LÉONCE FOURÈS

**Recouvrements de surfaces de Riemann**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série*, tome 69 (1952), p. 183-201

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1952_3_69__183_0>

# RECOUVREMENTS

DE

# SURFACES DE RIEMANN

PAR M. L. FOURÈS.

## A. — Recouvrements riemanniens.

1. RECOUVREMENTS. — Une surface est une variété à deux dimensions, triangulable, et, dans tout ce qui suit, orientable. Nous prendrons toujours comme famille de voisinages d'un point des domaines élémentaires, c'est-à-dire des ouverts homéomorphes à des cercles.

La notion de surface de recouvrement a été définie et utilisée à plusieurs reprises en Topologie et en Théorie des fonctions. Certains auteurs (De Kerekjarto, Ahlfors [1, 3, 6, 7]), font intervenir deux triangulations correspondantes de la surface donnée et de son recouvrement. Nous donnons ci-dessous des définitions locales du type de celles données en 1938 [1] par Stoïlow [9, 15], dont je regrette de n'avoir pas assez mis en évidence le rôle fondamental dans mon Mémoire de 1951.

Dans ce paragraphe $t$ désignera une représentation continue d'une surface $\mathfrak{S}$ dans une autre S de sorte que si $M \in S$, $t^{-1}(M)$ soit un ensemble isolé (formé de points isolés).

DÉFINITION 1. — $P \in S$ *est couvert sans ramification par* $\Delta \subset \mathfrak{S}$ *(pour* $t$*), s'il existe un voisinage* $V(P) \subset S$ *tel que* $E_{V,\Delta} = \Delta \cap t^{-1}[V(P)]$ *ne soit pas vide et que toute composante connexe de* $E_{V,\Delta}$ *soit représentée biunivoquement par* $t$ *sur* $V(P)$.

($\mathfrak{S}$, $t$) *est un recouvrement de* S *relativement non ramifié si tout point* $P \in S$ *est couvert sans ramification par* $\mathfrak{S}$ *(pour* $t$*)* [2].

---

(1) [9], p. 30.

(2) Il nous arrivera de dire que $\mathfrak{S}$ est un recouvrement de S, lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté possible sur le choix de la fonction (ici $t$) qui représente $\mathfrak{S}$ sur S.

D'après la première partie, il existe dans chaque composante connexe $\Gamma_i$ de $E_{V,\Delta}$ un point $\mathcal{P}_i$ tel que $t(\mathcal{P}_i) = P$. La deuxième partie implique que $t$ soit une représentation de $\mathcal{S}$ sur S.

*Cas particulier.* — Supposons S quasi-simple, doublement connexe; soit $M \in S$; ou bien $t^{-1}(M)$ a un nombre fini $n$ de points dans $\mathcal{S}$ : $\mathcal{S}$ est alors doublement connexe, et $n$ indépendant de $M \in S$ est l'ordre du recouvrement; ou bien $t^{-1}(M)$ a une infinité de points dans $\mathcal{S}$ qui est alors simplement connexe; $(\mathcal{S}, t)$ est le recouvrement universel de S.

DÉFINITION 2. — $P \in S$ *est couvert avec ramification par* $\Delta \subset \mathcal{S}$ *(pour* $t$*), s'il existe* $V(P) \subset S$ *tel que :*

1° $E_{V,\Delta} \neq \emptyset$.

2° *Soit* $\Gamma_i$ *une composante connexe quelconque de* $E_{V,\Delta}$ : $\mathcal{P}_i = \Gamma_i \cap t^{-1}(P) \neq \emptyset$.

3° $\Gamma_i^\star = \Gamma_i - \mathcal{P}_i$ *est un recouvrement relativement non ramifié d'ordre fini de* $V^\star(P) = V(P) - P$.

$(\mathcal{S}, t)$ *est un recouvrement de* S *relativement ramifié si tout point* $P \in S$ *est couvert avec ou sans ramification par* $\mathcal{S}$ *(pour* $t$*).*

D'après (3°) et le fait que $V^\star(P)$ est doublement connexe, $\Gamma_i^\star$ est doublement connexe et $\mathcal{P}_i$ se réduit à un seul point, puisque $\mathcal{P}_i$ est déjà un ensemble isolé.

DÉFINITION 3. — $P \in S$ *est régulièrement couvert par* $\mathcal{S}$ *(pour* $t$*), s'il existe* $V(P) \subset S$ *tel que toutes les composantes connexes* $\Gamma_i$ *de* $E_{V,\mathcal{S}}$ *recouvrent* P *avec le même ordre de ramification.*

*Si tout point* $P \in S$ *est régulièrement couvert par* $\mathcal{S}$ *(pour* $t$*),* $(\mathcal{S}, t)$ *est un recouvrement régulièrement ramifié de* S.

*Singularités.* — P *est imparfaitement couvert par* $\mathcal{S}' \subseteq \mathcal{S}$ *(pour* $t$*) si tout point de* $\mathcal{S}' \cap t^{-1}(P)$ *est intérieur à un domaine* $\Delta$ *tel que* P *soit couvert par* $\Delta$ *(pour* $t$*), sans que l'on puisse prendre pour* $\Delta$*, la surface* $\mathcal{S}'$ *entière.*

En d'autres termes, le choix d'un $V(P)$ fixe pour $\mathcal{S}$ entière est impossible.

Soit $F_1$ l'ensemble des points imparfaitement couverts par $\mathcal{S}$ (pour $t$). Soit $S^\star \subseteq S$ l'image de $\mathcal{S}$ par $t$. Désignons par $F_2$ la frontière de $S^\star$ dans S et notons $F = F_1 \cup F_2$.

Remarquons que :

*Les points de* $S^\star$ *couverts avec ramification par* $(\mathcal{S}, t)$ *sont isolés dans* $S^\star - F_1$.

Parmi les éventualités possibles concernant l'aspect du recouvrement de $S^\star$ dans le voisinage d'un point isolé P de F, nous signalerons les deux suivantes :

*a. Singularité générale logarithmique.* — *Soit* $P \in \bar{S}^\star$*; il existe* $V(P)$ *tel que* $V(P) - P \subset S^\star$ *et tel que toute composante connexe de* $E_{V,\mathcal{S}}$*, qui ne couvre* *pas* P *soit un recouvrement de* $V(P) - P$ *relativement non ramifié et simplement connexe.*

*b. Accumulation de points de ramification. — Soit* $P \in F_1$. *Quelque petit que soit* $V(P)$ *toute composante connexe de* $E_{V,\mathcal{S}}$ *comprend au moins un point de* $t^{-1}(P)$.

$t$ est une fonction uniforme sur $\mathcal{S}$; $t^{-1}$ n'est pas uniforme sur $S^\star$. Soit $\mathcal{P} = t^{-1}(P)$ qui définit dans un voisinage de P une branche de $t^{-1}$. Cette branche admet P pour point de ramification d'ordre $n$ s'il existe $V(P)$ tel que P soit couvert avec ramification d'ordre $n$, par la composante connexe de $E_{V,\mathcal{S}}$ qui contient $\mathcal{P}$ (pour $t$).

2. Recouvrements riemanniens. — Dans les définitions 1, 2, 3 remplaçons les surfaces S et $\mathcal{S}$ par deux surfaces de Riemann R et $\mathcal{R}$, et $t$ par une représentation $\varphi$ assujettie aux mêmes conditions que $t$, et en outre conforme biunivoque en tout point où $t$ était seulement biunivoque.

Soit D un domaine doublement connexe, quasi-simple. $(\Delta, t)$, $(\delta, \theta)$ deux recouvrements relativement non ramifiés, d'ordre $n$, de D : toutes les branches de $\theta^{-1} \circ t$ ou $t^{-1} \circ \theta$ sont uniformes. Soit alors C le cercle-unité du plan de la variable $z$; $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ les cercles-unités des plans des variables $\zeta_1$ et $\zeta_2$. Notons $C^\star$, $\Gamma_1^\star$, $\Gamma_2^\star$ les domaines obtenus en retirant l'origine des cercles C, $\Gamma_1$, $\Gamma_2$. Soient $z = \varphi_1(\zeta_1)$ et $z = \varphi_2(\zeta_2)$ deux fonctions continues dans $\Gamma_1$ et $\Gamma_2$ avec $\varphi_1(0) = \varphi_2(0) = 0$, et telles que $(\Gamma_1^\star, \varphi_1)$ et $(\Gamma_2^\star, \varphi_2)$, soient des recouvrements du même ordre de $C^\star$. Alors $\psi = \varphi_1^{-1} \circ \varphi_2$ et $\psi^{-1}$ sont uniformes avec $\psi(0) = 0$, $\psi^{-1}(0) = 0$. L'origine de $\Gamma_2$ est régulière pour $\psi$ qui, par suite, est de la forme $\psi = \alpha\zeta_2$, $|\alpha| = 1$. $(\Gamma_1^\star, \zeta_1^n)$ étant un recouvrement d'ordre $n$ de $C^\star$, tous les recouvrements d'ordre $n$ de $C^\star$ sont de la forme $(\Gamma^\star, k\zeta^n)$, lorsque $\Gamma^\star$ est un cercle-unité privé de l'origine.

