Annales scientifiques de l'É.N.S.

J. Dixmier

Sur la réduction des anneaux d'opérateurs

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 68 (1951), p. 185-202
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__185_0>

SUR LA

RÉDUCTION DES ANNEAUX D'OPÉRATEURS

PAR M. J. DIXMIER.

Dans un précédent article [1] (1), j'ai défini et étudié les anneaux d'opérateurs de classe finie. Le présent article est consacré aux anneaux d'opérateurs quelconques (2). J. von Neumann a montré [5] que ces anneaux étaient des *sommes directes généralisées* de facteurs (cette notion fait intervenir essentiellement la théorie de la mesure). En *regroupant* ceux de ces facteurs qui appartiennent à une même *classe* (la classification des facteurs a été faite par F. J. Murray et J. von Neumann dans [3]), on obtient une décomposition moins fine des anneaux d'opérateurs. Le but du présent travail est d'obtenir cette réduction indépendamment de [3], de [5], et de toute théorie de la mesure. Les démonstrations sont valables dans des espaces non séparables, alors que les démonstrations de [3] et [5] s'appliquent seulement aux espaces séparables. Les résultats contiennent donc la classification des facteurs dans les espaces hilbertiens quelconques.

Les théorèmes qui suivent seront utilisés dans un autre Mémoire, à paraître dans *Compositio Mathematica*, où l'on généralisera aux anneaux quelconques la théorie de l'application $\natural$, établie dans [1] pour les anneaux de classe finie.

Des résultats voisins ont été obtenus par I. Kaplansky [2].

Notations et remarques diverses.

On utilisera sans explications les notations de [1]. Cependant, quelques modifications ont paru préférables.

(1) Les chiffres entre crochets renvoient à la bibliographie.

(2) Il sera toujours sous-entendu que ces anneaux contiennent 1. Cette restriction n'est d'ailleurs pas essentielle, d'après [4].

1. Soit $\mathbf{M}$ un anneau d'opérateurs. Le centre de $\mathbf{M}$ sera noté $\mathbf{M}^\natural$ (dans [1], il est noté $\mathbf{M} \cap \mathbf{M}'$).

2. Si N est un ensemble quelconque d'opérateurs, on désignera par $\widetilde{N}$ l'ensemble des variétés linéaires fermées $\mathfrak{M}$ telles que $P_{\mathfrak{M}} \in N$. Ainsi, l'ancienne notation $\mathfrak{M}\,\eta\,\mathbf{M}$ est remplacée par $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$.

3. Soit $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$. On désignera par $\mathfrak{M}^\natural$ ce qui, dans [1], était noté $[\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}]$ (*cf.* définition 3.1 de [1]). Rappelons que $\mathfrak{M}^{\mathbf{M}}$ est la réunion des $U(\mathfrak{M})$ où U parcourt $\mathbf{M}_U$. La variété $\mathfrak{M}^\natural$ est la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenant $\mathfrak{M}$, ou encore la variété sous-tendue par les variétés équivalentes à $\mathfrak{M}$ ([1], lemme 3.1). Si $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i^\natural$ est la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenant les $\mathfrak{M}_i^\natural$, donc les $\mathfrak{M}_i$, donc $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$; d'où

$$\Big(\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i\Big)^\natural = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i^\natural$$

4. On écrira $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ s'il existe une $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$ avec $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{N}$. La relation $\mathfrak{M} \prec \mathfrak{N}$ est réflexive et transitive. Si $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$[resp. $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$] est une famille de variétés deux à deux orthogonales, et si $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{N}_i$ pour $i \in I$, on a $\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i \prec \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i$.

I. — Variétés finies et infinies.

Les propriétés des variétés finies s'obtiennent à peu près comme dans [3]. Par contre, pour les variétés infinies, le fait que $\mathbf{M}$ n'est pas un facteur et la non-séparabilité de l'espace entraînent des complications.

Définition 1.1. — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite finie si toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenue dans $\mathfrak{M}$ et équivalente à $\mathfrak{M}$ est identique à $\mathfrak{M}$. Si $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ n'est pas finie, $\mathfrak{M}$ sera dite infinie*

Définition 1.2 — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite proprement infinie si $\mathfrak{M} \neq 0$ et si, pour toute variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M} \neq 0$, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}$ est infinie.*

Définition 1.3. — *Une variété $\mathfrak{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ sera dite purement infinie si $\mathfrak{M} \neq 0$ et si $\mathfrak{M}$ ne contient aucune variété finie $\neq 0$.*

On a immédiatement les implications suivantes :

$$\text{purement infinie} \rightarrow \text{proprement infinie} \rightarrow \text{infinie}.$$

Il est aussi évident que, si $\mathfrak{M}$ est infinie et si $\mathfrak{M}' \supset \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}$), $\mathfrak{M}'$ est infinie. Car si $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}_1$ avec $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$, on a

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \oplus (\mathfrak{M}' \ominus \mathfrak{M}) \sim \mathfrak{M}_1 \oplus (\mathfrak{M}' \ominus \mathfrak{M}) \neq \mathfrak{M}.$$

LEMME 1.1. — *Soient* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *des variétés finies telles que les* $\mathfrak{M}_i^\natural$ *soient deux à deux orthogonales.* $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$ *est finie.*

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}^\natural = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i^\natural$ une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$. Elle est compatible avec les $\mathfrak{M}_i^\natural$, donc, posant $\mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M}' \cap \mathfrak{M}_i^\natural$, on a $\mathfrak{M}' = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}'_i$. D'autre part, $\mathfrak{M}_i = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{M}_i^\natural$ est évident. Si alors $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$, on a $\mathfrak{M}'_i \subset \mathfrak{M}_i$ et $\mathfrak{M}'_i \sim \mathfrak{M}_i$, donc, puisque $\mathfrak{M}_i$ est finie, $\mathfrak{M}'_i = \mathfrak{M}_i$; donc $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}$.

LEMME 1.2. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$. *Il existe une variété* $\mathfrak{N}$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *telle que* : 1° $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}$ *est finie*; 2° $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = 0$ *ou* $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ *est proprement infinie.*

Démonstration. — Considérons, grâce au théorème de Zorn, une famille $(\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$ maximale de variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ deux à deux orthogonales telles que $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i$ soit finie pour tout $i \in \mathrm{I}$. Soit $\mathfrak{N} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i$. On a $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{N}_i$, donc $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i)^\natural \subset \mathfrak{N}_i$, donc les $(\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i)^\natural$ sont deux à deux orthogonales. D'après le lemme 1.1, $\mathfrak{M} \cap \mathfrak{N} = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M} \cap \mathfrak{N}_i$ est finie. Montrons par l'absurde que, si $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$, $\mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ est proprement infinie. S'il existait une variété $\mathfrak{N}' \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathfrak{N}' \cap \mathfrak{M} \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ soit $\neq 0$ et finie on pourrait ajouter $\mathfrak{N}' \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \neq 0$ à la famille $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, ce qui contredit le fait que cette famille est maximale.

LEMME 1.3. — *Soit* $\mathfrak{M}$ *une variété proprement infinie. Pour tout entier* $n > 0$, *il existe une partition* $\mathfrak{M}^1, \mathfrak{M}^2, \ldots, \mathfrak{M}^n$ *de* $\mathfrak{M}$ *telle que* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}^1 \sim \mathfrak{M}^2 \sim \ldots \sim \mathfrak{M}^n$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1$, avec $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_1$. Si $\mathrm{U} \in \mathrm{M}_{\mathrm{PI}}$ applique isométriquement $\mathfrak{M}_1$ sur $\mathfrak{M}_2$, posons $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}^i(\mathfrak{M}_1)$. On a $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}(\mathfrak{M}_i)$, ce qui prouve, par récurrence, que $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \ldots$. Soit $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i \ominus \mathfrak{M}_{i+1}$. On a $\mathfrak{M}_{i+1} = \mathrm{U}^i(\mathfrak{N}_1)$, donc $0 \neq \mathfrak{N}_1 \sim \mathfrak{N}_2 \sim \mathfrak{N}_3 \sim \ldots$. Ainsi $(\mathfrak{N}_1, \mathfrak{N}_2, \ldots)$ est une partition homogène infinie majorée par $\mathfrak{M}_1$.

