. Dans les paragraphes qui suivent, R désigne un rectangle $a \leqq u \leqq b$, $c \leqq v \leqq d$, où a, b, c, d sont des nombres finis satisfaisant à $a < b$, $c < d$.

1.3. $g(u, v)$ étant une fonction réelle ou complexe définie sur le rectangle R, on dit qu'elle est *à variation bornée sur ce rectangle* si, quels que soient les systèmes de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfaisant à

$$a = u_0 < u_1 < \ldots < u_m = b,$$
$$c = v_0 < v_1 < \ldots < v_n = d$$

(m et n quelconques), la somme

$$\sum_{\substack{0 \leqq i \leqq m-1 \\ 0 \leqq j \leqq n-1}} |g(u_{i+1}, v_{j+1}) - g(u_i, v_{j+1}) - g(u_{i+1}, v_j) + g(u_i, v_j)|$$

reste au plus égale à un nombre fixe [4].

Alors la borne supérieure de cette somme pour tous les systèmes possibles de nombres u_i et v_j s'appelle la *variation totale de g sur* R.

1.3.1. Un exemple particulièrement simple est le suivant :

Donnons-nous p points (α_1, β_1), (α_2, β_2), $\ldots$, (α_p, β_p) appartenant au rec-

---

[4] Cette définition est celle de Vitali. Il en existe un certain nombre d'autres, non équivalentes à celle-ci.

tangle R, et p nombres réels ou complexes $a_1, a_2, \ldots, a_p$, puis définissons $g(u, v)$ comme suit :

Si $u = a$ ou $v = c$, prenons $g(u, v) = 0$.

Pour $a < u \leqq b$, $c < v \leqq d$, prenons $g(u, v)$ égal à la somme des a_j correspondant aux indices j pour lesquels $\alpha_j \leqq u$ et $\beta_j \leqq v$ (cette somme étant prise nulle s'il n'y a aucun tel indice).

On voit aisément que cette fonction $g(u, v)$ est à variation bornée sur R et que sa variation totale sur R est $\sum_{j=1}^{p} |a_j|$.

1.3.2. Un autre exemple simple est le suivant :

Soit $\gamma(u, v)$ une fonction réelle ou complexe sommable sur le rectangle R et soit $g(u, v)$ la fonction définie sur R comme suit :

Si $u = a$ ou $v = c$,

$$g(u, v) = 0.$$

Si $a < u \leqq b$, $c < v \leqq d$,

$$g(u, v) = \int_a^u \int_c^v \gamma(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta.$$

$g(u, v)$ est encore à variation bornée sur R et sa variation totale sur R est $\int_a^b \int_c^d |\gamma(u, v)|\, du\, dv$ ([5]).

1.3.3. Notons que, si la fonction $g(u, v)$, définie sur R, ne dépend que de u, ou que de v, elle est à variation bornée sur R, sa variation totale sur R étant nulle.

D'une façon générale, une fonction à variation bornée sur R le reste si on lui ajoute une fonction de u seul ou une fonction de v seul, et cela ne modifie pas sa variation totale sur R.

1.3.4. Si la fonction $g(u, v)$ est à variation bornée sur R, quels que soient u_0 et v_0 satisfaisant à $a \leqq u_0 < b$ et $c \leqq v_0 < d$, $g(u, v)$ tend vers une limite finie $g(u_0 + 0, v_0 + 0)$ quand le point (u, v) tend vers le point (u_0, v_0) en restant dans le quadrant $u > u_0$, $v > v_0$, et, quels que soient u'_0 et v'_0 satisfaisant à $a < u'_0 \leqq b$ et $c < v'_0 \leqq d$, $g(u, v)$ tend vers une limite finie $g(u'_0 - 0, v'_0 - 0)$ quand le point (u, v) tend vers le point (u'_0, v'_0) en restant dans le quadrant $u < u'_0$, $v < v'_0$.

([5]) Il est aisé de voir que $g(u, v)$ est à variation bornée sur R, sa variation totale étant *au plus égale* à $\int_a^b \int_c^d |\gamma(u, v)|\, du\, dv$, mais moins de voir que la variation est exactement égale à cette intégrale.

1.4. Nous dirons que la fonction réelle ou complexe $g(u, v)$, définie sur R, appartient à la classe H sur R si :

1° Elle est à variation bornée sur R;

2° Quel que soit $\xi \in [a, b]$, $g(\xi, v)$ est une fonction de v à variation bornée sur $[c, d]$, et, quel que soit $\eta \in [c, d]$, $g(u, \eta)$ est une fonction de u à variation bornée sur $[a, b]$ (6).

On voit aisément que, si l'hypothèse 1° est satisfaite, l'hypothèse 2° l'est dès que, pour *un* $\xi \in [a, b]$, $g(\xi, v)$ est une fonction de v à variation bornée sur $[c, d]$, et, pour *un* $\eta \in [c, d]$, $g(u, \eta)$ est une fonction de u à variation bornée sur $[a, b]$.

En particulier, si $g(u, v)$ est à variation bornée sur R et est nulle quand $u = a$ ou $v = c$, elle appartient à la classe H sur R.

1.5. $f(u, v)$ et $g(u, v)$ étant deux fonctions réelles ou complexes définies sur le rectangle R, l'intégrale $\iint f(u, v)\,dg(u, v)$ étendue à ce rectangle, que nous désignerons par $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\,dg(u, v)$, est définie de la façon suivante :

Étant donné les systèmes de nombres réels $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfaisant aux conditions écrites plus haut, on leur fait correspondre la somme

$$\Sigma = \sum_{\substack{0 \leq i \leq m-1 \\ 0 \leq j \leq n-1}} f(\xi_{ij}, \eta_{ij})\,[g(u_{i+1}, v_{j+1}) - g(u_i, v_{j+1}) - g(u_{i+1}, v_j) + g(u_i, v_j)],$$

où (ξ_{ij}, η_{ij}) est un point arbitraire du rectangle $u_i \leq u \leq u_{i+1}$, $v_j \leq v \leq v_{j+1}$. [Σ n'est donc pas déterminée quand on connaît les u_i et les v_j, mais dépend encore du choix des points (ξ_{ij}, η_{ij})].

Par définition, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\,dg(u, v)$ est la limite de Σ quand Max $(u_{i+1} - u_i)$ et Max $(v_{j+1} - v_j)$ tendent vers zéro, si cette limite existe (7).

1.5.1. Il est clair que, si les intégrales $\int_a^b \int_c^d f_1(u, v)\,dg(u, v)$ et $\int_a^b \int_c^d f_2(u, v)\,dg(u, v)$ existent et sont égales respectivement à I_1 et I_2, quels

(6) La fonction g est alors à variation bornée au sens de Hardy et Krause sur le rectangle R.

(7) Nous disons que Σ tend vers I quand Max $(u_{i+1} - u_i)$ et Max $(v_{j+1} - v_j)$ tendent vers zéro, si à tout ε positif correspond un nombre positif $\eta(\varepsilon)$ tel que, lorsque les systèmes de nombres $u_0, u_1, \ldots, u_m$ et $v_0, v_1, \ldots, v_n$ satisfont à Max $(u_{i+1} - u_i) \leq \eta(\varepsilon)$ et Max $(v_{j+1} - v_j) \leq \eta(\varepsilon)$, on a pour tout choix des points (ξ_{ij}, η_{ij})

$$|\Sigma - I| \leq \varepsilon.$$

Il est clair que, s'il existe un I ayant cette propriété, il est unique.

que soient λ et μ réels ou complexes, $\int_a^b \int_c^d [\lambda f_1(u, v) + \mu f_2(u, v)]\, dg(u, v)$ existe aussi et est égale à $\lambda I_1 + \mu I_2$.

De même, si les intégrales $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg_1(u, v)$ et $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg_2(u, v)$ existent et sont égales respectivement à J_1 et J_2, quels que soient λ et μ réels ou complexes, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$, où

$$g(u, v) = \lambda g_1(u, v) + \mu g_2(u, v),$$

existe aussi et est égale à $\lambda J_1 + \mu J_2$.

1.5.2. Il est clair également que, si $g(u, v)$ ne dépend que de u seul, ou de v seul, quel que soit $f(u, v)$, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$ existe et est nulle.

Par suite, dans l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$, on peut sans inconvénient ajouter à $g(u, v)$ une fonction dépendant seulement de u ou seulement de v.

1.5.3. On voit immédiatement que, si $f(u,v) = 1$, l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u,v)\, dg(u,v)$ existe pour n'importe quelle fonction g définie sur R et est égale à

$$g(a, c) + g(b, d) - g(a, d) - g(b, c).$$

1.6. On montre sans peine que l'intégrale $\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v)$ existe certainement si f est continue sur R et g à variation bornée sur R.

1.6.1. En particulier, si, f étant continue sur R, g est la fonction considérée au paragraphe 1.3.1, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) = \sum_{j=1}^{p} a_j f(\alpha_j, \beta_j).$$

1.6.2. Si, f étant toujours continue sur R, g est la fonction considérée au paragraphe 1.3.2, on a

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) = \int_a^b \int_c^d f(u, v)\, \gamma(u, v)\, du\, dv.$$

1.7. Si l'une des fonctions f et g appartient à la classe H sur R, tandis que l'autre est continue et à variation bornée sur R, les l'intégrales

$$\int_a^b \int_c^d f(u, v)\, dg(u, v) \quad \text{et} \quad \int_a^b \int_c^d g(u, v)\, df(u, v)$$

existent toutes les deux.

On a alors la formule d'intégration par parties (8) :

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(u,v)\,dg(u,v) = {} & f(b,d)\,g(b,d) - f(a,d)\,g(a,d) - f(b,c)\,g(b,c) + f(a,c)\,g(a,c)\\ & + \int_a^b g(u,c)\,df(u,c) - \int_a^b g(u,d)\,df(u,d)\\ & + \int_c^d g(a,v)\,df(a,v) - \int_c^d g(b,v)\,df(b,v)\\ & + \int_a^b\int_c^d g(u,v)\,df(u,v).\end{aligned}$$

1.7.1. En particulier, si f est continue et a des dérivées partielles f'_u, f'_v et f''_{uv} continues sur R, et si g est à variation bornée sur R et nulle pour $u=a$ ou $v=c$, on a

$$\begin{aligned}\int_a^b\int_c^d f(u,v)\,dg(u,v) = f(b,d)\,g(b,d) & - \int_a^b g(u,d)\,f'_u(u,d)\,du\\ & - \int_c^d g(b,v)\,f'_v(b,v)\,dv\\ & + \int_a^b\int_c^d g(u,v)\,f''_{uv}(u,v)\,du\,dv.\end{aligned}$$

1.8. Si f est continue sur R et g à variation bornée sur ce rectangle, la fonction h définie par

$$h(u,v) = \begin{cases} 0 & \text{si } u=a \quad \text{ou} \quad v=b,\\ \displaystyle\int_a^u\int_c^v f(\xi,\eta)\,dg(\xi,\eta) & \text{si } a<u\leqq b, \quad c<v\leqq d,\end{cases}$$

est à variation bornée sur R (et même appartient à la classe H sur R).

Quelle que soit φ continue sur R, on a

$$\int_a^b\int_c^d \varphi(u,v)\,dh(u,v) = \int_a^b\int_c^d \varphi(u,v)\,f(u,v)\,dg(u,v).$$

1.9. L'intégrale $\iint f(u,v)\,dg(u,v)$ étendue au quadrant $u\geqq 0$, $v\geqq 0$, que l'on peut désigner par $\int_0^{+\infty}\int_0^{+\infty} f(u,v)\,dg(u,v)$, est définie comme limite pour A et B tendant vers $+\infty$ de $\int_0^A\int_0^B f(u,v)\,dg(u,v)$.

---

(8) *Cf.* Young [21], p. 281.

Son existence implique donc d'abord que, quels que soient A et B positifs, l'intégrale $\int_0^A \int_0^B f(u, v)\, dg(u, v)$ existe, ensuite que cette dernière intégrale tende vers une limite finie quand A et B tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

La première condition est certainement remplie si f est continue pour $u \geqq 0$, $v \geqq 0$, g étant à variation bornée sur tout rectangle $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$.

1.9.1. Toutes les fois que nous écrirons $\iint f(u, v)\, dg(u, v)$ sans mentionner explicitement le champ d'intégration, il sera entendu qu'il s'agit de l'intégrale $\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} f(u, v)\, dg(u, v)$.

1.10. On sait que, si l'intégrale $\iint e^{-ux-vy} \sigma(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente pour x et y réels positifs, elle représente une fonction de x et y holomorphe pour $\mathcal{R}x > 0$ et $\mathcal{R}y > 0$.

On sait aussi que, si les fonctions réelles ou complexes $\sigma_1(u, v)$ et $\sigma_2(u, v)$ sont continues pour u et $v \geqq 0$, si les intégrales $\iint e^{-ux-vy} \sigma_1(u, v)\, du\, dv$ et $\iint e^{-ux-vy} \sigma_2(u, v)\, du\, dv$ sont absolument convergentes pour x et $y > 0$, et si, pour x et $y > 0$,

$$\iint e^{-ux-vy} \sigma_1(u, v)\, du\, dv = \iint e^{-ux-vy} \sigma_2(u, v)\, du\, dv,$$

on a pour u et $v \geqq 0$:

$$\sigma_1(u, v) = \sigma_2(u, v) \quad (^9).$$

En particulier, si $\sigma(u, v)$ est continue pour u et $v \geqq 0$, et si l'intégrale $\iint e^{-ux-vy} \sigma(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente pour x et $y > 0$ et égale à $\frac{A}{x^2 y^2}$, on a

$$\sigma(u, v) = A\, uv.$$

1.11. Si $s(u, v)$ est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$, et nulle qnand $u = 0$ ou $v = 0$, et si l'on a pour u et $v \geqq 0$:

$$|s(u, v)| \leqq M\, e^{a_0 u + b_0 v},$$

avec a_0 et $b_0 > 0$, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy} ds(u, v)$ est convergente pour $\mathcal{R}x > a_0$ et $\mathcal{R}y > b_0$ et égale à l'intégrale absolument convergente

$$\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv \quad (^{10}).$$

(9) *Voir* par exemple [20], p. 29.
(10) *Cf.* D. L. Bernstein [3], p. 469-470.

Ceci se voit aisément en utilisant la formule du paragraphe 1.7.1.

2. Préliminaires (*suite*).

2.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce qui suit, λ et μ désignent deux nombres réels supérieurs à 1, et E un ensemble de couples (u, v) de nombres réels positifs, supposé tel que, quel que soit A positif, il y ait dans E des couples satisfaisant à $u \geqq A$ et $v \geqq A$.

2.2. A toute fonction réelle ou complexe $s(u, v)$ définie pour u et v réels positifs, on associe des fonctions définies comme suit :

On pose

$$\begin{aligned}
W_s(u, v, \lambda, \mu) &= \sup_{\substack{u \leqq u' \leqq \lambda u \\ v \leqq v' \leqq \mu v}} |s(u', v') - s(u, v)|, \\
\overline{w}_s(\lambda, \mu) &= \sup_{u, v > 0} W_s(u, v, \lambda, \mu), \\
w_s(\lambda, \mu) &= \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} W_s(u, v, \lambda, \mu) \quad (^{11}), \\
w_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} W_s(u, v, \lambda, \mu).
\end{aligned}$$

Il est clair que ces fonctions ont des valeurs positives ou nulles, et finies ou non. Si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, $W_s(u, v, \lambda, \mu)$ est toujours finie.

