ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

VICTOR LALAN

Problème d'Ossian Bonnet et la théorie de l'immersion d'un ds^2

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 95-124
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__95_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

LE PROBLÈME D'OSSIAN BONNET ET LA THÉORIE DE L'IMMERSION D'UN ds^2

PAR M. VICTOR LALAN.

INTRODUCTION.

On sait que le problème d'Ossian Bonnet consiste dans la recherche des surfaces qu'on peut déformer sans altérer leurs courbures principales [1]. Ce problème ne prend toute sa signification que si on le situe dans son cadre naturel, qui est la théorie de l'immersion d'un ds^2 à deux variables dans l'espace à trois dimensions.

La détermination de la seconde forme fondamentale d'une surface dont on connaît le ds^2 est, initialement, un problème comportant trois inconnues, les trois coefficients de la seconde forme. Ces inconnues doivent vérifier trois équations, celle de Gauss et celles de Codazzi, mais la première de ces équations,

(1) La bibliographie de la question est donnée par M. Élie Cartan, dans son Mémoire *Sur les couples de surfaces applicables avec conservation des courbures principales* (*Bull. des Sc. Math.*, 66, 1942, p. 55-85).

étant finie relativement aux inconnues, permet d'en diminuer le nombre d'une unité, et les deux inconnues restantes sont simplement assujetties à vérifier les équations de Codazzi, qui deviennent deux équations aux dérivées partielles du premier ordre, linéaires par rapport aux dérivées partielles de chacune d'elles. Si l'on résout ces deux équations par rapport aux dérivées de l'une des inconnues en fonction des dérivées de l'autre, que l'on privilégie ainsi arbitrairement, puis que l'on forme la condition d'intégrabilité, cette condition ne sera pas identiquement satisfaite, du moins en général; elle fournira pour l'inconnue secondaire une équation finie, qui permettra de la calculer en fonction de l'inconnue principale et de ses dérivées premières et secondes, si bien que le problème ne comportera plus qu'une seule inconnue, et que les équations de Codazzi deviendront deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre pour l'inconnue privilégiée.

La théorie de l'immersion étant envisagée de cette manière, on conçoit que certaines surfaces exigeront un traitement exceptionnel : ce sont celles pour lesquelles la condition d'intégrabilité rencontrée se trouvera identiquement satisfaite; l'inconnue secondaire ne pourra pas s'exprimer par des calculs finis en fonction de l'inconnue principale. Si l'on suppose celle-ci provisoirement donnée, l'inconnue secondaire ne s'obtiendra qu'en intégrant une équation aux différentielles totales complètement intégrable, et contiendra par conséquent un paramètre arbitraire dans son expression. Cette particularité se présente justement pour les surfaces d'O. Bonnet; ce sont les surfaces qui apparaissent comme exceptionnelles, lorsque l'inconnue secondaire est l'angle sous lequel les premières lignes de courbure coupent une famille de courbes choisies arbitrairement comme repère sur la surface. Supposons qu'on se donne, pour une telle surface, la courbure moyenne, qui joue le rôle d'inconnue privilégiée; cette hypothèse revient à se donner les courbures principales, puisque la courbure totale est connue d'après le ds^2. Les directions principales ne s'obtiendront pas par des calculs finis à partir de cette donnée; leur détermination exigera l'intégration d'une équation aux différentielles totales complètement intégrable, et la présence d'un paramètre arbitraire dans leur expression traduira la déformabilité de la surface avec permanence des courbures principales.

Il apparaît, d'après cet exposé, qu'en modifiant le choix de l'inconnue que nous qualifions de privilégiée, d'autres surfaces exceptionnelles se manifesteront. Si, par exemple, on privilégie l'angle qui fixe les directions principales, on trouvera, comme surfaces exceptionnelles, les surfaces susceptibles d'être déformées avec permanence des lignes de courbure, c'est-à-dire les surfaces-moulure cylindriques.

Notre travail est divisé en deux parties. Dans la première, nous étudions la formule qui permet de calculer, par des opérations finies, les directions principales d'une surface générique dont on connaît le ds^2 et la courbure moyenne.

Cette formule, ainsi que l'expression du tenseur asymptotique qu'on en déduit, se trouve en substance dans les Mémoires de M. H. W. Alexander (¹) et de M. T. Y. Thomas (²), mais nous avons élucidé, d'une manière que nous croyons nouvelle, la nature tensorielle des différents coefficients qui se présentent au cours du calcul.

