J. DUFRESNOY
CH. PISOT

Prolongement analytique de la série de Taylor

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 68 (1951), p. 105-124
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1951_3_68__105_0>

PROLONGEMENT ANALYTIQUE DE LA SÉRIE DE TAYLOR

PAR MM. J. DUFRESNOY ET CH. PISOT.

Le présent travail ne contient pas de résultats essentiellement nouveaux. Mais on y trouvera rattachées de la façon la plus étroite des considérations éparses dans la littérature mathématique.

Notre étude a comme point de départ la transformation de Laplace-Borel, dont nous rappelons quelques propriétés dans la première Section, avec les relations, signalées par M. Pólya ([1]), qu'elle permet d'établir entre les séries de puissances et les fonctions entières du type moyen d'ordre 1. L'étude détaillée de ces relations fait l'objet de la seconde Section, où figurent, entre autres, les résultats qui servent de base à la méthode de prolongement analytique de M. Émile Borel ([2]).

Dans la suite, ou bien nous partons de propriétés des séries de puissances et nous en déduisons des propriétés des fonctions entières du type moyen d'ordre 1, ou bien nous opérons en sens inverse. C'est cette correspondance de propriétés qui forme l'essentiel du présent travail.

La facilité avec laquelle les résultats se présentent nous a incités à publier cette rapide synthèse, qui est à la base de nos recherches en cours.

1. *Transformation de Laplace-Borel.* — Rappelons rapidement quelques propriétés classiques qui joueront un rôle fondamental dans la suite.

Nous désignerons toujours par $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre 1 au plus, c'est-à-dire telle que $\limsup\limits_{|z|=\infty} \dfrac{\log|f(z)|}{|z|}$ ait une valeur finie.

([1]) *Math. Zeitschr.*, 29, 1929, p. 549-640.

([2]) E. BOREL, *Leçons sur les séries divergentes.*

Nous introduirons, avec M. Pólya, la fonction

$$\alpha(\varphi) = \limsup_{r=\infty} \frac{\log|f(re^{i\varphi})|}{r}$$

et nous considérerons la courbe I d'équation polaire $\rho = \alpha(\varphi)$, appelée indicatrice de croissance.

Il est clair que, $s = |s| e^{i\omega}$ étant un nombre complexe, l'intégrale

$$l_\varphi(s) = \int e^{-sz} f(z)\, dz,$$

prise le long de la demi-droite ayant $z = 0$ comme origine et φ comme angle polaire, est convergente si s est situé dans le demi-plan défini par

$$|s| \cos(\omega + \varphi) > \alpha(\varphi).$$

La fonction $l_\varphi(s)$ est holomorphe dans ce demi-plan. La réunion des demi-plans correspondant à toutes les valeurs de φ est le complémentaire d'un domaine D borné convexe limité par une courbe fermée C. Cette courbe est la symétrique par rapport à l'axe réel de l'antipodaire de I relative à l'origine.

Les fonctions $l_\varphi(s)$ coïncident avec une seule et même fonction $l(s)$ holomorphe à l'extérieur de C, point à l'infini compris, et $l(\infty) = 0$; elle est, par suite, uniforme à l'extérieur de C.

D'ailleurs, si $f(z)$ a pour développement en série de puissances

$$f(z) = u_0 + \frac{u_1}{1!} z + \ldots + \frac{u_n}{n!} z^n + \ldots,$$

la fonction $l(s)$ a pour développement au voisinage de $s = \infty$

$$l(s) = \frac{u_0}{s} + \frac{u_1}{s^2} + \ldots + \frac{u_n}{s^{n+1}} + \ldots.$$

Il en résulte que si L est une courbe fermée quelconque entourant C, ou plus généralement un nombre fini de courbes rectifiables fermées, sans point double, extérieures les unes aux autres, telles que $l(s)$ soit holomorphe et uniforme à l'extérieur de L et sur L, alors

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{zs}\, l(s)\, ds.$$

Une fonction $l(s)$ holomorphe et nulle à l'infini, donnée *a priori*, correspond à une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus et la correspondance est biunivoque entre les fonctions $f(z)$ et $l(s)$. La dernière formule donnée permet de limiter la croissance de $f(z)$ connaissant la courbe L. On a

$$|f(z)| < K \operatorname*{Max}_{s \text{ sur } L} |e^{zs}|, \quad \text{soit} \quad |f(re^{i\varphi})| < K \operatorname*{Max}_{s \text{ sur } L} e^{r|s|\cos(\omega+\varphi)}$$

en posant $s = |s| e^{i\omega}$, d'où $\alpha(\varphi) \leqq \lambda(\varphi)$, $\lambda(\varphi)$ étant la plus grande abscisse de la projection de L sur l'axe d'angle polaire $-\varphi$.

Remarque. — A la fonction $f_1(z) = f'(z)$ correspond $l_1(s) = sl(s) - u_0$; il en résulte qu'en général $f'(z)$ a même indicatrice de croissance que $f(z)$ [1].

LEMME 1. — *Soit $\Phi(\sigma)$ une fonction continue de σ sur une courbe Γ de longueur finie (fermée ou non, pouvant être formée d'un nombre fini de morceaux distincts). La fonction $f(z) = \int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$ est une fonction entière du type moyen d'ordre 1 au plus, dont la transformée de Laplace-Borel est $l(s) = \int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}$.*

En effet, vu son comportement à l'infini, cette fonction $l(s)$ est la transformée de Laplace-Borel d'une certaine fonction entière $f^\star(z)$ et l'on a

$$f^\star(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}\left(\int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}\right) ds,$$

L étant une courbe fermée (de longueur finie) entourant Γ. On peut intervertir les intégrations et l'on obtient

$$f^\star(z) = \int_\Gamma \left(\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{zs}\,ds}{s-\sigma}\right)\Phi(\sigma)\,d\sigma = \int_\Gamma e^{z\sigma}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma = f(z).$$

Conséquence. — La fonction $f(z)$ a une transformée de Laplace-Borel holomorphe dans toute la région du plan des s, que l'on peut atteindre à partir de $s = \infty$ sans traverser Γ.

Définition. — Nous appellerons dorénavant « extérieur d'une courbe relativement au point P » la région formée des points que l'on peut atteindre à partir de P par un chemin continu ne traversant pas la courbe.

2. *Séries de puissances et fonctions entières.* — Soit

$$g(\zeta) = a_0 + a_1\zeta + \ldots + a_n\zeta^n + \ldots$$

une série de puissances à rayon de convergence non nul. Nous allons montrer qu'il existe des fonctions entières $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus telles que $a_n = f(n)$ [2].