De plus, on a toujours

$$w_s(E, \lambda, \mu) \leqq w_s(\lambda, \mu) \leqq \overline{w}_s(\lambda, \mu).$$

Si $s(u, v)$ est supposée réelle, on pose en outre

$$\begin{aligned}
-\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) &= \inf_{\substack{u \leqq u' \leqq \lambda u \\ v \leqq v' \leqq \mu v}} [s(u', v') - s(u, v)], \\
\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) &= \sup_{\substack{\frac{u}{\lambda} \leqq u' \leqq u \\ \frac{v}{\mu} \leqq v' \leqq v}} [s(u', v') - s(u, v)], \\
\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) &= \sup_{u, v > 0} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\varpi_s(\lambda, \mu) &= \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\varpi'_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu), \\
\varpi''_s(E, \lambda, \mu) &= \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu).
\end{aligned}$$

---

(11) $\overline{\lim\limits_{u, v \to +\infty}} f(u, v)$ est définie comme étant le nombre L, fini ou non, ayant les propriétés suivantes :

1° Si $y > L$, il existe $A(y)$ tel que, pour u et $v \geqq A(y)$, $f(u, v) \leqq y$;

2° Si $y < L$, quel que soit A réel, il existe u et $v \geqq A$ tels que $f(u, v) > y$.

Cela revient à dire que, pour toute suite de couples (u_n, v_n), où u_n et v_n tendent vers $+\infty$ et telle que $f(u_n, v_n)$ tende vers une limite, finie ou non, cette limite est $\leqq L$, et que l'égalité peut effectivement avoir lieu.

Ces fonctions ont encore des valeurs positives ou nulles, finies ou non, et, si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, les deux premières ont toujours une valeur finie.

D'autre part, on a évidemment

$$\varpi_s(\lambda, \mu) \leqq \bar{\varpi}_s(\lambda, \mu) \leqq \bar{w}_s(\lambda, \mu) \qquad \text{et} \qquad \varpi_s(\lambda, \mu) \leqq w_s(\lambda, \mu).$$

Si l'on prend pour E l'ensemble de tous les couples de nombres positifs, on a, d'après la définition de $\varpi_s(\lambda, \mu)$,

$$\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu) = \varpi_s(\lambda, \mu).$$

Il est facile de voir que l'on a aussi

$$\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu) = \varpi_s(\lambda, \mu).$$

En effet, si $y > \overline{\lim}_{u, v \to +\infty} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, il existe un nombre positif A tel que, pour u et $v \geqq \mathrm{A}$, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y$. Alors, si

$$\mathrm{A} \leqq u \leqq u' \leqq \lambda u, \qquad \mathrm{A} \leqq v \leqq v' \leqq \mu v,$$

on a

$$s(u', v') - s(u, v) \geqq -y \qquad \text{ou} \qquad s(u, v) - s(u', v') \leqq y.$$

Si $u \geqq \lambda \mathrm{A}$, $v \geqq \mu \mathrm{A}$, et $\frac{u}{\lambda} \leqq u' \leqq u$, $\frac{v}{\mu} \leqq v' \leqq v$, on a

$$\mathrm{A} \leqq u' \leqq u \leqq \lambda u' \qquad \text{et} \qquad \mathrm{A} \leqq v' \leqq v \leqq \mu v',$$

donc

$$s(u', v') - s(u, v) \leqq y.$$

Par suite, pour $u \geqq \lambda \mathrm{A}$ et $v \geqq \mu \mathrm{A}$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y$. Il en résulte que

$$\overline{\lim}_{u, v \to +\infty} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y.$$

Inversement, si $\overline{\lim}_{u, v \to +\infty} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) < y$, il existe un nombre positif B tel que, pour u et $v \geqq \mathrm{B}$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y$. Alors, si

$$u \geqq \mathrm{B}, \qquad v \geqq \mathrm{B}, \qquad \frac{u}{\lambda} \leqq u' \leqq u, \qquad \frac{v}{\mu} \leqq v' \leqq v,$$

on a

$$s(u', v') - s(u, v) \leqq y, \qquad \text{ou} \qquad s(u, v) - s(u', v') \geqq -y$$

Si $\mathrm{B} \leqq u \leqq u' \leqq \lambda u$, $\mathrm{B} \leqq v \leqq v' \leqq \mu v$, on a

$$u' \geqq \mathrm{B}, \qquad v' \geqq \mathrm{B}, \qquad \frac{u'}{\lambda} \leqq u \leqq u', \qquad \frac{v'}{\mu} \leqq v \leqq v',$$

donc

$$s(u', v') - s(u, v) \geqq -y.$$

Par suite, pour u et $v \geqq B$, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y$. Il en résulte que

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq y.$$

On voit donc que l'on a bien

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi''_s(u, v, \lambda, \mu) = \overline{\lim_{u, v \to +\infty}} \Pi'_s(u, v, \lambda, \mu).$$

Ceci étant, on voit que, quel que soit E,

$$\varpi'_s(E, \lambda, \mu) \leqq \varpi_s(\lambda, \mu) \qquad \text{et} \qquad \varpi''_s(E, \lambda, \mu) \leqq \varpi_s(\lambda, \mu).$$

Ajoutons que toutes les fonctions considérées ci-dessus sont des fonctions non décroissantes de λ et de μ.

2.3. Nous allons montrer que :

ou bien on a $\overline{w}_s(\lambda, \mu) = +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1 ;
ou bien on a $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1.

2.3.1. D'abord, quels que soient λ_1, μ_1, λ_2, μ_2 supérieurs à 1, on a

$$\overline{w}_s(\lambda_1 \lambda_2, \mu_1 \mu_2) \leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{w}_s(\lambda_2, \mu_2). \tag{6}$$

Il suffit de le montrer dans le cas où les deux termes du second membre sont finis. Cela se ramène à montrer que, si $0 < u \leqq u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$ et $0 < v \leqq v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$,

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{w}_s(\lambda_2, \mu_2).$$

Or, si $u \leqq u' \leqq \lambda_1 u$, $v \leqq v' \leqq \mu_1 v$, on a

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) \leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1).$$

Si $\lambda_1 u < u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$, $v \leqq v' \leqq \mu_1 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(\lambda_1 u, v') - s(u, v)| + |s(u', v') - s(\lambda_1 u, v')|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(\lambda_1 u, v', \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{w}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

Si $u \leqq u' \leqq \lambda_1 u$, $\mu_1 v < v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(u', \mu_1 v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', \mu_1 v)|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(u', \mu_1 v, \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{w}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

Enfin, si $\lambda_1 u < u' \leqq \lambda_1 \lambda_2 u$, $\mu_1 v < v' \leqq \mu_1 \mu_2 v$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(\lambda_1 u, \mu_1 v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(\lambda_1 u, \mu_1 v)|, \\ &\leqq W_s(u, v, \lambda_1, \mu_1) + W_s(\lambda_1 u, \mu_1 v, \lambda_2, \mu_2), \\ &\leqq \overline{w}_s(\lambda_1, \mu_1) + \overline{w}_s(\lambda_2, \mu_2). \end{aligned}$$

2.3.2, L'inégalité (6) montre que, quels que soient λ et $\mu > 1$ et p entier $\geqq 1$,

$$\overline{\varpi}_s(\lambda^p, \mu^p) \leqq p\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu). \tag{7}$$

Alors, si l'on a pour un couple (λ_0, μ_0), où λ_0 et $\mu_0 > 1$, $\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \mu_0) < +\infty$, on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ quels que soient λ et $\mu > 1$. En effet, il existe un entier $p \geqq 1$ tel que $\lambda_0^p \geqq \lambda$ et $\mu_0^p \geqq \mu$, et l'on a

$$\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_0^p, \mu_0^p) \leqq p\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \mu_0).$$

2.4. On voit de la même manière que, lorsque $s(u, v)$ est supposée réelle, on a *ou bien* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) = +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1, *ou bien* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *quels que soient* λ *et* μ *supérieurs à* 1.

2.5. Le cas intéressant pour la suite est celui où l'on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$.

On va voir que, *dans ce cas, il existe deux constantes positives* H *et* K *telles que, quels que soient* u, v, u', v' *positifs*,

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq \mathrm{H} + \mathrm{K}\left[\left|\log\frac{u'}{u}\right| + \left|\log\frac{v'}{v}\right|\right]. \tag{8}$$

En effet, choisissons un $\lambda_0 > 1$.

On voit d'abord que, quels que soient u, u' et v positifs,

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{u'}{u}\right|. \tag{9}$$

Il suffit de le montrer en supposant $u' > u$, puisque les deux membres ne changent pas quand on échange u et u'.

Soit n l'entier $\geqq 0$ déterminé par $\lambda_0^n u \leqq u' < \lambda_0^{n+1} u$.

Si $n = 0$, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leqq \mathrm{W}_s(u, v, \lambda_0, \lambda_0) \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0).$$

Si $n > 0$, on a

$$\begin{aligned} |s(u', v) - s(u, v)| &\leqq \sum_{j=0}^{n-1} |s(\lambda_0^{j+1} u, v) - s(\lambda_0^j u, v)| + |s(u', v) - s(\lambda_0^n u, v)|, \\ &\leqq \sum_{j=0}^{n} \mathrm{W}_s(\lambda_0^j u, v, \lambda_0, \lambda_0), \\ &\leqq (n+1)\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0), \\ &\leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0)\left[\frac{\log\frac{u'}{u}}{\log\lambda_0} + 1\right]. \end{aligned}$$

Dans les deux cas, on a bien (9).

On voit de la même manière que, quels que soient u, v et v' positifs,

$$|s(u, v') - s(u, v)| \leqq \overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log\lambda_0}\left|\log\frac{v'}{v}\right|.$$

Alors, quels que soient u, v, u', v' positifs,

$$\begin{aligned}|s(u', v') - s(u, v)| &\leqq |s(u', v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', v)|,\\ &\leqq \overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log \lambda_0}\left|\log \frac{u'}{u}\right| \\ &\qquad + \overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0) + \frac{\overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log \lambda_0}\left|\log \frac{v'}{v}\right|,\end{aligned}$$

ce qui donne bien (8) en posant

$$2\,\overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0) = \mathrm{H}, \qquad \frac{\overline{w}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log \lambda_0} = \mathrm{K}.$$

2.6. En remplaçant dans (8) u et v par 1 et u' et v' par u et v, on obtient

$$|s(u, v) - s(1, 1)| \leqq \mathrm{H} + \mathrm{K}[|\log u| + |\log v|],$$

d'où

$$(10) \qquad |s(u, v)| \leqq \mathrm{H}_1 + \mathrm{K}[|\log u| + |\log v|], \qquad \text{avec} \quad \mathrm{H}_1 = \mathrm{H} + |s(1, 1)|.$$

2.7. On peut montrer de façon semblable que, lorsque $s(u, v)$ *est supposée réelle, si* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, *il existe deux constantes positives* H' *et* K' *telles que l'on ait, quels que soient* u, v, u', v' *satisfaisant à* $0 < u < u'$, $0 < v < v'$,

$$(11) \qquad s(u', v') - s(u, v) \geqq -\mathrm{H}' - \mathrm{K}'\left[\log \frac{u'}{u} + \log \frac{v'}{v}\right].$$

On montre d'abord, par un raisonnement semblable à celui qui a donné (9), que, si $0 < u < u'$ et $v > 0$,

$$s(u', v) - s(u, v) \geqq -\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0) - \frac{\overline{\varpi}_s(\lambda_0, \lambda_0)}{\log \lambda_0} \log \frac{u'}{u}.$$

On a une inégalité analogue pour $u > 0$ et $0 < v < v'$.

Alors, en supposant $0 < u < u'$, $0 < v < v'$, on écrit

$$s(u', v') - s(u, v) = [s(u', v) - s(u, v)] + [s(u', v') - s(u', v)].$$

2.8. Lorsque $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, $w_s(\lambda, \mu)$ et $w_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ ont toujours des valeurs finies, puisqu'elles sont au plus égales à $\overline{w}_s(\lambda, \mu)$, et, comme elles sont positives ou nulles et sont des fonctions non décroissantes de λ et de μ, elles tendent vers des limites finies positives ou nulles quand λ et μ tendent vers 1 indépendamment l'un de l'autre.

Si en outre $s(u, v)$ est supposée réelle, il en est de même de $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$.

Les limites de $w_s(\lambda, \mu)$ et $w_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ pour λ et μ tendant vers 1 indépendamment l'un de l'autre seront désignées respectivement par $w_s(1+0, 1+0)$ et $w_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$, et, si $s(u, v)$ est supposée réelle, les limites dans les mêmes conditions de $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu)$ seront désignées respectivement par $\varpi_s(1+0, 1+0)$, $\varpi'_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$ et $\varpi''_s(\mathrm{E}, 1+0, 1+0)$.

2.9. Les fonctions introduites dans ce chapitre présentent une analogie évidente avec celles introduites au chapitre 2 de notre Mémoire [7] (12). $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, $w_s(\lambda, \mu)$ et $w_s(E, \lambda, \mu)$ correspondent respectivement à $W_s(t, \lambda)$, $w_s(\lambda)$ et $w_s(E, \lambda)$, et, dans le cas où la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, $\Pi''_s(u, v, \lambda, \mu)$, $\varpi_s(\lambda, \mu)$, $\varpi'_s(E, \lambda, \mu)$ et $\varpi''_s(E, \lambda, \mu)$ correspondent respectivement à $\Pi'_s(t, \lambda)$, $\Pi''_s(t, \lambda)$, $\varpi_s(\lambda)$, $\varpi'_s(E, \lambda)$ et $\varpi''_s(E, \lambda)$.

Mais, ici, nous avons en plus les fonctions $\overline{w}_s(\lambda, \mu)$ et $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu)$. Il n'y avait pas lieu d'introduire les fonctions analogues à celles-ci dans le cas des fonctions d'une seule variable, parce que, $s(t)$ étant supposée bornée sur tout intervalle fini, le fait que la plus grande limite pour t infini de $W_s(t, \lambda)$, ou de $\Pi'_s(t, \lambda)$, soit finie suffisait à entraîner que $W_s(t, \lambda)$, ou $\Pi'_s(t, \lambda)$, soit bornée pour $t > 0$. Ici, au contraire, même si $s(u, v)$ est bornée à distance finie, la plus grande limite pour u et v tendant vers $+\infty$ de $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, ou de $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, peut très bien être finie sans que $W_s(u, v, \lambda, \mu)$, ou $\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu)$, soit bornée pour u et $v > 0$.

3. Théorèmes relatifs aux intégrales doubles de Laplace ordinaires.

3.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce chapitre, $s(u, v)$ désigne une fonction réelle ou complexe définie pour u et $v \geqq 0$ et *sommable sur tout rectangle* $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$.

Lorsque l'intégrale

$$\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv \tag{12}$$

existe, nous désignons sa valeur par $\Phi(x, y)$.

3.2. On voit d'abord que, si $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, l'intégrale (12) est absolument convergente pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, du fait que $s(u, v)$ satisfait à l'inégalité (10).

3.3. Nous allons voir que, *dans cette hypothèse* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, *on a, quels que soient x et y de parties réelles positives et quels que soient α et β positifs,*

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta) = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv, \tag{13}$$

où

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) = \begin{cases} 0 & si \quad u \ ou\ v = 0, \\ \displaystyle\int_0^u \int_0^v S_{\alpha,\beta}(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta & si \quad u \ et\ v > 0, \end{cases} \tag{14}$$

avec

$$S_{\alpha,\beta}(u, v) = s(\alpha u, \beta v) - s(\alpha, \beta). \tag{15}$$

---

(12) Ces dernières sont aussi utilisées, avec des notations légèrement différentes, dans notre article [6].

On peut d'abord écrire

$$\Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) = \iint \frac{xy}{\alpha\beta} e^{-\frac{ux}{\alpha}-\frac{vy}{\beta}} s(u, v)\, du\, dv,$$
$$= \iint xy\, e^{-ux-vy} s(\alpha u, \beta v)\, du\, dv.$$

Comme $\iint xy\, e^{-ux-vy}\, du\, dv = 1$, on en déduit

$$(16)\quad \Phi\left(\frac{x}{\alpha}, \frac{y}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta) = \iint xy\, e^{-ux-vy}[s(\alpha u, \beta v) - s(\alpha, \beta)]\, du\, dv,$$
$$= \iint xy\, e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Quels que soient A et B positifs, on peut écrire, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.6.2,

$$\int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv = \int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy}\, d\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v),$$

puis, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1,

$$(17)\quad \int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy}\, d\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) = e^{-Ax-By}\Sigma_{\alpha,\beta}(A, B) + \int_0^A x e^{-ux-By}\Sigma_{\alpha,\beta}(u, B)\, du$$
$$+ \int_0^B y\, e^{-Ax-vy}\Sigma_{\alpha,\beta}(A, v)\, dv$$
$$+ \int_0^A \int_0^B xy\, e^{-ux-vy}\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Mais, comme $s(u, v)$ satisfait à (8), on a, quels que soient u et $v > 0$,

$$(18)\quad |S_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq H + K[|\log u| + |\log v|].$$

Il en résulte que, si l'on pose $\int_0^X t|\log t|\, dt = g(X)$, on a

$$(19)\quad |\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq H uv + K[u\, g(v) + v\, g(u)].$$

Or, quand X tend vers $+\infty$,

$$g(X) = O[X^2 \log X].$$

Ceci montre que, quand A et B tendent vers $+\infty$, les trois premiers termes du second membre de (17) tendent vers zéro.