Soit $(\mathcal{R}, \varphi)$ un recouvrement ramifié ou non de R. Soit $P \in R$, $\mathcal{P} \in \mathcal{R}$ tel que $\varphi(\mathcal{P}) = P$. Il existe $V(P)$ tel que la composante connexe $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ de $E_{V,\mathcal{R}}$ qui contient $\mathcal{P}$ recouvre P avec l'ordre de ramification $n$. Les uniformisantes locales de $\mathcal{R}$ et R, respectivement $\mathcal{T}$ et T, représentent $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ et $V(P)$ conformément sur les cercles-unités $\Gamma$ et C des plans $\zeta$ et $z$.

Posons $\psi = T \circ \varphi \circ \mathcal{T}^{-1}$, on a, d'après ce qui précède, $\psi = k\zeta^n$.

Théorème. — *Soit* $(\mathcal{R}, \varphi)$ *un recouvrement de* R *relativement ramifié :*

*a. les points où* $\varphi$ *n'est pas biunivoque sont isolés;*

*b. soit* $P = \varphi(\mathcal{P})$ *: il est possible de trouver sur* R *et* $\mathcal{R}$ *des voisinages* $V(P)$ *et* $\mathcal{V}(\mathcal{P})$ *dont les paramètres* $z$ *et* $\zeta$ *obtenus par les uniformisantes locales* T *et* $\mathcal{T}$ *sont tels que* $T \circ \varphi \circ \mathcal{T}^{-1} = k\zeta^n$.

Ainsi la définition 2 dans laquelle on a remplacé S, $\mathcal{S}$, $t$ par $r$, $\mathcal{R}$, $\varphi$ est donc une généralisation du recouvrement riemannien défini par Stoïlow [9]; il s'agissait alors de la projection d'une surface de Riemann abstraite dans le plan complexe.

DÉFINITION 3 *bis.* — $\varphi$ *est une projection riemannienne d'une surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *sur une autre* R, *si,* P *étant un point quelconque de* R, *il existe pour tout point* $\mathfrak{T}_i$ *de* $\varphi^{-1}(P)$, *un domaine* $\Delta_i \subset \mathcal{R}$ $(\mathfrak{T}_i \in \Delta_i)$ *tel que* P *soit couvert avec ou sans ramification par* $\Delta_i$ *(pour la projection* $\varphi$*).*

$\varphi$ étant une projection riemannienne de $\mathcal{R}$ sur R, $(\mathcal{R}, \varphi)$ ne sera un *recouvrement Riemannien* de R que si $(\mathcal{R}, \varphi)$ est un recouvrement de R au sens de la définition 2.

Ainsi $\varphi$ peut être une projection riemannienne de $\mathcal{R}$ sur R sans que $(\mathcal{R}, \varphi)$ soit un recouvrement Riemannien de R, par exemple si P est un point singulier du type $b$.

Désignons par $\mathbf{S}u$ toute fonction de la variable $u$ représentable dans un voisinage de $u = 0$ par une série convergente de la forme

$$\mathbf{S}u = \alpha_1 u + \alpha_2 u^2 + \ldots, \qquad \alpha_1 \neq 0.$$

De même $\mathbf{SS}(u, v)$ représentera une série double en $u$ et $v$, sans terme constant, convergente dans un voisinage de $u = 0$, $v = 0$ :

$$\mathbf{SS}(u, v) = \alpha_{11} u + \alpha_{12} v + \alpha_{21} u^2 + \alpha_{22} uv + \ldots,$$

$\varphi$ étant une projection riemannienne $M = \varphi(\mathfrak{M})$ on a, pour des uniformisantes locales T et $\mathfrak{T}$ de R et $\mathcal{R}$ opérant sur des voisinages particuliers de M et $\mathfrak{M}$, $z = T \circ \varphi \circ \mathfrak{T}^{-1} = k\zeta^n$. Si nous considérons des uniformisantes locales $z = T(M)$ et $\zeta = \mathfrak{T}(\mathfrak{M})$ pour des voisinages quelconques de M et $\mathfrak{M}$ on déduit de la relation précédente

$$(1) \qquad z = \mathbf{S}(\mathbf{S}\zeta)^n = \alpha\zeta^n(1 + \mathbf{S}\zeta)$$

qui est invariante par toute transformation $\mathbf{S}$ effectuée sur $\zeta$ et $z$. Dans (1) les fonctions $\mathbf{S}$ sont complètement arbitraires.

3. SURFACES DE RIEMANN. POINTS DE RAMIFICATION. — Soit $W = F(Z)$ une représentation d'une surface de Riemann $R_Z$ dans une autre $R_W$. Cette représentation est analytique si pour tout couple de points Z et W associés par F, on peut trouver deux voisinages $V_Z(Z) \subset R_Z$ et $V_W(W) \subset R_W$ tels que si $T_Z$ et $T_W$ sont les uniformisantes locales de $R_Z$ et $R_W$ représentant $V_Z$ et $W_W$ sur les cercles-unités des plans des variables $z$ et $w$, on ait dans un voisinage de l'origine

$$w = h(z) = T_W \circ F \circ T_Z^{-1} = \alpha_0 z^{\frac{p}{q}}\left(1 + \alpha_1 z^{\frac{1}{q}} + \alpha_2 z^{\frac{2}{q}} + \ldots\right).$$

Si l'on pose $z^{\frac{1}{q}} = u$, $w^{\frac{1}{q}} = s$ on a $s = \varphi(u)$, où $\varphi$ est holomorphe univalente nulle à l'origine

$$(2) \qquad w = \left[\varphi\left(z^{\frac{1}{q}}\right)\right]^p = \left(\mathbf{S}z^{\frac{1}{q}}\right)^p = az^{\frac{p}{q}}\left(1 + \mathbf{S}z^{\frac{1}{q}}\right)$$

qui est invariante par toute transformation $\mathbf{S}$ effectuée sur $z$ et $w$. $\mathbf{S}$ est complètement arbitraire.

DÉFINITION 4. — *La surface de Riemann de la fonction analytique* $W = F(Z)$ *est l'ensemble* $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ *d'une surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *et de deux projections riemanniennes de* $\mathcal{R}$ *sur* $R_Z$ *et sur* $R_W$ : $Z = \psi(M)$, $W = \omega(M)$ $(M \in \mathcal{R})$ *telles que*

1° $F = \omega \circ \psi^{-1}$.

2° *Si une courbe fermée de* $R_Z$ *a, par* F, *une image fermée sur* $R_W$, *son image dans* $\mathcal{R}$ *par* $\psi^{-1}$ *est aussi fermée.*

Il existe sur $R_Z$ un voisinage $V(Z)$ tel que la composante connexe $\Delta_V$ de $\psi^{-1}(V)$, contenant M, soit représentée par une uniformisante locale de $\mathcal{R}$, $\Theta_V$ sur le cercle-unité $G_V$ du plan $\zeta_V$, de manière que l'on ait $T_Z \circ \psi \circ \Theta_V^{-1} = \zeta_V^q$ (où $T_Z$ est une uniformisante locale de $R_Z$ qui représente V sur le cercle-unité du plan $z$). De même il existe sur $R_W$, $\mathcal{V}(W)$ tel que l'on ait avec des notations analogues aux précédentes $T_W \circ \omega \circ \Theta_{\mathcal{V}}^{-1} = \zeta_{\mathcal{V}}^p$. Soit $\Delta = \Delta_V \cap \Delta_{\mathcal{V}}$, M est intérieur à $\Delta$ qui a pour images dans $G_V$ et $G_{\mathcal{V}}$, $\delta_V$ et $\delta_{\mathcal{V}}$. Ces images sont en correspondance conforme biunivoque $\zeta_{\mathcal{V}} = \varphi(\zeta_V)$ avec correspondance des origines. Soient $D_z$ et $D_w$ les images de $\Delta$ par $T_Z \circ \psi$ et par $T_W \circ \omega$. Remarquons que $\Theta_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_V$ est l'identité sur $\mathcal{R}$. On a alors dans $D_z$ :

$$w = f(z) = T_W \circ \omega \circ \psi^{-1} \circ T_Z^{-1} = T_W \circ \omega \circ \Theta_{\mathcal{V}}^{-1} \circ \varphi \circ \Theta_V \circ \psi^{-1} \circ T_Z^{-1} = \left[\varphi\left(z^{\frac{1}{q}}\right)\right]^p.$$

Montrons que $p$ et $q$ ayant le sens donné au début, le développement de $w = f(z)$ ne peut se mettre sous une forme $w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q'}}\right)^{p'}$ avec $p' < p$, $q' < q$ : si non il y aurait dans $V_Z$ une courbe fermée faisant $q'$ fois le tour de Z à laquelle correspondrait dans $\mathcal{V}_W$ une courbe fermée faisant $p'$ fois le tour de W. Il leur correspondrait sur $\mathcal{R}$ une courbe fermée; mais la projection par $\psi$ d'une courbe fermée de $\mathcal{R}$, entourant M est une courbe fermée faisant au moins $q$ tours autour de Z : donc $q' > q$ ce qui est contraire à l'hypothèse.