Soit γ une courbe fermée sans point double entourant l'origine et telle que $g(\zeta)$ soit holomorphe dans et sur γ; alors, d'après Cauchy,

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{-n-1}\,g(\zeta)\,d\zeta.$$

---

(1) Il y a exception quand $l(s) = \frac{a}{s} + \gamma(s)$, où $a \neq 0$, $\gamma(s)$ étant une fonction holomorphe dans un demi-plan contenant $s = 0$.

(2) Ce résultat peut encore s'énoncer comme suit : étant donnée une suite de nombres complexes a_n tels que $|a_n| < k\alpha^n$, où k et α sont des constantes, il existe des fonctions entières $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus pour lesquelles $f(n) = a_n$.

Faisons la transformation $\zeta = e^{-s}$, alors $g(\zeta)$ devient $G(s) = g(e^{-s})$ et γ se transforme en une courbe Γ qui joint un point A à un point B de même partie réelle que A et dont la partie imaginaire dépasse de 2π celle de A. On a

$$a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{ns}\,G(s)\,ds,$$

et par conséquent $a_n = f(n)$, quand $f(z)$ désigne la fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zs}\,G(s)\,ds.$$

Remarques. — 1° La fonction $f(z)$ n'est pas unique, car il existe des fonctions entières de type moyen d'ordre 1 s'annulant pour $z = n$, par exemple $\sin\pi z$.

Le calcul fait ci-dessus laisse d'ailleurs place à un certain arbitraire, les courbes γ et Γ n'étant pas entièrement déterminées. Si l'on prend une courbe $\Gamma^\star$ joignant un point $A^\star$ à un point $B^\star$, on obtient une fonction $f^\star(z)$ et

$$f^\star(z) - f(z) = F(z)\sin\pi z, \qquad \text{où} \quad F(z) = \frac{e^{i\pi z}}{\pi}\int_{AA^\star} e^{zs}\,G(s)\,ds$$

est une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus.

2° Toutes les fonctions $f(z)$ que nous venons d'obtenir satisfont de plus à $f(-n) = 0$ pour n entier $\geqq 1$, puisque

$$f(-n) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \zeta^{n-1}\,g(\zeta)\,d\zeta.$$

3° D'après le lemme 1 la transformée de Laplace-Borel de $f(z)$ est

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{G(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma};$$

elle est donc holomorphe sauf peut-être sur Γ. Cela permet d'étudier simplement l'indicatrice de croissance de $f(z)$.

Inversement, en nous plaçant dans les conditions du lemme 1, on peut associer à la fonction entière $f(z) = \int_\Gamma e^{z\sigma}\,\Phi(\sigma)\,d\sigma$ la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n$. On aura

$$g(\zeta) = \int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{1-\zeta e^\sigma} \qquad \text{et} \qquad G(s) = g(e^{-s}) = \int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{1-e^{\sigma-s}}.$$

Cette dernière formule permet de prolonger $G(s)$ dans toute la partie du plan que l'on peut atteindre en venant du point $+\infty$ de l'axe réel sans traverser ni Γ, ni aucune des courbes déduites de Γ par des translations parallèles à l'axe imaginaire et de grandeur $2k\pi$, k entier.

En restreignant nos hypothèses nous allons établir des formules [*voir* cidessous : relations (R)], qui relient entre elles la fonction $f(z)$, sa transformée de Laplace $l(s)$ et sa fonction associée $g(\zeta)$.

HYPOTHÈSE H. — *Nous supposons que les courbes déduites de Γ par des translations de grandeur $2k\pi i$ (k entier) sont toutes dans l'extérieur de Γ relatif au point à l'infini.*

Si Γ vérifie l'hypothèse H, on peut entourer Γ d'une courbe L formée d'un nombre fini de courbes fermées extérieures les unes aux autres contenant toute la courbe Γ à leur intérieur et vérifiant elle aussi l'hypothèse H. Cette hypothèse entraîne que si s est un point situé dans ou sur L, aucun point $s+2k\pi i$ ne peut être situé dans ou sur L. La fonction $\beta(\sigma-s)=\frac{1}{1-e^{\sigma-s}}-\frac{1}{s-\sigma}$ est alors holomorphe en s dans L quel que soit le point σ situé dans ou sur L. Il en résulte que $G(s)-l(s)=\int_\Gamma \beta(\sigma-s)\Phi(\sigma)\,d\sigma$ est une fonction holomorphe de s dans L. $G(s)$ et $l(s)$ ont donc les mêmes singularités dans L.

Mais la transformée de Laplace-Borel $l(s)$ est holomorphe à l'extérieur de L et sur L, donc $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}\,l(s)\,ds$. Par suite on a aussi

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma e^{zs}\,G(s)\,ds.$$

D'où le résultat suivant :

Si Γ vérifie l'hypothèse H, on a entre les trois fonctions $f(z)=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$, $l(s)$ et $G(\sigma)$ les relations suivantes :

$$(\mathrm{R})\qquad \left\{\begin{aligned} f(z)&=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}\,l(s)\,ds=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\sigma}\,G(\sigma)\,d\sigma,\\ G(\sigma)&=\sum_{n=0}^{\infty} f(n)\,e^{-n\sigma}=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{l(s)\,ds}{1-e^{s-\sigma}},\\ l(s)&=\int_0^\infty e^{-sz}f(z)\,dz=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{G(\sigma)\,d\sigma}{s-\sigma}\quad(^1).\end{aligned}\right.$$

---

(1) Cette dernière expression de $l(s)$ se déduit du lemme 1. On pourra remarquer que l'hypothèse H n'a été utilisée que pour obtenir les expressions de $f(z)$ et $l(s)$ en fonction de $G(\sigma)$.