La seconde partie est consacrée à l'étude des surfaces exceptionnelles, qui sont les surfaces d'O. Bonnet. Je tire surtout parti du fait que, à part les surfaces à courbure moyenne constante, ce sont des surfaces à courbure moyenne isotherme. Mes recherches antérieures sur cette catégorie remarquable de surfaces trouvent ici leur application. Sur toute surface de cette nature, on peut définir une certaine fonction, que j'appelle la *fonction primitive* de la surface, fonction dont le gradient a une direction symétrique de celui de la courbure moyenne par rapport à la première direction principale. L'existence de cette fonction se manifeste principalement quand on étudie les lignes minima de la surface, ainsi que je l'ai signalé dans une Note aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences* (223, 1946, p. 883) et dans un Mémoire inséré au *Bulletin de la Société Mathématique* (75, 1947, p. 81). Ce qui caractérise les surfaces d'O. Bonnet, celles du moins qui ne sont pas à courbure moyenne constante, c'est que leur fonction primitive a ses deux paramètres différentiels de Beltrami proportionnels. J'indique la forme générale que revêt le ds^2 d'une surface d'O. Bonnet, m'attachant surtout aux surfaces de troisième classe, qui sont des surfaces W. Ce ds^2 serait complètement déterminé, si l'on savait intégrer l'équation différentielle ordinaire du troisième ordre, dont l'inconnue est la courbure moyenne, et qui exprime le théorème de Gauss. A un ds^2 de cette sorte, on peut associer une infinité de formes asymptotiques, qui donnent toutes à la surface les mêmes courbures principales, mais des lignes de courbure différentes. Je retrouve aisément, par cette méthode, les beaux résultats que M. É. Cartan a fait connaître, dans le Mémoire cité, sur les lignes de courbure virtuelles d'un ds^2 de Bonnet. Enfin, revenant au problème de l'immersion, je montre que, en dépit des apparences, à la donnée d'un tel ds^2, ne correspondent qu'un très petit nombre de surfaces non superposables, constituant une *famille* au sens de M. Cartan.

La lecture de ce Mémoire suppose connu l'essentiel de la théorie du trièdre mobile telle qu'elle est exposée par M. É. Cartan, par exemple, au début du Chapitre VII de son ouvrage *Sur les systèmes différentiels extérieurs et leurs applications géométriques* (Paris, Hermann, 1945).

(¹) *The role of the mean curvature in the immersion theory of surfaces* (*Trans. of the Amer. Math. Soc.*, 47, 1940, p. 230-253.)

(²) *Algebraic determination of the second fundamental form of a surface by its mean curvature* (*Bull. of the Amer. Math. Soc.*, 51, 1945, p. 390-399).

I. — Détermination des directions principales d'une surface en fonction du tenseur métrique et de la courbure moyenne.

1. Nous écrivons les deux formes fondamentales de la surface

$$ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2, \qquad \Phi = a(\omega^1)^2 + 2b\omega^1\omega^2 + c(\omega^2)^2$$

et nous appelons $\frac{\theta}{2}$ l'angle sous lequel les premières lignes de courbure coupent les lignes (C_1), tangentes à $\mathbf{e}_1$. H désignant la courbure moyenne et A la demi-différence des courbures principales, nous avons

$$a = H + A\cos\theta, \qquad b = A\sin\theta, \qquad c = H - A\cos\theta. \tag{1.1}$$

On suppose le ds^2 connu; ω^1 et ω^2 le sont aussi, dès lors qu'on a choisi la famille de courbes (C_1). On se propose de déterminer a, b, c, ou encore, H, A et θ. Mais le théorème de Gauss nous dit que la courbure totale K, qui vaut $H^2 - A^2$, est déterminée par le seul ds^2; donc A peut s'évaluer en fonction de H, et il ne reste, en somme, que deux inconnues, H et θ.

Les équations de Codazzi, qui s'obtiennent en différentiant extérieurement $\omega_1^3 = a\omega^1 + b\omega^2$, $\omega_2^3 = b\omega^1 + c\omega^2$, s'écrivent, si l'on définit r et s par $d\omega^1 = r[\omega^1\omega^2]$, $d\omega^2 = s[\omega^2\omega^1]$,

$$a_2 + 2bs = b_1 + (a - c)r, \qquad b_2 - (a - c)s = c_1 + 2br. \tag{1.2}$$

Remplaçant a, b, c par leurs expressions (1.1), et résolvant par rapport aux dérivées pfaffiennes de θ, il vient

$$\left\{\begin{aligned} \theta_1 &= \frac{1}{A}\Big(-H_1\sin\theta + H_2\cos\theta\Big) + \frac{A_2}{A} - 2r, \\ \theta_2 &= \frac{1}{A}\Big(H_1\cos\theta + H_2\sin\theta\Big) - \frac{A_1}{A} + 2s. \end{aligned}\right. \tag{1.3}$$

La condition d'intégrabilité $\theta_{12} - \theta_{21} + s\theta_2 - r\theta_1 = 0$ s'écrit, en tenant compte de $K = s_1 + r_2 - r^2 - s^2$,

$$X\cos\theta + Y\sin\theta = Z \tag{1.4}$$

avec

$$\left\{\begin{aligned} X &= \left(\frac{H_1}{A}\right)_1 - \left(\frac{H_2}{A}\right)_2 + \frac{A_2H_2 - A_1H_1}{A^2} + \frac{sH_1 - rH_2}{A}, \\ Y &= \left(\frac{H_1}{A}\right)_2 + \left(\frac{H_2}{A}\right)_1 - \frac{A_2H_1 + A_1H_2}{A^2} + \frac{rH_1 + sH_2}{A}, \\ Z &= -\frac{H_1^2 + H_2^2}{A^2} + \left(\frac{A_1}{A}\right)_1 + \left(\frac{A_2}{A}\right)_2 - \frac{rA_2 + sA_1}{A} - 2K. \end{aligned}\right. \tag{1.5}$$