Considérons les partitions homogènes majorées par $\mathfrak{M}_1$ qui contiennent $\mathfrak{N}_1$ $\mathfrak{N}_2$, ... comme éléments. Soit (théorème de Zorn) $\Phi = (\mathfrak{N}_i)_{i\in I}$ une telle partition maximale. Soit $\mathfrak{N}_0 = \mathfrak{M}_1 \ominus \left(\bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i\right)$. Appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{N}_0$ et $\mathfrak{N}_1$ qui sont orthogonales. Il existe :

deux variétés $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}'$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, avec $\mathfrak{N}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}$;

trois variétés orthogonales n_1, $\bar{n}_1$, n_0 contenues dans $\mathfrak{N}$;

trois variétés orthogonales n'_1, n'_0, $\bar{n}'_0$ contenues dans $\mathfrak{N}'$;

avec

$$n_1 \sim n_0, \qquad n'_1 \sim n'_0, \qquad \mathfrak{N}_1 = n_1 \oplus \bar{n}_1 \oplus n'_1, \qquad \mathfrak{N}_0 = n_0 \oplus n'_0 \oplus \bar{n}'_0$$

On a $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N} \neq 0$, sinon $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{N}'$, donc $\mathcal{N}_1 = n'_1 \sim n'_0 \subset \mathcal{N}_0$, de sorte que Φ ne serait pas maximale (on pourrait lui ajouter n'_0).

Puisque $\mathcal{N}_i \sim \mathcal{N}_1$ pour $i \in \mathrm{I}$, il existe dans $\mathcal{N}_i$ des variétés orthogonales n_i, n'_i, $\bar{n}_i$ avec

$$n_i \sim n_1, \qquad n'_i \sim n'_1, \qquad \bar{n}_i \sim \bar{n}_1, \qquad \mathcal{N}_i = n_i \oplus \bar{n}_i \oplus n'_i.$$

Puisque $\mathcal{N}_0$ et les $\mathcal{N}_i$ sous-tendent $\mathcal{M}_1$, et puisque toutes ces variétés sont compatibles avec $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$, on voit que n_0, les n_i et les $\bar{n}_i$ sous-tendent $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}$. Soit $\mathcal{N}^\star$ la variété sous-tendue par les n_i et les $\bar{n}_i$. Comme I et $\mathrm{I} \cup \{0\}$ sont équipotents, on a $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} n_i \sim n_0 \oplus \left(\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} n_i\right)$, donc $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N} \sim \mathcal{N}^\star$. Or $\mathcal{N}^\star$ est sous-tendue par la partition homogène $(n_i \oplus \bar{n}_i)_{i \in \mathrm{I}}$. Donc :

Il existe une partition homogène infinie $(\overline{\mathcal{N}}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ de $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N} \neq 0$.

Nous allons alors démontrer le lemme pour $n = 2$, afin de simplifier les notations. Mais il sera évident que la démonstration est générale. Partageons I en deux sous-ensembles I_1, I_2, équipotents à I, et posons $\overline{\mathcal{M}}^1 = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}_1} \overline{\mathcal{N}}_i$, $\overline{\mathcal{M}}^2 = \bigoplus_{i \in \mathrm{I}_2} \overline{\mathcal{N}}_i$. $\overline{\mathcal{M}}^1$ et $\overline{\mathcal{M}}^2$ sont orthogonales, sous-tendent $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}$, et $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N} \sim \overline{\mathcal{M}}^1 \sim \overline{\mathcal{M}}^2$.

Ceci posé, considérons les familles $(\mathcal{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ de variétés deux à deux orthogonales de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ possédant la propriété suivante : pour tout $j \in \mathrm{J}$, il existe des variétés $\overline{\mathcal{M}}_j^1$, $\overline{\mathcal{M}}_j^2$ orthogonales, sous-tendant $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}^j \neq 0$, et telles que $\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}^j \sim \overline{\mathcal{M}}_j^1 \sim \overline{\mathcal{M}}_j^2$. Grâce au théorème de Zorn, considérons une telle famille maximale, que nous notons encore $(\mathcal{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ pour simplifier. Soit $\widetilde{\mathcal{N}} = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \mathcal{N}^j$. On a $\mathcal{M}_1 \cap \widetilde{\mathcal{N}} = \mathcal{M}_1$, sinon $\mathcal{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathcal{N}}) \neq 0$ serait infinie, et, appliquant dans l'espace $\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathcal{N}}$ le raisonnement du début à $\mathcal{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \widetilde{\mathcal{N}})$, on pourrait ajouter une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ à la famille $(\mathcal{N}^j)_{j \in \mathrm{J}}$ qui est pourtant maximale. Alors, les variétés $\mathcal{M}^i = \bigoplus_{j \in \mathrm{J}} \overline{\mathcal{M}}^i$ $(i = 1, 2)$ sont les variétés du lemme.

Lemme 1.4. — *Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{1'}$ (resp. $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{2'}$) deux variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ orthogonales, complémentaires dans une variété $\mathcal{M}$. Il existe deux variétés $\mathcal{N}^1$, $\mathcal{N}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ avec $\mathcal{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathcal{N}^1$ telles que, en posant $\mathcal{M}_i^j = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{N}^j$ $(i = 1, 2, 1', 2'; j = 1, 2)$ on ait $\mathcal{M}_1^1 \prec \mathcal{M}_2^1$, $\mathcal{M}_{1'}^2 \prec \mathcal{M}_{2'}^2$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}_{ij} = \mathcal{M}_i \cap \mathcal{M}_j$ $(i, j = 1, 2, 1', 2')$. Appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathcal{M}_{21'}$ et $\mathcal{M}_{2'1}$. Il existe deux variétés $\mathcal{N}^1$, $\mathcal{N}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, avec $\mathcal{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathcal{N}^1$ telles que $\mathcal{M}_{2'1} \cap \mathcal{N}^1 \prec \mathcal{M}_{21'} \cap \mathcal{N}^1$, $\mathcal{M}_{21'} \cap \mathcal{N}^2 \prec \mathcal{M}_{2'1} \cap \mathcal{N}^2$. On va voir que $\mathcal{N}^1$, $\mathcal{N}^2$ ont les propriétés du lemme. Par exemple, prouvons que $\mathcal{M}_1^1 \prec \mathcal{M}_2^1$.

$\mathcal{M}_{2'1}$ et $\mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_{2'1}$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_1$; $\mathcal{M}_{21'}$ et $\mathcal{M}_2 \ominus \mathcal{M}_{21'}$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_2$. Or $\mathcal{M}_1 \ominus \mathcal{M}_{2'1}$ et $\mathcal{M}_2 \ominus \mathcal{M}_{21'}$ sont en position p' donc équivalentes, donc leurs intersections avec $\mathcal{N}^1$ sont équivalentes. Ceci, combiné avec $\mathcal{M}_{2'1} \cap \mathcal{N}^1 \prec \mathcal{M}_{21'} \cap \mathcal{N}^1$, donne $\mathcal{M}_1^1 \prec \mathcal{M}_2^1$.

Lemme 1.5. — *Si $\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \ldots, \mathcal{M}_n$ sont des variétés finies, $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i$ est finie.*

Démonstration. — Par récurrence, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{1'}$. Soient $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_{1'}$ et $\overline{\mathcal{M}}_1 = \mathcal{M} \ominus \mathcal{M}_1$. $\overline{\mathcal{M}}_1$ est en position p' avec $\mathcal{M}_{1'} \ominus (\mathcal{M}_1 \cap \mathcal{M}_{1'}) \subset \mathcal{M}_{1'}$ donc est finie. Et $\overline{\mathcal{M}}_1$, $\mathcal{M}_1$ sont orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}$. Bref, il suffit de prouver le lemme pour deux variétés $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_{1'}$ finies orthogonales. Supposons $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_{1'}$ infinie. Alors (lemmes 1.2 et 1.3) il existe une variété $\mathcal{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ et une partition $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{2'}$ de $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}$ telle que $\mathcal{M} \cap \mathcal{N} \sim \mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_{2'} \neq 0$.

Raisonnant dans $\mathcal{N}$ et changeant de notations, on a la situation suivante : $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_{1'}$ sont des variétés finies orthogonales, et $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{2'}$ forment une partition de $\mathcal{M} = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_{1'}$ telle que $\mathcal{M} \sim \mathcal{M}_2 \sim \mathcal{M}_{2'}$. Donc $\mathcal{M}_2$, $\mathcal{M}_{2'}$ sont infinies.