Signalons encore une relation intéressante dont la démonstration ne fait pas intervenir l'hypothèse H. Partons de

$$\frac{1}{1-e^x}=\frac{1}{2}-\frac{1}{x}-\sum_1^\infty\left(\frac{1}{x+2ni\pi}+\frac{1}{x-2ni\pi}\right),$$

où l'on fait $x=s-\sigma$. On en déduit, à l'aide de (R),

$$G(\sigma)=\frac{u_0}{2}+l(\sigma)+\sum_1^\infty[l(\sigma+2ni\pi)+l(\sigma-2ni\pi)].$$

Remarquons encore que lorsque Γ vérifie l'hypothèse H, on peut aller du point $+\infty$ de l'axe réel au point $-\infty$ de l'axe réel sans traverser ni Γ, ni ses translatés de $2k\pi i$; $G(s)$ est donc prolongeable jusqu'à $s=-\infty$; de façon plus précise $g(\zeta)$ est prolongeable jusqu'à $\zeta=\infty$. On a d'ailleurs

$$g(\zeta)=\int_\Gamma \frac{\Phi(\sigma)\,d\sigma}{1-\zeta e^\sigma}=-\int_\Gamma\left[\sum_{n=1}^{\infty}\zeta^{-n}e^{-n\sigma}\Phi(\sigma)\right]d\sigma=-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{f(-n)}{\zeta^n},$$

qui donne le développement de $g(\zeta)$ autour de $\zeta=\infty$. On constate que $g(\infty)=0$.

3. *Fonctions $g(\zeta)$ prolongeables jusqu'à $\zeta=\infty$.* — Nous venons de voir que toute fonction $f(z)=\int_\Gamma e^{z\sigma}\Phi(\sigma)\,d\sigma$ donne naissance à une fonction $g(\zeta)$ prolongeable jusqu'à $\zeta=\infty$ quand Γ vérifie l'hypothèse H. Il en est en particulier ainsi lorsque $l(s)$ est holomorphe à l'extérieur d'une courbe L et sur L si L vérifie l'hypothèse H, car alors $f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{zs}\,l(s)\,ds$.

Montrons maintenant la réciproque. Soit $g(\zeta)$ une fonction holomorphe en $\zeta=0$ et prolongeable le long d'un chemin Λ quelconque, mais sans point double, jusqu'à $\zeta=\infty$. En ajoutant au besoin une constante, on peut toujours supposer $g(\infty)=0$. Nous allons montrer que l'on peut associer à $g(\zeta)$ une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus reliée à $g(\zeta)$ et à $l(s)$ par les relations (R). En effet, soit $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ le développement de $g(\zeta)$ autour de $\zeta=0$. On a, d'après Cauchy, $a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_0}\zeta^{-(n+1)}g(\zeta)\,d\zeta$, γ_0 étant un cercle entourant $\zeta=0$ dans le sens direct. Considérons la même intégrale le long d'un cercle γ_∞ de rayon assez grand pour être dans le domaine d'holomorphie du point $\zeta=\infty$. Comme $g(\infty)=0$, $|g(\zeta)|<\frac{M}{|\zeta|}$ sur γ_∞, donc l'intégrale le long de γ_∞ est nulle. Soient Λ_1 et Λ_2 deux chemins déduits de Λ par une rotation autour de 0, assez petite pour que $g(\zeta)$ soit holomorphe entre Λ_1 et Λ_2. Il est alors très facile de former un contour fermé $\mathcal{C}$, composé d'arcs de γ_0, Λ_1, γ_∞ et Λ_2 et tel que

$$a_n=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathcal{C}}\zeta^{-(n+1)}g(\zeta)\,d\zeta,$$

où $\mathcal{C}$ est parcouru dans le sens direct.

Par la transformation $\zeta=e^{-s}$, $\mathcal{C}$ se transforme en une courbe L vérifiant manifestement l'hypothèse H. On a aussi

$$a_n=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{ns}\,G(s)\,ds.$$

La fonction entière

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L} e^{zs}\, G(s)\, ds$$

répond donc aux conditions.

THÉORÈME 1. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe* L *vérifiant l'hypothèse* H. *Alors on a*

$$\alpha(0) = \limsup_{n=\infty} \frac{\log |f(n)|}{n}.$$

Il en résulte en particulier que si $f(n) = 0$ pour n entier positif, on a $f(z) \equiv 0$.

En effet, posons $\beta = \limsup\limits_{n=\infty} \frac{\log |f(n)|}{n}$, alors la fonction $G(\sigma) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} f(n)\, e^{-n\sigma}$ est holomorphe pour $\mathcal{R}\sigma > \beta$. $G(\sigma)$ et $l(\sigma)$ ayant les mêmes singularités dans L (*voir* p. 5), $l(\sigma)$ est holomorphe pour $\mathcal{R}\sigma > \beta$, donc $\alpha(0) \leqq \beta$. L'inégalité inverse étant évidente, l'énoncé en résulte.

Si $\beta = -\infty$, la fonction $G(\sigma)$ est holomorphe dans tout le plan, et par suite aussi $l(s)$. Le comportement de cette dernière à l'infini montre que l'on a nécessairement $l(s) \equiv 0$, d'où $f(z) \equiv 0$. La condition $f(n) = 0$ pour n entier est un cas particulier.

Cas du prolongement radial de $g(\zeta)$. — A toute fonction $g(\zeta) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ prolongeable radialement jusqu'à $\zeta = \infty$, on peut associer une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus telle que $a_n = f(n)$ et que

$$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$$

et réciproquement.

Pour le démontrer, appelons ω l'argument de la demi-droite suivant laquelle $g(\zeta)$ est prolongeable; $g(\zeta)$ est alors holomorphe dans un angle $\omega - \delta$, $\omega + \delta$ où $\delta > 0$. La courbe $\mathcal{C}$ (introduite p. 7) peut alors être choisie extérieure à cet angle, et la courbe L déduite de $\mathcal{C}$ par $\zeta = e^{-s}$ sera comprise entre deux parallèles à l'axe réel du plan des ζ définies par $\mathcal{I}\zeta = -\omega + \delta$ et $\mathcal{I}\zeta = -\omega - \delta + 2\pi$. La fonction $l(s)$ déduite de $g(\zeta)$ par les relations (R) est alors holomorphe, à l'extérieur de ces parallèles, ce qui donne pour la fonction $f(z)$ correspondante $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leqq 2\pi - 2\delta < 2\pi$. La réciproque se démontre par le raisonnement inverse.

4. *Extension du théorème* 1. — Le théorème 1 montre en particulier que si $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, l'hypothèse $f(n) = 0$ pour n entier positif entraîne

$f(z) \equiv 0$. Cette propriété aurait également pu être déduite des études classiques de M. R. Nevanlinna (*voir* Appendice). Celles-ci conduisent aussi au résultat plus général suivant : *Si* $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, *l'hypothèse* $f(n_\nu) = 0$, *où les* n_ν *forment une suite croissante d'entiers avec* $\lim_{\nu=\infty} \frac{n_\nu}{\nu} = 1$, *entraîne* $f(z) \equiv 0$.