THÉORÈME. — *Soit* $(\mathcal{R}; \psi, \omega)$ *la surface de Riemann de* $W = F(Z)$. *Les ordres des projections riemanniennes* $Z = \psi(M)$ *et* $W = \omega(M)$ *sont respectivement les coefficients q et p du développement* $w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^p$ *obtenu entre les paramètres* $z$ *et* $w$ *de voisinages quelconques de* Z *et* W.

## B. — Fonctions d'automorphie.

1. FONCTIONS UNIFORMES. — Soit $w = f(z)$ une fonction uniforme de la variable $z$. $z' = \varphi(z)$ est fonction d'automorphie de $f$ si $f(z) = f[\varphi(z)]$. $\varphi$ s'écrit aussi $f^{-1} \circ f$.

Dans le cas où $w$ est méromorphe, si $\varphi$ est à $p$ déterminations elle est solution de $P(z, z')=0$, où P est un polynome de degré $p$ en $z$ et en $z'$ (Shimizu) [5]. En particulier pour $p=1$ si $f$ est rationnelle, $\varphi$ est homographique (Fatou) [2], si $f$ est transcendante, $\varphi$ est linéaire (Shimizu, Marty [5, 10]); nous reviendrons dans la section D sur le théorème de Shimizu.

2. Fonctions multiformes. — Soit une fonction algébrique $w(z)$ définie par $P(w, z)=0$, où P est un polynome de degré $m$ en $w$, $n$ en $z$. Écrivons que $w$ prend la même valeur pour $z$ et $z'$ :

$$P(w, z)=0, \qquad P(w, z')=0. \tag{A}$$

La correspondance obtenue entre $z$ et $z'$ par l'élimination de $w$ dans (A) est donnée par $\mathcal{R}(z, z')=0$, où $\mathcal{R}$ est le résultant de l'élimination de $w$ dans (A).

$\mathcal{R}(z, z')=(z'-z)^m R(z, z')$, où $R(z, z')$ est de degré $m(n-1)$ par rapport à chacune des variables $z$ et $z'$. Soient $z'=\varphi_1(z)$, $z'=\varphi_2(z)$ deux branches de $z'(z)$ définies par $R(z, z')=0$. Posons $z''=\varphi_2(z')=\varphi_2\circ\varphi_1(z)$, il existe donc $w_1$ et $w_2$ tels que

$$\begin{aligned} P(w_1, z)&=0, & P(w_2, z')&=0,\\ P(w_1, z')&=0, & P(w_2, z'')&=0; \end{aligned}$$

où l'on peut avoir $w_1 \neq w_2$. Donc la branche de fonction analytique définie localement par $\varphi_2\circ\varphi_1$ n'est pas fonction d'automorphie.

Définition 5. — *Soit* $\mathcal{R}$ *la surface de Riemann de la fonction analytique* $W=F(Z)$. $M'=\Phi(M)$ *est fonction d'automorphie de* $w=\omega(M)$ *uniforme si* $\omega(M)=\omega[\Phi(M)]$. $\Phi=\omega^{-1}\circ\omega$. *La relation* $Z'=\psi\circ\Phi\circ\psi^{-1}$ *qui en résulte entre* $Z=\psi(M)$ *et* $Z'=\psi(M')$ *est la projection sur* $R_Z$ *de la fonction d'automorphie de* $w=\omega(M)$.

Dans ces conditions les fonctions d'automorphie de $\omega$ forment un hypergroupe.

3. Points de ramification. — Soit $M'=\Phi(M)$ une fonction d'automorphie : $W=\omega(M)=\omega[\Phi(M)]$. Considérons des voisinages de **M**, M', W (sur les surfaces $\tilde{\mathcal{R}}$, $\mathcal{R}$, $R_W$), et les uniformisantes locales qui les représentent sur les cercles-unités des plans $\zeta$, $\zeta'$, $w$ :

$$w=\alpha\zeta^p(1+\mathbf{S}\zeta)=\alpha'\zeta'^{p'}(1+\mathbf{S}\zeta') \qquad \text{ou} \qquad \alpha\zeta^{\frac{p}{p'}}(1+\mathbf{S}\zeta)=\alpha'\zeta'(1+\mathbf{S}\zeta')=\mathbf{S}\zeta'.$$

Si $\mathbf{S}\zeta'=u$, $\zeta'=\mathbf{S}u$ :

$$\zeta'=\mathbf{S}\Big[\zeta^{\frac{p}{p'}}(1+\mathbf{S}\zeta)\Big], \tag{3'}$$

$$\zeta'=\gamma\zeta^{\frac{p}{p'}}\Big[1+\mathbf{SS}\Big(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta\Big)\Big]. \tag{3}$$

Dans la forme (3) invariante par toute transformation $\mathbf{S}$ effectuée sur $\zeta$ et sur $\zeta'$, la série double $\mathbf{SS}$ n'est pas quelconque; (3) peut se mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $\alpha_i \zeta^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'}}$ où $\lambda > 0$, $\mu \geqq 0$.

Projetons $M' = \Phi(M)$ sur la surface $R_Z$ par $Z = \psi(M)$ :

$$w = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^p = \left(\mathbf{S} z'^{\frac{1}{q'}}\right)^{p'},$$

d'où

$$\mathbf{S} z'^{\frac{1}{q'}} = \left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}}, \qquad z'^{\frac{1}{q'}} = \mathbf{S}\left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}};$$

$$z' = \left[\mathbf{S}\left(\mathbf{S} z^{\frac{1}{q}}\right)^{\frac{p}{p'}}\right]^{q'}, \tag{4'}$$

$$z' = c z^{\frac{p}{p'}\frac{q'}{q}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(z^{\frac{p}{qp'}}, z^{\frac{1}{q}}\right)\right]. \tag{4}$$

Les formes (4) et (4') sont invariantes par toute transformation $\mathbf{S}$ effectuée sur $z$ et $z'$. Dans (4) la série double $\mathbf{SS}$ n'est pas à coefficients quelconques et l'on peut la mettre sous la forme d'une série simple ne contenant que des termes $a_i z^{\frac{\lambda p+\mu p'}{qp'}}$, où $\lambda \geqq m$, $\mu > 0$.

Théorème. — *Soit* $M' = \Phi(M)$ *une fonction d'automorphie de la fonction analytique* $W = F(Z)$ *définie sur la surface de Riemann* $\mathcal{R}$ *de cette fonction. Supposons que* $W = \omega(M)$ *soit d'ordre* $p$ *en* $M$ *d'ordre* $p'$ *en* $M'$, *la projection* $Z = \psi(M)$ *étant d'ordre* $q$ *en* $M$, *d'ordre* $q'$ *en* $M'$. *Dans ces conditions le développement de* $M' = \Phi(M)$ *est de la forme*

$$\zeta' = \gamma \zeta^{\frac{p}{p'}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(\zeta^{\frac{p}{p'}}, \zeta\right)\right] \tag{3}$$

*qui ne contient que des termes* $\zeta^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'}}$, $\lambda > 0$, $\mu \geqq 0$. *La projection de* $\Phi$ *par* $\psi$ *soit* $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ *est de la forme*

$$z' = c z^{\frac{p}{p'}\frac{q'}{q}}\left[1 + \mathbf{SS}\left(z^{\frac{p}{p'q}}, z^{\frac{1}{q}}\right)\right] \tag{4}$$

*qui ne comprend que des termes* $z^{\frac{\lambda p+\mu p'}{p'q}}$, $\lambda \geqq m$, $\mu > 0$. *Les points de ramification de* $\Phi$ *ou de* $\psi \circ \Phi \circ \psi^{-1}$ *ne sont pas du type général* (2) *des points de ramification d'une fonction analytique.*

4. Fonctions d'automorphie sans points de ramification. — Soit $M' = \Phi(M)$ une fonction d'automorphie sans points de ramification et dont l'inverse n'a pas de points de ramification.