2. La formule (1.4) devient plus expressive, si l'on fait usage de la dérivation pfaffienne covariante.

Soit $\mathbf{V}$ un vecteur tangent, de composantes $V_i = \mathbf{V}.\mathbf{e}_i$, et soit $dV_i = V_{ij}\omega^j$. Les dérivées pfaffiennes secondes, V_{ij}, ne sont pas les composantes d'un tenseur, mais on obtient un tenseur en considérant les $V_{i,j}$ définis par

$$d\mathbf{V}.\mathbf{e}_i = V_{i,j}\,\omega^j. \tag{2.1}$$

Il est évident, en effet, que $\sum_{i,j} V_{i,j}\omega^j\mathbf{e}_i$ a une signification absolue, puisque c'est la composante tangentielle de $d\mathbf{V}$. Les $V_{i,j}$ sont les dérivées pfaffiennes *covariantes* du second ordre. Si l'on pose $\omega_i^k = \rho_{ij}^k\omega^j$, la relation entre V_{ij} et $V_{i,j}$ est

$$V_{i,j} = V_{ij} - \rho_{ij}^k V_k. \tag{2.2}$$

Les rotations ρ_{ij}^k jouent ici le même rôle que les γ_{ij}^k dans le calcul tensoriel, mais elles ne sont pas symétriques par rapport aux indices inférieurs, du fait que ω^1 et ω^2 ne sont pas des différentielles exactes; en revanche, elles sont antisymétriques par rapport aux deux premiers indices. Les seules rotations non nulles sont

$$\rho_{11}^2 = -\rho_{21}^1 = r, \qquad \rho_{12}^2 = -\rho_{22}^1 = -s. \tag{2.3}$$

La formule (2.2) se détaille donc comme suit

$$\begin{cases} V_{1,1} = V_{11} - r V_2, & V_{1,2} = V_{12} + s V_2, \\ V_{2,1} = V_{21} + r V_1, & V_{2,2} = V_{22} - s V_1. \end{cases} \tag{2.4}$$

Si $\mathbf{V}$ était le gradient d'une fonction de point A, on aurait

$$V_1 = A_1 = A_{,1}, \qquad V_2 = A_2 = A_{,2}$$

(au premier ordre, il n'y a pas de différence entre la dérivée pfaffienne covariante et la dérivée pfaffienne ordinaire). Nous écrirons, dans ce cas

$$V_{i,j} = A_{,ij},$$

la présence d'une seule virgule indiquant suffisamment qu'il s'agit de dérivations covariantes. On vérifie que $A_{,ij} = A_{,ji}$.

3. Revenant aux expressions (1.5), nous introduirons le tenseur symétrique $l_{\alpha\beta}$, que nous appellerons le *tenseur moyen*,

$$l_{\alpha\beta} = H_{,\alpha\beta} - \frac{H_\alpha A_\beta + A_\alpha H_\beta}{A}. \tag{3.1}$$

Puisque $A^2 = H^2 - K$, on peut former ce tenseur dès qu'on connaît le tenseur métrique $g_{\alpha\beta}$, d'où K, et la courbure moyenne H. Il s'écrit aussi, en remplaçant A par sa valeur,

$$l_{\alpha\beta} = H_{,\alpha\beta} - \frac{2HH_\alpha H_\beta}{A^2} + \frac{K_\alpha H_\beta + H_\alpha K_\beta}{2A^2}.$$

Nous constatons, dès lors, que

$$(3.2)\qquad X=\frac{l_{11}-l_{22}}{A},\qquad Y=\frac{2l_{12}}{A},$$

l_{ij} désignant les composantes du tenseur moyen sur le repère rectangulaire $M\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$. Comme, par ailleurs, on a, pour toute fonction F,

$$\Delta_1 F=(F_1)^2+(F_2)^2,\qquad \Delta_2 F=F_{11}+F_{22}-rF_2-sF_1=F_{,11}+F_{,22},$$

la relation (1.4) s'écrira, en multipliant tous les termes par $\frac{A}{2}$,

$$(3.3)\qquad \frac{l_{11}-l_{22}}{2}\cos\theta+l_{12}\sin\theta=\frac{A}{2}\Delta_2\log A-\frac{\Delta_1 H}{2A}-AK,$$

formule que nous simplifierons légèrement, grâce à la notion de *tenseur-bissecteur*, dont nous empruntons la définition à M. H. W. Alexander.