Nous allons montrer que ce résultat peut encore être obtenu avec des considérations analogues aux précédentes. Pour cela, nous allons introduire deux fonctions auxiliaires.

Soit n_ν une suite d'entiers positifs avec $\lim_{\nu=\infty} \frac{n_\nu}{\nu} = 1$; les entiers qui n'appartiennent pas à la suite n_ν forment une nouvelle suite que nous noterons n'_μ. Nous poserons :

$$\varphi(z) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n_\nu^2}\right) \qquad \text{et} \qquad \psi(z) = \prod_{\mu=0}^{\infty}\left(1 - \frac{z^2}{n'^2_\mu}\right).$$

Les produits infinis sont manifestement convergents pour tout z.

Nous allons grouper en un lemme les propriétés des fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ qui nous seront utiles et en donner une démonstration succincte.

Lemme 2. — $\varphi(z)$ *et* $\psi(z)$ *sont des fonctions entières du type moyen d'ordre* 1 *au plus,* $\psi(z)$ *est du type minimum et* $\alpha_\varphi(0) = 0$.

Il est d'abord clair que $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont des fonctions entières paires; d'autre part, on a

$$\varphi(z)\psi(z) = \frac{\sin \pi z}{\pi z}.$$

Si l'on pose $|z| = r$, il vient

$$|\varphi(z)| \leqq \varphi(ir), \qquad |\psi(z)| \leqq \psi(ir)$$

et

$$\varphi(ir)\psi(ir) = \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r}.$$

Comme chacun des facteurs du premier membre est supérieur à 1 d'après les formules de définition, on voit que

$$|\varphi(z)| < \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r} \qquad \text{et} \qquad |\psi(z)| < \frac{\operatorname{sh} \pi r}{\pi r};$$

les fonctions $\varphi(z)$ et $\psi(z)$ sont du type moyen d'ordre 1 au plus.

Considérons alors

$$\varphi(ir) = \prod_{\nu=0}^{\infty}\left(\frac{1 + \frac{n_\nu^2}{r^2}}{\frac{n_\nu^2}{r^2}}\right);$$

on a

$$\frac{\log\varphi(ir)}{r} > \frac{1}{r} \sum_{a<\frac{n_\nu}{r}<b} \log \frac{1+\frac{n_\nu^2}{r^2}}{\frac{n_\nu^2}{r^2}},$$

expression qui tend (¹) vers

$$\int_a^b \log \frac{1+x^2}{x^2}\,dx.$$

Ainsi

$$\liminf_{r=\infty} \frac{\log\varphi(ir)}{r} \geqq \int_0^{+\infty} \log \frac{1+x^2}{x^2}\,dx = \pi.$$

Comme, d'autre part,

$$\log\varphi(ir) + \log\psi(ir) = \log \operatorname{sh}\pi r - \log \pi r$$

et que $\log\psi(ir) > 0$, on en déduit

$$\lim_{r=\infty} \frac{\log\varphi(ir)}{r} = \pi \qquad \text{et} \qquad \lim_{r=\infty} \frac{\log\psi(ir)}{r} = 0.$$

La fonction $\psi(z)$ est donc du type minimum d'ordre 1 au plus, Enfin on a

$$\frac{1}{r}\log\left|\frac{\varphi(r)}{\varphi(ir)}\right| = \frac{1}{r}\sum_{\nu=0}^{\infty}\log\left|\frac{\frac{n_\nu^2}{r^2}-1}{\frac{n_\nu^2}{r^2}+1}\right|.$$

donc (¹)

$$\limsup_{r=\infty} \frac{1}{r}\log\left|\frac{\varphi(r)}{\varphi(ir)}\right| \leqq \int_0^{+\infty} \log\left|\frac{x^2-1}{x^2+1}\right| dx = -\pi.$$

En combinant ce résultat avec le résultat précédent, on obtient

$$\alpha_\varphi(0) = \limsup_{r=\infty} \frac{\log|\varphi(r)|}{r} \leqq 0.$$

Comme on a toujours $\alpha_\varphi(0)+\alpha_\varphi(\pi) \geqq 0$ et que, $\varphi(z)$ étant pair, $\alpha_\varphi(\pi) = \alpha_\varphi(0)$, on en déduit $\alpha_\varphi(0) = 0$.

THÉORÈME 2. — *Soit $f(z)$ une fonction entière de type moyen d'ordre 1 au plus, vérifiant $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. Alors on a $\alpha(0) = \limsup_{n_\nu=\infty} \frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}$.*

En particulier, il en résulte que $f(n_\nu) = 0$ entraîne $f(z) \equiv 0$.

(¹) Si $F(x)$ est une fonction continue quelconque de la variable réelle x dans l'intervalle a, b avec $0 \leqq a < b$, on a

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \sum_{ar<n_\nu<br} F\left(\frac{n_\nu}{r}\right) = \int_a^b F(x)\,dx.$$

Ce résultat repose essentiellement sur la remarque suivante :

Si $a \leqq c < d \leqq b$, le nombre d'entiers n_ν compris entre rc et rd est, lorsque r tend vers l'infini, un infiniment grand équivalent à $r(d-c)$.

Avec la fonction $\psi(z)$ précédente, formons, en effet, la fonction

$$h(z)=f(z)\psi(z).$$

Celle-ci est aussi de type moyen d'ordre un au plus, et l'on a

$$\alpha_h\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqq\alpha_f\left(\frac{\pi}{2}\right) \quad \text{et} \quad \alpha_h\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leqq\alpha_f\left(-\frac{\pi}{2}\right),$$

d'où

$$\alpha_h\left(\frac{\pi}{2}\right)+\alpha_h\left(-\frac{\pi}{2}\right)<2\pi.$$

On a donc, en appliquant le théorème 1,

$$\alpha_h(0)=\limsup_{n=\infty}\frac{\log|h(n)|}{n}\leqq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

Or $f(z)=\dfrac{h(z)}{\psi(z)}=\dfrac{h(z)\varphi(z)\pi z}{\sin\pi z}$ entraîne

$$|f(n'_\mu)|=|h(n'_\mu)|\,|\varphi(n'_\mu)|\,n'_\mu,$$

d'où, comme $\alpha_\varphi(0)=0$,

$$\limsup_{n'_\mu=\infty}\frac{\log|f(n'_\mu)|}{n'_\mu}\leqq\limsup_{n'_\mu=\infty}\frac{\log|h'(n'_\mu)|}{n'_\mu}\leqq\alpha_{h'}(0)\leqq\alpha_h(0)\leqq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

Le théorème 1 donne alors

$$\alpha_f(0)\leqq\limsup_{n_\nu=\infty}\frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

L'inégalité en sens inverse étant immédiate, le théorème 2 en résulte.