D'autre part, l'intégrale $\iint xy\, e^{-ux-vy}\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv$ est absolument convergente.

Finalement, on voit que, quand A et B tendent vers $+\infty$,

$$\int_0^A \int_0^B e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv \qquad \text{tend vers} \qquad \iint xy\, e^{-ux-vy}\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

Par suite,

$$\iint e^{-ux-vy} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv = \iint xy\, e^{-ux-vy} \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv.$$

En tenant compte de (16), ceci donne bien la formule (13).

Cette dernière sera notre formule de base pour la suite.

3.4. La formule (19) montre que les fonctions $\Sigma_{\alpha,\beta}$ sont bornées dans leur ensemble sur tout rectangle fini. Mais (18) montre, d'autre part, que ces fonctions sont *également continues* pour u et $v \geqq 0$.

En effet, désignons par $F(u, v)$ le second membre de (19) ([13]).

(18) montre que, si $u, u', v \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u', v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq |F(u', v) - F(u, v)|,$$

et, si $u, v, v' \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v') - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, v)| \leqq |F(u, v') - F(u, v)|.$$

Il en résulte que, si u_0 et $v_0 \geqq 0$, pour u et $v \geqq 0$, on a quels que soient α et $\beta > 0$

$$\begin{aligned} |\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v_0)| &\leqq |\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v)| + |\Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u_0, v_0)|, \\ &\leqq |F(u, v) - F(u_0, v)| + |F(u_0, v) - F(u_0, v_0)|, \end{aligned}$$

expression qui tend vers zéro quand u et v tendent vers u_0 et v_0.

Il résulte de là que, de toute suite de couples (α, β), où α et $\beta > 0$, on peut extraire une suite $\{\alpha_n, \beta_n\}$ telle que $\Sigma_{\alpha_n,\beta_n}(u, v)$ converge vers une fonction limite $G(u, v)$ continue pour u et $v \geqq 0$.

De plus, il est clair que l'on aura, à cause de (19),

$$|G(u, v)| \leqq H uv + K[ug(v) + vg(u)]. \tag{20}$$

3.5. Supposons maintenant que l'on parte d'une suite de couples (α, β) appartenant à l'ensemble E, telle que α et β tendent vers $+\infty$.

Nous allons montrer qu'alors, *si la fonction* G *possède une dérivée seconde* G''_{uv} *dans un voisinage du point* $(1, 1)$, *cette dérivée étant continue en ce point, on a*

$$|G''_{uv}(1, 1)| \leqq w_s(E, 1+0, 1+0), \tag{21}$$

et, dans le cas où la fonction $s(u, v)$ *est réelle, de sorte que* $G(u, v)$ *l'est aussi,*

$$-\varpi'_s(E, 1+0, 1+0) \leqq G''_{uv}(1, 1) \leqq \varpi''_s(E, 1+0, 1+0). \tag{22}$$

([13]) Nous prenons $F(u, v) = 0$ si u ou $v = 0$.

Pour u et $v > 0$, on a

$$F(u, v) = \int_0^u \int_0^v \{H + K[|\log\xi| + |\log\eta|]\}\, d\xi\, d\eta.$$

3.5.1. Notons d'abord que, si G''_{uv} existe dans un voisinage du point $(1, 1)$ et est continue en ce point, le rapport

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)}$$

tend vers $G''_{uv}(1, 1)$ quand le point (u, v) tend vers le point $(1,1)$ (avec u et $v \neq 1$).

3.5.2. Si l'on suppose u et $v > 1$, la formule (14) montre que

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) = \int_1^u \int_1^v S_{\alpha,\beta}(t, t')\, dt\, dt'. \tag{23}$$

Mais, pour $1 \leqq t \leqq u$ et $1 \leqq t' \leqq v$,

$$|S_{\alpha,\beta}(t, t')| = |s(\alpha t, \beta t') - s(\alpha, \beta)| \leqq W_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Donc

$$|\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1)| \leqq (u-1)(v-1)\, W_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Si l'on fait $\alpha = \alpha_n$, $\beta = \beta_n$, le premier membre tend pour n infini vers

$$|G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)|.$$

On obtient donc

$$|G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)| \leqq (u-1)(v-1)\, w_s(E, u, v),$$

ou

$$\left|\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)}\right| \leqq w_s(E, u, v).$$

En faisant tendre u et v vers 1, on obtient (21).

Si la fonction $s(u, v)$ est réelle, on a pour $1 \leqq t \leqq u$ et $1 \leqq t' \leqq v$,

$$S_{\alpha,\beta}(t, t') \geqq -\Pi'_s(\alpha, \beta, u, v),$$

et (23) donne

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) \geqq -(u-1)(v-1)\, \Pi'_s(\alpha, \beta, u, v).$$

Il en résulte que

$$G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1) \geqq -(u-1)(v-1)\, \varpi'_s(E, u, v),$$

ou

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)} \geqq -\varpi'_s(E, u, v).$$

En faisant tendre u et v vers 1, ceci donne

$$G''_{uv}(1, 1) \geqq -\varpi'_s(E, 1+0, 1+0). \tag{24}$$

Si, maintenant, nous prenons u et $v < 1$, la formule (14) montre que

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) = \int_u^1 \int_v^1 S_{\alpha,\beta}(t, t')\, dt\, dt'.$$

Mais, pour $u \leqq t \leqq 1$ et $v \leqq t' \leqq 1$,

$$S_{\alpha,\beta}(t, t') = s(\alpha t, \beta t') - s(\alpha, \beta) \leqq \Pi''_s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right).$$

Donc

$$\Sigma_{\alpha,\beta}(u, v) - \Sigma_{\alpha,\beta}(u, 1) - \Sigma_{\alpha,\beta}(1, v) + \Sigma_{\alpha,\beta}(1, 1) \leqq (1-u)(1-v)\,\Pi''_s\left(\alpha, \beta, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right).$$

On en déduit

$$G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1) \leqq (1-u)(1-v)\,\varpi''_s\left(E, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

ou

$$\frac{G(u, v) - G(u, 1) - G(1, v) + G(1, 1)}{(u-1)(v-1)} \leqq \varpi''_s\left(E, \frac{1}{u}, \frac{1}{v}\right),$$

d'où, en faisant tendre u et v vers 1,

$$G''_{uv}(1, 1) \leqq \varpi''_s(E, 1+0, 1+0). \tag{25}$$

(24) et (25) donnent (22).

3.6. Nous sommes maintenant en mesure d'établir les deux théorèmes suivants :

Théorème 1. — *Si* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et si* $\Phi(x, y)$ *tend vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives, on a*

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} |s(u, v) - S| \leqq w_s(1+0, 1+0). \tag{26}$$

Plus généralement, on a quel que soit E

$$\overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}} |s(u, v) - S| \leqq w_s(E, 1+0, 1+0). \tag{27}$$

Si la fonction $s(u, v)$ *est réelle, on a de plus*

$$\overline{\lim_{u, v \to +\infty}} |s(u, v) - S| \leqq \varpi_s(1+0, 1+0) \tag{28}$$

et, quel que soit E,

$$S - \varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \leqq \underline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}}\; s(u, v) \leqq \overline{\lim_{\substack{u, v \to +\infty \\ (u, v) \in E}}}\; s(u, v) \leqq S + \varpi'_s(E, 1+0, 1+0). \tag{29}$$

Théorème 2. — *Supposons que* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et qu'il existe* a *et* b *satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que* $\Phi(x, y)$ *tende vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à*

$$a < \frac{y}{x} < b.$$

Alors on a (27), *et* (29) *si la fonction* $s(u, v)$ *est réelle, pour tout ensemble* E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε *et* A *tels que, si le couple* (u, v) *appartient à* E *et si* u *et* $v \geqq A$, *on a*

$$\varepsilon \leqq \frac{v}{u} \leqq \frac{1}{\varepsilon}.$$

[Cette propriété a lieu en particulier si E est une suite de couples (u, v) telle que u et v tendent vers $+\infty$, les rapports $\frac{u}{v}$ et $\frac{v}{u}$ restant bornés supérieurement.]

3.7. *Démonstration du théorème* 1. — Il suffit d'établir (27), et (29) si la fonction $s(u, v)$ est réelle, puisque (26) est le cas particulier de (27) correspondant à E égal à l'ensemble de tous les couples de nombres positifs, et (28) est le même cas particulier de (29).

Pour cela, il suffit de montrer que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $s(u_n, v_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à

$$|l - S| \leqq \varpi_s(E, 1+0, 1+0) \tag{30}$$

et, si la fonction $s(u, v)$ est réelle, à

$$S - \varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \leqq l \leqq S + \varpi'_s(E, 1+0, 1+0). \tag{31}$$

Étant donné une suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on a vu que l'on peut en extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20).

En tenant compte de (19), la formule (13) montre que, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \qquad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

Comme, quels que soient x et y positifs, $\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right)$ tend vers S, on voit que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l et que l'on a, quels que soient x et y positifs,

$$S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.10, ceci montre que

$$G(u, v) = (S - l) uv.$$

La dérivée seconde G''_{uv} existe donc pour u et v positifs quelconques et est égale à $S - l$.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 3.5, on a (21), et, si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, on a (22).

(21) donne (30) et (22) donne (31).

3.8. *Démonstration du théorème* 2. — Soit E ayant la propriété indiquée.

On voit d'abord que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que non seulement $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), mais encore *le rapport* $\frac{v_n}{u_n}$ *tende vers une limite finie positive* σ.

Comme plus haut, en tenant compte de (19), la formule (13) montre que, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \qquad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

Mais le rapport $\dfrac{\left(\dfrac{y}{v_n}\right)}{\left(\dfrac{x}{u_n}\right)}$ tend vers $\frac{1}{\sigma}\,\frac{y}{x}$.

Donc, si $\sigma a < \frac{y}{x} < \sigma b$, ce rapport est compris entre a et b à partir d'une certaine valeur de n. Donc, dans ce cas, $\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right)$ tend vers S.

Il résulte de là, d'abord que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l, ensuite que, quels que soient x et y positifs satisfaisant à $\sigma a < \frac{y}{x} < \sigma b$,

$$S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

En raison de l'analyticité du second membre, cette égalité a lieu quels que soient x et y positifs, et par suite

$$G(u, v) = (S - l)\, uv.$$

On en déduit, comme plus haut, que l satisfait à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle.

En définitive, on a montré que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite $\{u_n, v_n\}$ telle que $s(u_n, v_n)$ tende vers une limite finie l satisfaisant à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

Ceci entraîne (27), et (29) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

3.8.1. Remarquons que les hypothèses du théorème 2 entraînent que, *quels que soient* a_1 *et* b_1 *réels satisfaisant à* $0 < a_1 < b_1$, $\Phi(x, y)$ *tend vers* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à*

$$a_1 < \frac{y}{x} < b_1.$$

Pour le voir, il suffit de montrer que, de toute suite de couples (x, y) où x

et y sont positifs et tendent vers zéro de manière que les rapports $\frac{y}{x}$ et $\frac{x}{y}$ restent bornés supérieurement, on peut extraire une suite $\{x_n, y_n\}$ telle que $\Phi(x_n, y_n)$ tende vers S.

De la suite des couples $\left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}\right)$ on peut extraire une suite

$$\left\{\frac{1}{x_n}, \frac{1}{y_n}\right\} = \{u_n, v_n\}$$

telle que $\Sigma_{u_n, v_n}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $G(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), *et que* $\frac{v_n}{u_n}$ *tende vers une limite finie positive* σ.

Comme plus haut, quels que soient x et y positifs,

$$\Phi\left(\frac{x}{u_n}, \frac{y}{v_n}\right) - s(u_n, v_n) \quad \text{tend vers} \quad x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv.$$

On a vu que ceci entraîne que $s(u_n, v_n)$ tend vers une limite finie l et que

$$G(u, v) = (S - l)uv.$$

En faisant $x = y = 1$, on voit que $\Phi(x_n, y_n) - s(u_n, v_n)$ tend vers $S - l$, et par suite $\Phi(x_n, y_n)$ tend vers S.

3.9. Remarquons aussi que, *dans chacun des théorèmes 1 et 2, si l'on ajoute l'hypothèse que* $\Phi(x, y)$ *est bornée en module par un nombre fixe pour* x *et* y *réels positifs, on peut ajouter dans la conclusion que* $s(u, v)$ *est bornée pour* u *et* v *positifs.*

En effet, si l'on a $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, on a (18) et (16).

Compte tenu de (18), la formule (16) montre, en y faisant $x = y = 1$, que, quels que soient α et β positifs,

$$\left|\Phi\left(\frac{1}{\alpha}, \frac{1}{\beta}\right) - s(\alpha, \beta)\right| \leqq \iint e^{-u-v}[H + K|\log u| + K|\log v|]\, du\, dv.$$

Donc, les hypothèses que $\Phi(x, y)$ est bornée en module pour x et y positifs et que $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ suffisent à elles deux pour entraîner que $s(u, v)$ soit bornée pour u et v positifs.

3.10. Le théorème 1 est un cas particulier du suivant :

THÉORÈME 1'. — *Supposons que* $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ *et qu'il existe deux suites* $\{x_m\}$ *et* $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \quad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \quad r_m \text{ et } r'_n > 0, \quad |\theta_m| \text{ et } |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = 0, \quad \lim_{m \to +\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \quad \overline{\lim_{m \to +\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \to +\infty} r'_n = 0, \quad \lim_{n \to +\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \quad \overline{\lim_{n \to +\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $\Phi(x_m, y_n)$ *tende vers une limite finie* S *quand* m *et* n *tendent vers* $+\infty$.

Alors, on a (26) *et, plus généralement, quel que soit* E, *on a* (27).

Si la fonction $s(u, v)$ *est réelle, on a* (28) *et, quel que soit* E, *on a* (29).

3.10.1. *Démonstration du théorème* 1′. — Nous montrerons d'abord que, pour toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, la suite des valeurs correspondantes de $s(u, v)$ est bornée.

En effet, $\{u_p, v_p\}$ étant une telle suite, on peut d'abord trouver deux suites d'entiers $\{m_p\}$ et $\{n_p\}$ tendant vers $+\infty$ et telles que $r_{m_p}u_p$ et $r'_{n_p}v_p$ tendent vers deux limites positives données ρ_0 et ρ'_0. On pourra par exemple prendre m_p égal au plus grand entier m tel que $u_p r_m \geqq \rho_0$ et n_p égal au plus grand entier n tel que $v_p r'_n \geqq \rho'_0$ (14).