Considérons l'uniformisante globale $f$ de $\mathcal{R}$ qui réalise la représentation conforme de $\mathcal{R}$ sur un cercle C (ou le plan entier). $f^{-1}$ est automorphe par les fonctions homographiques d'un groupe G proprement discontinu. Soit $\Phi_i$ une branche quelconque de $\Phi$ (définie dans le voisinage d'un point). $g_i = f \circ \Phi_i \circ f^{-1}$ est homographique, donc $\omega \circ f^{-1}$ est automorphe pour une fonction homographique $g_i \notin G$, et pour toutes les fonctions du groupe proprement discontinu $\Gamma$ obtenu en adjoignant à G la fonction $g_i$. Le groupe $\Gamma$ comprend nécessairement toutes les fonctions $g_j = f \circ \Phi_j \circ f^{-1}$. En effet $\Phi_j$ s'obtient par prolongement de $\Phi_i$ suivant une courbe fermée sur $\mathcal{R}$ dont l'image dans C est ouverte et joint deux points se correspondant par une fonction de G. On a donc $g_j = a \circ g_i \circ b$, où $a$ et $b \in G$, donc $g_j \in \Gamma$. Inversement toute fonction $\Phi_k$ obtenue par transposition $\Phi_k = f^{-1} \circ g_k \circ f$ d'une fonction $g_k \in \Gamma$, $g_k \notin G$, est une branche de $\Phi$.

Les images par une même fonction $g_j$ de deux points de C se correspondant par $a \in G$ ne se correspondent pas nécessairement par une fonction de G, dès que $\Phi$ a plus d'une branche : $g_j \circ a \circ g_j^{-1} \notin G$ $(a \in G)$.

G *est un sous-groupe invariant de* $\Gamma$ *si et seulement si* $\Phi$ *est uniforme.* En général, le nombre de branches de $\Phi$ est égal au nombre de classes $\gamma_i$ de $\Gamma$ définies de la manière suivante :

tout $g$ appartenant à $\Gamma$ et n'appartenant pas à G, appartient à une classe $\gamma_i$; $g_\mu$ et $g_\nu \in$ même classe si $g_\mu \circ g_\nu^{-1} \in G$.

Il en résulte que $\Phi$ *et* $\Phi^{-1}$ *ont le même nombre de déterminations.*

5. Nombre de déterminations des fonctions d'automorphie. — *a. Domaines fondamentaux.* — Soit $\varphi_0$ une représentation d'une surface de Riemann R sur elle-même. $\Phi$ l'hypergroupe engendré par les itérées positives et négatives de $\varphi_0$. $\varphi_i$ désignera une fonction quelconque de $\Phi$. M et M′ sont dits équivalents s'il existe $\varphi_i \in \Phi$ tel que $M' = \varphi_i(M)$. *Supposons qu'il existe une projection riemannienne* $\pi$ *de* R *sur* F *de sorte que tous les points d'une même classe d'équivalence aient même image sur* F; nous n'exigeons pas qu'un point de F soit l'image d'une seule classe de points équivalents. D'autre part si $\varphi$ est une fonction d'automorphie, une telle projection existe : $\omega(M)$ elle-même; mais il est aussi possible qu'il existe d'autres projections que $\omega(M)$ satisfaisant à la condition posée et permettant une réalisation plus aisée de la condition suivante :

*Supposons que l'on puisse tracer sur* F *un système d'arcs simples de Jordan ne s'accumulant nulle part, ne séparant pas* F *et limitant sur* F *un domaine* $F^\star$ *dans lequel toutes les branches de* $\pi^{-1}$ *sont uniformes.* Soient $d_i$ les domaines obtenus sur R comme images de $F^\star$ par $\pi^{-1}$. Ces domaines tous étrangers et couvrant R (avec leurs frontières) constituent un pavage de R. Les domaines $d_i$ sont appelés *domaines fondamentaux* de R relativement à $\pi$.

*b. Les déterminations de* $\varphi_0$. — Supposons les $d_i$ en nombre fini $n$. Soit $M \in d_i$ : il y a au plus un équivalent de M dans chaque $d_j (j \neq i)$. $\varphi_0$ a un nombre fini $p$ de déterminations. Soit $(\mathcal{R}; \tau, \sigma)$ la surface de Riemann de $\varphi_0$ : $\varphi_0 = \sigma \circ \tau^{-1}$. Toute branche d'une $\varphi_j$ définie dans un $d_i$ lui associe un autre $d_k$ puisque $\varphi$ associe des points équivalents et que d'après la nature de la frontière de $F^\star$, si un point est frontière d'un $d_i$ tous ses équivalents sont frontières de domaines $d_j$. Considérons sur $\mathcal{R}$ les images $\delta_\lambda$ des $d_i$ par $\tau^{-1}$ : tout point de $\mathcal{R}$ a une image par $\tau$ dans un $d_i$, donc il appartient ou bien à un $\delta_\lambda$ où à la frontière d'un nombre fini d'entre eux; d'autre part si $\lambda \neq \mu$ : $\delta_\lambda \cap \delta_\mu = \emptyset$. Les $\delta_\lambda$ constituent donc un pavage de $\mathcal{R}$, chaque domaine du pavage ayant pour image $F^\star$ par $\pi \circ \tau$.

L'image de $\delta_\lambda$ par $\sigma$ est un $d_k$ : appliquons $\tau$ et $\sigma$ à $\delta_\lambda$. Définie dans $\tau(\delta_\lambda) = d_j$, $\sigma \circ \tau^{-1}$ est une branche de $\varphi_0$ qui associe donc à $d_j$ un autre domaine fondamental $d_k$. Puisque $\varphi_0$ a $p$ déterminations, à $d_i$ correspondent par $\tau^{-1}$, $p$ domaines $\delta_\lambda$ distincts, quel que soit $d_i$. $\mathcal{R}$ est donc pavée par $np$ domaines $\delta_\lambda$, et $\sigma$ représente ces $np$ domaines $\delta_\lambda$ sur $n$ domaines $d_k$. Supposons que $\sigma^{-1}(d_k)$ soit formée de $q$ domaines $\delta_\lambda$ : prolongeons $\sigma^{-1}$, depuis $d_k$ jusqu'à $d_{k'}$, en évitant d'éventuels points de ramification de $\sigma^{-1}$ : les $\delta_{\lambda'}$ obtenus sont tous différents, donc $q' \geqq q$, en désignant par $q'$ le nombre de domaines $\delta_\lambda$ images de $d_{k'}$ par $\sigma^{-1}$; mais en effectuant le prolongement de $\sigma^{-1}$ depuis $d_{k'}$, jusqu'à $d_k$ on trouvera $q \geqq q'$, donc $q = q' = p$. $\sigma^{-1}$ étant à $p$ déterminations $\tau \circ \sigma^{-1} = \varphi_0^{-1}$ l'est aussi.

THÉORÈME. — *Soit* $\varphi$ *une représentation d'une surface de Riemann* R *sur elle-même. Supposons qu'il existe une fonction* $\pi$ *uniforme sur* R *admettant pour fonction d'automorphie* $\varphi_0$. *Supposons de plus que la décomposition de* R *en domaines fondamentaux pour* $\pi$ *soit possible et se fasse suivant un nombre fini de domaines.*

*Dans ces conditions,* $\varphi_0$ *et toutes les fonctions de l'hypergroupe des itérées de* $\varphi_0$ *ont même nombre de déterminations que leurs inverses.*

En particulier : *toutes les fonctions d'automorphie des fonctions algébriques ont même nombre de déterminations que leurs inverses.*

6. REMARQUE SUR LES FONCTIONS D'AUTOMORPHIE. — Le théorème du paragraphe 3 prouve que si l'on se donne une représentation analytique $Z' = \Phi(Z)$ d'une surface de Riemann $R_Z$ sur elle-même, il n'existe pas nécessairement de fonction analytique $W = F(Z)$ admettant $\Phi$ comme projection de fonction d'automorphie. Mais si l'on considère dans $R_Z$ un domaine D suffisamment petit (pour que $\Phi$ représente D sur $D' \subset R_Z$ conformément et biunivoquement, et que certaines conditions de régularité des frontières soient satisfaites) on peut toujours construire un domaine $\Delta \subset R_Z$, $\Delta \supset D$, $\Delta \supset D'$ et une fonction $W = F^\star(Z)$ uniforme dans $\Delta$ et admettant dans $\Delta$, $\Phi$ comme fonction d'automorphie [18].

### C. — Arbres topologiques régulièrement ramifiés.

1. Définitions. — Si $(\Sigma, t)$ est un recouvrement d'une surface $B_0$ close, de genre zéro, relativement ramifié en un nombre fini de points $\alpha_i (i = 1, 2, \ldots, q)$, on peut représenter $\Sigma$ par son arbre topologique T. Les côtés sont de $q$ sortes notés $a_1, a_2, \ldots, a_{q-1}, a_q$, et se succèdent dans cet ordre si l'on tourne autour d'un nœud $\circ$ dans le sens direct, autour d'un nœud $\times$ dans le sens rétrograde [11, 16].