Conséquence. — Une fonction $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ dans laquelle $a_{n_\nu}=0$ (série lacunaire), n'est pas prolongeable radialement jusqu'à l'infini.

En effet, on pourrait dans le cas contraire lui associer une fonction entière $f(z)$ vérifiant les conditions du théorème 2, et telle que $f(n_\nu)=0$. Donc $f(z)\equiv 0$ et $a_n=f(n)=0$, sauf peut-être a_0. Ce cas écarté, il n'y a pas de prolongement radial possible jusqu'à l'infini. Ce résultat, grâce au théorème 3, va être considérablement amélioré.

5. *Prolongement analytique en dehors du cercle de convergence.* — Les résultats que nous venons d'obtenir vont nous permettre d'étudier non seulement le prolongement jusqu'à l'infini, mais un prolongement quelconque hors du cercle de convergence.

Pour cela nous aurons besoin du lemme suivant :

Lemme 3. — *Soit $g(\zeta)$ une fonction holomorphe et uniforme dans une région, frontière comprise, limitée par une courbe rectifiable Δ (pouvant être formée de plu-*

sieurs morceaux). On partage Δ arbitrairement en deux arcs partiels Δ_1 et Δ_2. On peut alors décomposer $g(\zeta)$ en une somme de deux fonctions $g(\zeta) = g_1(\zeta) + g_2(\zeta)$ telles que $g_1(\zeta)$ soit holomorphe et uniforme à l'extérieur de Δ_1 et $g_2(\zeta)$ à l'extérieur de Δ_2, extérieur relatif à un point de la région d'holomorphie de $g(\zeta)$ limitée par Δ.

Ce lemme est une conséquence immédiate de l'intégrale de Cauchy. Il suffit de prendre

$$g_1(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_1}\frac{g(z)\,dz}{z-\zeta} \qquad \text{et} \qquad g_2(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Delta_2}\frac{g(z)\,dz}{z-\zeta}.$$

Théorème 3. — *Pour que la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ soit prolongeable en dehors de son cercle de convergence, il faut et il suffit que*

$$a_n = b_n + c_n,$$

où $\sum_{n=0}^{\infty} b_n\zeta^n$ a un cercle de convergence plus grand que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ est prolongeable radialement jusqu'à $\zeta = \infty$.

Il est évident que la condition est suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, il suffit de prendre pour Δ une courbe qui, dans un certain angle de sommet O, a un arc s'écartant de O à une distance supérieure au rayon de convergence de $g(\zeta)$. En prenant cet arc pour Δ_1 et le reste de Δ pour Δ_2 et en appliquant le lemme, le théorème en résulte.

Nous pouvons encore énoncer le théorème 3 sous la forme suivante :

Théorème. — *Pour que la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ soit prolongeable en dehors de son cercle de convergence $|\zeta| < R$, il faut et il suffit qu'il existe une fonction entière $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus avec $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$, telle que*

$$a_n = f(n) + b_n$$

où $\limsup_{n=\infty} |b_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$.

Corollaire [1]. — *Une série lacunaire $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ avec $a_{n_\nu} = 0$ n'est pas prolongeable en dehors de son cercle de convergence.*

En effet, dans le cas contraire, on aurait pour $n = n_\nu$, $0 = f(n_\nu) + b_{n_\nu}$ donc

$$\limsup_{n_\nu = \infty} \frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu} < \log\frac{1}{R},$$

---

[1] Ce corollaire est l'extension de Fabry du théorème de M. Hadamard sur les séries lacunaires.

ce qui entraînerait, d'après le théorème 2,

$$\limsup_{n=\infty} \frac{\log|f(n)|}{n} < \log\frac{1}{R}, \qquad \text{d'où} \qquad \limsup_{n=\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}} < \frac{1}{R}$$

en contradiction avec la définition de R.

On démontrera de même le résultat plus général suivant : une série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ de rayon de convergence R et telle que

$$\limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}} < \frac{1}{R}$$

n'est pas prolongeable en dehors de son cercle de convergence.

6. *Nouvelles extensions du théorème* 1. — La dernière application nous permet de démontrer la généralisation suivante des théorèmes 1 et 2 :

THÉORÈME 4. — *Soit $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe* L *vérifiant l'hypothèse* H. *Alors*

$$\alpha(0) = \limsup_{n_\nu=\infty} \frac{\log|f(n_\nu)|}{n_\nu}.$$

En particulier, si $f(n_\nu) = 0$, on a $f(z) \equiv 0$.

En effet, en posant $a_n = f(n)$, la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ est prolongeable (même jusqu'à l'infini) en dehors de son cercle de convergence de rayon R. Donc

$$\frac{1}{R} \leqq \limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}}.$$

D'autre part,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n=\infty} |a_n|^{\frac{1}{n}};$$

par conséquent,

$$\frac{1}{R} = \limsup_{n_\nu=\infty} |a_{n_\nu}|^{\frac{1}{n_\nu}}.$$

Les formules (R) montrent que $\alpha(0) = \log\frac{1}{R}$; le théorème en résulte.

Le théorème 1 peut encore être précisé de la manière suivante :

THÉORÈME 5 [1]. — *Soit $f(z)$ une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus, dont la transformée de Laplace soit holomorphe et uniforme à l'extérieur*

---

[1] *Cf.* KORVAAR, *Thèse*, Amsterdam, 1949.

d'une courbe L *vérifiant l'hypothèse* H. *Si pour tous les entiers positifs* n, *les quantités* $|f(n)|$:

a. sont bornées dans leur ensemble, alors $|f(x)|$ *est borné pour* x *réel positif;*

b. tendent vers zéro quand n *augmente indéfiniment, alors* $\lim_{x=\infty} f(x) = 0$, x *réel positif.*

Remarque. — Ce théorème contient bien le théorème 1. On le voit immédiatement en remarquant que la fonction G associée en vertu des relations (R) à $f(z)e^{\lambda z}$ est $G(\sigma - \lambda)$, si $G(\sigma)$ est associée à $f(z)$. On peut donc dire que $f(n)$ et $f(x)$ sont de même ordre et de même type (maximum, moyen ou minimum).