Par ailleurs, si α et $\beta > 0$ et $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, (16) donne (en y remplaçant x et y par αx et βy)

$$\Phi(x, y) - s(\alpha, \beta) = \alpha\beta xy \iint e^{-\alpha u x - \beta v y} S_{\alpha,\beta}(u, v)\, du\, dv,$$

d'où en tenant compte de (18),

$$|\Phi(x, y) - s(\alpha, \beta)| \leqq \alpha\beta\, |x|.|y| \iint e^{-\alpha u \mathcal{R}x - \beta v \mathcal{R}y}[\mathrm{H} + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\,|\log v|]\, du\, dv.$$

En prenant $x = r e^{i\theta}$, $y = r' e^{i\theta'}$, avec r et $r' > 0$, $|\theta|$ et $|\theta'| < \frac{\pi}{2}$, ceci s'écrit

$$|\Phi(r e^{i\theta}, r' e^{i\theta'}) - s(\alpha, \beta)| \leqq \alpha\beta r r' \iint e^{-\alpha u r \cos\theta - \beta v r' \cos\theta'}[\mathrm{H} + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\,|\log v|]\, du\, dv,$$

d'où l'on tire

$$|s(\alpha, \beta)| \leqq |\Phi(r e^{i\theta}, r' e^{i\theta'})| + \alpha\beta r r' \iint e^{-\alpha u r \cos\theta - \beta v r' \cos\theta'}[\mathrm{H} + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\,|\log v|]\, du\, dv.$$

En utilisant cette inégalité, avec

$$r e^{i\theta} = x_{m_p}, \qquad r' e^{i\theta'} = y_{n_p}, \qquad \alpha = u_p, \qquad \beta = v_p,$$

on voit que

$$\overline{\lim_{p \to +\infty}}\, |s(u_p, v_p)| \leqq |\mathrm{S}| + \rho_0\rho'_0 \iint e^{-u\rho_0\cos\varphi - v\rho'_0\cos\varphi'}[\mathrm{H} + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\,|\log v|]\, du\, dv,$$

où

$$\varphi = \overline{\lim_{p \to +\infty}}\, |\theta_{m_p}|, \qquad \varphi' = \overline{\lim_{p \to +\infty}}\, |\theta'_{n_p}|.$$

Il résulte de là que, de toute suite de couples (u, v) appartenant à E, telle que u et v tendent vers $+\infty$, on peut extraire une suite partielle $\{u_q, v_q\}$ telle que, non seulement $\Sigma_{u_q, v_q}(u, v)$ converge pour u et $v \geqq 0$ vers une fonction $\mathrm{G}(u, v)$ continue pour ces valeurs et satisfaisant à (20), mais encore $s(u_q, v_q)$ tende vers une limite finie l.

(14) Ceci du moins à partir du moment où p est assez grand pour que $u_p r_1 \geqq \rho_0$ et $v_p r'_1 \geqq \rho'_0$.

Il ne reste qu'à montrer que l satisfait à (30), et à (31) si la fonction $s(u, v)$ est réelle.

Pour cela, on va montrer que, quels que soient ρ et ρ' positifs, l'équation

$$\text{(32)} \qquad S - l = x^2 y^2 \iint e^{-ux-vy} G(u, v)\, du\, dv$$

est satisfaite au moins pour un couple (x, y) où

$$\mathcal{R}x > 0, \qquad \mathcal{R}y > 0, \qquad |x| = \rho \qquad \text{et} \qquad |y| = \rho',$$

x pouvant être pris dépendant seulement de ρ, mais non de ρ'.

Le second membre de (32) étant une fonction de x et y holomorphe pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, il en résultera que (32) a lieu pour tout couple (x, y) satisfaisant à $\mathcal{R}x > 0$, $\mathcal{R}y > 0$, et par suite que $G(u, v) = (S - l)uv$, et l'on pourra achever comme au paragraphe 3.7.

On peut d'abord trouver deux suites d'entiers $\{m_q\}$ et $\{n_q\}$ tendant vers $+\infty$ et telles que $r_{m_q} u_q$ et $r'_{n_q} v_q$ tendent respectivement vers ρ et ρ'.

On peut ensuite trouver une suite croissante $\{q_k\}$ telle que, en posant $m_{q_k} = m'_k$, $n_{q_k} = n'_k$, les suites $\{\theta_{m'_k}\}$ et $\{\theta'_{n'_k}\}$ soient convergentes. Leurs limites θ et θ' satisferont d'ailleurs à $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, $|\theta'| < \frac{\pi}{2}$. Pour obtenir la suite $\{q_k\}$, on peut former d'abord une suite de valeurs de q telle que les θ_{m_q} correspondants tendent vers une limite, puis extraire de cette suite une nouvelle suite telle que les θ'_{n_q} correspondants tendent aussi vers une limite. En procédant ainsi, θ pourra être pris dépendant seulement de ρ, puisque la suite $\{m_q\}$ dépend seulement de ρ.

En faisant dans (13)

$$\alpha = u_{q_k}, \qquad \beta = v_{q_k}, \qquad x = x_{m'_k} u_{q_k}, \qquad y = y_{n'_k} v_{q_k},$$

et tenant compte de (19), on obtient par passage à la limite

$$S - l = \rho^2 \rho'^2 e^{2i\theta + 2i\theta'} \iint e^{-\rho u e^{i\theta} - \rho' v e^{i\theta'}} G(u, v)\, du\, dv,$$

c'est-à-dire (32) avec

$$x = \rho\, e^{i\theta}, \qquad y = \rho'\, e^{i\theta'}.$$

3.11. Nous allons montrer maintenant que, si la fonction $s(u, v)$ est supposée réelle, on peut remplacer dans les théorèmes précédents l'hypothèse $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ par $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, pourvu que l'on ajoute l'hypothèse que $\Phi(x, y)$ existe et est bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs.

3.11.1. Cela résultera du théorème suivant :

Théorème 3. — *Supposons que la fonction $s(u, v)$ soit réelle, que $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, que $\Phi(x, y)$ existe pour x et y positifs, et qu'il existe trois nombres positifs* M, h

et k tels que, quels que soient x et $y > 0$, on ait pour $1 \leqq \alpha \leqq 1+h$, $1 \leqq \beta \leqq 1+k$,

$$\Phi(\alpha x, \beta y) - \Phi(x, y) \geqq -\mathrm{M}.$$

Alors on a $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ ([15]).

3.11.2. *Démonstration du théorème* 3. — Choisissons deux couples de nombres positifs (a_1, b_1) et (a_2, b_2) satisfaisant à

$$1 < \frac{b_1}{a_1} < 1+h \qquad \text{et} \qquad 1 < \frac{b_2}{a_2} < 1+k.$$

On va montrer que, si

$$0 < \xi \leqq \xi' \leqq \xi(1+h)\frac{a_1}{b_1} \qquad \text{et} \qquad 0 < \eta \leqq \eta' \leqq \eta(1+k)\frac{a_2}{b_2},$$

on a

$$|s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta)| \leqq \frac{\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k) + \mathrm{M}}{(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})} + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k) = \Omega,$$

c'est-à-dire que, quels que soit ξ et $\eta > 0$,

$$\mathrm{W}_s\left[\xi, \eta, (1+h)\frac{a_1}{b_1}, (1+k)\frac{a_2}{b_2}\right] \leqq \Omega.$$

On sait que

$$s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) \geqq -\overline{\varpi}_s\left[(1+h)\frac{a_1}{b_1}, (1+k)\frac{a_2}{b_2}\right] \geqq -\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k).$$

Il suffira donc de montrer que

$$s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) \leqq \frac{\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k) + \mathrm{M}}{(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})} + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k). \tag{33}$$

En remarquant que, pour x et $y > 0$,

$$\Phi(x, y) = \iint e^{-u-v} s\left(\frac{u}{x}, \frac{v}{y}\right) du\, dv,$$

on peut écrire

$$\begin{aligned}(34)\qquad & \Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) - \Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k) \\ & \quad = \iint e^{-u-v}\left[s\left(\frac{\xi'}{a_1}u, \frac{\eta'}{a_2}v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1}u, \frac{\eta}{b_2}v\right) + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k)\right] du\, dv.\end{aligned}$$

Comme

$$\frac{\xi}{b_1}u < \frac{\xi'}{a_1}u \leqq (1+h)\frac{\xi}{b_1}u \qquad \text{et} \qquad \frac{\eta}{b_2}v < \frac{\eta'}{a_2}v \leqq (1+k)\frac{\eta}{b_2}v,$$

on a

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1}u, \frac{\eta'}{a_2}v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1}u, \frac{\eta}{b_2}v\right) \geqq -\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k),$$

([15]) Ce théorème est complètement analogue au théorème 11, p. 233, de [8]. La démonstration est inspirée de Karamata [12].

et par suite la fonction sous le signe $\iint$ au second membre de (34) est positive ou nulle.

L'intégrale est donc au moins égale à l'intégrale prise sur le rectangle $a_1 \leqq u \leqq b_1$, $a_2 \leqq v \leqq b_2$.

Mais, pour $a_1 \leqq u \leqq b_1$ et $a_2 \leqq v \leqq b_2$, on a

$$\xi' \leqq \frac{\xi'}{a_1} u < (1+h)\xi', \qquad \eta' \leqq \frac{\eta'}{a_2} v < (1+k)\eta',$$

et

$$\frac{\xi}{b_1} u \leqq \xi < (1+h)\frac{\xi}{b_1} u, \qquad \frac{\eta}{b_2} v \leqq \eta < (1+k)\frac{\eta}{b_2} v,$$

et par suite

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1} u, \frac{\eta'}{a_2} v\right) - s(\xi', \eta') \geqq -\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k)$$

et

$$s(\xi, \eta) - s\left(\frac{\xi}{b_1} u, \frac{\eta}{b_2} v\right) \geqq -\overline{\varpi}_s(1+h, 1+k),$$

d'où

$$s\left(\frac{\xi'}{a_1} u, \frac{\eta'}{a_2} v\right) - s\left(\frac{\xi}{b_1} u, \frac{\eta}{b_2} v\right) + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k) \geqq s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k).$$

En définitive, on voit que le second membre de (34) est au moins égal à

$$(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})[s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k)].$$

Par ailleurs, on a

$$\frac{a_1}{\xi'} < \frac{b_1}{\xi} \leqq (1+h)\frac{a_1}{\xi'} \qquad \text{et} \qquad \frac{a_2}{\eta'} < \frac{b_2}{\eta} \leqq (1+k)\frac{a_2}{\eta'},$$

et par suite

$$\Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) - \Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) \geqq -\mathrm{M},$$

ou

$$\Phi\left(\frac{a_1}{\xi'}, \frac{a_2}{\eta'}\right) - \Phi\left(\frac{b_1}{\xi}, \frac{b_2}{\eta}\right) \leqq \mathrm{M}.$$

Le premier membre de (34) est donc au plus égal à $\mathrm{M} + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k)$.

On a donc

$$(e^{-a_1} - e^{-b_1})(e^{-a_2} - e^{-b_2})[s(\xi', \eta') - s(\xi, \eta) - \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k)] \leqq \mathrm{M} + \overline{\varpi}_s(1+h, 1+k),$$

d'où l'on tire (33).

3.11.3. En tenant compte de la remarque du paragraphe 3.9, les théorèmes 1 et 2, combinés avec le théorème 3, donnent les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME 4. — *Supposons que :*

1. *La fonction $s(u, v)$ soit réelle;*

2. *On ait* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;

3. $\Phi(x, y)$ *existe et soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs;*

4. $\Phi(x, y)$ *tende vers une limite finie* S *quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives.*

Alors $s(u, v)$ est bornée pour u et v positifs ([16]), *on a* (26) *et* (28) *et, quel que soit l'ensemble* E, (27) *et* (29).

THÉORÈME 5. — *Supposons que :*

1. *La fonction $s(u, v)$ soit réelle;*

2. *On ait* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;

3. $\Phi(x, y)$ *existe et soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positif;*

4. *Il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$ tels que $\Phi(x, y)$ tende vers une limite finie* S *quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$.*

Alors $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$ ([16]) *et l'on a* (27) *et* (29) *pour tout ensemble* E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε et A *tels que, si le couple (u, v) appartient à* E *et si u et $v \geqq$* A, *on a* $\varepsilon \leqq \frac{v}{u} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$.

Nous laissons au lecteur le soin d'énoncer le théorème 4′ correspondant au théorème 1′.

3.12. Remarquons les différences entre les théorèmes de ce chapitre et les théorèmes relatifs aux intégrales simples de Laplace.

Une première différence est que nous supposons ici $\overline{w}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ ou $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, alors que, dans les hypothèses des théorèmes relatifs aux intégrales simples, seules interviennent les fonctions $w_s(\lambda)$ et $\varpi_s(\lambda)$ analogues de $w_s(\lambda, \mu)$ et $\varpi_s(\lambda, \mu)$. La raison en a été indiquée au paragraphe 2.9.

D'autre part, le théorème 4 comporte l'hypothèse que $\Phi(x, y)$ soit bornée en module par un nombre fixe pour x et y réels positifs, alors que le théorème correspondant pour les intégrales simples ne comporte pas d'hypothèse semblable. Une telle hypothèse est inutile dans ce dernier théorème du fait que, si l'intégrale $\int_0^{+\infty} x e^{-xt} s(t)\, dt$ tend vers une limite finie quand x tend vers

([16]) Ceci résulte des hypothèses 1, 2, 3, sans l'hypothèse 4.

zéro par valeurs réelles positives, elle est automatiquement bornée pour x réel positif. Au contraire, ici, $\Phi(x, y)$ peut très bien tendre vers une limite finie quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives sans être bornée pour x et y réels positifs.

Enfin, il est clair que les théorèmes 2 et 5, dans lesquels on suppose que $\Phi(x, y)$ tend vers une limite finie quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$, ne peuvent avoir d'analogues pour les intégrales simples.

4. Théorèmes relatifs aux intégrales doubles de Laplace-Stieltjes.

4.1. Il est entendu une fois pour toutes que, dans tout ce chapitre, $s(u, v)$ sera une fonction *à variation bornée sur tout rectangle* $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$ *et telle que*

$$s(0, v) = 0 \quad \textit{pour tout } v \geqq 0 \qquad \textit{et} \qquad s(u, 0) = 0 \quad \textit{pour tout } u \geqq 0.$$

De plus, $\Phi(x, y)$ *désignera maintenant l'intégrale* $\iint e^{-ux-vy}\,ds(u, v)$, *lorsqu'elle existe.*

4.2. D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1, on a, quels que soient U et V positifs,

$$\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy}\,ds(u, v) = e^{-Ux-Vy} s(U, V) + \int_0^U x\,e^{-ux-Vy} s(u, V)\,du$$
$$+ \int_0^V y\,e^{-Ux-vy} s(U, v)\,dv + \int_0^U \int_0^V xy\,e^{-ux-vy} s(u, v)\,du\,dv.$$

Si $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, et si $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, les trois premiers termes du second membre tendent vers zéro quand U et V tendent vers $+\infty$, tandis que le quatrième terme tend vers l'intégrale $\iint xy\,e^{-ux-vy} s(u, v)\,du\,dv$, qui est absolument convergente.

En effet, on a quels que soient u et v positifs

$$|s(u, v)| \leqq H_1 + K[|\log u| + |\log v|]. \tag{10}$$

Posons, d'autre part,

$$\mathcal{R}x = \xi, \qquad \mathcal{R}y = \eta, \qquad |x| = \rho, \qquad |y| = \rho'.$$

Si U et V > 1, on a

$$|e^{-Ux-Vy} s(U, V)| \leqq e^{-U\xi-V\eta}[H_1 + K\log U + K\log V],$$

expression qui tend vers zéro quand U et V tendent vers $+\infty$.

D'autre part,

$$\left|\int_0^{\mathrm{U}} x\, e^{-ux-\mathrm{V}y} s(u,\ \mathrm{V})\, du\right| \leqq \rho \int_0^{\mathrm{U}} e^{-u\xi-\mathrm{V}\eta}[\mathrm{H}_1 + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\log \mathrm{V}]\, du,$$

$$\leqq \rho\,[\mathrm{H}_1 + \mathrm{K}\log\mathrm{V}]\, e^{-\mathrm{V}\eta}\int_0^{\mathrm{U}} e^{-u\xi} du + \rho\,\mathrm{K}\, e^{-\mathrm{V}\eta}\int_0^{\mathrm{U}} e^{-u\xi}|\log u|\, du,$$

$$\leqq \frac{\rho}{\xi}[\mathrm{H}_1 + \mathrm{K}\log\mathrm{V}]\, e^{-\mathrm{V}\eta} + \rho\,\mathrm{K}\, e^{-\mathrm{V}\eta}\int_0^{+\infty} e^{-u\xi}|\log u|\, du,$$

et cette dernière expression, qui est indépendante de U, tend vers zéro quand V tend vers $+\infty$.