Nous dirons que T est *traeé sur une surface* S si T est effectivement tracé sur la surface S et si de plus toute portion de S limitée par des côtés de T et ne contenant elle-même aucun côté de T à son intérieur, est simplement connexe.

T étant donné, on peut définir un polygone de T comme étant une surface simplement connexe limitée par une ligne polygonale formée de chaînons des types $a_i$ et $a_{i+1}$ seulement, cette ligne polygonale étant soit fermée soit ouverte, et dans ce dernier cas, comprenant une infinité de chaînons.

Nous ne considérerons ici que des arbres T tracés sur des surfaces S dont ils constituent une triangulation, c'est-à-dire des arbres T dont les polygones ont tous, un nombre fini de côtés.

Désignons par $K_i$ les polygones tracés sur S par T. Dans chaque $K_i$ choisissons un point $\Omega_i$ que nous appellerons le « centre » de $K_i$. Soient $K_{i_1}, K_{i_2}, \ldots, K_{i_q}$ les polygones ayant $N_j$ pour sommet commun. Joignons $\Omega_{i_k}$ et $\Omega_{i_{k+1}}$ ($k$ défini mod $q$) : nous obtenons un polygone $K^j$. Les $K^j$ constituent une triangulation de S et par l'intermédiaire de cette triangulation on obtient une correspondance topologique entre S et $\Sigma$ : $\Sigma \xrightarrow{\tau} S$.

*Remarque.* — $(\Sigma, t)$ étant par définition un recouvrement de $B_0$, avec les définitions que nous avons adoptées, il n'y a pas de points de $B_0$, imparfaitement couvert, et tous les polygones de T ont un nombre fini de côtés.

Nous dirons que *deux nœuds* A *et* B *de* T *sont équivalents* $(A \sim B)$ *s'il existe un homéomorphisme de* T *sur lui-même emmenant* A *en* B. T *est régulièrement ramifié s'il y a seulement un nombre fini de classes de nœuds équivalents.*

Un ensemble E de nœuds de T est connexe si l'on peut joindre deux nœuds de E par une chaîne de traits de liaison ne reliant que des nœuds de E.

Dans l'étude qui suit nous supposerons T régulièrement ramifié.

2. Cellules. — *Une cellule est un ensemble connexe fini de nœuds de* T *tel qu'il n'y ait pas dans la cellule deux nœuds équivalents, et que tout nœud de* T *soit équivalent à un nœud de la cellule.*

*Construction.* — Soit E un ensemble de nœuds de T : $M \notin E$ est dit extrapériphérique pour E, s'il est reliable par un seul trait de liaison à un nœud de E; $N \in E$ est périphérique pour E, s'il est reliable par un seul trait de liaison à un nœud extrapériphérique.

Choisissons un nœud $A = A_0^{m_0} \in T$. Soient $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{n_1}$ les nœuds extrapériphériques pour $A_0^{m_0}$. Construisons $C_1$ de la manière suivante : ordonnons d'abord l'ensemble des couples d'entiers : $(x, y) < (x', y')$ si $x < x'$ ou bien si $x = x'$ avec $y < y'$.

Dans ces conditions $A_1^\nu \in C_1$ si $A_1^\nu \not\sim A_j^\mu$ où $(j, \mu) < (1, \nu)$. Désignons par $A_0^{m_0}$, $A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{m_1}$ les nœuds de $C_1$, et d'une façon générale $A_0^{m_0}, A_1^1, A_1^2, \ldots, A_1^{m_2}$, $A_2^1, \ldots, A_2^{m_2}, A_3^1, \ldots, A_i^{m_i}$ les nœuds de $C_i$. Désignons par $A_{i+1}^1, A_{i+2}^1, \ldots, A_{n_{i+1}}^{i+1}$ les nœuds extrapériphériques pour $C_i$ :

$$A_{i+1}^\nu \in C_{i+1} \quad \text{si} \quad A_{i+1}^\nu \not\sim A_j^\mu, \quad \text{où} \quad (j, \mu) < (i+1, \nu).$$

Ainsi tout nœud de $C_i$ appartient aussi à $C_{i+1}$. Mais la suite des $C_i$ ne peut être croissante puisqu'il n'y a dans T qu'un nombre fini de classes de nœuds équivalents; donc à partir d'un certain rang $C_{k+1} \equiv C_k \equiv C$.

*Association des côtés libres de* C. — Un côté libre de C est un trait de liaison de T joignant un nœud périphérique de C à un nœud extrapériphérique. Soit Q extrapériphérique : il possède un équivalent R dans C. Soit $\alpha$ un côté libre de C joignant Q à un nœud périphérique Q' : le côté $\alpha'$ de même nature que $\alpha$ et issu de R joint R à R'; $R' \not\equiv Q'$ si non $Q \equiv R$. $R' \sim Q'$ donc $R' \notin C$ et R est périphérique pour C. Ainsi les côtés $RR'(\alpha')$ et $QQ'(\alpha)$ sont tous deux des côtés libres : nous les dirons associés. Il est immédiat que cette association est réciproque et qu'un côté libre n'a qu'un seul associé.

C *est une cellule*. — A partir d'un nœud quelconque $P_i$ de T, équivalent à P de C, on peut construire d'une manière unique un ensemble $C_i$ homologue de C dans l'homéomorphisme de T sur lui-même qui emmène $P_i$ sur P. Deux ensembles $C_i$ sont ou bien confondus ou totalement étrangers.

Tout nœud de T a un équivalent dans C : soit $P \in T$, on peut le joindre à $O \in C$ par une ligne polygonale L d'un nombre fini de côtés. Parcourons L (de O vers P). Soit $P_1$ le premier point extrapériphérique de L pour C, il a un équivalent $P'_1$ dans C et l'on peut construire $C_1$ à partir de $P_1$ comme C est construit à partir de $P'_1$; $C_1$ et C n'ont aucun nœud commun. Soit alors $P_2$ le premier nœud extrapériphérique pour $C \cup C_1$ : il est extrapériphérique pour l'un au moins des ensembles C et $C_1$ et a donc un équivalent $P'_2 \in C$. Construisons $C_2$ à partir de $P_2$ comme C est construit à partir de $P'_2$, .... Comme $P_2 \not\equiv P_1$ et que L comprend seulement un nombre fini de nœuds, il existe $C_n \ni P$. Donc P a un équivalent dans C, évidemment unique. L'ensemble C constitue bien une cellule que nous noterons $\mathfrak{C}$.

3. T COMME RECOUVREMENT RAMIFIÉ. — Si $\mathfrak{C}$ n'est pas tracée sur le plan, découpons certains côtés de manière à former un ensemble $\mathfrak{C}^\star$ tracé sur le plan : $\mathfrak{C}$ s'obtiendra à partir de $\mathfrak{C}^\star$ en identifiant certains côtés libres. Bordons $\mathfrak{C}^\star$ par un polygone $\Pi$ de manière que chaque côté libre de $\mathfrak{C}^\star$ aboutisse à un côté de $\Pi$.

Associons deux à deux les côtés de $\Pi$ comme les côtés libres de $\mathfrak{C}^\star$ qui y aboutissent. L'identification de deux côtés associés transforme $\Pi$ en une surface close $S_0$, et $\mathfrak{C}^\star$ en un arbre $T_0$ qui réalise une triangulation de $S_0$. Désignons par $p^\star$ la représentation de T sur $T_0$ associant à un nœud de T l'image dans $T_0$ de son équivalent dans $\mathfrak{C}$. Soit K un polygone de S. Chacun de ses côtés a une image unique sur $T_0$. A la périphérie $\tilde{K}$ de K est alors associée par $p^\star$ la périphérie $\tilde{K}_0$ d'un polygone $K_0$ découpé par $T_0$ sur $S_0$. Soient $A_1, A_2, \ldots, A_\nu$ tous les nœuds d'une même classe d'équivalence sur $\tilde{K}$ et $A_0$ leur image sur $\tilde{K}_0$ ; $\nu$ est appelé la *caractéristique* de K. Soit $\Omega$ le centre de K auquel nous faisons correspondre un point $\Omega_0$ intérieur à $K_0$ (centre de $K_0$). Introduisons dans $K_0$ le « rayon » $\Omega_0 A_0$ et dans K les rayons $\Omega A_i (i = 1, 2, \ldots, \nu)$. Établissons une correspondance entre $\Omega A_i$ et $\Omega_0 A_0$ de sorte que $\Omega_0$ et $A_0$ soient les images respectives de $\Omega$ et $A_i$. A la périphérie du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ est associée ainsi par une correspondance $\check{p}$ la périphérie du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$ « d'ouverture $2\pi$ », la restriction à T de $\check{p}$ étant $p^\star$. $\check{p}$ peut être prolongée en une correspondance topologique entre l'intérieur du secteur $A_i \Omega A_{i+1}$ et l'intérieur du secteur $A_0 \Omega_0 A_0$. Donc $p^\star$ se prolonge dans K en une représentation $p$ de K sur $K_0$ de sorte que $(K, p)$ soit un recouvrement d'ordre $\nu$ de $K_0$ relativement ramifié à l'ordre $\nu$ au centre de $K_0$ et seulement en ce point.