Soit $T_{\alpha\beta}$ un tenseur symétrique; $T^*_{\alpha\beta}$ sera son tenseur-bissecteur si la forme quadratique $T^*_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$ est la jacobienne, divisée par $4\sqrt{g}$ (g étant le discriminant du ds^2), de $T_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$ et de $g_{\alpha\beta}\,du^\alpha\,du^\beta$. Les directions nulles de $T^*_{\alpha\beta}$ sont donc les bissectrices de celles de $T_{\alpha\beta}$. Quand on utilise, comme nous le faisons présentement, un repère rectangulaire, on a simplement

$$(3.4)\qquad T^*_{11}=-T_{12},\qquad T^*_{12}=\frac{T_{11}-T_{22}}{2},\qquad T^*_{22}=T_{12}.$$

La formule (3.3) devient donc

$$(3.5)\qquad l^*_{12}\cos\theta+l_{12}\sin\theta=\frac{A}{2}\Delta_2\log A-\frac{\Delta_1 H}{2A}-AK.$$

Comme le second membre est invariant, il doit en être de même du premier; c'est ce que l'on vérifie aisément. Faisons, en effet, tourner le repère rectangulaire d'un angle α

$$\bar{\mathbf{e}}_1=\mathbf{e}_1\cos\alpha+\mathbf{e}_2\sin\alpha,\qquad \bar{\mathbf{e}}_2=-\mathbf{e}_1\sin\alpha+\mathbf{e}_2\cos\alpha.$$

Nous aurons, pour un tenseur symétrique quelconque $T_{\alpha\beta}$, les nouvelles composantes médianes

$$\bar{T}_{12}=T_{12}\cos2\alpha-T^*_{12}\sin2\alpha,\qquad \bar{T}^*_{12}=T_{12}\sin2\alpha+T^*_{12}\cos2\alpha,$$

et, puisque $\bar{\theta}=\theta-2\alpha$, on constate bien que

$$\bar{T}^*_{12}\cos\bar{\theta}+\bar{T}_{12}\sin\bar{\theta}=T^*_{12}\cos\theta+T_{12}\sin\theta.$$

L'expression figurant à gauche dans (3.5) est donc invariante vis-à-vis des changements de repères rectangulaires. On peut d'ailleurs l'écrire sous une forme tensorielle qui sera invariante vis-à-vis de tout changement de repérage.

Considérons dans ce but le tenseur métrique, $\gamma_{\alpha\beta}$, de la première direction principale, qui fait l'angle $\frac{\theta}{2}$ avec $\mathbf{e}_1$. Puisque le vecteur unité de cette direction a pour composantes $\cos\frac{\theta}{2}$ et $\sin\frac{\theta}{2}$ par rapport à $M\mathbf{e}_1\mathbf{e}_2$, le tenseur métrique $\gamma_{\alpha\beta}$ aura de son côté pour composantes

$$(3.6)\qquad \gamma_{11}=\cos^2\frac{\theta}{2},\qquad \gamma_{12}=\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2},\qquad \gamma_{22}=\sin^2\frac{\theta}{2}.$$

Ses tenseurs-bissecteurs premier et second, $\gamma^{\star}_{\alpha\beta}$ et $\gamma^{\star\star}_{\alpha\beta}$, seront respectivement

$$(3.7)\qquad \begin{cases} \gamma^{\star}_{11}=-\dfrac{\sin\theta}{2}, & \gamma^{\star}_{12}=\dfrac{\cos\theta}{2}, \qquad \gamma^{\star}_{22}=\dfrac{\sin\theta}{2}, \\ \gamma^{\star\star}_{11}=-\dfrac{\cos\theta}{2}, & \gamma^{\star\star}_{12}=-\dfrac{\sin\theta}{2}, \qquad \gamma^{\star\star}_{22}=\dfrac{\cos\theta}{2}. \end{cases}$$

D'après cela, on peut écrire $T^{\star}_{12}\cos\theta+T_{12}\sin\theta$ sous la forme

$$-T_{11}\gamma^{\star\star}_{11}-2T_{12}\gamma^{\star\star}_{12}-T_{22}\gamma^{\star\star}_{22}.$$

Le repère étant rectangulaire, les composantes contrevariantes ont la même valeur que les composantes covariantes, et l'on arrive finalement à l'égalité

$$(3.8)\qquad T^{\star}_{12}\cos\theta+T_{12}\sin\theta=-T^{\alpha\beta}\gamma^{\star\star}_{\alpha\beta},\qquad (T^{\alpha\beta}=g^{\alpha\rho}g^{\beta\sigma}T_{\rho\sigma})$$

où le second membre est manifestement invariant vis-à-vis de tout changement de repérage. Il s'écrit encore $T^{\star\alpha\beta}\gamma^{\star}_{\alpha\beta}$.