Appliquons le lemme 1.4 en changeant le rôle des indices. Il existe deux variétés $\mathcal{N}^1$, $\mathcal{N}^2$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ avec les propriétés suivantes : $\mathcal{N}^2 = \mathrm{H} \ominus \mathcal{N}^1$; $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^1 \prec \mathcal{M}_1 \cap \mathcal{N}^1$, donc $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^1$ est finie; alors $\mathcal{M}_{2'} \cap \mathcal{N}^1 \sim \mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^1$ est aussi finie; $\mathcal{M}_{2'} \cap \mathcal{N}^2 \prec \mathcal{M}_{1'} \cap \mathcal{N}^2$, donc $\mathcal{M}_{2'} \cap \mathcal{N}^2$ et $\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^2$ sont finies. Alors (lemme 1.1) $\mathcal{M}_2 = (\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^1) \oplus (\mathcal{M}_2 \cap \mathcal{N}^2)$ est finie, d'où contradiction.

Les lemmes 1.6 à 1.9 ne seront pas utilisés dans ce qui suit. Mais ils seront nécessaires pour la théorie des applications $\natural$ annoncée dans l'Introduction. Comme ce sont des conséquences directes des lemmes précédents, nous les démontrons ici.

Lemme 1.6. — *Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ deux variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$ finies et équivalentes, et $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ une variété contenant $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$. Il existe un $\mathrm{U} \in \mathbf{M}_{\mathrm{U}}$ conservant $\mathcal{M}$ et tel que $\mathrm{U}(\mathcal{M}_1) = \mathcal{M}_2$.*

Démonstration. — Soit $\mathcal{M}' = \mathcal{M}_1 \oplus \mathcal{M}_2 \subset \mathcal{M}$. $\mathcal{M}'$ est finie (lemme 1.5). Donc les opérateurs de $\mathbf{M}$ réduits par $\mathcal{M}'$ induisent dans $\mathcal{M}'$ un anneau de classe finie. Alors (d'après [1], lemme 4.12) il existe dans l'espace $\mathcal{M}'$ un opérateur unitaire de cet anneau qui transforme $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$. Prolongeons cet opérateur à H par linéarité en un opérateur U en posant $\mathrm{U}x = x$ pour $x \in \mathrm{H} \ominus \mathcal{M}'$. U est invariant par tout unitaire de $\mathbf{M}'$, donc $\mathrm{U} \in \mathbf{M}$, et U transforme $\mathcal{M}_1$ en $\mathcal{M}_2$.

LEMME 1.7. — *Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *deux variétés équivalentes de* $\widetilde{\mathbf{M}}$. *Il existe deux variétés* $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_1''$ (*resp.* $\mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_2''$) *de* $\widetilde{\mathbf{M}}$, *orthogonales, sous-tendant* $\mathfrak{M}_1$ (*resp.* $\mathfrak{M}_2$) *telles que* $\mathfrak{M}_2' = \mathrm{U}'(\mathfrak{M}_1')$ *et* $\mathfrak{M}_2'' = \mathrm{U}''(\mathfrak{M}_1'')$ *pour un* $\mathrm{U}' \in \mathbf{M}_\mathrm{U}$ *et un* $\mathrm{U}'' \in \mathbf{M}_\mathrm{U}$.

Démonstration. — D'après le lemme 1.2, il existe une variété $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ telle que $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N}$ soit finie et $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N})$ proprement infinie [ou $\mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) = 0$]. On a

$$\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{N} \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{M}_1 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}) \sim \mathfrak{M}_2 \cap (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{N}),$$

de sorte qu'il suffit de démontrer le lemme en supposant successivement $\mathfrak{M}_1$ finie et $\mathfrak{M}_1$ proprement infinie. Si $\mathfrak{M}_1$ est finie, il suffit d'appliquer le lemme 1.6 (en prenant $\mathfrak{M}_1' = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_1'' = 0$). Supposons désormais $\mathfrak{M}_1$ (et $\mathfrak{M}_2$) proprement infinies. Alors (lemme 1.3) il existe une partition $(\mathfrak{M}_1', \mathfrak{M}_1'')$ de $\mathfrak{M}_1$, une partition $(\mathfrak{M}_2', \mathfrak{M}_2'')$ de $\mathfrak{M}_2$, avec $\mathfrak{M}_1 \sim \mathfrak{M}_1' \sim \mathfrak{M}_1'' \sim \mathfrak{M}_2 \sim \mathfrak{M}_2' \sim \mathfrak{M}_2''$. Montrons par exemple qu'il existe un $\mathrm{U}' \in \mathbf{M}_\mathrm{U}$ tel que $\mathfrak{M}_2' = \mathrm{U}'(\mathfrak{M}_1')$. Il suffit visiblement de prouver que $\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_2' \sim \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_1'$. Or

$$\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_i' = (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_i) \oplus \mathfrak{M}_i'' \sim (\mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_i) \oplus \mathfrak{M}_i = \mathrm{H} \qquad (i = 1, 2)$$

et le lemme est démontré.

LEMME 1.8. — *Supposons* H *proprement infinie. Soient* $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ *des variétés finies. Il existe une variété équivalente à* $\mathfrak{M}_2$ *et orthogonale à* $\mathfrak{M}_1$.

Démonstration. — Soit $\mathfrak{M}_0 = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}_1$. D'après le théorème 6 de [1] appliqué à $\mathfrak{M}_0$ et $\mathfrak{M}_2$, il existe deux variétés $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}'$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, avec

$$\mathfrak{M}' = \mathrm{H} \ominus \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M} \prec \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}'.$$

Alors $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}$ est finie. $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$ est aussi finie. Puisque $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_0$ sous-tendent H, $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}$ et $\mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}$ sous-tendent $\mathfrak{M}$, qui est donc finie (lemme 1.5). Comme H est proprement infinie, $\mathfrak{M} = 0$. Alors

$$\mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}' \prec \mathfrak{M}_0 \cap \mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_0,$$

ce qui prouve le lemme.

LEMME 1.9. — *Supposons* H *proprement infinie. Si* $\mathfrak{M}_i \prec \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ *avec une variété* $\mathfrak{M}$ *finie, il existe des* $\mathfrak{M}_i' \sim \mathfrak{M}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, *deux à deux orthogonales, telles que* $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \subset \bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i'$.

Démonstration. — Par récurrence sur n, on est ramené a prouver ceci : soient $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$ des variétés deux à deux orthogonales équivalentes à $\mathfrak{M}$; soit $\mathfrak{M}_n \prec \mathfrak{M}$; alors, il existe une variété $\mathfrak{M}_n' \sim \mathfrak{M}$, orthogonale à $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_{n-1}$, avec $\bigoplus_{i=1}^{n} \mathfrak{M}_i \subset \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathfrak{M}_i \right) \oplus \mathfrak{M}_n'$.

Or, soit $\mathcal{M}''_n = \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{M}_i\right) \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i\right)$. $\mathcal{M}''_n$ est en position p' avec une variété contenue dans $\mathcal{M}_n$, donc $\mathcal{M}''_n \prec \mathcal{M}_n \prec \mathcal{M}$. $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i$ est finie (lemme 1.5), donc (lemme 1.8) il existe une $\overline{\mathcal{M}} \sim \mathcal{M}$ avec $\overline{\mathcal{M}}$ orthogonale à $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i$. $\mathcal{M}''_n$ et $\overline{\mathcal{M}}$ sont contenues dans $H \ominus \left(\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i\right)$ donc (lemme 1.6) il existe un $U \in \mathbf{M}_U$ conservant $\bigoplus_{i=1}^{n-1} \mathcal{M}_i$ et tel que $U(\mathcal{M}''_n) \subset \overline{\mathcal{M}}$. $U^{-1}(\overline{\mathcal{M}})$ est la variété $\mathcal{M}'_n$ cherchée.

II. — Première réduction des anneaux d'opérateurs.

DÉFINITION 2.1. — $\mathbf{M}$ *sera dit de classe finie* (*resp. purement infinie*) *si la variété* H *est finie* (*resp. purement infinie*).

C'est bien là la définition des anneaux de classe finie donnée dans [1].

LEMME 2.1. — *Soit* $\mathcal{M}_1$ *une variété finie,* $\mathcal{M}_2$ *une variété purement infinie.* $\mathcal{M}_1$ *et* $\mathcal{M}_2$ *sont orthogonales.*

Démonstration. — Il existe ([1], théorème 6) des variétés m_1, m'_1, (resp. m_2, m'_2) orthogonales complémentaires dans $\mathcal{M}_1$ (resp. $\mathcal{M}_2$) avec $m_1 \prec m_2$, $m'_2 \prec m'_1$, $m_2^\natural$ orthogonale à $m'^\natural_1$. Comme $m_1 \subset \mathcal{M}_1$, m_1 est finie, et, comme $m_1 \prec m_2 \subset \mathcal{M}_2$, $m_1 = 0$. Comme $m'_2 \prec m'_1 \subset \mathcal{M}_1$, m'_2 est finie, et, comme $m'_2 \subset \mathcal{M}_2$, $m'_2 = 0$. Alors, $\mathcal{M}_1^\natural = m'^\natural_1$ est orthogonale à $\mathcal{M}_2^\natural = m_2^\natural$. D'où le lemme.