Le prolongement de $p^\star$ en $p$ pouvant se faire dans tout polygone de S, $(S, p)$ est un recouvrement de $S_0$ relativement ramifié aux centres $\Omega_0^i$ de certains polygones découpés par $T_0$ sur $S_0$. Montrons que ce recouvrement est régulier : considérons un polynome $K_0$ de $S_0$. On peut caractériser $K_0$ sur $S_0$ par la donnée d'un de ces nœuds périphériques, soit $N_0$, et la nature des deux côtés aboutissant en ce nœud. Tous les polygones de S représentés sur $K_0$ par $p$ ont chacun parmi leurs sommets au moins un nœud de l'ensemble $p^{-1}(N_0)$. Tous les nœuds de cet ensemble sont équivalents, donc tous les polygones admettant l'un de ces nœuds pour sommet et limités par des côtés de même nature que ceux de $K_0$, ont la même caractéristique.

THÉORÈME. — *A toute surface $\Sigma$ représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface $\Sigma_0$ close et une représentation $\pi$ de $\Sigma$ sur $\Sigma_0$ de sorte que $(\Sigma, \pi)$ soit un recouvrement de $\Sigma_0$ régulièrement et relativement ramifié en un nombre fini de points* (*cf.* définitions 3, A.1).

En effet $\Sigma \xrightarrow{\sigma} S$ ($\sigma$ biunivoque bicontinue). $(S, p)$ est un recouvrement de $S_0$ relativement et régulièrement ramifié. Soit alors $\Sigma_0$ la surface (considérée comme associée à une projection de $\Sigma_0$ sur $B_0$ qui en fait un recouvrement de $B_0$) représentée par $T_0 = p(T)$; $\Sigma_0$ est une surface close et $\Sigma_0 \xrightarrow{\sigma_0} S_0$. Donc il existe une représentation $\pi = \sigma_0^{-1} \circ p \circ \sigma$ de $\Sigma$ sur $\Sigma_0$ telle que $(\Sigma, \pi)$ est un recouvrement de $\Sigma_0$ relativement et régulièrement ramifié.

4. T SIMPLEMENT CONNEXE. — Supposons maintenant T régulièrement ramifié

et simplement connexe, c'est-à-dire tracé sur le plan. Nous avons démontré antérieurement le résultat suivant [17] :

*Étant donné sur une surface close* $S_0$, *n points* $\Omega_0^i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *et n indices* $\nu_i$ *associés aux* $\Omega_0^i$ *il existe une surface close* $S_1$ *et une représentation* $p_0$ *de* $S_1$ *sur* $S_0$ *de sorte que* $(S_1, p_0)$ *soit un recouvrement de* $S_0$ *régulièrement ramifié à l'ordre* $\nu_i$ *aux* $\Omega_0^i$ *et seulement en ces points, (sauf si* $n = 2$ *avec* $\nu_1 \neq \nu_2$ *et* $S_0$ *de genre zéro).*

Dans le cas actuel S est un plan. Choisissons une détermination particulière $\hat{p}_0^{-1}$ de $p_0^{-1}$ et montrons que $p_1 = \hat{p}_0^{-1} \circ p$ est uniforme :

1° *localement :* soit $A \in S$. Si $A \not\equiv \Omega_i$, $p_2$ est localement biunivoque comme $p$ et $\hat{p}_0^{-1}$. Si $A \equiv \Omega_i$, soient $A_0 = p(A)$, $A_1 = \hat{p}_0^{-1}(A_0)$. Choisissons sur $S_0$ un voisinage $V_0$ de $A_0$ identique ou contenu dans le polygone de $S_0$ qui contient $A_0$. Soient V et $V_1$ les images de $V_0$ par $p^{-1}$ et $\hat{p}_0^{-1}$. $p_1$ réalise une correspondance biunivoque entre V et $V_1$ ;

2° *globalement :* soit C une courbe fermée joignant A à lui-même dans le plan S. D'après 1° on peut, en modifiant C dans un voisinage de A, supposer que A est un nœud de T, et cela sans changer la nature, fermée ou ouverte, de $C_1$ image de C par $p_1$. Soient $A_1$ et $A'_1$ les extrémités de $C_1$. Désignons par opération $(r)$ l'opération suivante : soit $\gamma$ un arc de C intérieur ou frontière d'un polygone K ayant avec l'intérieur de C une intersection non vide. Remplaçons $\gamma$ par la frontière de P intérieure à C. L'opération $(r)$ ne change pas les points $A_1$ et $A'_1$.

Par une répétition finie de l'opération $(r)$, on peut réduire C au point A, alors $A_1 \equiv A'_1$. $C_1$ est donc une courbe fermée.

Dans ces conditions, $(S, p_1)$ est un recouvrement relativement non ramifié de $S_1$. Soit $T_1 = p_1(T) = \hat{p}_0^{-1}(T_0)$ et soit $(\Sigma_1, \tau_1)$ le recouvrement de $B_0$ représenté par $T_1$. $\Sigma_1 \overset{\sigma_1}{\to} S_1$ où $\sigma_1$ est bicontinue biunivoque. Posons $\pi_1 = \sigma_1^{-1} \circ p_1 \circ \sigma$, $(\Sigma_1, \pi_1)$ est un recouvrement relativement non ramifié de $\Sigma_1$. Si nous remarquons que $\Sigma_1$ est une surface close on obtient le résultat suivant :

THÉORÈME. — *A toute surface* $\Sigma$ *simplement connexe représentée par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygone infini, on peut associer une surface* $\Sigma_1$ *close et une représentation* $\pi_1$ *de* $\Sigma$ *sur* $\Sigma_1$ *de sorte que* $(\Sigma, \pi_1)$ *soit un recouvrement de* $\Sigma$ *relativement non ramifié.*

5. SURFACES DE RIEMANN. — Si $B_0$ et $\Sigma$ sont des surfaces de Riemann et $(\Sigma, \tau)$ un recouvrement riemannien de $B_0$, alors $\tau_0$ et $\tau_1$ sont des projections riemanniennes ainsi que $\pi = \tau_0^{-1} \circ \tau$, $\pi_0 = \tau_0^{-1} \circ \tau_1$ et $\pi_1 = \tau_1^{-1} \circ \tau = \pi_0^{-1} \circ \tau$ puisque $\pi$, $\pi_0$, $\pi_1$ ainsi définis sont uniformes.

THÉORÈME. — *A toute surface de Riemann $\mathcal{R}$ simplement connexe, représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié, sans polygones infinis, on peut associer une surface de Riemann $\mathcal{R}_1$ close et une représentation riemannienne $\omega$ de $\mathcal{R}$ sur $\mathcal{R}_1$, de sorte que $(\mathcal{R}, \omega)$ soit un recouvrement de $\mathcal{R}_1$ relativement non ramifié.*

Remarquons que toute surface de Riemann close $\mathcal{R}_1$ peut être projetée sur une surface de Riemann close de genre zéro de sorte que $\mathcal{R}_1$ soit représentable par un arbre topologique; le recouvrement universel de $\mathcal{R}_1$ est représentable par un arbre topologique régulièrement ramifié sans polygones infinis.

Les relations entre les diverses surfaces sont résumées dans le tableau ci-dessous où les signes $\leftrightarrow$ indiquent des représentations topologiques (biunivoques), $\rightarrow$ des représentations continues (projections) et $\Rightarrow$ des projections riemanniennes.

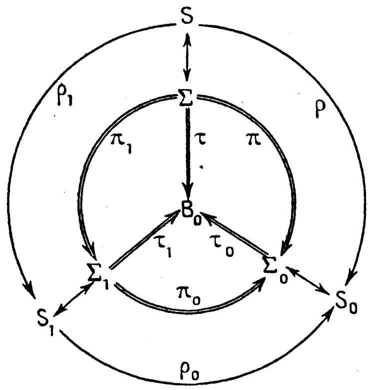


Fig. 1.

## D. — Sur un théorème de Shimizu.

1. INTRODUCTION. — Fatou (1919) a montré que si une fonction rationnelle admettait une fonction d'automorphie uniforme, celle-ci était homographique (*cf.* aussi Gunnar of Hällström [2, 12, 14].