4. Ce qui précède permet de rattacher au tenseur moyen le terme qui figure à droite, dans (3.5). En effet, prenons comme repère rectangulaire le trièdre de Darboux, ou repère principal. θ sera alors égal à zéro; le premier membre se réduira à $l^{\star}_{12}$, que nous écrirons $L^{\star}_{12}$, en convenant de désigner par L_{ij} les composantes du tenseur moyen sur le repère principal. Ainsi, la relation (1.4), ou (3.5), devient

$$(4.1)\qquad l^{\star}_{12}\cos\theta+l_{12}\sin\theta=L^{\star}_{12},$$

et l'on a, en fonction du tenseur moyen,

$$(4.2)\qquad X=\frac{2}{A}l^{\star}_{12},\qquad Y=\frac{2}{A}l_{12},\qquad Z=\frac{2}{A}L^{\star}_{12}.$$

Il résulte de ce calcul que

$$(4.3)\qquad L^{\star}_{12}=\frac{A}{2}\Delta_2\log A-\frac{\Delta_1 H}{2A}-AK.$$

Cette formule exprime une propriété remarquable du tenseur moyen. Il semblerait, à première vue, que les composantes de ce tenseur sur le repère principal ne peuvent être connues que si l'on connaît le repère principal; c'est le contraire qui se présente. La formule (4.3) montre que la différence $L_{11} - L_{22}$ se calcule sans qu'il soit besoin de connaître les directions principales. Il s'ensuit que les composantes L_{11}, L_{22} sont calculables séparément, car la somme $L_{11} + L_{22}$ est égale à l'invariant $g^{\alpha\beta} l_{\alpha\beta}$. La composante L_{12} se calcule, d'autre part, au signe près, car $L_{11}L_{22} - L_{12}^2$ est égal à l'invariant $\dfrac{|l_{\alpha\beta}|}{|g_{\alpha\beta}|}$ et, de cette égalité, on déduit L_{12}^2. A cause de l'importance de (4,3), il ne sera pas superflu de la vérifier directement.

La définition (3.1) de $l_{\alpha\beta}$ permet d'écrire

$$\frac{2}{A} l_{\alpha\beta} = \left(\frac{H_\alpha}{A}\right)_{,\beta} + \left(\frac{H_\beta}{A}\right)_{,\alpha} - \frac{H_\alpha A_\beta + A_\alpha H_\beta}{A}.$$

On aura donc, en se référant au repère principal,

$$\frac{2}{A} L_{12}^\star - \Delta_2 \log A + \frac{\Delta_1 H}{A^2} = \left(\frac{H_1 - A_1}{A}\right)_{,1} - \left(\frac{H_2 + A_2}{A}\right)_{,2} + \frac{1}{A^2}[H_1(H_1 - A_1) + H_2(H_2 + A_2)],$$

les indices indiquant ici des dérivées pfaffiennes principales. Appelons a et c les courbures principales :

$$H + A = a, \qquad H - A = c.$$

L'expression de droite ci-dessus devient

$$\frac{c_{,11} - a_{,22}}{A} + \frac{(a_2)^2 + (c_1)^2}{A^2},$$

ce qui est bien égal à $-2K$, comme on s'en assure en se reportant aux équations de Codazzi, qui, par rapport au repère principal, sont $a_2 = r(a - c)$, $c_1 = s(c - a)$.

Au lieu d'un repère rectangulaire quelconque, adoptons le repère moyen, celui pour lequel $\mathbf{e}_1$ a la direction du gradient de H. Alors, H_2 est nul, et, de $dH = H_1 \omega^1$, on déduit par différentiation extérieure, $H_{12} = rH_1$. Le système (1.3) se réduit à

$$(4.4) \qquad \begin{cases} \varphi_1 = -\dfrac{H_1}{A}\sin\varphi + \dfrac{A_2}{A} - 2r \\[2ex] \varphi_2 = \dfrac{H_1}{A}\cos\varphi - \dfrac{A_1}{A} + 2s, \end{cases}$$

où $\frac{\varphi}{2}$ représente l'angle de la première direction principale avec grad H, et où les indices désignent des dérivées pfaffiennes moyennes. Nous appellerons λ_{ij} les composantes du tenseur moyen sur le repère moyen. La formule (4.1) devient

$$(4.5) \qquad \lambda_{12}^\star \cos\varphi + \lambda_{12} \sin\varphi = L_{12}^\star.$$

Les composantes moyennes λ_{12}, $\lambda_{12}^\star$ sont des invariants faciles à calculer.

λ_{12} est $H_{12} - \frac{H_1 A_2}{A}$, ou $H_1\left(\log \frac{H_1}{A}\right)_2$. Comme $H_2 = 0$, $\Delta_1 H = H_1^2$; on peut donc écrire

$$2\lambda_{12} = \Theta\left(H, \log \frac{\Delta_1 H}{A^2}\right) \qquad [\Theta(F, G) = F_1 G_2 - G_1 F_2]. \tag{4.6}$$

Quant à λ^*_{12}, ou $\frac{\lambda_{11} - \lambda_{22}}{2}$, c'est $\frac{H_{,11} - H_{,22}}{2} - \frac{H_1 A_1}{A}$, ou

$$-\frac{\Delta_2 H}{2} + H_{11} - \frac{H_1 A_1}{A},$$

car $H_{,11} = H_{11}$. On peut encore l'écrire $-\frac{\Delta_2 H}{2} + H_1\left(\log \frac{H_1}{A}\right)_1$, d'où, enfin,

$$2\lambda^*_{12} = -\Delta_2 H + \Delta_1\left(H, \log \frac{\Delta_1 H}{A^2}\right), \qquad [\Delta_1(F, G) = F_1 G_1 + F_2 G_2]. \tag{4.7}$$