LEMME 2.2. — *Soit* H^{pi} *la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés purement infinies* ([3]) :

a. $H^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$;

b. H^{pi} *est purement infinie*;

c. les variétés purement infinies ne sont autres que les variétés de $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\neq 0$, *contenues dans* H^{pi}.

Démonstration. — $H^{pi} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ est évident; H^{pi} est aussi invariante par tout $U \in \mathbf{M}_U$, d'où *a*. Toute variété finie est orthogonale à H^{pi}, d'après le lemme 2.1, d'où *b*. Par définition de H^{pi}, toute variété purement infinie est contenue dans H^{pi}; et toute variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$, $\neq 0$, contenue dans H^{pi}, est purement infinie puisque H^{pi} est purement infinie, d'où *c*.

LEMME 2.3. — *Soit* H^f *la variété sous-tendue par l'ensemble des variétés finies de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ ([3]) :

([3]) Si cet ensemble est vide, la variété sous-tendue est o conformément aux conventions usuelles.

a. $\mathrm{H}^f \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$;

b. H^f *est finie*;

c. *les variétés finies de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *ne sont autres que les variétés de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *contenues dans* H^f.

Démonstration. — *a* est immédiat, *c* résulte aussitôt de la définition de H^f et de *b*. Prouvons *b*. Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ la famille des variétés finies de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. Soit $\mathfrak{N} \subset \mathrm{H}^f$, avec $\mathfrak{N} \sim \mathrm{H}^f$. Pour tout $i \in \mathrm{I}$, on a

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i \subset \mathrm{H}^f \cap \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}_i,$$

d'où, comme $\mathfrak{M}_i$ est finie, $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i = \mathfrak{M}_i$. Donc $\mathfrak{N} \supset \mathfrak{M}_i$, et par suite $\mathfrak{N} \supset \mathrm{H}^f$. D'où $\mathfrak{N} = \mathrm{H}^f$, ce qui prouve *b*.

Lemme 2.4. — *Il existe une variété finie* $\mathfrak{M}$ *telle que* $\mathfrak{M}^\natural = \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$.

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ une famille maximale (théorème de Zorn) de variétés finies telles que les $\mathfrak{M}_i^\natural$ soient deux à deux orthogonales. Soit $\mathfrak{M} = \bigoplus_{i\in \mathrm{I}} \mathfrak{M}_i$, qui est finie (lemme 1.1). On a $\mathfrak{M} \subset \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$ (lemme 2.1), donc $\mathfrak{M}^\natural \subset \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$ (lemme 2.2*a*). Si $\mathfrak{M}' = (\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}) \ominus \mathfrak{M}^\natural \neq 0$, $\mathfrak{M}'$, n'étant pas purement infinie, contient une variété finie $\widehat{\mathfrak{M}} \neq 0$; comme $\mathfrak{M}' \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, on a $\widehat{\mathfrak{M}}^\natural \subset \mathfrak{M}'$, de sorte qu'on pourrait ajouter $\widehat{\mathfrak{M}}$ à la famille $(\mathfrak{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$ qui ne serait pas maximale. Donc $\mathfrak{M}^\natural = \mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$.

Lemme 2.5. — *a*. *Toute variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$ *contenue dans* H^f *est finie*.

b. *L'ensemble des variétés finies sous-tend* $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$ (³).

Démonstration. — *a* est immédiat. Prouvons *b*. Toute variété finie est contenue dans $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$ (lemme 2.1). D'autre part, les variétés équivalentes à une variété $\mathfrak{N}$ sous-tendent $\mathfrak{N}^\natural$ ([1], lemme 3.1), donc $\mathrm{H} \ominus \mathrm{H}^{pi}$ si l'on prend pour $\mathfrak{N}$ la variété $\mathfrak{M}$ du lemme 2.4.

Posons $\mathrm{H}^i = \mathrm{H} \ominus (\mathrm{H}^f \oplus \mathrm{H}^{pi})$. On peut grouper les principaux résultats qui précèdent de la manière suivante :

Théorème 1. — *Il existe trois variétés* H^{pi}, H^f, H^i, *appartenant à* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, *deux à deux orthogonales, sous-tendant* H, *avec les propriétés que voici :*

a. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^{pi} *un anneau de classe purement infinie. Toute variété* $\neq 0$ *d'un tel anneau est purement infinie*.

b. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^f *un anneau de classe finie. Toute variété d'un tel anneau est finie*.

c. $\mathbf{M}$ *induit dans* H^i *un anneau pour lequel* : 1° *aucune variété n'est purement infinie;* 2° *aucune variété du centre n'est finie*.

d. H^{pi}, H^f, H^i *sont déterminées univoquement par les propriétés précédentes*.

III. — Deuxième réduction des anneaux d'opérateurs.

Elle va être basée sur les notions suivantes :

Définition 3.1. — *Une variété* $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *est dite irréductible si* $\mathcal{M} \neq 0$ *et s'il n'existe aucune partition homogène d'ordre 2 majorée par* $\mathcal{M}$.

Définition 3.2. — *Une variété* $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}$ *est dite simple si* $\mathcal{M} \neq 0$ *et s'il existe une partition homogène* $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$, *avec* $\mathcal{M}_i \sim \mathcal{M}$ *pour* $i \in \mathrm{I}$, *et* $\bigoplus_{i \in \mathrm{I}} \mathcal{M}_i \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$.

Définition 3.3. — *Une variété* $\mathcal{M} \in \widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$ *est dite homogène si* $\mathcal{M} \neq 0$, *et s'il existe une partition homogène* $(\mathcal{M}_i)_{i \in \mathrm{I}}$ *de* $\mathcal{M}$, *les* $\mathcal{M}_i$ *étant irréductibles* (et simples d'après la définition 3.2).

Quand $\mathbf{M}$ est de classe finie, les définitions 3.2 et 3.3 coïncident avec les définitions 4.2 et 4.6 de [1] (car alors toute partition homogène est finie : [1], lemme 4.2). La définition 3.1 n'est autre que la définition 4.5 de [1].

Lemme 3.1. — *Toute variété irréductible est finie.*

Démonstration. — Elle résulte aussitôt des lemmes 1.2 et 1.3.

Lemme 3.2. — *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété irréductible.*

a. Soient A *et* B *des opérateurs de* $\mathbf{M}$ *réduits par* $\mathcal{M}$. *Les parties induites par* A *et* B *dans* $\mathcal{M}$ *sont permutables.*

b. Soient $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *des variétés orthogonales contenues dans* $\mathcal{M}$. $\mathcal{M}_1^{\natural}$ *et* $\mathcal{M}_2^{\natural}$ *sont orthogonales.*

Démonstration. — Ce lemme est démontré dans [1] (lemmes 4.7 et 4.8). Les démonstrations de [1] ne font nul usage du fait que $\mathbf{M}$ est de classe finie.

Lemme 3.3. — *Soit* $\mathcal{M}$ *une variété irréductible et* $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ *une variété de* $\widetilde{\mathbf{M}}$. *On a* $\mathcal{N} = \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\natural}$.

Démonstration. — Soit $\mathcal{N}' = \mathcal{M} \ominus \mathcal{N}$. On a $\mathcal{N} \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{N} \subset \mathcal{N}^{\natural}$, donc $\mathcal{N} \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\natural}$. De même $\mathcal{N}' \subset \mathcal{M} \cap \mathcal{N}'^{\natural}$. $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont orthogonales, donc aussi (lemme 3.2*b*) $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\natural} \subset \mathcal{M}$ et $\mathcal{M} \cap \mathcal{N}'^{\natural} \subset \mathcal{M}$. Comme $\mathcal{N}$ et $\mathcal{N}'$ sont complémentaires dans $\mathcal{M}$, on a nécessairement

$$\mathcal{M} \cap \mathcal{N}^{\natural} = \mathcal{N}, \qquad \mathcal{M} \cap \mathcal{N}'^{\natural} = \mathcal{N}'.$$

Lemme 3.4 — *Soient* $\mathcal{M}_1$, $\mathcal{M}_2$ *deux variétés irréductibles. Pour que* $\mathcal{M}_1 \sim \mathcal{M}_2$, *il faut et il suffit que* $\mathcal{M}_1^{\natural} = \mathcal{M}_2^{\natural}$.