Shimizu (1931) a montré que les fonctions d'automorphie uniformes des fonctions méromorphes transcendantes étaient de la forme $e^{i\theta\pi}z + b$, où $\theta$ est rationnel. La démonstration de Shimizu utilise une décomposition en facteurs de $f(z') - f(z)$ due à Gronwall et Hahn, et le théorème suivant de Julia [4] :

*Le complémentaire du domaine d'existence de $z'(z)$ définie par $g(z', z) = 0$, où $g$ est entière, ne comprend pas de continu.*

Dans le cas général où $z'(z)$ est multiforme, ce théorème n'indique pas que le prolongement de $z'(z)$ n'est jamais arrêté par un continu. En d'autres termes considérons la surface de Riemann R de $z'(z)$ et sa projection sur le plan $z$ :

il pourrait arriver que R admette un continu frontière $\mathcal{C}$ se projetant en C et l'on ne sera pas en contradiction avec le théorème de Julia si C est intérieur à la projection d'un domaine de R, non contigu à $\mathcal{C}$.

Si la méthode de Shimizu, peut avec quelques précautions, démontrer la première partie du théorème 11 de son Mémoire qui s'énonce comme suit :

*Si $\Phi(z)$ satisfaisant à $f(\Phi)=f$ est uniforme dans un domaine du plan, c'est une fonction entière.*

Cette même méthode ne peut servir à démontrer la seconde partie :

*Si $\Phi(z)$ est à p déterminations dans un domaine du plan, $\Phi(z)$ est une algébroïde finie.*

Nous allons prouver ici par la seule utilisation du théorème d'Iversen que si $\Phi(z)$ est à $p$ déterminations dans un domaine quelconque du plan, $\Phi(z)$ est à $p$ déterminations dans tout le plan, sans autre singularité que des points de ramification.

2. Théorème de Shimizu. — Lemme. — *Soient $f(z)$ méromorphe et $\varphi_0$ un élément régulier de $f^{-1}\circ f$ défini en* O. *Soit* $(b)$ *une bande quelconque contenant* O *et un point $\omega$ : il est possible de prolonger $\varphi_0$ jusqu'en $\omega$ exclusivement suivant une courbe intérieure à* $(b)$.

On peut d'abord en diminuant au besoin le domaine couvert par $(b)$ supposer que $(b)$ ne contient pas de zéros de $f'(z)$, sauf peut-être O ou $\omega$. Ainsi si $f(O)=O_1$, $f(\omega)=\omega_1$, l'image de $(b)$ étant une bande $(\beta)$, il y a une branche de $f^{-1}$ qui prend en $O_1$ la valeur zéro et qui par prolongement dans $(\beta)$ associe à $(\beta)$ la bande $(b)$. La branche de $f^{-1}$ définie en $O_1$, qui intervient comme facteur de gauche dans l'expression $\varphi_0=f^{-1}\circ f$, est prolongeable de $O_1$ jusqu'à $\omega_1$ exclusivement [si cette branche n'est pas uniforme en $O_1$, on peut la définir en utilisant un point O′ de $(b)$, voisin de O], suivant une courbe $\Lambda$ intérieure à $(\beta)$. $\varphi_0$ est donc prolongeable de O jusqu'en $\omega$ exclusivement suivant une courbe L intérieure à $(b)$.

*Domaine de définition.* — D'après le lemme précédent le domaine de définition de $\Phi$ obtenu par prolongement de $\varphi_0$ est partout dense dans le plan complexe $C_z$.

*Multiformité.* — Considérons un système fini d'éléments réguliers $\varphi_i$ : en prolongeant $\varphi_{i+1}$ dans la bande définie par le prolongement de $\varphi_i$ on peut trouver L intérieure à $(b)$ joignant O à $\omega$ et suivant laquelle les éléments $\varphi_i$ et $\varphi_{i+1}$ sont prolongeables jusqu'à $\omega$ exclusivement.

Si $\Phi$ est à $p$ déterminations $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ en A, il existe quel que soit B, dans un voisinage de B des points où $\Phi$ a au moins $p$ déterminations distinctes obtenues par prolongement de $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_p$ suivant une même courbe L. Si deux des éléments ainsi obtenus étaient confondus en $\varphi^\star$, on devrait pouvoir prolonger $\varphi^*$ jusqu'en A suivant L et obtenir deux déterminations distinctes ce qui est impossible puisque L ne contient pas de zéros de $f'$ autres que A et B éventuellement (l'élément initial de ce prolongement astreint seulement à être dans un voisinage de B peut être défini en un point où $f' \neq 0$).

Supposons $\Phi$ effectivement à $p$ déterminations dans un domaine $D_1$ de $C_z$. En aucun point de $C_z$, $\Phi$ ne peut avoir plus de $p$ déterminations. $\Phi$ a donc effectivement $p$ déterminations dans un domaine partout dense de $C_z$.

*Singularités de* $\Phi$. — Supposons la branche $\varphi_i$ définie en A prolongeable suivant $\gamma$ jusqu'en $x$ exclusivement. Soit $x_n$ une suite de points sur $\gamma$ tendant vers $x$, $y_n$ leurs images par $\varphi_i$; $\chi_n = f(y_n) = f(x_n)$. Soit $y$ un point limite de la suite $(y_n)$. Si $y$ est à distance finie, $f(y)$ est déterminée et $f(y) = f(x)$; d'après B.3 (p. 188) $\varphi_i$ qui associe $y$ à $x$ est régulière au point $x$ (peut-être avec ramification). Nécessairement $y$ est rejeté à l'infini.

Soit A régulier pour toutes les branches de $\Phi$. Considérons dans le plan $C_z$ un domaine doublement connexe $\Delta$, tel que $A \in \Delta$, $f(z) \neq f(x)$ pour $z \in \Delta$, $x \notin \Delta$, $\infty \notin \Delta$, $\Delta$ séparant $x$ et l'infini, suivant laquelle toutes les déterminations de $\Phi$ (en A) sont prolongeables jusqu'en A (ici inclusivement). Désignons par D l'intérieur de L ($D \ni x$, $D \not\ni \infty$).

Soient $\mathcal{L}'_1, \mathcal{L}'_2, \ldots, \mathcal{L}'_p$ toutes les images par $\Phi$ de L; considérées dans leur ensemble elles constituent nécessairement un système de $k$ courbes fermées $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_k$ ($k \leq p$).

Prolongeons $\varphi_i$ dans D de toutes les manières possibles, on obtient dans $C_z$ un domaine $d_x$ limité en particulier par des courbes $\mathcal{L}_i$ : nous supposerons que ces $\mathcal{L}_i$ sont $\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2, \ldots, \mathcal{L}_h$, les autres étant $\mathcal{L}_{h+1}, \ldots, \mathcal{L}_k$.

Soit $\mathcal{O}$ l'extérieur de toutes les courbes $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, 2, \ldots, h$). Choisissons $y_0$ sur $\gamma$ suffisamment près de $x$ pour que $\eta_0 = \varphi_i(y_0)$ soit dans $\mathcal{O}$. C'est possible puisque d'après le début de ce paragraphe les $y_n$ tendent vers l'infini [$y_n = \varphi_i(x_n)$, où $x_n \to x$]. Considérons dans $\mathcal{O}$ une bande quelconque $\mathcal{B}$ contenant $\eta_0$ et un point arbitraire $\eta$. Il est possible de prolonger $\varphi_i^{-1}$ (déterminé en $\eta_0$) dans $\mathcal{B}$ de $\eta_0$ jusqu'à $\eta$ exclusivement, suivant une courbe $\lambda$ d'image $l$. $l$ ne peut sortir de L, si non soit $m$ le premier point d'intersection de $l$ avec L; prolongeons $\varphi_i$ de $y_0$ jusqu'à $m$ : on définit ainsi en $m$ un élément $\varphi_k$ de $\Phi$ qui représente $m$ en $\mathfrak{M}$ sur une courbe $\mathcal{L}_i$ ($i = 1, \ldots, h$), puisque $\varphi_k$ a été obtenu par prolongement de $\varphi_i$ dans D.

Ainsi $d_x$ est un ouvert partout dense dans $\mathcal{O}$. On peut avoir construit L dans un voisinage de $x$ suffisamment petit pour que si $z \in D$, $|f(z) - f(x)| < a$. Soit alors $(u_n)$ une suite de points du plan $z$ pour lesquels $f(u_n) = U$ avec $f(z) \neq U$ pour $z \in D$. Il y a dans tout voisinage de $u_n$ des points effectivement atteints par prolongement de $\varphi_i$ dans $\mathcal{O}$. En ces points $f(z)$ prend des valeurs voisines de U. On ne peut avoir $f(\Phi) = f$ pour ces points.

$\Phi$ n'a donc pas de singularité dans D. $\Phi$ est donc dans tout $C_z$ à $p$ déterminations sauf aux points de ramification. $\Phi$ n'a pas non plus de pôle.