5. La formule (4.1) définit θ en fonction de H. Pour effectuer commodément la résolution, considérons l'expression

$$-l^*_{12} \sin\theta + l_{12} \cos\theta.$$

On démontre facilement, en opérant comme au n° 3, que, pour tout tenseur symétrique, c'est une expression invariante vis-à-vis de tout changement de repère rectangulaire. On peut du reste l'écrire, d'après (3.7), $l^{\alpha\beta}\gamma^*_{\alpha\beta}$, ce qui en manifeste le caractère invariant. Il vient donc, en faisant $\theta = 0$,

$$-l^*_{12} \sin\theta + l_{12} \cos\theta = L_{12}. \tag{5.1}$$

De (4.1) et (5.1), on déduit

$$(l^*_{12})^2 + (l_{12})^2 = (L^*_{12})^2 + (L_{12})^2, \tag{5.2}$$

ce qui montre que, comme nous le savions déjà, L_{12} est calculable, au signe près, sans qu'il soit besoin de connaître les directions principales. Les équations (4.1) et (5.1), linéaires en $\cos\theta$ et $\sin\theta$, se résolvent par

$$\cos\theta = \frac{l^*_{12} L^*_{12} + l_{12} L_{12}}{(l_{12})^2 + (l^*_{12})^2}, \qquad \sin\theta = \frac{l_{12} L^*_{12} - l^*_{12} L_{12}}{(l_{12})^2 + (l^*_{12})^2}. \tag{5.3}$$

Ainsi se trouve exprimé θ en fonction de H, par l'intermédiaire du tenseur moyen, avec une ambiguïté qui tient au double signe affectant L_{12}.

Le dénominateur commun aux deux formules (5.3) peut revêtir une autre forme. A propos du tenseur symétrique quelconque $T_{\alpha\beta}$, définissons les deux invariants $\mathcal{H}_T$ et $\mathcal{K}_T$, construits sur le même mode que la courbure moyenne et la courbure totale,

$$\mathcal{H}_T = \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} T_{\alpha\beta}, \qquad \mathcal{K}_T = \frac{|T_{\alpha\beta}|}{|g_{\alpha\beta}|}. \tag{5.4}$$

Cette définition posée, les dénominateurs de (5.3) s'écriront

$$(5.5)\qquad (l_{12})^2+(l^{\star}_{12})^2=l^2_{12}-l_{11}\,l_{22}+\left(\frac{l_{11}+l_{22}}{2}\right)^2=-\mathcal{K}_l+\mathcal{H}^2_l.$$

On peut encore simplifier ce résultat. On vérifie, en se référant à n'importe quel repère rectangulaire que, pour tout tenseur symétrique $T_{\alpha\beta}$, on a

$$(5.6)\qquad |T^{\star}_{\alpha\beta}|=|T_{\alpha\beta}|-\mathcal{H}^2_T\,|g_{\alpha\beta}|,$$

d'où, en divisant par $|g_{\alpha\beta}|$,

$$(5.7)\qquad \mathcal{K}_{T^\star}=\mathcal{K}_T-\mathcal{H}^2_T.$$

La formule (5.5) devient donc

$$(5.8)\qquad (l_{12})^2+(l^{\star}_{12})^2=-\mathcal{K}_{l^\star}.$$

Nous connaissons l'expression de la composante $L^{\star}_{12}$ qui figure aux numérateurs de (5.3); elle est donnée en (4.3). On peut rattacher cette expression au *tenseur asphérique*, que nous définissons par

$$(5.9)\qquad v_{\alpha\beta}=A_{,\alpha\beta}-\frac{A_\alpha A_\beta+H_\alpha H_\beta}{A},$$

qui est calculable dans les mêmes conditions que le tenseur moyen (3.1). On peut encore l'écrire

$$v_{\alpha\beta}=A(\log A)_{,\alpha\beta}-\frac{H_\alpha H_\beta}{A},$$

d'où, par application de (5.4),

$$\mathcal{H}_v=\frac{1}{2}g^{\alpha\beta}A(\log A)_{,\alpha\beta}-\frac{1}{2A}g^{\alpha\beta}H_\alpha H_\beta=\frac{A}{2}\Delta_2\log A-\frac{\Delta_1 H}{2A},$$

et la formule (4.3) devient

$$(5.10)\qquad L^{\star}_{12}=\mathcal{H}_v-AK.$$

6. Bien que notre dessein ne soit point de développer la théorie de l'immersion, nous donnerons, en terminant cette partie, la formule qui découle des calculs précédents.