Démonstration. — La condition est nécessaire d'après le lemme 3.1 de [1]. Montrons qu'elle est suffisante. Supposons $\mathfrak{M}_1^\natural = \mathfrak{M}_2^\natural$, et appliquons le théorème 6 de [1] à $\mathfrak{M}_1$ et $\mathfrak{M}_2$. Il existe des variétés m_1, m'_1 (resp. m_2, m'_2) orthogonales complémentaires dans $\mathfrak{M}_1$ (resp. $\mathfrak{M}_2$), avec $m_1 \prec m_2$, $m'_2 \prec m'_1$, $m_2^\natural$ orthogonale à $m_1'^\natural$. On a

$$\mathfrak{M}_1^\natural = m_1^\natural \oplus m_1'^\natural, \qquad \mathfrak{M}_2^\natural = m_2^\natural \oplus m_2'^\natural;$$

$m_2^\natural$ est orthogonale à $m_1'^\natural$, $m_1^\natural \subset m_2^\natural$, $m_2'^\natural \subset m_1'^\natural$, donc l'hypothèse $\mathfrak{M}_1^\natural = \mathfrak{M}_2^\natural$ entraîne $m_1^\natural = m_2^\natural$, $m_1'^\natural = m_2'^\natural$. On a $m_1 \sim \overline{m}_1$, avec $\overline{m}_1 \subset m_2$, donc $\overline{m}_1^\natural = m_1^\natural = m_2^\natural$, et, comme $(m_2 \ominus \overline{m}_1)^\natural$ est orthogonale à $\overline{m}_1^\natural$ (lemme 3.2 *b*), $(m_2 \ominus \overline{m}_1)^\natural = 0$, $\overline{m}_1 = m_2$, $m_1 \sim m_2$. De même $m'_1 \sim m'_2$. D'où le lemme.

Lemme 3.5. — *Soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène, et $(\mathfrak{M}_i)_{i\in \mathrm{I}}$, $(\mathfrak{M}'_j)_{j\in \mathrm{J}}$ deux partitions homogènes de $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_i$ et les $\mathfrak{M}'$ étant irréductibles.* I *et* J *sont équipotents.*

Démonstration. — Si I par exemple est fini, $\mathfrak{M}$ est finie (lemmes 3.1 et 1.5). Alors J est fini ([1], lemme 4.2). D'ailleurs le lemme 3.4 prouve que $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}'_j$. Si I et J n'avaient pas le même nombre d'éléments, on voit aussitôt que $\mathfrak{M}$ serait équivalente à une variété strictement contenue dans $\mathfrak{M}$, ce qui est absurde. Donc I et J sont équipotents. Supposons maintenant I et J infinis. Considérons un indice particulier $i \in \mathrm{I}$. Soit $f_i \in \mathfrak{M}_i$, avec $f_i \neq 0$, et soit $\mathfrak{N}_i$ la plus petite variété de $\widetilde{\mathbf{M}}$ contenant f_i. On a $\mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{M}_i$, donc, posant $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_i^\natural$, $\mathfrak{N}_i = \mathfrak{M}_i \cap \mathfrak{N}$ (lemme 3.3). D'autre part, f_i est orthogonal à toutes les $\mathfrak{M}'_j$ sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles, soit $(\mathfrak{M}'_j)_{j\in \mathrm{K}}$. Donc $f_i \in \bigoplus_{j\in \mathrm{K}} \mathfrak{M}'_j$, et par suite $\mathfrak{N}_i \subset \bigoplus_{j\in \mathrm{K}} \mathfrak{M}'_j$. Ceci posé, comme $\mathfrak{M}_i \sim \mathfrak{M}_{i'}$ pour $i' \in \mathrm{I}$, il existe une $\mathfrak{N}_{i'} \subset \mathfrak{M}_{i'}$ avec les propriétés suivantes :

1° $\mathfrak{N}_i \sim \mathfrak{N}_{i'}$, et par suite $\mathfrak{N}_{i'}^\natural = \mathfrak{N}$, $\mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{i'}$;

2° $\mathfrak{N}_{i'}$ est orthogonale aux $\mathfrak{M}'$ sauf au plus à une infinité dénombrable d'entre elles.

Comme les $\mathfrak{M}_{i'}$ sous-tendent $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{N}_{i'} = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_{i'}$ sous-tendent $\mathfrak{N}$. Alors, pour toute $\mathfrak{M}'_j$ existe une $\mathfrak{N}_{i_j}$ non orthogonale à $\mathfrak{M}'_j$ (sinon $\mathfrak{M}'_j$ serait orthogonale à $\mathfrak{N}$; donc toute $\mathfrak{M}'_{j'}$, équivalente à $\mathfrak{M}'_j$, serait orthogonale à $\mathfrak{N} \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ donc $\mathfrak{M}$ serait orthogonale à $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N} = 0$, $\mathfrak{N}_i = 0$ contrairement à $f_i \neq 0$). D'après ce qui précède, i_j ne peut être le même que pour une infinité dénombrable au plus d'indices j. On en déduit aussitôt :

$$\text{puissance de J} \leq \text{puissance de I} \times \aleph_0 = \text{puissance de I},$$

et, par symétrie entre I et J, le lemme est démontré.

Nous pouvons alors poser la définition suivante :

DÉFINITION 3.4. — *Soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène. On appellera degré de $\mathfrak{M}$ la puissance de toute partition homogène de $\mathfrak{M}$ dont les éléments sont irréductibles.*

Les lemmes 1.5 et 3.1 prouvent aussitôt que $\mathfrak{M}$, homogène, est finie si et seulement si son degré est fini.

LEMME 3.6. — *Si $\mathfrak{M}$ est une variété homogène de degré α, toute variété $\mathfrak{N}$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenue dans $\mathfrak{M}$ et $\neq 0$ est homogène de degré α.*

Démonstration. — Soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ une partition homogène de $\mathfrak{M}$, les $\mathfrak{M}_i$ étant irréductibles et I ayant pour puissance α. Les $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_i$ forment une partition homogène de $\mathfrak{N}$ et sont irréductibles, ce qui prouve le lemme.

LEMME 3.7. — *Soit α un nombre cardinal. S'il existe des variétés homogènes de degré α, il en existe une, soit H^α, plus grande que toutes les autres. Alors, les variétés homogènes de degré α ne sont autres que les variétés $\neq 0$ de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ contenues dans H^α.*

Démonstration. — Considérons, parmi les partitions dont les éléments sont des variétés homogènes de degré α, une partition maximale (théorème de Zorn), soit $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$. Soit $H^\alpha = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{M}_i$. Soit, pour $i \in I$, $(\mathfrak{N}_i^j)_{j\in J}$ une partition de $\mathfrak{M}_i$ dont les éléments sont irréductibles; on peut supposer l'ensemble d'indices J indépendant de i et de puissance α. Soit $\mathfrak{N}^j = \bigoplus_{i\in I} \mathfrak{N}_i^j$. Les $\mathfrak{N}^j$, où $j \in J$, forment une partition homogène d'ordre α de H^α. De plus, $\mathfrak{N}^j$ est irréductible; car, soit (m, m') une partition homogène majorée par $\mathfrak{N}^j$; soient $m_i = m \cap \mathfrak{N}_i^j$, $m'_i = m' \cap \mathfrak{N}_i^j$; comme $m \sim m' \neq 0$, on a $m_i \sim m'_i \neq 0$ pour un $i \in I$, de sorte que (m_i, m'_i) est une partition homogène majorée par $\mathfrak{N}_i^j$, ce qui est absurde. Donc H^α est homogène de degré α.

Maintenant, soit $\mathfrak{M}$ une variété homogène de degré α. Si

$$\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M} \ominus (\mathfrak{M} \cap H^\alpha) \neq 0,$$

$\overline{\mathfrak{M}}$ est homogène de degré α d'après le lemme 3.6, donc on peut ajouter $\overline{\mathfrak{M}}$ à la partition $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$, ce qui est absurde. Donc $\overline{\mathfrak{M}} = 0$, c'est-à-dire que $\mathfrak{M} \subset H^\alpha$. H^α est donc bien la plus grande des variétés homogènes de degré α. La fin du lemme résulte aussitôt du lemme 3.6.