De même,

$$\left|\int_0^{\mathrm{V}} y\, e^{-\mathrm{U}x-vy} s(\mathrm{U},\ v)\, dv\right| \leqq \frac{\rho'}{\eta}[\mathrm{H}_1 + \mathrm{K}\log\mathrm{U}]\, e^{-\mathrm{U}\xi} + \rho'\mathrm{K}\, e^{-\mathrm{U}\xi}\int_0^{+\infty} e^{-v\eta}|\log v|\, dv,$$

expression indépendante de V et qui tend vers zéro quand U tend vers $+\infty$.

Par ailleurs, l'intégrale $\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u,\ v)\, du\, dv$ est absolument convergente puisque

$$|xy\, e^{-ux-vy} s(u,\ v)| \leqq \rho\rho' e^{-u\xi-v\eta}[\mathrm{H}_1 + \mathrm{K}\,|\log u| + \mathrm{K}\,|\log v|].$$

Nous pouvons donc dire que, *si* $\overline{\varpi}_s(\lambda,\ \mu) < +\infty$, *quels que soient x et y satisfaisant à $\mathcal{R}x > 0$ et $\mathcal{R}y > 0$, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy} ds(u,\ v)$ est convergente et égale à*

$$\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u,\ v)\, du\, dv.$$

4.3. On voit donc que, si $\overline{\varpi}_s(\lambda,\ \mu) < +\infty$, $\Phi(x,\ y)$ existe encore ici pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, tout comme au chapitre 3, et est la même fonction.

Ceci montre que *l'on a ici des théorèmes d'énoncés identiques à ceux des théorèmes* 1, 1′ *et* 2 [mais qui sont distincts de ceux-ci, puisque $\Phi(x,\ y)$ n'y est pas défini de la même façon]. *Nous appellerons ces nouveaux théorèmes* 1 *a*, 1′*a et* 2 *a*.

4.4. Par contre, pour les théorèmes 4 et 5, il faut ici introduire une hypothèse supplémentaire.

Nous établirons d'abord le théorème suivant :

Théorème 6. — *Supposons que la fonction $s(u,\ v)$ soit réelle et que :*

1. *$\Phi(x,\ y)$ existe pour x et y réels positifs;*
2. $\overline{\varpi}_s(\lambda,\ \mu) < +\infty$;
3. *Il existe trois nombres positifs u_0, v_0 et M tels que :*

a. si $0 < u < u' \leqq u_0$, *on a quel que soit* $v > 0$

$$s(u',\ v) - s(u,\ v) \geqq -\mathrm{M};$$

b. si $0 < v < v' \leqq v_0$, *on a quel que soit* $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) \geqq -M.$$

Alors, $\Phi(x, y)$ *existe pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$ *et est égal à l'intégrale absolument convergente*

$$\iint xy\, e^{-ux-vy} s(u, v)\, du\, dv.$$

4.5. Nous poserons

$$\sigma_{x,y}(U, V) = \begin{cases} 0 & \text{si } U = 0 \quad \text{ou} \quad V = 0, \\ \displaystyle\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy} ds(u, v) & \text{si } U \text{ et } V > 0. \end{cases}$$

Quels que soient x et y, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.8, la fonction $\sigma_{x,y}(U, V)$ est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leqq U \leqq A$, $0 \leqq V \leqq B$.

Dire que $\Phi(x, y)$ existe équivaut à dire que $\sigma_{x,y}(U, V)$ tend vers une limite finie quand U et V tendent vers $+\infty$.

4.5.1. Nous allons montrer d'abord que les hypothèses 2 et 3 entraînent que, *pour x et y positifs fixés*, il existe une constante positive Q telle que, quels que soient U, V, U′, V′ satisfaisant à $0 < U < U'$, $0 < V < V'$, on a

$$\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V) \geqq -Q. \tag{35}$$

Remarquons en premier lieu que, si $0 < u_1 < u_2$ et $v_1 > 0$, on a, d'après ce qui a été dit aux paragraphes 1.5.2 et 1.7.1,

$$\begin{aligned}
\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) &= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{v_1} e^{-ux-vy} ds(u, v), \\
&= \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{v_1} e^{-ux-vy} d[s(u, v) - s(u_1, v)], \\
&= e^{-u_2x-v_1y}[s(u_2, v_1) - s(u_1, v_1)] \\
&\quad + \int_{u_1}^{u_2} x\, e^{-ux-v_1y}[s(u, v_1) - s(u_1, v_1)]\, du \\
&\quad + \int_0^{v_1} y\, e^{-u_2x-vy}[s(u_2, v) - s(u_1, v)]\, dv \\
&\quad + \int_{u_1}^{u_2} \int_0^{v_1} xy\, e^{-ux-vy}[s(u, v) - s(u_1, v)]\, du\, dv.
\end{aligned}$$

Par suite, si, pour $u_1 \leqq u \leqq u_2$ et $0 \leqq v \leqq v_1$, avec u_1 et $v_1 > 0$,

$$s(u, v) - s(u_1, v) \geqq -\psi(u),$$

où ψ est à variation bornée sur $[u_1, u_2]$, on a

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left\{e^{-u_2x-v_1y}\psi(u_2)+e^{-v_1y}\int_{u_1}^{u_2} x\,e^{-ux}\psi(u)\,du\right.\\ &\qquad \left.+e^{-u_2x}\psi(u_2)\int_0^{v_1} y\,e^{-vy}dv+\int_{u_1}^{u_2}\int_0^{v_1} xy\,e^{-ux-vy}\psi(u)\,du\,dv\right\},\\ &\geqq -\left\{e^{-u_2x-v_1y}\psi(u_2)+e^{-v_1y}\int_{u_1}^{u_2} x\,e^{-ux}\psi(u)\,du\right.\\ &\qquad \left.+e^{-u_2x}[1-e^{-v_1y}]\psi(u_2)+[1-e^{-v_1y}]\int_{u_1}^{u_2} x\,e^{-ux}\psi(u)\,du\right\},\\ &\geqq -\left\{\psi(u_2)\,e^{-u_2x}+\int_{u_1}^{u_2} x\,e^{-ux}\psi(u)\,du\right\},\\ &\geqq -\left\{\psi(u_1)\,e^{-u_1x}+\int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}d\psi(u)\right\}.\end{aligned}$$

Or, comme l'hypothèse 2 entraîne que $s(u, v)$ satisfasse à (11), on a toujours pour $v \geqq 0$ et $0 < u_1 \leqq u$

$$s(u, v)-s(u_1, v) \geqq -\left[H'+K'\log\frac{u}{u_1}\right].$$

Donc, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2$, $v_1 > 0$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -\left[H'e^{-u_1x}+K'\int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}\frac{du}{u}\right]. \tag{36}$$

D'autre part, si $0 < u_1 < u_2 \leqq u_0$, on a pour $u_1 \leqq u \leqq u_2$ et $v \geqq 0$

$$s(u, v)-s(u_1, v) \geqq -M.$$

Donc, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2 \leqq u_0$ *et* $v_1 > 0$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -M e^{-u_1x}. \tag{37}$$

Il résulte de là que, *quels que soient* u_1, u_2, v_1 *satisfaisant à* $0 < u_1 < u_2$ *et* $v_1 > 0$, *on a*

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left[M+H'e^{-u_0x}+K'\int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux}\frac{du}{u}\right],\\ &\geqq -Q_1.\end{aligned}$$

En effet, si $u_2 \leqq u_0$, (37) donne

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq -M e^{-u_1x} \geqq -M.$$

Si $u_1 \geqq u_0$, (36) donne

$$\begin{aligned}\sigma_{x,y}(u_2, v_1)-\sigma_{x,y}(u_1, v_1) &\geqq -\left\{H'e^{-u_1x}+K'\int_{u_1}^{u_2} e^{-ux}\frac{du}{u}\right\},\\ &\geqq -\left\{H'e^{-u_0x}+K'\int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux}\frac{du}{u}\right\}.\end{aligned}$$

Si $u_1 < u_0 < u_2$, on a

$$\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) = [\sigma_{x,y}(u_2, v_1) - \sigma_{x,y}(u_0, v_1)] + [\sigma_{x,y}(u_0, v_1) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1)],$$
$$\geqq - \left\{ H' e^{-u_0 x} + K' \int_{u_0}^{+\infty} e^{-ux} \frac{du}{u} \right\} - M.$$

On démontre de même que, *quels que soient* u_1, v_1, v_2 *satisfaisant à* $u_1 > 0$ *et* $0 < v_1 < v_2$, *on a*

$$\sigma_{x,y}(u_1, v_2) - \sigma_{x,y}(u_1, v_1) \geqq - Q_2,$$

avec

$$Q_2 = M + H' e^{-v_0 y} + K' \int_{v_0}^{+\infty} e^{-vy} \frac{dv}{v}.$$

Alors, si $0 < U < U'$, $0 < V < V'$, on peut écrire

$$\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V) = [\sigma_{x,y}(U', V') - \sigma_{x,y}(U, V')] + [\sigma_{x,y}(U, V') - \sigma_{x,y}(U, V)],$$
$$\geqq - Q_1 - Q_2,$$

ce qui donne (35), en posant $Q_1 + Q_2 = Q$.

4.5.2. (35) montre que $\sigma_{x,y}(U, V)$ est borné inférieurement pour U et $V > 0$.

En effet, si U' et $V' > 0$, on peut écrire quels que soient U et V satisfaisant à $0 < U < U'$ et $0 < V < V'$,

$$\sigma_{x,y}(U', V') \geqq - Q + \sigma_{x,y}(U, V).$$

Mais, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.3.4, quand U et V tendent vers zéro par valeurs positives, $\sigma_{x,y}(U, V)$ tend vers une limite finie $\sigma_{x,y}(+0, +0)$.

On voit donc que, quels que soient U' et $V' > 0$,

$$\sigma_{x,y}(U', V') \geqq - Q + \sigma_{x,y}(+0, +0).$$

4.5.3. Si maintenant on tient compte de l'hypothèse 1, on voit que $\sigma_{x,y}(U, V)$ est aussi borné supérieurement pour U et $V > 0$.

En effet, pour $U' > U$ et $V' > V$,

$$\sigma_{x,y}(U, V) \leqq Q + \sigma_{x,y}(U', V').$$

En faisant tendre U' et V' vers $+\infty$, on obtient à la limite

$$\sigma_{x,y}(U, V) \leqq Q + \Phi(x, y).$$

4.5.4. En définitive, on a montré que les hypothèses du théorème 6 entraînent que, *pour x et y positifs fixés,* il existe une constante positive R telle que, quels que soient U et $V > 0$,

$$|\sigma_{x,y}(U, V)| \leqq R.$$

Cette inégalité vaut d'ailleurs pour U et $V \geqq 0$, puisque $\sigma_{x,y}(U, V) = 0$ si U ou $V = 0$.

4.5.5. Mais, quels que soient U et $V > 0$, on a, d'après ce qui a été dit aux paragraphes 1.8 et 1.5.3,

$$s(U, V) = \int_0^U \int_0^V e^{ux+vy} d\sigma_{x,y}(u, v),$$

d'où, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.7.1,

$$s(U, V) = e^{Ux+Vy}\sigma_{x,y}(U, V) - \int_0^U x\, e^{ux+Vy}\sigma_{x,y}(u, V)\, du$$
$$- \int_0^V y\, e^{Ux+vy}\sigma_{x,y}(U, v)\, dv + \int_0^U \int_0^V xy\, e^{ux+vy}\sigma_{x,y}(u, v)\, du\, dv.$$

Par suite

$$|s(U, V)| \leqq R\left\{ e^{Ux+Vy} + \int_0^U x\, e^{ux+Vy} du + \int_0^V y\, e^{Ux+vy} dv + \int_0^U \int_0^V xy\, e^{ux+vy} du\, dv \right\},$$
$$< 4\, R\, e^{Ux+Vy}.$$

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.11, ceci entraîne que, pour $\mathcal{R}x' > x$ et $\mathcal{R}y' > y$, $\Phi(x', y')$ existe et est égal à l'intégrale absolument convergente

$$\iint x' y' e^{-ux'-vy'} s(u, v)\, du\, dv.$$

x et y pouvant être pris aussi petits que l'on veut, ceci a lieu quels que soient x' et y' satisfaisant à $\mathcal{R}x' > 0$ et $\mathcal{R}y' > 0$.

C'est bien le résultat annoncé.

4.6. En combinant le théorème 6 avec les théorèmes 4 et 5, on a les suivants :

Théorème 7. — *Supposons que la fonction $s(u, v)$ soit réelle et que :*

1. *$\Phi(x, y)$ existe et soit bornée en module pour x et y réels > 0;*

2. *$\Phi(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives;*

3. *On ait $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;*

4. *Il existe trois nombres positifs u_0, v_0 et M tels que :*

a. Si $0 < u < u' \leqq u_0$, on a quel que soit $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) \geqq -M;$$

b. Si $0 < v < v' \leqq v_0$, on a quel que soit $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) \geqq -M.$$

Alors, $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$, on a (26) *et* (28), *et, quel que soit l'ensemble* E, (27) *et* (29).

THÉORÈME 8. — *Supposons que la fonction* $s(u, v)$ *soit réelle et que :*

1. $\Phi(x, y)$ *existe et soit bornée en module pour* x *et* y *réels* > 0;

2. *Il existe deux nombres réels* a *et* b *satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que* $\Phi(x, y)$ *tende vers une limile finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à* $a < \frac{y}{x} < b$;

3. *On ait* $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$;

4. *Il existe trois nombres positifs* u_0, v_0 *et* M *tels que :*

a. Si $0 < u < u' \leqq u_0$, *on a quel que soit* $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) \geqq -\mathrm{M},$$

b. Si $0 < v < v' \leqq v_0$, *on a quel que soit* $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) \geqq -\mathrm{M}.$$

Alors, $s(u, v)$ *est bornée pour* u *et* $v > 0$ *et l'on a* (27) *et* (29) *pour tout ensemble* E *ayant la propriété suivante :*

Il existe deux nombres positifs ε *et* A *tels que, si le couple* (u, v) *appartient à* E *et si* u *et* $v \geqq \mathrm{A}$, *on a* $\varepsilon \leqq \frac{v}{u} \leqq \frac{1}{\varepsilon}$.

4.6.1. En combinant le théorème 6 avec le théorème 4′, on obtiendrait un théorème 7′ que le lecteur pourra énoncer sans peine.

5. Théorèmes relatifs aux séries doubles de Dirichlet.

5.1. Nous allons maintenant considérer des séries doubles de la forme

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n} e^{-\lambda_m x - \mu_n y}, \tag{38}$$

où $\{\lambda_m\}$ et $\{\mu_n\}$ sont deux suites de nombres réels satisfaisant à

$$0 \leqq \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_m < \ldots, \qquad \lim_{m \to +\infty} \lambda_m = +\infty,$$
$$0 \leqq \mu_0 < \mu_1 < \mu_2 < \ldots < \mu_n < \ldots, \qquad \lim_{n \to +\infty} \mu_n = +\infty,$$

et les $a_{m,n}$ sont des coefficients réels ou complexes.

Il est entendu qu'une série double

$$\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} u_{m,n}$$

sera dite convergente si la somme partielle $\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} u_{j,k}$ tend vers une limite finie quand m et n tendent vers $+\infty$ indépendamment l'un de l'autre.

5.2. A la série (38) nous associerons la fonction $s(u, v)$ définie pour u et $v \geqq 0$ de la façon suivante :

Si $u = 0$ ou $v = 0$, on prend $s(u, v) = 0$.

Si u et $v > 0$, on prend $s(u, v)$ égal à la somme des $a_{m,n}$ correspondant aux valeurs de m et n pour lesquelles $\lambda_m \leqq u$ et $\mu_n \leqq v$, cette somme étant considérée comme nulle s'il n'existe aucun couple (m, n) satisfaisant à la condition indiquée.

D'après ce qui a été dit au paragraphe 1.3.1, cette fonction est à variation bornée sur tout rectangle $0 \leqq u \leqq A$, $0 \leqq v \leqq B$.