Pour démontrer le théorème 5 remarquons d'abord que :

Si à la fonction $f(z)$ on fait correspondre la fonction $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n$, à la fonction $f(z+p)$, p entier positif, correspondra la fonction

$$g_p(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n+p)\zeta^n = \frac{g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} f(n)\zeta^n}{\zeta^p}.$$

Ces fonctions $g_p(\zeta)$ jouissent de la propriété suivante :

Théorème 6 [1]. — *Soit* $g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$ *holomorphe dans un domaine* D_0 *contenant* $\zeta = 0$ *et supposons que dans* D_0, $|g(\zeta)|$ *soit borné par une constante* K. *Supposons d'autre part que l'on ait*

$$|a_n| < A \quad \text{pour} \quad n = 0, 1, 2, \ldots, p-1$$
$$|a_n| < B \quad \text{pour} \quad n = p, p+1, \ldots.$$

Alors, dans un domaine D_1 *complètement intérieur à* D_0, *la fonction*

$$g_p(\zeta) = \frac{g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n \zeta^n}{\zeta^p}$$

vérifie

$$|g_p(\zeta)| < M\left(A + \frac{K}{p}, B\right),$$

où $M(u, v)$ *est une fonction qui dépend uniquement des deux domaines* D_0 *et* D_1, *qui est croissante en* u *et en* v *et qui tend vers zéro lorsque l'une des variables* u *ou* v *tend vers zéro.*

---

(1) *Cf.* Szegö, *Math. Annalen*, 89, 1923.

En effet, D_0 et D_1 étant donnés, nous pouvons toujours supposer (quitte à le restreindre), que le domaine D_0 est limité par un nombre fini de courbes à tangentes continues, ces courbes ne coupant le cercle $|\zeta|=1$ qu'un nombre fini de fois et chaque fois sous un angle droit.

Dans le domaine D_0 on a alors, si $|\zeta|<1$,

$$|g_p(\zeta)|=\left|\frac{\sum_{n=p}^{\infty} a_n\zeta^n}{\zeta^p}\right|<B\sum_{n=0}^{\infty}|\zeta|^n=\frac{B}{1-|\zeta|};$$

si $|\zeta|>1$,

$$|g_p(\zeta)|<\left|\frac{g(\zeta)}{\zeta^p}\right|+\left|\frac{\sum_{n=0}^{p-1} a_n\zeta^n}{\zeta^p}\right|<\frac{K}{|\zeta|^p}+\frac{A}{|\zeta|^p}\sum_{n=0}^{p-1}|\zeta|^n<\frac{K}{|\zeta|^p}+\frac{A}{|\zeta|-1}<\frac{A+\frac{K}{p}}{|\zeta|-1}.$$

Or il existe une fonction harmonique dans D_0 qui, aux points frontières vérifiant $|\zeta|<1$, a pour valeur limite $\log\frac{B}{1-|\zeta|}$ et aux points frontière vérifiant $|\zeta|>1$ a pour valeur limite $\log\frac{A+\frac{K}{p}}{|\zeta|-1}$. Dans D_1 cette fonction harmonique a pour borne supérieure une fonction $M^*(u, v)$, $u=A+\frac{K}{p}$, $v=B$, fonction qui dépend uniquement de D_0 et D_1, qui est croissante en u et en v et qui tend vers $-\infty$ lorsque l'une des variables u ou v tend vers zéro. Le principe des majorantes harmoniques nous donne immédiatement pour ζ dans D_1

$$|g_p(\zeta)|<e^{M^*\left(A+\frac{K}{p},\, B\right)}=M\left(A+\frac{K}{p},\, B\right).$$

Ce théorème nous permet de démontrer le théorème 5 de la manière suivante. On a

$$f(z+p)=\frac{1}{2\pi i}\int_L e^{z\sigma}g_p(e^{-\sigma})\,d\sigma$$

donc

$$|f(z+p)|<\frac{1}{2\pi}M\left(A+\frac{K}{p},\, B\right)\int_L|e^{z\sigma}|\,|d\sigma|.$$

Soit x réel, p sa partie entière; posons $x=z+p$; alors $\int_L|e^{z\sigma}|\,|d\sigma|$ est borné par une constante $2\pi C$ indépendante de x, et $|f(x)|<CM\left(A+\frac{K}{p},\, B\right)$.

Si alors $|f(n)|<A$ pour tous les entiers n, on peut prendre $B=A$ et, d'après les propriétés de croissance de $M(u, v)$, on pourra remplacer p par 1, d'où la partie a du théorème 5.

Si $\lim_{n=\infty} f(n)=0$, lorsque x tend vers l'infini, on pourra faire tendre p vers l'infini et prendre pour B une quantité tendant vers zéro, tandis que A restera fixe. La partie b du théorème 5 en résulte.

Application. — Le théorème $5a$ nous donne immédiatement un énoncé de *Pólya* : une fonction entière $F(z)$ d'ordre inférieur à $\frac{1}{2}$, qui est bornée sur l'ensemble des points $z = n^2$, se réduit à une constante. En effet $f(z) = F(z^2)$ est entière d'ordre inférieur à 1, donc vérifie les hypothèses du théorème.

$|f(z)|$ est donc borné sur l'axe réel positif, par suite sur tout l'axe réel; comme son ordre est inférieur à 1, $|f(z)|$ est borné dans tout le plan complexe, donc $F(z)$ est constant. Le même raisonnement s'applique lorsque $F(z)$ est du type minimum d'ordre $\frac{1}{2}$ (1).

7. Application du théorème 6. — 1. Théorème de Fatou (2). — *Soit*

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \zeta^n$$

une série dont le rayon de convergence est 1 *et supposons* $\lim_{n=\infty} a_n = 0$. *Alors la série converge vers* $g(\zeta)$ *en tout point du cercle* $|\zeta| = 1$ *en lequel* $g(\zeta)$ *est holomorphe et cette convergence est uniforme sur tout arc d'holomorphie.*

En effet, en un tel point ζ on aura

$$|g_p(\zeta)| = \left| g(\zeta) - \sum_{n=0}^{p-1} a_n \zeta^n \right| < M\left(A + \frac{K}{p},\, B\right).$$

Or B peut être choisi aussi petit que l'on veut, si l'on prend p assez grand. Le théorème en résulte.