LEMME 3.8. — *Si α et β sont deux nombres cardinaux différents pour lesquels H^α et H^β existent, H^α et H^β sont orthogonales.*

Démonstration. — Si $H^\alpha \cap H^\beta \neq 0$, $H^\alpha \cap H^\beta$ est homogène de degré α et de degré β (lemme 3.6), ce qui est absurde. Donc $H^\alpha \cap H^\beta = 0$, et le lemme en résulte puisque $H^\alpha \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ et $H^\beta \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$.

LEMME 3.9. — *Toute variété irréductible $\mathcal{M}_1$ contient une variété irréductible simple.*

Démonstration. — Considérons les partitions homogènes qui contiennent $\mathcal{M}_1$ comme élément, et soit $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ une telle partition maximale (théorème de Zorn). Soit $\mathcal{M}_0 = H \ominus \left(\bigoplus_{i\in I} \mathcal{M}_i\right)$. Raisonnant exactement comme dans [1] (lemme 4.9), on détermine, pour $i \in I$ ou $i = 0$, des variétés $m_i \subset \mathcal{M}_i$, équivalentes, $\neq 0$, sous-tendant une variété de $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$. Alors m_1 est la variété du lemme.

THÉORÈME 2. — *Soit* A *l'ensemble des nombres cardinaux inférieurs ou égaux à la dimension de* H. *Il existe une famille* $(H^\alpha)_{\alpha\in A}$ *avec les propriétés suivantes :*

a. $H^\alpha = 0$ *ou* H^α *est homogène de degré* α; *l'ensemble des variétés homogènes de degré* α *est l'ensemble des variétés* $\neq 0$ *de* $\widetilde{\mathbf{M}}^\natural$ *contenues dans* H^α; *cette propriété détermine univoquement* H^α;

b. H^α *et* H^β *sont orthogonales si* $\alpha \neq \beta$;

c. $H^0 = H \ominus \left(\bigoplus_{\alpha\in A} H^\alpha\right)$ *ne contient aucune variété irréductible*;

d. $H^\alpha \subset H^f$ *si* α *est fini,* $H^\alpha \subset H^i$ *si* α *est infini.*

Démonstration. — *a* et *b* sont déjà prouvés, prouvons *c*. Si H^0 contient une variété irréductible, H^0 contient (lemme 3.9) une variété irréductible simple m, et, comme $H^0 \in \widetilde{\mathbf{M}}^\natural$, H^0 contient la variété homogène $m^\natural$. Le degré de cette variété homogène est évidemment un nombre de A, soit α, de sorte que $m^\natural \subset H^\alpha$, d'où absurdité. Donc H^0 ne contient aucune variété irréductible.

Prouvons *d*. On a déjà observé que, si α est fini, H^α est finie, donc $H^\alpha \subset H^f$. Soit maintenant $\alpha \in A$ un nombre cardinal infini tel que $H^\alpha \neq 0$. Il existe une variété irréductible $\mathcal{N}$ telle que $H^\alpha = \mathcal{N}^\natural$. $\mathcal{N}$ est finie (lemme 3.1), donc $\mathcal{N}$ et par suite $\mathcal{N}^\natural$ sont orthogonales à H^{pi} (lemme 2.1). D'autre part, si $H^\alpha \cap H^f \neq 0$, $H^\alpha \cap H^f$ est homogène de degré α (lemme 3.6), et finie, ce qui est absurde; donc H^α est orthogonale à H^f. Donc $H^\alpha \subset H^i$.

Nous allons voir maintenant que $\mathbf{M}$ induit dans chaque H^α, $(\alpha \in A)$, un anneau de structure simple. Pour mieux comprendre l'intérêt du théorème suivant, rappelons que (indépendamment de tout anneau $\mathbf{M}$), si $(\mathcal{M}_i)_{i\in I}$ est une famille de variétés deux à deux orthogonales sous-tendant H, un opérateur A est parfaitement déterminé par le tableau à double entrée des opérateurs $P_{\mathcal{M}_i} A P_{\mathcal{M}_j}$. Si de plus les $\mathcal{M}_i$ ont même dimension, et si U_{ij} est un opérateur partiellement isométrique admettant $\mathcal{M}_i$ pour variété initiale et $\mathcal{M}_j$ pour variété finale, on peut aussi bien définir A par les $U_{ii_0}(P_{\mathfrak{M}_i}AP_{\mathfrak{M}_j})U_{i_0j} = U_{ii_0}AU_{i_0j}$, i_0 étant un indice particulier de I. Ces opérateurs appliquent $\mathfrak{M}_{i_0}$ dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ et s'annulent dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, de sorte qu'on peut se contenter de considérer leurs restrictions A_{ij} à $\mathfrak{M}_{i_0}$. La représentation matricielle correspond au cas où les $\mathfrak{M}_i$ sont de dimension 1, et le calcul sur les A s'effectue d'ailleurs à l'aide des A_{ij} par les règles habituelles du calcul matriciel.

Si $\mathbf{M}$ est abélien, H est, on le voit aussitôt, irréductible, de sorte que, avec les notations précédentes $H = H^1$. On va voir que l'étude de $\mathbf{M}$ dans une H^α se ramène à l'étude des anneaux abéliens.

THÉORÈME 3. — *Supposons* H *homogène de degré* α. *Soit* $(\mathfrak{M}_i)_{i\in I}$ *une partition homogène de* H, *les* $\mathfrak{M}_i$ *étant irréductibles,* I *étant de puissance* α. *Soit* $U_{ij} \in \mathbf{M}_{PI}$, *admettant* $\mathfrak{M}_i$ *pour variété initiale,* $\mathfrak{M}_j$ *pour variété finale. Soit* i_0 *un indice particulier de* I. *Il existe dans l'espace* $\mathfrak{M}_{i_0}$ *un anneau abélien d'opérateurs, soit* $\mathbf{N}$, *avec la propriété suivante : l'opérateur borné* A *de* H *est dans* $\mathbf{M}$ *si et seulement si les restrictions* A_{ij} *à* $\mathfrak{M}_{i_0}$ *des* $U_{ii_0}AU_{i_0j}$ *sont dans* $\mathbf{N}$. $\mathbf{N}$ *n'est autre que l'anneau induit par* $\mathbf{M}$ *dans* $\mathfrak{M}_{i_0}$.

Démonstration. — Les opérateurs de $\mathbf{M}$ réduits par $\mathfrak{M}_{i_0}$ induisent dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ un anneau d'opérateurs $\mathbf{N}$ qui est abélien (lemme 3.2 *a*). Si $A \in \mathbf{M}$, $U_{ii_0}AU_{i_0j} \in \mathbf{M}$ applique $\mathfrak{M}_{i_0}$ dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ et s'annule dans $H \ominus \mathfrak{M}_{i_0}$, donc est réduit par $\mathfrak{M}_{i_0}$, et sa partie induite A_{ij} dans $\mathfrak{M}_{i_0}$ est dans $\mathbf{N}$. Réciproquement, si $A_{ij} \in \mathbf{N}$, les A_{ij}, donc A, sont invariants par tout opérateur unitaire de $\mathbf{M}'$, de sorte que $A \in \mathbf{M}$.

IV. — Relations avec la réduction de J. von Neumann.

Nous allons, dans toute la fin de cet article supposer H séparable, et utiliser sans explications les notations de [5] en même temps que les notations précédentes.

$\mathbf{M}^\natural$ est engendré par une résolution de l'unité $\mathbf{E}(\lambda)$. Soit $\sigma(\lambda)$ une N-fonction équivalente à $E(\lambda)$. Il existe une représentation de H comme somme directe généralisée d'espaces $H(\lambda)$ avec la N-fonction $\sigma(\lambda)$, à laquelle appartiennent la décomposition de l'unité $E(\lambda)$ et l'anneau $\mathbf{M}^\natural$ ([5], théorèmes III et IV). Soit $\mathbf{M} \approx \Sigma\mathbf{M}(\lambda)$ la décomposition de $\mathbf{M}$ en facteurs ([5], théorème VII), bien déterminée si l'on néglige les ensembles de σ-mesure 0. Il s'agit d'étudier la classe de ces facteurs suivant la valeur de λ. Nous aurons besoin des lemmes suivants :

LEMME 4.1. — *Soit* $E \in \mathbf{M}$ *un projecteur proprement infini* (4), $E \sim \Sigma E(\lambda)$ *sa décomposition. Les* $E(\lambda)$ *sont nuls ou infinis* σ*-presque-partout.*

(4) Ce qui signifie que la variété correspondant à E est proprement infinie. De même plus loin pour les projecteurs finis, irréductibles, etc. Nous employons l'expression σ-presque-partout pour dire : sauf sur un ensemble de σ-mesure nulle.