De plus, d'après ce qui a été dit au paragraphe 1.6.1, on a pour U et $V > 0$

$$\int_0^U \int_0^V e^{-ux-vy}\, ds(u, v) = \sum_{\substack{\lambda_j \leq U \\ \mu_k \leq V}} a_{j,k}\, e^{-\lambda_j x - \mu_k y},$$

[la somme étant prise nulle s'il n'y a aucun couple (j, k) tel que $\lambda_j \leqq U$ et $\mu_k \leqq V$].

Il résulte de là que la série (38) est convergente ou non suivant que l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ existe ou non, et que, lorsqu'il y a convergence, la somme de la série est égale à la valeur de l'intégrale.

5.3. Ceci étant, il est clair que les théorèmes du chapitre précédent fournissent des théorèmes correspondants relatifs à la série (38).

Nous donnerons seulement ici des corollaires particuliers qui généralisent les théorèmes de Littlewood et de Hardy et Littlewood relatifs aux séries de Dirichlet simples.

5.4. Nous poserons

$$\sum_{j=0}^{m} \sum_{k=0}^{n} a_{j,k} = S_{m,n}.$$

De plus, nous introduirons les quantités

$$p_{m,n} = \sum_{k=0}^{n} a_{m,k}, \qquad q_{m,n} = \sum_{j=0}^{m} a_{j,n}.$$

Par ailleurs, il nous sera commode de poser $\lambda_{-1} = \mu_{-1} = 0$.

5.5. Comme corollaires des théorèmes 1*a* et 2*a* on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 9. — *Supposons qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$|p_{m,n}| \leqq K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad pour \quad \lambda_m > 0 \qquad et \qquad n \geqq 0$$

et

$$|q_{m,n}| \leqq K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \textit{et} \qquad m \geqq 0.$$

Ceci entraîne la convergence de la série (38) *pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$.

Si la somme $F(x, y)$ *de cette série tend vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives, la série* $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ *est convergente et a pour somme* S.

Si en outre $F(x, y)$ *est bornée en module pour* x *et* y *réels positifs, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées en module.*

THÉORÈME 10. — *Supposons qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$|p_{m,n}| \leqq K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \textit{et} \qquad n \geqq 0,$$

et

$$|q_{m,n}| \leqq K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \textit{et} \qquad m \geqq 0,$$

ce qui entraîne la convergence de la série (38) *pour* $\mathcal{R}x$ *et* $\mathcal{R}y > 0$.

S'il existe deux nombres réels a *et* b *satisfaisant à* $0 < a < b$ *tels que la somme* $F(x, y)$ *de cette série tende vers une limite finie* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à* $a < \frac{y}{x} < b$, $S_{m,n}$ *tend vers* S *pour toute suite de couples* (m, n) *telle que* m *et* n *tendent vers* $+\infty$ *de manière que les rapports* $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ *et* $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ *restent bornés.*

Si en outre $F(x, y)$ *est bornée pour* x *et* y *réels positifs, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées.*

5.6. Pour établir ces deux théorèmes, il suffit de montrer que les hypothèses faites sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ entraînent que la fonction $s(u, v)$ définie plus haut satisfasse à $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$ et $\varpi_s(E, 1+0, 1+0) = 0$ pour E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$, et *a fortiori* pour E contenu dans cet ensemble.

En effet, si $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ existe pour $\mathcal{R}x$ et $\mathcal{R}y > 0$, de sorte que la série (38) est convergente pour ces valeurs de x et y et lui est égale, et l'on peut appliquer les théorèmes 1 *a* et 2 *a*.

Avec les hypothèses du théorème 9, le théorème 1 *a* permettra de conclure que l'on a (27) quel que soit l'ensemble E. En prenant E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$, on trouvera que $s(\lambda_m, \mu_n)$, c'est-à-dire $S_{m,n}$, tend vers S quand m et n tendent vers $+\infty$.

Avec les hypothèses du théorème 10, le théorème 2 *a* montrera que l'on a (27) pour tout ensemble E ayant la propriété indiquée. Étant donné une suite de couples (m, n) telle que m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés, on peut prendre E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) correspondants. (27) montrera alors que, pour cette suite de couples (m, n), $S_{m,n}$ tend vers S.

Dans les deux théorèmes, la remarque du paragraphe 3.9 montre que les suites partielles $S_{m,n}$ sont certainement bornées si $F(x, y)$ est bornée pour x et y réels positifs.

5.7. Nous montrerons que l'on a pour u et v positifs quelconques

$$W_s(u, v, \lambda, \mu) \leqq K[2 + \log\lambda + \log\mu], \tag{39}$$

et pour m et $n \geqq 1$

$$W_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leqq K[\log\lambda + \log\mu]. \tag{40}$$

Il en résultera que

$$\overline{w}_s(\lambda, \mu) \leqq K[2 + \log\lambda + \log\mu] < +\infty$$

et, pour E égal à l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$,

$$w_s(E, \lambda, \mu) \leqq K[\log\lambda + \log\mu], \qquad \text{d'où} \qquad w_s(E, 1+0, 1+0) = 0.$$

5.7.1. Il suffit de montrer que, si $0 < u \leqq u' \leqq \lambda u$ et $0 < v \leqq v' \leqq \mu v$, on a

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leqq K[2 + \log\lambda + \log\mu], \tag{41}$$

et que, si $\lambda_m \leqq u' \leqq \lambda\lambda_m$ et $\mu_n \leqq v' \leqq \mu\mu_n$, avec m et $n \geqq 1$, on a

$$|s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n)| \leqq K[\log\lambda + \log\mu]. \tag{42}$$

On remarque d'abord que, quels que soient m tel que $\lambda_m > 0$ et $n \geqq 0$, on a

$$|p_{m,n}| \leqq K,$$

puisque, pour $\lambda_m > 0$,

$$\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \leqq 1.$$

D'autre part, pour $m \geqq 1$ et $\lambda_{m-1} > 0$, on a quel que soit $n \geqq 0$

$$|p_{m,n}| \leqq K \log \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}.$$

Alors, on va voir que, si $0 < u \leqq u' \leqq \lambda u$ et $v > 0$, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| \leqq K[1 + \log\lambda]. \tag{43}$$

Si $v < \mu_0$ (μ_0 étant > 0, évidemment), c'est évident car le premier membre est nul.

Supposons donc $\mu_n \leqq v < \mu_{n+1}$, avec $n \geqq 0$.

S'il n'y a aucun λ_j satisfaisant à $u < \lambda_j \leq u'$, on a $s(u', v) = s(u, v)$ et le premier membre de (43) est encore nul.

S'il y en a un, soit λ_{m_1}, on a

$$|s(u', v) - s(u, v)| = |p_{m_1,n}| \leq K.$$

S'il y en a plusieurs, soit $\lambda_{m_1}, \lambda_{m_1+1}, \ldots, \lambda_{m_2}$, on a

$$s(u', v) - s(u, v) = p_{m_1,n} + \sum_{m=m_1+1}^{m_2} p_{m,n},$$

d'où

$$\begin{aligned} |s(u', v) - s(u, v)| &\leq K + K \sum_{m_1+1}^{m_2} \log \frac{\lambda_m}{\lambda_{m-1}}, \\ &\leq K\left[1 + \log \frac{\lambda_{m_2}}{\lambda_{m_1}}\right], \\ &\leq K[1 + \log \lambda]. \end{aligned}$$

On voit de même que, si $u > 0$ et $0 < v \leq v' \leq \mu v$, on a

$$(44) \qquad |s(u, v') - s(u, v)| \leq K[1 + \log \mu].$$

Si $0 < u \leq u' \leq \lambda u$ et $0 < v \leq v' \leq \mu v$, (43) et (44) donnent (41) en écrivant

$$|s(u', v') - s(u, v)| \leq |s(u', v) - s(u, v)| + |s(u', v') - s(u', v)|.$$

Pour établir (42), nous remarquons d'abord que, si $\lambda_m \leq u' \leq \lambda \lambda_m$, avec $m \geq 1$, on a quel que soit $v > 0$,

$$|s(u', v) - s(\lambda_m, v)| \leq K \log \lambda.$$

En effet, si $u' < \lambda_{m+1}$ ou $v < \mu_0$,

$$s(u', v) - s(\lambda_m, v) = 0.$$

Si $\lambda_{m_1} \leq u' < \lambda_{m_1+1}$, avec $m_1 > m$, et $\mu_n \leq v < \mu_{n+1}$, avec $n \geq 0$, on a

$$s(u', v) - s(\lambda_m, v) = \sum_{j=m+1}^{m_1} p_{j,n},$$

d'où

$$\begin{aligned} |s(u', v) - s(\lambda_m, v)| &\leq \sum_{j=m+1}^{m_1} |p_{j,n}|, \\ &\leq K \sum_{m+1}^{m_1} \log \frac{\lambda_j}{\lambda_{j-1}} = K \log \frac{\lambda_{m_1}}{\lambda_m}, \\ &\leq K \log \lambda. \end{aligned}$$

De même, si $\mu_n \leq v' \leq \mu \mu_n$, avec $n \geq 1$, on a quel que soit $u > 0$

$$|s(u, v') - s(u, \mu_n)| \leq K \log \mu.$$

Alors, si $\lambda_m \leqq u' \leqq \lambda\lambda_m$ et $\mu_n \leqq v' \leqq \mu\mu_n$, avec m et $n \geqq 1$, on a

$$\begin{aligned}|s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n)| &\leqq |s(u', \mu_n) - s(\lambda_m, \mu_n)| + |s(u', v') - s(u', \mu_n)|,\\ &\leqq K \log\lambda + K \log\mu.\end{aligned}$$

La démonstration des théorèmes 9 et 10 est ainsi achevée.

5.8. Il est intéressant de remarquer que, *si λ_0 et $\mu_0 > 0$, les hypothèses sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ qui figurent dans ces théorèmes sont satisfaites en particulier si l'on a quels que soient m et $n \geqq 0$*

$$(45) \qquad |a_{m,n}| \leqq M \frac{(\lambda_m - \lambda_{m-1})(\mu_n - \mu_{n-1})}{\lambda_m^2 + \mu_n^2} \quad (^{17}).$$

En effet, si l'on a (45), on voit que, quels que soient m et $n \geqq 0$,

$$\begin{aligned}|p_{m,n}| &\leqq \sum_{k=0}^{n} |a_{m,k}|,\\ &\leqq M \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_m(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2},\\ &\leqq M \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \int_0^{\mu_n} \frac{\lambda_m\, dt}{\lambda_m^2 + t^2},\\ &\leqq M \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m},\end{aligned}$$

et de même

$$|q_{m,n}| \leqq M \frac{\pi}{2} \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

Si λ_0 ou $\mu_0 = 0$, les hypothèses sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ sont satisfaites si l'on a (45) *pour tous les couples (m, n) tels que λ_m et $\mu_n > 0$, avec*

$$|a_{0,n}| \leqq N \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0, \qquad \textit{si} \quad \lambda_0 = 0,$$

et

$$|a_{m,0}| \leqq N \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0, \qquad \textit{si} \quad \mu_0 = 0.$$

En effet, si $\mu_0 > 0$, le calcul fait plus haut montre que l'on a pour $\lambda_m > 0$ et $n \geqq 0$

$$|p_{m,n}| \leqq M \frac{\pi}{2} \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.$$

Si $\mu_0 = 0$, on a pour $\lambda_m > 0$:

$$|p_{m,0}| = |a_{m,0}| \leqq N \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m},$$

---

(17) Comme nous l'avons dit au paragraphe 5.4, nous posons $\lambda_{-1} = \mu_{-1} = 0$.

et pour $n > 0$

$$
\begin{aligned}
|p_{m,n}| &\leqq |a_{m,0}| + \sum_{k=1}^{n} |a_{m,k}|, \\
&\leqq \mathrm{N}\,\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} + \sum_{k=1}^{n} \mathrm{M}\,\frac{(\lambda_m - \lambda_{m-1})(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2}, \\
&\leqq \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}\left\{\mathrm{N} + \mathrm{M}\sum_{k=1}^{n} \frac{\lambda_m(\mu_k - \mu_{k-1})}{\lambda_m^2 + \mu_k^2}\right\}, \\
&\leqq \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}\left\{\mathrm{N} + \mathrm{M}\int_0^{\mu_n} \frac{\lambda_m\,dt}{\lambda_m^2 + t^2}\right\}, \\
&\leqq \left(\mathrm{N} + \mathrm{M}\,\frac{\pi}{2}\right)\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.
\end{aligned}
$$

Par conséquent, dans tous les cas, on a pour $\lambda_m > 0$ et $n \geqq 0$,

$$|p_{m,n}| \leqq \left(\mathrm{N} + \mathrm{M}\,\frac{\pi}{2}\right)\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m}.$$

De même, pour $\mu_n > 0$ et $m \geqq 0$,

$$|q_{m,n}| \leqq \left(\mathrm{N} + \mathrm{M}\,\frac{\pi}{2}\right)\frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n}.$$

5.8.1. *Dans le cas particulier où $\lambda_m = m$ et $\mu_n = n$, on voit que les hypothèses sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ sont satisfaites si l'on a*

$$|a_{m,n}| \leqq \frac{\mathrm{M}}{m^2 + n^2} \qquad \textit{pour} \quad m \textit{ et } n > 0,$$

avec

$$|a_{m,0}| \leqq \frac{\mathrm{N}}{m} \quad \textit{pour} \quad m > 0 \qquad \textit{et} \qquad |a_{0,n}| \leqq \frac{\mathrm{N}}{n} \quad \textit{pour} \quad n > 0,$$

ou, plus particulièrement encore, si l'on a

$$|a_{m,n}| \leqq \frac{\mathrm{M}}{m^2 + n^2} \qquad \textit{pour} \quad m^2 + n^2 > 0.$$

En posant $e^{-x} = \mathrm{X}$ et $e^{-y} = \mathrm{Y}$, le théorème 9 donne ainsi le théorème de Knopp cité dans l'introduction ([18]), avec en moins l'hypothèse que

$$\left|\sum_{m=0}^{+\infty}\sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}\mathrm{X}^m\mathrm{Y}^n\right| \leqq \mathrm{K} \text{ pour X et Y réels} \geqq 0 \text{ et } < 1.$$

5.9. *Le théorème 1'a donne comme corollaire un théorème 9' déduit du théorème 9 en remplaçant l'hypothèse que $\mathrm{F}(x, y)$ tend vers S quand x et y tendent*

([18]) [13], Satz 5, p. 584.

vers zéro par valeurs réelles positives par celle qu'il existe deux suites $\{x_m\}$ *et* $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \qquad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \qquad r_m \ \textit{et} \ r'_n > 0, \qquad |\theta_m| \ \textit{et} \ |\theta_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m \to +\infty} r_m = 0, \qquad \lim_{m \to +\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \qquad \overline{\lim_{m \to +\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n \to +\infty} r'_n = 0, \qquad \lim_{n \to +\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n \to +\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $F(x_m, y_n)$ *tende vers* S *quand m et n tendent vers* $+\infty$.

5.10. Comme corollaires des théorèmes 7 et 8 on a les théorèmes suivants :

THÉORÈME 11. — *Supposons que les* $a_{m,n}$ *soient réels et qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$p_{m,n} \geqq -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \textit{et} \qquad n \geqq 0$$

et

$$q_{m,n} \geqq -K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \textit{et} \qquad m \geqq 0.$$

Si la série (38) *est convergente pour x et y réels positifs et si sa somme* $F(x, y)$ *est bornée pour x et y réels positifs et tend vers une limite finie* S *quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives, les sommes partielles* $S_{m,n}$ *sont bornées* (19) *et l'on a*

$$\overline{\lim_{m,n \to +\infty}} S_{m,n} = S \qquad \textit{et} \qquad \underline{\lim_{m,n \to +\infty}} S_{m,n} \geqq S - K(2 - \alpha - \beta), \tag{46}$$

avec

$$\alpha = \underline{\lim_{m \to +\infty}} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \qquad \textit{et} \qquad \beta = \underline{\lim_{n \to +\infty}} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}.$$

En particulier, si $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ *tend vers* 1 *quand m tend vers* $+\infty$ *et* $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ *tend vers* 1 *quand n tend vers* $+\infty$, *la série* $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ *est convergente et a pour somme* S.