2. Si l'on associe à la fonction $f(z)$ la fonction

$$g(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} f(n)\zeta^n,$$

on associera à la fonction $f(z+q) - f(z+r)$, où q et r sont des entiers positifs fixés, la fonction $\gamma(\zeta) = g_q(\zeta) - g_r(\zeta)$; et à la fonction $f(z+q+p) - f(z+r+p)$ sera associée la fonction $\gamma_p(\zeta)$.

Supposons $|f(n)| < B$; si ζ est dans D_1, $|g_p(\zeta)|$ a une borne supérieure indépendante de p, à savoir $M(B+K, B)$; d'où $|\gamma(\zeta)| < \mu$ avec $\mu = 2M(B+K, B)$.

(1) Sur ce sujet, *voir* un important Mémoire de M. Valiron (*Bull. Sc. Math.*, t. 49, 1925) et un Article de Miss Cartwright (*Quart. Journal*, t. 7, 1936).

(2) *Acta mathematica*, 30, 1906.

Si l'on suppose de plus $|f(q+n)-f(r+n)|<\mathrm{A}$ pour $n=0, 1, \ldots, p-1$, on a $|\gamma_p(\zeta)|<\mathrm{M}\left(\mathrm{A}+\frac{\mu}{p}, 2\mathrm{B}\right)$ dans un domaine D_2 complètement intérieur à D_1.

Comme d'autre part,

$$f(z+q+p)-f(z+r+p)=\frac{1}{2\pi i}\int e^{z\sigma}\gamma_p(e^{-\sigma})\,d\sigma,$$

on a

$$|f(q+p)-f(r+p)|<\mathrm{LM}\left(\mathrm{A}+\frac{\mu}{p}, 2\mathrm{B}\right),$$

où $2\pi\mathrm{L}$ est la longueur du chemin d'intégration.

Soient alors $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ des domaines extérieurs les uns aux autres, ε la borne supérieure de leurs diamètres respectifs et δ le minimum de leur distance deux à deux. Considérons une fonction $f(z)$ du type moyen d'ordre 1 au plus, dont la transformée de Laplace est holomorphe et uniforme à l'extérieur d'une courbe de longueur $2\pi\mathrm{L}$ vérifiant l'hypothèse H, et supposons que tout $f(n)$ appartienne à l'un des domaines $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$. Si $f(n+q)$ et $f(n+r)$ appartiennent tous deux au même domaine pour chacune des valeurs $n=0, 1, \ldots, p-1$ et si

$$\delta>\mathrm{LM}\left(\varepsilon+\frac{\mu}{p}, 2\mathrm{B}\right),$$

alors $f(n+q)$ et $f(n+r)$ appartiennent tous deux au même domaine Δ encore pour $n=p$, et par conséquent (de proche en proche) pour chaque valeur de l'entier n. Si i_n est l'indice du domaine Δ dans lequel est situé $f(n)$, la suite des i_n est périodique à partir d'un certain rang.

Cette conclusion subsistera si l'on suppose seulement $\delta>\mathrm{LM}(\varepsilon, 2\mathrm{B})$ et $f(n)$ dans l'un des domaines $\Delta_1, \ldots, \Delta_k$ pour $n\geqq \mathrm{N}$. En effet, par suite de la continuité de la fonction M, on peut trouver un entier p tel que l'on ait encore $\delta>\mathrm{LM}\left(\varepsilon+\frac{\mu}{p}, 2\mathrm{B}\right)$. D'autre part, dans la suite $i_{\mathrm{N}}, i_{\mathrm{N}+1}, \ldots, i_{\mathrm{N}+n}, \ldots$, on peut trouver deux groupes de p termes consécutifs $i_q, i_{q+1}, \ldots, i_{q+p-1}$ et $i_r, i_{r+1}, \ldots, i_{r+p-1}$ identiques, car le nombre de tels groupes possibles est fini (k^p). Le résultat annoncé s'en déduit.

En particulier : *si les $f(n)$ ont un nombre fini de valeurs d'accumulation, la suite i_n est périodique à partir d'un certain rang.*

Ce résultat peut s'énoncer sous la forme suivante :

THÉORÈME. — *Si $g(\zeta)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\zeta^n$ est prolongeable jusqu'à l'infini et si les a_n ont un nombre fini de valeurs d'accumulation $d_1, \ldots, d_k$, soit $a_n-d_{i_n}\to 0$, $i_n=1, \ldots, k$, la suite i_n est périodique à partir d'un certain rang.*

Dans cette proposition on peut remplacer « *prolongeable jusqu'à l'infini* » par « *prolongeable en dehors du cercle de convergence* » en vertu du théorème 3 et l'on retrouve ainsi un résultat de Szegö [1].

En particulier : *si dans* $g(\zeta) = \Sigma a_n \zeta^n$ *les* a_n *ont un nombre fini de valeurs et si* $g(\zeta)$ *est prolongeable en dehors de son cercle de convergence* $|\zeta| = 1$, *la suite des* a_n *est périodique à partir d'un certain rang.*

Il est bien connu que cela entraîne que $g(\zeta)$ est une fraction rationnelle dont tous les pôles sont simples et racines de l'unité.

8. *Utilisation de la méthode de Nevanlinna.* — L'utilisation de la méthode de Nevanlinna, déjà signalée page 9, fournit directement d'autres propriétés des fonctions entières $f(z)$, dont les conséquences pour les fonctions $g(\zeta)$ associées peuvent être intéressantes. Par exemple :

Si $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) < \pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < \pi$, *on ne peut avoir* $\mathcal{R}(-1)^n f(n) \geqq 0$ *pour tous les entiers positifs n, à moins que* $f(z)$ *ne soit imaginaire pur sur l'axe réel, auquel cas* $\mathcal{R} f(n) = 0$.

Considérons en effet la fonction entière $F(z) = f(z) + \overline{f(\bar{z})}$; elle est réelle pour z réel et par hypothèse $(-1)^n F(n) \geqq 0$. Du théorème de Rolle on déduit sans peine que si $z_1, z_2, \ldots$ sont les zéros positifs de $F(z)$ rangés par grandeur croissante, on a

$$\liminf_{r=\infty} \frac{1}{\log r} \sum_{z_\nu < r} \frac{1}{z_\nu} \geqq 1,$$

ce qui est en contradiction avec la relation fondamentale de Nevanlinna (*voir* Appendice). L'hypothèse ne peut donc être vérifiée que si $F(z) \equiv 0$.