Démonstration. — Il existe (lemme 1.3) des projecteurs E_1, E_2 de $\mathbf{M}$ avec

$$E_1 E_2 = 0, \qquad E_1 + E_2 = E, \qquad E \sim E_1 \sim E_2.$$

Soient $E_1 \sim \Sigma E_1(\lambda)$, $E_2 \sim \Sigma E_2(\lambda)$ les décompositions de E_1, E_2. $E_1(\lambda)$, $E_2(\lambda)$ sont des projecteurs,

$$E(\lambda) = E_1(\lambda) + E_2(\lambda), \qquad E_1(\lambda) E_2(\lambda) = 0,$$

tout ceci σ-presque-partout. $E \sim E_1$ signifie qu'il existe un $U \in \mathbf{M}$ avec $U^\star U = E$, $UU^\star = E_1$, d'où, si $U \sim \Sigma U(\lambda)$,

$$(U(\lambda))^\star U(\lambda) = E(\lambda), \qquad U(\lambda)(U(\lambda))^\star = E_1(\lambda),$$

c'est-à-dire $E(\lambda) \sim E_1(\lambda)$; de même $E(\lambda) \sim E_2(\lambda)$ (σ-presque-partout). Si $E(\lambda) \neq 0$, ceci prouve que $E(\lambda)$ est infini.

LEMME 4.2. — *Soit* $E \in \mathbf{M}$ *un projecteur fini,* $E \sim \Sigma E(\lambda)$ *sa décomposition. Les* $E(\lambda)$ *sont finis σ-presque-partout.*

Démonstration. — Utilisons plus spécialement les notations du lemme 17 de [5]. Les couples $(\lambda, \overline{V})$ dans l'espace $r \times \mathfrak{S}_p$, vérifiant $\lambda \in \Delta'_p$ et (21.2) de [5] forment un ensemble D_p qui est borélien. Comme dans la démonstration du lemme 7 de [5], il en résulte l'existence d'un $V(\lambda) \in \mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ, avec, pour $\lambda \in M_\infty$,

$$V(\lambda)^\star V(\lambda) = E(\lambda), \qquad V(\lambda) V(\lambda)^\star = V(\lambda) V(\lambda)^\star E(\lambda) \neq E(\lambda),$$

et, pour $\lambda \notin M_\infty$, $V(\lambda) = 0$. Soit $V \sim \Sigma V(\lambda)$ [les $V(\lambda)$ sont partiellement isométriques, donc $|||V(\lambda)||| \leq 1$]. Soit $F(\lambda)$ l'opérateur égal à $1(\lambda)$ pour $\lambda \in M_\infty$, à $0(\lambda)$ pour $\lambda \notin M_\infty$ [$F(\lambda)$ est mesurable puisque M_∞ l'est], et $F \sim \Sigma F(\lambda)$ qui est un projecteur de $\mathbf{M}^\natural$. On a $V^\star V = EF$, $VV^\star = VV^\star EF$; comme E est fini, EF est fini, donc $VV^\star EF = EF$; pour $\lambda \in M_\infty$ on a donc $V(\lambda) V(\lambda)^\star E(\lambda) = E(\lambda)$ σ-presque-partout. Donc M_∞ est de σ-mesure nulle.

LEMME 4.3. — *Soit* E *un projecteur irréductible,* $E \sim \Sigma E(\lambda)$ *sa décomposition. Les* $E(\lambda)$ *sont nuls ou minimaux σ-presque-partout.*

Démonstration. — Utilisons encore les notations du lemme 17 de [5]. Considérons les couples $(\lambda, \overline{E})$ dans $r \times \mathfrak{S}_p$ tels que $\lambda \in \Delta'_p$ et tels que

$$\overline{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} = \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} \overline{E}, \qquad \overline{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda)^\star \mathcal{J}^{(\lambda)} = \mathcal{J}^{(\lambda)-1} A_q(\lambda)^\star \mathcal{J}^{(\lambda)} \overline{E},$$

$$\overline{E} = \overline{E}^\star, \ \overline{E}^2 = \overline{E} \neq 0, \qquad \overline{E} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} E(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)} = \overline{E} \neq \mathcal{J}^{(\lambda)-1} E(\lambda) \mathcal{J}^{(\lambda)}.$$

A la manière habituelle, on prouve que ces couples forment un ensemble borélien D_p dans $r \times \mathcal{S}_p$. D'où l'existence d'un $E'(\lambda) \in \mathbf{M}(\lambda)$, dépendant mesurablement de λ, projecteur pour tout λ, avec

$$E'(\lambda)\,E(\lambda) = E'(\lambda) \neq E(\lambda), \qquad E'(\lambda) \neq 0(\lambda),$$

lorsque λ appartient à la projection M de $D_1 \cup D_2 \cup \ldots \cup D_\infty$ sur r, et $E'(\lambda) = 0(\lambda)$ pour les autres valeurs de λ. M est l'ensemble des points pour lesquels $E(\lambda)$ n'est ni nul ni minimal. Soit $E' \sim \Sigma E'(\lambda)$. E' est un projecteur de $\mathbf{M}$ avec $E' \leqq E$. Puisque E est irréductible, on a (lemme 3.3) $E' = EF$ avec $F \in \mathbf{M}^\natural$. Soit $F \sim \Sigma F(\lambda)$, avec $F(\lambda) = 1(\lambda)$ ou $0(\lambda)$ pour tout λ. On a alors $E'(\lambda) = E(\lambda)$ ou $0(\lambda)$ σ-presque-partout. Donc M est de σ-mesure nulle.

Lemme 4.4. — *Si C_{I_m} n'est pas de σ-mesure nulle, il existe un projecteur irréductible $E \in \mathbf{M}$, de décomposition $E \sim \Sigma E(\lambda)$, tel que $E(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in C_{I_m}$, $E(\lambda) = 0$ pour $\lambda \notin C_{I_m}$.*

Démonstration. — Soit $H^\star$ un espace de Hilbert de dimension mn ($n = 1, 2, \ldots, \infty$) et $\mathbf{M}^\star$, $\mathbf{M}^{\star\prime}$ une factorisation couplée de classe (I_m, I_n) dans $H^\star$. $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe (I_m, I_n) si et seulement si il existe un isomorphisme de $H^\star$ sur $H(\lambda)$ qui transforme $\mathbf{M}^\star$ en $\mathbf{M}(\lambda)$. Comme dans le lemme 20 de [5], les paires (λ, U) dans $r \times \mathcal{S}_{mn}$ pour lesquelles : 1° $\lambda \in \Delta'_{mn}$; 2° U est unitaire dans $H^\star$; 3° $\mathcal{J}^{(\lambda)} U$ transforme $\mathbf{M}^\star$ en $\mathbf{M}(\lambda)$ forment un ensemble borélien. D'où l'existence pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$ d'un $U(\lambda) \in \mathcal{S}_{mn}$ tel que l'image inverse, dans l'application $\lambda \to U(\lambda)$, de tout ouvert de $\mathcal{S}_{mn}$ soit σ-mesurable. Soit d'autre part $\bar{E} \in \mathcal{S}_{mn}$ un projecteur minimal de $\mathbf{M}^\star$. On prouve à la manière habituelle que $\mathcal{J}^{(\lambda)} U(\lambda) \bar{E} U(\lambda)^{-1} \mathcal{J}^{(\lambda)-1} = E_n(\lambda)$ est un projecteur de $\mathbf{M}(\lambda)$ dépendant σ-mesurablement de λ pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$. Posons $E(\lambda) = E_n(\lambda) \neq 0$ pour $\lambda \in C_{I_m, I_n}$ ($n = 1, 2, \ldots, \infty$), $E(\lambda) = 0$ pour $\lambda \notin C_{I_m}$. $E(\lambda)$ dépend σ-mesurablement de λ : $E \sim \Sigma E(\lambda)$ est un projecteur de $\mathbf{M}$. On va prouver que E est irréductible, et le lemme sera établi.