THÉORÈME 12. — *Supposons que les* $a_{m,n}$ *soient réels et qu'il existe une constante positive* K *telle que l'on ait*

$$p_{m,n} \geqq -K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0 \qquad \textit{et} \qquad n \geqq 0$$

et

$$q_{m,n} \geqq -K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0 \qquad \textit{et} \qquad m \geqq 0.$$

(19) Ceci est vrai sans la dernière hypothèse.

Si la série (38) *est convergente pour x et y réels positifs, si sa somme* $F(x, y)$ *est bornée pour x et y réels positifs, et s'il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$ tels que $F(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$, les sommes partielles $S_{m,n}$ sont bornées* ([19]) *et l'on a pour toute suite de couples (m, n) telle que m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés*

$$S - K(2 - \alpha - \beta) \leq \underline{\lim}\, S_{m,n} \leq \overline{\lim}\, S_{m,n} \leq S, \tag{47}$$

avec

$$\alpha = \lim_{m \to +\infty} \frac{\lambda_m}{\lambda_{m+1}} \qquad \text{et} \qquad \beta = \lim_{n \to +\infty} \frac{\mu_n}{\mu_{n+1}}.$$

Si, de plus, α et β sont positifs, on peut affirmer qu'il existe de telles suites de couples (m, n) pour lesquelles $S_{m,n}$ tend vers S.

Si $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ tend vers 1 quand m tend vers $+\infty$ et $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, $S_{m,n}$ tend vers S quand m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés.

5.11. Indiquons d'abord les conséquences des hypothèses communes aux deux théorèmes.

5.11.1. L'hypothèse que la série (38) est convergente pour x et y réels positifs, et égale à $F(x, y)$, se traduit par le fait que, $s(u, v)$ étant la fonction définie au paragraphe 5.2, l'intégrale $\iint e^{-ux-vy}\, ds(u, v)$ est convergente pour x et y réels positifs, et égale à $F(x, y)$.

Un raisonnement tout à fait semblable à celui par lequel nous avons montré plus haut que les hypothèses des théorèmes 9 et 10 impliquent

$$W_s(u, v, \lambda, \mu) \leq K[2 + \log\lambda + \log\mu] \qquad \text{pour} \quad u \text{ et } v > 0$$

montre que l'on a ici

$$\Pi'_s(u, v, \lambda, \mu) \leq K[2 + \log\lambda + \log\mu] \qquad \text{pour} \quad u \text{ et } v > 0.$$

Par conséquent, on a $\overline{\varpi}_s(\lambda, \mu) < +\infty$.

Par ailleurs, en prenant u_0 positif, et inférieur à λ_0 si $\lambda_0 > 0$ ou à λ_1 si $\lambda_0 = 0$, on voit que, si $0 < u < u' \leq u_0$, on a quel que soit $v > 0$

$$s(u', v) - s(u, v) = 0.$$

De même, en prenant v_0 positif, et inférieur à μ_0 si $\mu_0 > 0$ ou à μ_1 si $\mu_0 = 0$, on voit que, si $0 < v < v' \leqq v_0$, on a quel que soit $u > 0$

$$s(u, v') - s(u, v) = 0.$$

Les hypothèses 1, 3 et 4 des théorèmes 7 et 8 sont donc satisfaites.

5.11.2. D'autre part, un raisonnement semblable à celui par lequel nous avons montré plus haut que les hypothèses des théorèmes 9 et 10 impliquent

$$W_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leqq K \log \lambda\mu \qquad \text{pour} \quad m \text{ et } n \geqq 1$$

permet de montrer que l'on a ici, pour m et $n \geqq 1$,

$$\Pi'_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leqq K \log \lambda\mu.$$

Par conséquent, *pour tout ensemble* E *contenu dans l'ensemble des couples* (λ_m, μ_n) *où* m *et* $n \geqq 1$, *on a*

$$\varpi'_s(E, \lambda, \mu) \leqq K \log \lambda\mu, \qquad d'où \qquad \varpi'_s(E, 1+0, 1+0) = 0.$$

5.11.3. Posons maintenant, pour m et $n \geqq 1$,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Max}[0, -p_{m,n}] = p'_{m,n}, \qquad &&\operatorname{Max}[0, -q_{m,n}] = q'_{m,n}, \\ &S_{m,n} - S_{m-1,n-1} = \delta_{m,n}, \qquad &&\operatorname{Max}[0, -\delta_{m,n}] = \delta'_{m,n}, \end{aligned}$$

puis posons

$$\overline{\lim_{m,n \to +\infty}} p'_{m,n} = \mathfrak{P}, \qquad \overline{\lim_{m,n \to +\infty}} q'_{m,n} = \mathfrak{Q}, \qquad \overline{\lim_{m,n \to +\infty}} \delta'_{m,n} = \partial$$

et

$$\operatorname{Max}[\mathfrak{P}, \mathfrak{Q}, \partial] = \rho.$$

Ces quatre derniers nombres sont finis, puisque les hypothèses faites sur $p_{m,n}$ et $q_{m,n}$ entraînent que, pour m et $n \geqq 1$,

$$p_{m,n} \geqq -K, \qquad q_{m,n} \geqq -K,$$

et

$$\delta_{m,n} = p_{m,n-1} + q_{m,n} \geqq -2K,$$

et par suite

$$p'_{m,n} \leqq K, \qquad q'_{m,n} \leqq K, \qquad \delta'_{m,n} \leqq 2K.$$

Nous allons voir que, *pour tout ensemble* E *contenu dans l'ensemble des couples* (λ_m, μ_n) *où* m *et* $n \geqq 1$, *on a*

$$\varpi''_s(E, \lambda, \mu) \leqq K \log \lambda\mu + \rho. \tag{48}$$

Il en résultera évidemment que, *pour tout ensemble* E *satisfaisant à cette condition, on a*

$$\varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \leqq \rho.$$

5.11.4. λ et μ étant fixés, à tout couple (m, n) tel que $\lambda_m > \lambda\lambda_0$ et $\mu_n > \mu\mu_0$, faisons correspondre le couple (m', n') défini par

$$\lambda_{m'-1} \leqq \frac{\lambda_m}{\lambda} < \lambda_{m'} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n'-1} \leqq \frac{\mu_n}{\mu} < \mu_{n'}.$$

Si u' et v' satisfont à

$$\frac{\lambda_m}{\lambda} \leqq u' \leqq \lambda_m \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_n}{\mu} \leqq v' \leqq \mu_n,$$

il existe m_1 et n_1 satisfaisant à

$$\lambda_{m_1} \leqq u' < \lambda_{m_1+1} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n_1} \leqq v' < \mu_{n_1+1},$$

et l'on a évidemment

$$m' - 1 \leqq m_1 \leqq m \qquad \text{et} \qquad n' - 1 \leqq n_1 \leqq n.$$

On a toujours

$$s(u', v') = S_{m_1, n_1} = s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1}).$$

Nous envisagerons quatre cas suivant les valeurs de m_1 et n_1 :

(a) $m_1 \geqq m'$, $n_1 \geqq n'$.

Alors $\frac{\lambda_m}{\lambda} < \lambda_{m_1} \leqq \lambda_m$ et $\frac{\mu_n}{\mu} < \mu_{n_1} \leqq \mu_n$, et par suite

$$\lambda_{m_1} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m_1} \qquad \text{et} \qquad \mu_{n_1} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n_1}.$$

On a donc

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1})], \\ &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m_1}, \mu_{n_1}, \lambda, \mu), \\ &\leqq K \log \lambda\mu. \end{aligned}$$

(b) $m_1 = m' - 1$ et $n_1 \geqq n'$.

Alors, on peut écrire

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1}) - p_{m', n_1}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1})] - p_{m', n_1}, \end{aligned}$$

et, comme $\lambda_{m'} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m'}$ et $\mu_{n_1} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n_1}$, ceci donne

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m'}, \mu_{n_1}, \lambda, \mu) + p'_{m', n_1}, \\ &\leqq K \log \lambda\mu + p'_{m', n_1}. \end{aligned}$$

(c) $m_1 \geqq m'$ et $n_1 = n' - 1$.

Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'}) - q_{m_1, n'}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'})] - q_{m_1, n'}, \end{aligned}$$

et, comme $\lambda_{m_1} \leqq \lambda_m < \lambda\lambda_{m_1}$ et $\mu_{n'} \leqq \mu_n < \mu\mu_{n'}$, ceci donne

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m_1}, \mu_{n'}, \lambda, \mu) + q'_{m_1, n'}, \\ &\leqq K \log \lambda\mu + q'_{m_1, n'}. \end{aligned}$$

(d) $m_1 = m' - 1$ et $n_1 = n' - 1$.

Alors on a

$$\begin{aligned} s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) &= [s(\lambda_{m'}, \mu_{n'}) - \delta_{m',n'}] - s(\lambda_m, \mu_n), \\ &= -[s(\lambda_m, \mu_n) - s(\lambda_{m'}, \mu_{n'})] - \delta_{m',n'}, \\ &\leqq \Pi'_s(\lambda_{m'}, \mu_{n'}, \lambda, \mu) + \delta'_{m',n'}, \\ &\leqq \mathrm{K} \log \lambda\mu + \delta'_{m',n'}. \end{aligned}$$

5.11.5. Remarquons maintenant que, quel que soit ε positif, il existe deux entiers positifs m_0 et n_0 tels que, pour $m \geqq m_0$ et $n \geqq n_0$,

$$p'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon, \qquad q'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \delta'_{m,n} \leqq \rho + \varepsilon.$$

Alors, ce qui précède montre que, si $\lambda_m \geqq \lambda\lambda_{m_0}$ et $\mu_n \geqq \mu\mu_{n_0}$, on a toujours, pour $\frac{\lambda_m}{\lambda} \leqq u' \leqq \lambda_m$ et $\frac{\mu_n}{\mu} \leqq v' \leqq \mu_n$,

$$s(u', v') - s(\lambda_m, \mu_n) \leqq \mathrm{K} \log \lambda\mu + \rho + \varepsilon.$$

Autrement dit, pour $\lambda_m \geqq \lambda\lambda_{m_0}$ et $\mu_n \geqq \mu\mu_{n_0}$,

$$\Pi''_s(\lambda_m, \mu_n, \lambda, \mu) \leqq \mathrm{K} \log \lambda\mu + \rho + \varepsilon.$$

On a donc bien (48) si E est contenu dans l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$.

5.12. Ceci étant, supposons maintenant, en premier lieu, que $\mathrm{F}(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives; autrement dit, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 11.

On peut alors appliquer le théorème 7.

D'abord, $s(u, v)$ est bornée pour u et $v > 0$, donc les sommes partielles $\mathrm{S}_{m,n}$ sont bornées.

Ensuite, en prenant pour E l'ensemble des couples (λ_m, μ_n) où m et $n \geqq 1$, (29) donne

$$\mathrm{S} - \rho \leqq \varliminf_{m,n \to +\infty} \mathrm{S}_{m,n} \leqq \varlimsup_{m,n \to +\infty} \mathrm{S}_{m,n} \leqq \mathrm{S}. \tag{49}$$

Si $\rho = 0$, ceci donne

$$\varliminf_{m,n \to +\infty} \mathrm{S}_{m,n} = \varlimsup_{m,n \to +\infty} \mathrm{S}_{m,n} = \mathrm{S}.$$

Si $\rho > 0$, l'un au moins des nombres $\mathfrak{P}$, $\mathfrak{Q}$, δ est égal à ρ.

Si $\mathfrak{P} = \rho$, il existe une suite de couples (m_k, n_k) telle que m_k et n_k tendent vers $+\infty$ et que p'_{m_k,n_k} tende vers ρ. Pour k assez grand p'_{m_k,n_k} est positif, donc égal à $-p_{m_k,n_k}$. Par conséquent, p_{m_k,n_k} tend vers $-\rho$. Comme on a

$$\mathrm{S}_{m_k,n_k} = \mathrm{S}_{m_k-1,n_k} + p_{m_k,n_k},$$

ceci montre que

$$\varlimsup_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k,n_k} = \varlimsup_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k-1,n_k} - \rho \leqq \varlimsup_{m,n \to +\infty} \mathrm{S}_{m,n} - \rho,$$

et par suite

$$\underline{\lim}_{m,n \to +\infty} S_{m,n} \leqq \overline{\lim}_{m,n \to +\infty} S_{m,n} - \rho.$$

Si $\mathfrak{L} < \rho$ mais $\mathfrak{Q} = \rho$ ou $\delta = \rho$, un raisonnement analogue montre que l'on a encore la même inégalité.

En comparant avec (49), ceci donne

$$\overline{\lim}_{m,n \to +\infty} S_{m,n} = S \qquad \text{et} \qquad \underline{\lim}_{m,n \to +\infty} S_{m,n} = S - \rho.$$

Pour établir (46), il suffit donc de montrer que

$$\rho \leqq K(2 - \alpha - \beta),$$

c'est-à-dire que $\mathfrak{L}$, $\mathfrak{Q}$ et δ sont au plus égaux à $K(2 - \alpha - \beta)$.

Pour m et $n \geqq 1$, on a

$$p'_{m,n} \leqq K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} = K \left[1 - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \right].$$

Donc

$$\mathfrak{L} \leqq K(1 - \alpha) \leqq K(2 - \alpha - \beta) \qquad (\text{puisque } \beta \leqq 1).$$

De même,

$$\mathfrak{Q} \leqq K(1 - \beta) \leqq K(2 - \alpha - \beta).$$

Enfin, on a pour m et $n \geqq 1$

$$\delta_{m,n} = p_{m,n-1} + q_{m,n} \geqq - K \frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} - K \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n},$$

et par suite

$$\delta'_{m,n} \leqq K \left[\frac{\lambda_m - \lambda_{m-1}}{\lambda_m} + \frac{\mu_n - \mu_{n-1}}{\mu_n} \right] = K \left[2 - \frac{\lambda_{m-1}}{\lambda_m} - \frac{\mu_{n-1}}{\mu_n} \right].$$

Donc $\delta \leqq K(2 - \alpha - \beta)$.

Dans le cas particulier où $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ tend vers 1 quand m tend vers $+\infty$ et $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on a $\alpha = \beta = 1$ et (46) montre que $S_{m,n}$ tend vers S quand m et n tendent vers $+\infty$, c'est-à-dire que la série $\sum_{m=0}^{+\infty} \sum_{n=0}^{+\infty} a_{m,n}$ est convergente et a pour somme S.

Le théorème 11 est donc complètement démontré.

5.13. Supposons maintenant qu'il existe deux nombres réels a et b satisfaisant à $0 < a < b$, tels que $F(x, y)$ tende vers une limite finie S quand x et y tendent vers zéro par valeurs réelles positives satisfaisant à $a < \frac{y}{x} < b$; autrement dit, plaçons-nous dans les hypothèses du théorème 12.

On peut alors appliquer le théorème 8.

$s(u, v)$ est encore bornée pour u et $v > 0$, donc les sommes partielles $S_{m,n}$ sont encore bornées.

D'autre part, soit $\{m_k, n_k\}$ une suite de couples (m, n) telle que m_k et n_k tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}}$ et $\frac{\lambda_{m_k}}{\mu_{n_k}}$ restent bornés.

Pour k au moins égal à un certain k_0, m_k et n_k sont $\geqq 1$.

De plus, l'ensemble des couples $(\lambda_{m_k}, \mu_{n_k})$ correspondants aux $k \geqq k_0$ possède la propriété mentionnée dans l'énoncé du théorème 8.

On a donc (29) pour E égal à cet ensemble, ce qui donne

$$S - \rho \leqq \varliminf_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leqq \varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leqq S, \tag{50}$$

d'où, puisque $\rho \leqq K(2 - \alpha - \beta)$,

$$S - K(2 - \alpha - \beta) \leqq \varliminf_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leqq \varlimsup_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \leqq S.$$

Dans le cas particulier où $\frac{\lambda_{m+1}}{\lambda_m}$ tend vers 1 quand m tend vers $+\infty$ et $\frac{\mu_{n+1}}{\mu_n}$ tend vers 1 quand n tend vers $+\infty$, on a $\alpha = \beta = 1$ et ceci montre que S_{m_k, n_k} tend vers S.