Alors $\Phi$ peut être définie par l'équation

$$A_0(z)\Phi^p + A_1(z)\Phi^{p-1} + \ldots + A_p(z) = 0,$$

où les $A_i(z)$ sont des fonctions entières; $A_0$ toujours $\neq 0$ peut être pris constant. On dit que $\Phi$ est une algébroïde finie.

Le théorème 11 de Shimizu est ainsi démontré. On peut poursuivre l'étude de $\Phi$ comme Shimizu l'a fait en utilisant par exemple les résultats de Fatou sur l'itération des fonctions entières. L'étude est plus difficile dans le cas où $z' = \Phi(z)$ est à $p(p > 1)$ déterminations.

Les résultats sont les suivants :

*Si $\Phi$ est uniforme dans un domaine du plan, alors $z' = e^{i\theta\pi}z + b$, $\theta$ rationnel.*

*Si $\Phi$ est à p déterminations dans un domaine du plan, alors*

$$z'^p + az^p + P(z', z) = 0, \qquad \text{où} \quad |a| = 1$$

*et où $P(z', z)$ est un polynome en z et z' de degré $\leqq p$ par rapport à l'ensemble des variables z et z', de degré $< p$, par rapport à chacune d'elles.*

### E. — Arbre topologique et fonction d'automorphie (1).

1. Nœuds équivalents. — Soit maintenant $(\mathcal{R}, \omega)$ un recouvrement riemannien d'une surface de Riemann $B_0$ conformément équivalente au plan privé d'un nombre fini de points. Ces points peuvent être imparfaitement couverts par $\mathcal{R}$ pour $\omega$, ou même peuvent ne pas être couverts du tout.

Conventionellement chaque nœud de T représente un demi-domaine fondamental de $\mathcal{R}$ (pour $\omega$). L'association de deux nœuds de même espèce sur T définit une fonction d'automorphie de $\omega$, dont on peut étudier la multiformité et les points de ramification, sur T lui-même.

Supposons que $\omega$ admette une fonction d'automorphie biuniforme (déjà étudiée en B.4). Soient $A_1$ et $A_2$ deux nœuds de T, images de deux demi-domaines de $\mathcal{R}$, se correspondant par $\varphi$. A tout parcours fermé sur T, d'origine $A_1$, correspond un parcours fermé d'origine $A_2$ et inversement, c'est donc que $A_1$ et $A_2$ sont équivalents sur T. Inversement si T possède deux nœuds équivalents, la fonction d'automorphie de $\omega$ définie par la correspondance entre ces deux nœuds est biuniforme. Si l'on considère alors l'uniformisante globale $f$ de $\mathcal{R}$, $\omega \circ f^{-1}$ est une fonction uniforme dans le plan, ou le cercle, automorphe pour une fonction homographique n'appartenant pas au groupe obtenu par

(1) *Voir* aussi [13].

le recouvrement de $\mathcal{R}$. Si $\omega \circ f^{-1}$ est total automorphe la cellule de T comprend seulement deux nœuds d'espèces différentes, et inversement.

2. Cas particulier. — Nous allons, par exemple, montrer que le théorème de Shimizu de la section D ne peut être étendu au cas des fonctions uniformes dans le cercle-unité.

Prenons pour surface $B_0$ le plan entier sur lequel nous fixons six points. Construisons alors la surface de Riemann $\mathcal{R}$ recouvrement de $B_0$ ramifié en ces six points et représentable par l'arbre topologique suivant :

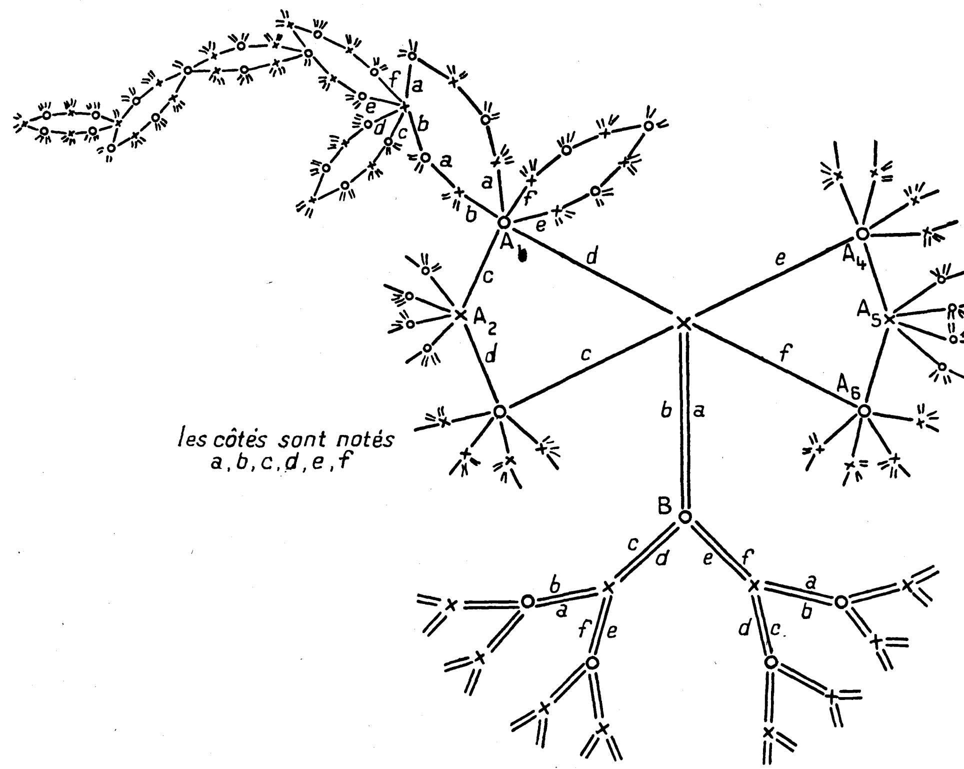


Fig. 2.

Sur cet arbre les points situés au delà des $A_i$, dans la partie supérieure appartiennent chacun à trois octogones, tandis que ceux situés au-dessous de B sont chacun communs à trois polygones plats (deux côtés). Toute fonction d'automorphie de l'uniforminante de $\mathcal{R}$, associant un nœud « au-dessous » de B à un nœud « au-dessus » des $A_i$ est uniforme mais pas son inverse. C'est encore le cas si l'on prend la fonction d'automorphie définie par M(P) où l'on prend M en B et P en l'un des six $A_i$.

$\mathcal{R}$ est bien une surface de Riemann, simplement connexe, nécessairement de type hyperbolique.

## Bibliographie.

[1] H. Weyl, *Die Idee der Riemannschen Flache*, 1913.

[2] P. Fatou, *Sur les équations fonctionnelles* (*Bull. Soc. Math. France*, t. **67-68**, 1919-1920).

[3] De Kerekjarto, *Vorlesungen uber Topologie*, Springer, 1923.

[4] G. Julia, *Sur le domaine d'existence d'une fonction implicite définie par une relation entière* $G(x, y) = 0$ (*Bull. Soc. Math. France*, t. **54**, 1926).

[5] T. Shimizu, *On the fondamental domains and the groups for meromorphic functions* (*Jap. J. Math.*, t. **8**, 1931).

[6] Seifert et Threlfall, *Lehrbuch der Topologie*, Teubner, 1936.

[7] L. Ahlfors, *Zur Theorie der Uberlagerungsflachen* (*Acta Math.*, t. **65**, 1935).

[8] L. Ahlfors, *Geometrie der Riemannschen Flächen* (*Congrès international des mathématiciens*, Oslo, 1936).

[9] S. Stoilow, *Leçons sur les principes topologiques de la théorie des fonctions analytiques*, Gauthier-Villars, 1938.

[10] F. Marty, *Sur les groupes et hypergroupes attachés à une fraction rationnelle* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. **53**, 1936).

[11] R. Nevanlinna, *Eindeutige analytische Functionen*, Springer, 1936.

[12] Gunnar af Hällström, *Uber Substitutionen, die eine rationale Funktion invariant lassen* (*Acta. Acad. Aboens.*, t. **15**, n° 6, 1946).

[13] Gunnar af Hällström, *On the study of algebraic functions of automorphism by help of graphs* (*X. Skand. Math. Kongr. København*, 1946).

[14] Gunnar af Hällström, *Uber die Automorphiefunktionen meromorpher Funktionen*, (*Acta. Acad. Aboens.*, **16**, n° 4, 1946).

[15] C. Chevalley, *Theory of Lie Groups*, Princeton, 1946.

[16] L. Fourès, *Sur la théorie des surfaces de Riemann* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 68, 1951).

[17] L. Fourès, *Sur les recouvrements régulièrement ramifiés* (*Bull. Sc. math.*, t. **76**, 1952).

[18] L. Fourès, *Le problème des translations isothermes* (*Ann. Inst. Fourier*, Grenoble, 1952).