Il suffit de substituer dans (1.1) les valeurs (5.3) de $\cos\theta$ et $\sin\theta$ pour obtenir les coefficients de la forme asymptotique en termes de courbure moyenne. Posant $a=\Phi_{11}$, $b=\Phi_{12}$, $c=\Phi_{22}$, et utilisant les formules (3.7), on vérifie que le tenseur asymptotique $\Phi_{\alpha\beta}$ s'écrit

$$(6.1)\qquad \Phi_{\alpha\beta}=H\,g_{\alpha\beta}-2A\gamma^{\star\star}_{\alpha\beta}.$$

Or, les formules (5.3) équivalent à

$$(6.2)\qquad 2\gamma^{\star\star}_{\alpha\beta}=\frac{L^{\star}_{12}\,l^{\star\star}_{\alpha\beta}+L_{12}\,l^{\star}_{\alpha\beta}}{(l_{12})^2+(l^{\star}_{12})^2},$$

car, en se référant à un repère rectangulaire, on a

$$l_{11}^{**} = -l_{12}^{*} = -\frac{l_{11}-l_{22}}{2}, \qquad l_{12}^{**} = \frac{l_{11}^{*}-l_{22}^{*}}{2} = -l_{12}, \qquad l_{22}^{**} = \frac{l_{11}-l_{22}}{2}.$$

Donc, compte tenu de (5.8),

$$\Phi_{\alpha\beta} = \mathrm{H} g_{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{AL}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}} l_{\alpha\beta}^{**} + \frac{\mathrm{AL}_{12}}{\mathcal{K}_{l^*}} l_{\alpha\beta}^{*}, \tag{6.3}$$

ce qui s'écrit aussi, en observant que, pour tout tenseur symétrique,

$$\mathrm{T}_{\alpha\beta}^{**} = -\mathrm{T}_{\alpha\beta} + \mathcal{H}_{\mathrm{T}} g_{\alpha\beta}, \tag{6.4}$$

$$\Phi_{\alpha\beta} = \left(\mathrm{H} + \frac{\mathrm{A}\mathcal{H}_{l}\mathrm{L}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}}\right) g_{\alpha\beta} - \frac{\mathrm{AL}_{12}^{*}}{\mathcal{K}_{l^*}} l_{\alpha\beta} + \frac{\mathrm{AL}_{12}}{\mathcal{K}_{l^*}} l_{\alpha\beta}^{*}. \tag{6.5}$$

Le tenseur asymptotique se trouve de la sorte exprimé comme une combinaison linéaire du tenseur métrique, du tenseur moyen et du bissecteur du tenseur moyen, avec des coefficients dont la relation avec la courbure moyenne est mise en évidence par l'écriture même.

Pour obtenir les deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre que vérifie H, il suffit de porter $\Phi_{\alpha\beta}$ sous la forme (6.5), dans les équations de Codazzi (1.2) qui, quand on se sert de la dérivation covariante, se condensent en

$$\Phi_{11,2} = \Phi_{12,1}, \qquad \Phi_{21,2} = \Phi_{22,1}. \tag{6.6}$$

II. — Surfaces déformables avec conservation des courbures principales.

7. La possibilité de déterminer les directions principales par des calculs finis à partir du ds^2 et de la courbure moyenne repose sur l'existence de la relation (1.4). Que cette relation s'évanouisse, θ n'est plus déterminé par une équation finie : l'équation aux différentielles totales équivalente à (1.3) est complètement intégrable, et la formule donnant θ contiendra une constante arbitraire. A un choix donné du ds^2 et de la courbure moyenne, correspondront une infinité de formes asymptotiques possibles. En d'autres termes, de telles surfaces seront déformables avec conservation des courbures principales : ce sont elles que M. E. Cartan appelle les *surfaces d'Ossian Bonnet*.

Il faut et il suffit, pour qu'une surface appartienne à cette catégorie que, dans (1.4), X et Y soient nuls.

Cette condition est évidemment satisfaite si $\mathrm{H} = \text{const.}$; les surfaces à courbure moyenne constante seront appelées les surfaces d'O. Bonnet *de première classe*. Dans ce cas, les équations (1.3) ne contiennent plus θ à droite et déterminent θ à une constante additive près, ce qui démontre le théorème connu d'O. Bonnet : *Si l'on déforme une surface à courbure moyenne constante sans* *altérer les courbures principales, les nouvelles lignes de courbure coupent les anciennes sous un angle constant.*

Sur les surfaces à courbure moyenne constante, la relation (1.4) se réduit à $Z = 0$ ou, puisque $H_1 = H_2 = 0$,

$$2K = \Delta_2 \log A, \tag{7.1}$$

formule qui se vérifie immédiatement en utilisant la théorie que nous avons développée ailleurs (¹) des lignes minima des surfaces. Quand une surface est à courbure moyenne constante, les formes minima sont des différentielles exactes du, dv et, par suite, le ds^2 s'écrit

$$ds^2 = \frac{2\,du\,dv}{A}. \tag{7.2}$$

La formule de Liouville donne d'autre part

$$K = A(\log A)_{uv}. \tag{7.3}$$

Or, d'après l'expression (7.2) du ds^2, on a, pour toute fonction $f(u, v)$, $\Delta_2 f = 2Af_{uv}$; donc (7.3) équivaut bien à (7.1). Comme $K = H^2 - A^2$, on a, pour déterminer le coefficient A de (7.2), l'équation aux dérivées partielles

$$A(\log A)_{uv} = H^2 - A^2, \tag{7.4}$$

où H est une constante. En posant $A = He^{\xi}$, cette équation devient

$$\xi_{uv} = -2H \operatorname{sh} \xi. \tag{7.5}$$

Si l'on ne précise pas les variables utilisées, la formule (7.1) devient, en remplaçant A^2 par $H^2 - K$,

$$4K(H^2 - K)^2 + \Delta_2 K(H^2 - K) + \Delta_1 K = 0; \tag{7.6}$$

elle exprime la condition que vérifie le tenseur métrique de toute surface ayant la courbure moyenne constante H.