5.14. Pour que le théorème 12 soit complètement établi, il reste à montrer que, si α et β sont > 0, il existe des suites de couples (m, n) où m et n tendent vers $+\infty$ de manière que les rapports $\frac{\mu_n}{\lambda_m}$ et $\frac{\lambda_m}{\mu_n}$ restent bornés, telles que $S_{m,n}$ tende vers S.

Nous montrerons plus précisément que, *si* α *et* $\beta > 0$, *quels que soient* A *et* B *positifs satisfaisant à*

$$\frac{B}{A} > \frac{1}{\alpha\beta\gamma}, \qquad \text{où} \quad \gamma = \operatorname{Max}(\alpha, \beta),$$

on peut trouver une suite de couples (m, n) *où* m *et* n *tendent vers* $+\infty$ *et satisfont à*

$$A < \frac{\mu_n}{\lambda_m} < B,$$

telle que $S_{m,n}$ *tende vers* S.

5.14.1. L'hypothèse que $\frac{B}{A} > \frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ entraine $\frac{A}{\beta\gamma} < \alpha B$.

Choisissons donc un nombre σ quelconque satisfaisant à

$$\frac{A}{\beta\gamma} < \sigma < \alpha B. \tag{51}$$

On voit d'abord que l'on peut trouver une suite de couples d'entiers (m_k, n_k) telle que m_k et n_k soient toujours $\geqq 1$ et tendent vers $+\infty$, et que l'on ait

$$\gamma\sigma \leqq \varliminf_{k \to +\infty} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leqq \varlimsup_{k \to +\infty} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leqq \sigma, \tag{52}$$

suite pour laquelle on aura (50), d'après ce qui a été dit au paragraphe précédent.

Si $\beta = \gamma$, on peut prendre pour $\{m_k\}$ une suite croissante arbitraire, assujettie seulement à ce que $m_1 \geqq 1$ et $\sigma\lambda_{m_1} \geqq \mu_1$, puis déterminer n_k par

$$\mu_{n_k} \leqq \sigma\lambda_{m_k} < \mu_{n_k+1}.$$

En effet, dans ces conditions, on a, quel que soit $k \geqq 1$, m_k et $n_k \geqq 1$ et

$$\frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leqq \sigma < \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \frac{\mu_{n_k+1}}{\mu_{n_k}},$$

d'où

$$\frac{\mu_{n_k}}{\mu_{n_k+1}}\sigma < \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} \leqq \sigma,$$

ce qui donne bien (52).

Si $\beta < \gamma$, on a $\alpha = \gamma$. On peut alors prendre pour $\{n_k\}$ une suite croissante arbitraire, assujettie seulement à ce que $n_1 \geqq 1$ et $\frac{1}{\gamma\sigma}\mu_{n_1} \geqq \lambda_1$, puis déterminer m_k par

$$\lambda_{m_k} \leqq \frac{1}{\gamma\sigma}\mu_{n_k} < \lambda_{m_k+1}.$$

En effet, on a ainsi, quel que soit $k \geqq 1$, m_k et $n_k \geqq 1$ et

$$1 \leqq \frac{1}{\gamma\sigma} \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} < \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}},$$

d'où

$$\gamma\sigma \leqq \frac{\mu_{n_k}}{\lambda_{m_k}} < \gamma\sigma \frac{\lambda_{m_k+1}}{\lambda_{m_k}},$$

ce qui donne encore (52).

5.14.2. Si $\underline{\lim}_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} = S$, (50) montre que S_{m_k, n_k} tend vers S.

Comme $\gamma\sigma > A$ et $\sigma < B$, puisque l'on a (51), il suffit d'enlever éventuellement un certain nombre de termes au début de la suite $\{m_k, n_k\}$ pour avoir une suite répondant à la question.

5.14.3. Dans le cas contraire, d'après (50),

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} < S.$$

Si l'on pose $\underline{\lim}_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} = S - \eta$, on aura $\eta > 0$.

En appliquant le théorème 8, on voit que

$$\underline{\lim}_{k \to +\infty} S_{m_k, n_k} \geqq S - \varpi''_s(E, 1+0, 1+0),$$

où E est l'ensemble des couples $(\lambda_{m_k}, \mu_{n_k})$ correspondants aux $k \geqq k_0$.

Par conséquent, pour E égal à cet ensemble,

$$\varpi''_s(E, 1+0, 1+0) \geqq \eta,$$

et par suite, quels que soient λ et μ,

$$\varpi''_s(\mathrm{E}, \lambda, \mu) \geqq \eta.$$

Autrement dit, λ et μ étant fixés, on peut trouver une suite $\{m'_k, n'_k\}$ extraite de la suite $\{m_k, n_k\}$ telle que $\Pi''_s(\lambda_{m'_k}, \mu_{n'_k}, \lambda, \mu)$ tende vers une limite ω au moins égale à η.

D'après (51), on peut choisir λ et μ assez voisins de 1 pour que

$$\sigma\lambda < \alpha \mathrm{B} \qquad \text{et} \qquad \frac{\sigma}{\mu} > \frac{\mathrm{A}}{\beta\gamma}.$$

D'autre part, on peut prendre la suite $\{m'_k, n'_k\}$ telle que, pour toutes les valeurs de k, $\lambda_{m'_k} \geqq \lambda\lambda_0$ et $\mu_{n'_k} \geqq \mu\mu_0$.

5.14.4. Remarquons maintenant que, pour chaque k, il existe m''_k et n''_k tels que

$$\frac{\lambda_{m'_k}}{\lambda} < \lambda_{m''_k+1} \leqq \lambda_{m'_k+1}, \qquad \frac{\mu_{n'_k}}{\mu} < \mu_{n''_k+1} \leqq \mu_{n'_k+1},$$

et

$$\mathrm{S}_{m''_k, n''_k} = \mathrm{S}_{m'_k, n'_k} + \Pi''_s(\lambda_{m'_k}, \mu_{n'_k}, \lambda, \mu) \quad (^{20}).$$

Alors on a

$$(53) \qquad \varliminf_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m''_k, n''_k} = \varliminf_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m'_k, n'_k} + \omega \geqq \varliminf_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k, n_k} + \omega \geqq \mathrm{S},$$

puisque

$$\varliminf_{k \to +\infty} \mathrm{S}_{m_k, n_k} = \mathrm{S} - \eta \qquad \text{et} \qquad \omega \geqq \eta.$$

D'autre part,

$$\frac{\mu_{n''_k}}{\lambda_{m''_k}} \leqq \frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m''_k}} = \frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}} \frac{\lambda_{m'_k}}{\lambda_{m''_k+1}} \frac{\lambda_{m''_k+1}}{\lambda_{m''_k}},$$
$$< \frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}} \lambda \frac{\lambda_{m''_k+1}}{\lambda_{m''_k}}.$$

---

(20) En effet, comme la fonction $s(u, v) - s(\lambda_{m'_k}, \mu_{n'_k})$ prend un nombre fini de valeurs différentes pour

$$\frac{\lambda_{m'_k}}{\lambda} \leqq u \leqq \lambda_{m'_k} \qquad \text{et} \qquad \frac{\mu_{n'_k}}{\mu} \leqq v \leqq \mu_{n'_k},$$

elle atteint sur cet ensemble sa borne supérieure $\Pi''_s(\lambda_{m'_k}, \mu_{n'_k}, \lambda, \mu)$.

Mais, pour $u \geqq \lambda_0$ et $v \geqq \mu_0$, ce qui est le cas ici, on a $s(u, v) = \mathrm{S}_{m,n}$ où m et n sont déterminés par

$$\lambda_m \leqq u < \lambda_{m+1} \qquad \text{et} \qquad \mu_n \leqq v < \mu_{n+1}.$$

Par suite,

(54)
$$\begin{aligned}\varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\mu_{n''_k}}{\lambda_{m''_k}} &\leqq \lambda \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}} \varlimsup_{k\to+\infty}\frac{\lambda_{m''_k+1}}{\lambda_{m''_k}},\\ &\leqq \lambda\sigma\frac{1}{\alpha},\\ &< \mathrm{B}.\end{aligned}$$

D'un autre côté,

$$\begin{aligned}\frac{\mu_{n''_k}}{\lambda_{m''_k}} \geqq \frac{\mu_{n''_k}}{\lambda_{m'_k}} &= \frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}}\,\frac{\mu_{n''_k+1}}{\mu_{n'_k}}\,\frac{\mu_{n''_k}}{\mu_{n''_k+1}},\\ &> \frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}}\,\frac{1}{\mu}\,\frac{\mu_{n''_k}}{\mu_{n''_k+1}},\end{aligned}$$

et par suite

(55)
$$\begin{aligned}\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\mu_{n''_k}}{\lambda_{m''_k}} &\geqq \frac{1}{\mu}\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\mu_{n'_k}}{\lambda_{m'_k}}\varliminf_{k\to+\infty}\frac{\mu_{n''_k}}{\mu_{n''_k+1}},\\ &\geqq \frac{1}{\mu}\gamma\sigma\beta,\\ &> \mathrm{A}.\end{aligned}$$

5.14.5. Maintenant, d'après ce que l'on a vu au paragraphe 5.13, on a

$$\varlimsup_{k\to+\infty} \mathrm{S}_{m''_k,n''_k} \leqq \mathrm{S}.$$

Avec (53), ceci montre que $\mathrm{S}_{m''_k,n''_k}$ tend vers S quand k tend vers $+\infty$.

(54) et (55) montrent qu'il suffit d'enlever éventuellement un nombre fini de termes au début de la suite $\{m''_k,\ n''_k\}$ pour obtenir une suite ayant les propriétés indiquées au paragraphe 5.14.

5.15 Remarquons que des raisonnements semblables à ceux du paragraphe 5.8 montrent que, *si* λ_0 *et* $\mu_0 > 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *qui figurent dans les théorèmes* 11 *et* 12 *sont satisfaites en particulier si l'on a quels que soient* m *et* $n \geqq 0$

(56)
$$a_{m,n} \geqq -\mathrm{M}\frac{(\lambda_m-\lambda_{m-1})(\mu_n-\mu_{n-1})}{\lambda_m^2+\mu_n^2}. \quad (^{21})$$

Si λ_0 *ou* $\mu_0 = 0$, *les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *sont satisfaites si l'on a* (56) *pour tous les couples* $(m,\ n)$ *tels que* λ_m *et* $\mu_n > 0$, *avec*

$$a_{0,n} \geqq -\mathrm{N}\frac{\mu_n-\mu_{n-1}}{\mu_n} \qquad \textit{pour} \quad \mu_n > 0, \qquad \textit{si} \quad \lambda_0 = 0,$$

et

$$a_{m,0} \geqq -\mathrm{N}\frac{\lambda_m-\lambda_{m-1}}{\lambda_m} \qquad \textit{pour} \quad \lambda_m > 0, \qquad \textit{si} \quad \mu_0 = 0.$$

---

(21) Cf. note (17), p. 90.

5.16. Dans le cas particulier où $\lambda_m = m$ et $\mu_n = n$, en posant $e^{-x} = X$ et $e^{-y} = Y$, le théorème 11 donne le théorème de Durañona y Vedia cité dans l'introduction ([22]).

D'autre part, *dans ce cas particulier, on voit que les hypothèses sur* $p_{m,n}$ *et* $q_{m,n}$ *sont certainement satisfaites si l'on a, pour* $m^2 + n^2 > 0$,

$$a_{m,n} \geq -\frac{M}{m^2+n^2}.$$

5.17. Ajoutons qu'en utilisant le théorème 7′ auquel nous avons fait allusion au paragraphe 4.6.1 *on pourrait établir un théorème 11′ déduit du théorème 11 en remplaçant l'hypothèse que* $F(x, y)$ *tend vers* S *quand* x *et* y *tendent vers zéro par valeurs réelles positives par celle qu'il existe deux suites* $\{x_m\}$ et $\{y_n\}$ *satisfaisant à*

$$x_m = r_m e^{i\theta_m}, \qquad y_n = r'_n e^{i\theta'_n}, \qquad r_m \ \textit{et} \ r'_n > 0, \qquad |\theta_m| \ \textit{et} \ |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{m\to+\infty} r_m = 0, \qquad \lim_{m\to+\infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} = 1, \qquad \overline{\lim_{m\to+\infty}} |\theta_m| < \frac{\pi}{2},$$

$$\lim_{n\to+\infty} r'_n = 0, \qquad \lim_{n\to+\infty} \frac{r'_{n+1}}{r'_n} = 1, \qquad \overline{\lim_{n\to+\infty}} |\theta'_n| < \frac{\pi}{2},$$

telles que $F(x_m, y_n)$ *tende vers* S *quand* m *et* n *tendent vers* $+\infty$.

Bibliographie.

[1] Ananda-Rau, *On the converse of Abel's theorem* (*J. London Math. Soc.*, vol. 3, 1928, p. 200-205).

[2] Ananda-Rau, *An example in the theory of summation by Riesz typical means* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **30**, 1930, p. 367-372].

[3] D. L. Bernstein, *The double Laplace integral* (*Duke Math. J.*, t. **8**, 1941, p. 460-496).

[4] H. Delange, *Théorèmes taubériens pour les séries doubles* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **225**, 1947, p. 855-856).

[5] H. Delange, *Théorémes taubériens pour les séries multiples de Dirichlet* (*C. R. Acad. Sc.*, t. **226**, 1948, p. 377-379).

[6] H. Delange, *The converse of Abel's theorem on power series* (*Ann. Math.*, t. **50**, 1949. p. 94-109).

[7] H. Delange, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes* (premier Mémoire) [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. **67**, 1950, p. 99-160].

[8] H. Delange, *Sur les théorèmes inverses des procédés de sommation des séries divergentes* (deuxième Mémoire) [*Ann. Sc. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. **67**, 1950, p. 199-242].

[9] Durañona y Vedia, *Teoremas abelianos y tauberianos de dos variables* [*Univ. Nac. de la Plata, Publ. de la Fac. de ciencias fisicomat.*, (2), t. **4**, 1940, p. 291-324].

([22]) [9], Teorema XVIII, p. 323.

[**10**] HARDY et LITTLEWOOD, *Contributions to the arithmetic theory of series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **11**, 1913, p. 411-478].

[**11**] HARDY et LITTLEWOOD, *Some theorems concerning Dirichlet series* [*Messenger of Mathematics*, (2), t. **43**, 1914, p. 134-147].

[**12**] KARAMATA, Bemerkung zur Note : *Ueber einige Inversionssätze der Limitierungsverfahren* (*Publ. Math. Univ. de Belgrade*, t. **4**, 1935, p. 181-184).

[**13**] KNOPP, *Limitierungs-Umkehrsätze für Doppelfolgen* (*Math. Z.*, Bd **45**, 1939, p. 573-589).

[**14**] E. LANDAU, *Ueber einen Satz des Herrn Littlewood* (*Rendiconti del Circolo Math. di Palermo*, vol. **35**, 1913, p. 265-276).

[**15**] J. E. LITTLEWOOD, *The converse of Abel's theorem on power series* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **9**, 1911, p. 434-448].

[**16**] O. SASZ, *Ueber Dirichletsche Reihen an der Konvergenzgrenze* (*Atti del Congresso internazionale dei mathematici*, Bologna, 1928, vol. III, p. 269-276).

[**17**] O. SASZ, *Verallgemeinerung und neuer Beweis einiger Sätze tauberscher Art* (*Sitz. Bayer. Akad. Wiss.*, 1929, p. 325-340).

[**18**] O. SASZ, *Converse theorems of summability for Dirichlet series* (*Trans. Amer. Math. Soc.*, t. **39**, 1936, p. 117-130).

[**19**] A. TAUBER, *Ein Satz aus der Theorie der unendlichen Reihen* (*Monatsh. Math.*, vol. **8**, 1897, p. 273-277).

[**20**] D. VOELKER et G. DOETSCH, *Die zweidimensionale Laplace-Transformation*, Verlag Birkhaüser Basel, 1950.

[**21**] W. H. YOUNG, *On multiple integration by parts and the second theorem of the mean* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), t. **16**, 1917, p. 273-293].