D'abord $E \neq 0$ puisque $E(\lambda) \neq 0$ sur l'ensemble C_{I_m} de σ-mesure non nulle. Ensuite, supposons des projecteurs E_1, E_2 de $\mathbf{M}$ avec

$$E_1 E_2 = 0, \qquad E_1 \leqq E, \qquad E_2 \leqq E, \qquad E_1 \sim E_2.$$

Soient $E_1 \sim \Sigma E_1(\lambda)$, $E_2 \sim \Sigma E_2(\lambda)$ leurs décompositions. On a

$$E_1(\lambda)\,E_2(\lambda) = 0, \qquad E_1(\lambda) \leqq E(\lambda), \qquad E_2(\lambda) \leqq E(\lambda), \qquad E_1(\lambda) \sim E_2(\lambda)$$

σ-presque-partout. Comme $E(\lambda)$ est nul ou minimal pour tout λ, il en résulte $E_1(\lambda) = E_2(\lambda) = 0$ σ-presque-partout, donc $E_1 = E_2 = 0$, de sorte que E_1, E_2 ne forment pas une partition : E est irréductible.

Lemme 4.5. — *Si H est homogène de degré α ($\alpha = 1, 2, \ldots, \aleph_0$), $\mathbf{M}(\lambda)$ est un facteur de classe I_α σ-presque-partout.*

Démonstration. — Soit $(E_i)_{i\in I}$ une partition homogène de 1, les E_i étant irréductibles et I de puissance α. On a $1=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ au sens de la convergence forte des suites d'opérateurs (si α est fini il n'y a même pas de question de convergence). Soit $E_i \sim \Sigma E_i(\lambda)$ la décomposition de E_i. Les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs nuls ou minimaux σ-presque-partout d'après le lemme 4.3, et $E_i(\lambda)E_j(\lambda)=0$ pour $i\neq j$ σ-presque-partout. D'après [5] (p. 444), $1=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i$ entraîne $1(\lambda)=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ σ-presque-partout, à condition de grouper éventuellement certains termes dans la série. Comme les $E_i(\lambda)$ sont des projecteurs orthogonaux, on a $1(\lambda)=\sum_{i=1}^{\alpha} E_i(\lambda)$ au sens usuel σ-presque-partout. Pour achever de prouver le lemme, il suffit donc de prouver que $E_i(\lambda)\neq 0$ σ-presque-partout. Or, si l'on avait $E_i(\lambda)=0$ sur un ensemble M de σ-mesure non nulle pour un $i\in I$, on aurait $E_i(\lambda)=0$ pour $\lambda\in M$ et pour tout $i\in I$ puisque $E_i\sim E_j$ entraîne $E_i(\lambda)\sim E_j(\lambda)$, d'où $1(\lambda)=0$ σ-presque-partout sur M, ce qui est absurde.

Lemme 4.6. — *Si* $H=H^f \cap H^0$, *c'est-à-dire si* H *est finie et ne contient aucune variété irréductible,* $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_1 *σ-presque-partout.*

Démonstration. — $1(\lambda)$ est fini σ-presque-partout d'après le lemme 4.2. C_{I_m} est de σ-mesure-nulle pour $m=1, 2, \ldots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_1 σ-presque-partout.

Lemme 4.7. — *Si* $H=H^i \cap H^0$, $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_∞ *σ-presque-partout.*

Démonstration. — Par définition de H^f, H^i est proprement infinie, donc $1(\lambda)$ est infini σ-presque-partout d'après le lemme 4.1. C_{I_m} est de σ-mesure-nulle pour $m=1, 2, \ldots, \infty$ d'après le lemme 4.4. Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est de classe II_∞ ou III σ-presque-partout. Soit $\mathfrak{M}$ une variété finie telle que $\mathfrak{M}^\natural=H$ (lemme 2.4), et soit $P_{\mathfrak{M}}\sim\Sigma E(\lambda)$. $E(\lambda)$ est fini σ-presque-partout (lemme 4.2), et un raisonnement déjà fait prouve que $E(\lambda)\neq 0$ σ-presque-partout (à cause de $\mathfrak{M}^\natural=H$). Donc $\mathbf{M}(\lambda)$ est σ-presque-partout de classe II_∞.

Lemme 4.8 — *Si* $H=H^{pi}$, $\mathbf{M}(\lambda)$ *est un facteur de classe* II_∞ *ou* III *σ-presque-partout.*

Démonstration. — Il suffit d'utiliser le raisonnement de la démonstration précédente.

Nous pouvons maintenant aborder le cas général. H est sous-tendue par les variétés suivantes de $\widetilde{\mathbf{M}}^{\natural}$, deux à deux orthogonales (nous écrivons ∞ au lieu de $\aleph_0$) :

$$H^1, \quad H^2, \quad \ldots, H^\infty; \quad H^0 \cap H^f; \quad H^0 \cap H^i; \quad H^{pi}.$$

Reprenant la résolution de l'identité $E(\lambda)$ qui engendre $\mathbf{M}^{\natural}$, on peut supposer, au besoin en remplaçant la représentation de H avec les $H(\lambda)$ par une représentation équivalente ([5], définition 3) :

$$E(-3) - E(-4) = P_{H^{pi}}; \qquad E(-2) - E(-3) = P_{H^0 \cap H^i};$$
$$E(-1) - E(-2) = P_{H^0 \cap H^f}; \qquad E(0) - E(-1) = P_{H^\infty};$$
$$E(n) - E(n-1) = P_{H^n} \qquad \text{pour} \quad n = 1, 2, \ldots.$$

Soit $A_1, A_2, \ldots$ une suite d'opérateurs engendrant $\mathbf{M}$. Soit $A_i \sim \Sigma A_i(\lambda)$ la décomposition de A_i. On peut supposer que $\mathbf{M}(\lambda)$ est l'anneau engendré par les $A_i(\lambda)$.

On a, d'après les définitions (*cf.* notamment [5], p. 422, ligne 8), $E(1) - E(0) \sim \Sigma F(\lambda)$, où $F(\lambda) = 1$ pour $0 < \lambda \leqq 1$, $F(\lambda) = 0$ pour $\lambda \leqq 0$, $\lambda > 1$. Donc $A_i\big(E(1) - E(0)\big) \sim \Sigma A_i(\lambda) F(\lambda)$. Si $0 < \lambda \leqq 1$, $A_i(\lambda) F(\lambda) = A_i(\lambda)$, de sorte que $\mathbf{M}(\lambda)$ ne change pas si l'on remplace les A_i par les $A_i\big(E(1) - E(0)\big)$. Or les $A_i\big(E(1) - E(0)\big) = A_i P_{H^1}$ engendrent $\mathbf{M} P_{H^1}$. Ainsi le facteur $\mathbf{M}(\lambda)$, pour $0 < \lambda \leqq 1$, ne change pas si l'on remplace $\mathbf{M}$ par $\mathbf{M} P_{H^1}$. Par suite, pour étudier la nature des $\mathbf{M}(\lambda)$ quand $0 < \lambda \leqq 1$, on peut supposer $H = H^1$. Un raisonnement analogue vaut pour les autres valeurs de λ, et les lemmes précédents prouvent alors que :

Si $n - 1 < \lambda \leqq n$ $(n = 1, 2, \ldots)$,	$\mathbf{M}(\lambda)$	est de classe	I_n.
Si $-1 < \lambda \leqq 0$,	$\mathbf{M}(\lambda)$	»	I_∞.
Si $-2 < \lambda \leqq -1$,	$\mathbf{M}(\lambda)$	»	II_1.
Si $-3 < \lambda \leqq -2$,	$\mathbf{M}(\lambda)$	»	II_∞.
Si $-4 < \lambda \leqq -3$,	$\mathbf{M}(\lambda)$	»	II_∞ ou III.

Pour résoudre le problème de mesurabilité de von Neumann ([5], p. 471), il suffit donc de se placer dans le cas où $\mathbf{M}$ est de classe purement infinie. Ceci, d'ailleurs, ne simplifie nullement la solution. Notons seulement qu'une manière plus précise, et assez naturelle, de poser le problème est la suivante : si $\mathbf{M}$ est de classe purement infinie, les $\mathbf{M}(\lambda)$ sont-ils de classe III σ-presque-partout ? Jusqu'à nouvel ordre, il pourrait arriver que tous les $\mathbf{M}(\lambda)$ soient de classe II_∞ !!

Bibliographie.

[1] J. Dixmier, *Les anneaux d'opérateurs de classe finie* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, t. 66, 1949, p. 209-261).

[2] I. Kaplansky, *Projections in Banach algebras* (*Ann. Math.*, t. 53, 1951, p. 235-249).

[3] F. J. Murray et J. von Neumann, *On rings of operators* (*Ann. Math.*, t. 37, 1936, p. 116-229).

[4] J. von Neumann, *Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der Normalen Operatoren* (*Math. Ann.*, t. 102, 1929, p. 370-427).

[5] J. von Neumann, *On rings of operators. Reduction theory* (*Ann. Math.*, t. 50, 1949, p. 401-485).