Ceci peut être précisé (la démonstration restant la même) :

Si $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) \leqq \theta\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) \leqq \theta\pi$, $0 \leqq \theta < 1$, *il est impossible que la quantité* $\mathcal{R}(-1)^n f(n)$ *ne change de signe* [1] *dans le passage de n à* $n+1$ *que pour des valeurs* n_ν *de n vérifiant*

$$\liminf_{r=\infty} \frac{1}{\log r} \sum_{n_\nu < r} \frac{1}{n_\nu} < 1 - \theta.$$

Au lieu de placer $(-1)^n f(n)$ par rapport aux deux demi-plans séparés par l'axe imaginaire, on peut placer cette même quantité par rapport à deux demi-plans séparés par une droite quelconque passant par l'origine. Il est clair que les résultats seront encore les mêmes.

---

(1) *Math. Annalen*, 89, 1923.

(1) La valeur zéro peut être considérée indifféremment comme positive ou négative.

COROLLAIRE. — *Si* $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)<\pi$, *il est impossible que* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=-1$.

En effet, supposons que $\lim\limits_{n=\infty}\frac{f(n+1)}{f(n)}=-1$. Posons $u_n=(-1)^n f(n)$, alors $u_n\neq 0$ à partir d'un certain rang, et $\arg u_{n+1}-\arg u_n\to 0$. D'autre part, il existe un nombre θ avec $0\leqq\theta<1$ tel que $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right)\leqq\theta\pi$, $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\leqq\theta\pi$. Soit p un entier tel que $\frac{1}{p}<1-\theta$. Considérons p droites passant par l'origine et découpant le plan en $2p$ angles d'ouverture $\frac{\pi}{p}\cdot$ Soit n_ν la suite des indices n des points u_n situés dans deux tels angles opposés par le sommet et formons

$$\liminf_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{n_\nu<r}\frac{1}{n_\nu}\cdot$$

Pour un couple d'angles opposés par le sommet au moins, parmi les p couples possibles, cette expression est au plus égale à $\frac{1}{p}<1-\theta$. La bissectrice intérieure commune aux deux angles du couple sépare le plan complexe en deux demi-plans; u_n, dès que n est assez grand, ne peut passer de l'un à l'autre qu'en pénétrant dans l'un des angles du couple; d'où l'impossibilité.

Ce corollaire entraîne la conséquence suivante :

THÉORÈME. — *Si* $g(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ *est prolongeable jusqu'à l'infini le long de l'axe réel positif, on ne peut avoir* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$.

En utilisant le théorème 3 on en déduit un théorème de Fabry : *Si* $\lim\limits_{n=\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}=1$, *la fonction* $g(\zeta)=\sum\limits_{n=0}^{\infty}a_n\zeta^n$ *admet le point* $\zeta=1$ *comme point singulier.*

APPENDICE.

THÉORÈME. — *Soit* $f(z)$ *une fonction entière du type moyen d'ordre* 1 *au plus. Si* $f(x_\nu)=0$, *les* x_ν *formant une suite réelle positive et croissante, avec*

$$\limsup_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}>\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right];$$

alors on a (1) $f(z)\equiv 0$.

(1) On peut, sans altérer la conclusion, remplacer ces hypothèses par des hypothèses beaucoup plus larges, la démonstration restant la même. Mais c'est l'énoncé indiqué que nous utilisons.

Pour établir cette proposition nous suivrons une méthode due à R. Nevanlinna. Considérons la partie du demi-plan $\mathcal{R}z > 0$ intérieure à la couronne $0 < r_0 < |z| < r$; c'est un domaine que nous entaillerons le long des demi-droites issues des zéros $a_\nu e^{i\alpha_\nu}$ (a_ν et α_ν réels) de la fonction $f(z)$, et dont le prolongement passe par l'origine. Le long du contour de ce domaine entaillé on a

$$\int \log f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\right)\frac{dz}{z}=0.$$

En explicitant la partie imaginaire, on obtient

$$\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}[\log|f(iy)|+\log|f(-iy)|]\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{r^2}\right)\frac{dy}{y}+\frac{2}{\pi r}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{+\frac{\pi}{2}}\log|f(re^{i\varphi})|\cos\varphi\,d\varphi$$
$$=2\sum_{a_\nu<r}\left(\frac{1}{a_\nu}-\frac{a_\nu}{r^2}\right)\cos\alpha_\nu+\mathcal{I}\frac{1}{\pi}\int_{|z|=r_0}\log f(z)\left(\frac{1}{z}+\frac{z}{r^2}\right)\frac{dz}{z}.$$

Par conséquent

$$2\sum_{a_\nu<r}\left(\frac{1}{a_\nu}-\frac{a_\nu}{r^2}\right)\cos\alpha_\nu<\frac{1}{\pi}\int_{r_0}^{r}[\log|f(iy)|+\log|f(-iy)|]\left(\frac{1}{y}-\frac{y}{r^2}\right)\frac{dy}{y}+O(1).$$

En particulier, en se bornant aux zéros réels :

$$\sum_{x_\nu<r}\left(\frac{1}{x_\nu}-\frac{x_\nu}{r^2}\right)<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r).$$

Dans cette relation remplaçons r par $r\log r$ tout en limitant à r la sommation du premier membre; il vient

$$\sum_{x_\nu<r}\left(\frac{1}{x_\nu}-\frac{x_\nu}{r^2\log^2 r}\right)<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r).$$

Or $\dfrac{x_\nu}{r^2\log^2 r}<\dfrac{1}{x_\nu\log^2 r}$, donc

$$\left(1-\frac{1}{\log^2 r}\right)\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r),$$

soit

$$\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}<\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right]\log r+o(\log r),$$

ou encore

$$\limsup_{r=\infty}\frac{1}{\log r}\sum_{x_\nu<r}\frac{1}{x_\nu}\leqq\frac{1}{2\pi}\left[\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right)+\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right].$$

Le théorème énoncé en résulte.

Nous avons appliqué ce théorème à plusieurs reprises :

1° Lorsque $x_\nu = \nu$, $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. Dans ce cas

$$\sum_{x_\nu < r} \frac{1}{x_\nu} = \sum_{\nu < r} \frac{1}{\nu} = \log r + O(1).$$

2° Lorsque $\lim\limits_{\nu=\infty} \frac{x_\nu}{\nu} = 1$, $\alpha\left(+\frac{\pi}{2}\right) + \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) < 2\pi$. On a encore

$$\sum_{x_\nu < r} \frac{1}{x_\nu} = \log r + o(\log r).$$

3° Dans le cas général (p. 121).