A chaque solution $A(u, v)$ de (7.4) correspondent une infinité de surfaces ayant le même ds^2, la même courbure moyenne constante H et, pour formes asymptotiques,

$$\Phi = du^2 e^{2i\theta} + H\,ds^2 + dv^2 e^{-2i\theta}, \tag{7.7}$$

où θ est une constante quelconque.

8. Nous supposerons désormais la courbure moyenne variable. Les conditions de complète intégrabilité s'écrivent

$$l^{*}_{12} = 0, \qquad l_{12} = 0. \tag{8.1}$$

(¹) *Bull. de la Soc. Math.*, 75, 1947, p. 63-88.

Donc, par rapport à n'importe quel repère rectangulaire, le tenseur moyen vérifie $l_{11} = l_{22}$ et $l_{12} = 0$. Or, par rapport aux mêmes repères, le tenseur métrique vérifie $g_{11} = g_{22} = 1$, $g_{12} = 0$. Donc, *sur les surfaces d'O. Bonnet, et sur ces surfaces seulement, le tenseur moyen est proportionnel au tenseur métrique*

$$l_{\alpha\beta} = \lambda g_{\alpha\beta}. \tag{8.2}$$

Le coefficient de proportionnalité λ est, d'après (5.4), $\mathcal{H}_l$, c'est-à-dire

$$\lambda = \frac{l_{11} + l_{22}}{2} = \frac{1}{2}(H_{,11} + H_{,22}) - \frac{A_1 H_1 + A_2 H_2}{A} = \frac{\Delta_2 H}{2} - \frac{\Delta_1(A, H)}{A}. \tag{8.3}$$

Sous cette forme, λ fait intervenir les dérivées secondes de H; on peut les faire disparaître en se servant de $Z = 0$ (conséquence de $X = Y = 0$), qui s'écrit, d'après (4.3),

$$\Delta_2 \log A - \frac{\Delta_1 H}{A^2} - 2K = 0. \tag{8.4}$$

En effet, $A^2 = H^2 - K$ donne

$$\Delta_2 \log A = \frac{1}{A^2}\left(H \Delta_2 H + \Delta_1 H - \frac{\Delta_2 K}{2} - 2\Delta_1 A\right). \tag{8.5}$$

Portant dans (8.4) et résolvant, il vient

$$\Delta_2 H = \frac{1}{H}\left(\frac{\Delta_2 K}{2} + 2\Delta_1 A + 2A^2 K\right), \tag{8.6}$$

et enfin

$$\lambda = \frac{1}{H}\left(\frac{\Delta_2 K}{4} + \Delta_1 A + A^2 K\right) - \frac{\Delta_1(A, H)}{A}. \tag{8.7}$$

Portant cette valeur de λ dans (8.2), on obtient une équation qui condense trois équations aux dérivées partielles exprimant les trois dérivées partielles du second ordre de H en fonction de H et de ses dérivées premières; les coefficients contiennent $g_{\alpha\beta}$ et ses dérivées, toutes quantités connues par hypothèse. En écrivant les deux conditions d'intégrabilité, on obtiendrait deux relations déterminant H_1 et H_2 en fonction de H; la nouvelle condition d'intégrabilité permettrait de calculer H en fonction du tenseur métrique et de ses dérivées. C'est un résultat tout différent de ce qui se présente pour une surface générique où, comme nous l'avons vu au n° 6, H n'est assujetti qu'à vérifier deux équations aux dérivées partielles du troisième ordre.

9. En se référant au repère principal on obtient, pour nos surfaces,

$$L_{12} = 0, \qquad L^*_{12} = 0. \tag{9.1}$$

La première de ces équations exprime un théorème dû à O. Bonnet : *Les surfaces déformables avec conservation de la courbure moyenne sont des surfaces isothermiques.*

En effet, a et c étant les courbures principales, on a

$$2H = a + c \quad \text{et} \quad 2A = a - c,$$

d'où

$$2L_{12} = a_{,12} + c_{,12} - \frac{a_1 a_2 - c_1 c_2}{A},$$

les dérivées pfaffiennes étant prises par rapport au repère principal. Or, dans les mêmes conditions, les équations de Codazzi s'écrivent

$$a_2 = 2Ar, \qquad c_1 = -2As,$$

d'où

$$a_{,12} = a_{,21} = a_{21} + ra_1 = 2A_1 r + 2Ar_1 + ra_1 = r(2a_1 - c_1) + 2Ar_1,$$
$$c_{,12} = c_{12} + sc_2 = -2A_2 s - 2As_2 + sc_2 = s(2c_2 - a_2) - 2As_2,$$

et, finalement,

$$(9.2) \quad 2L_{12} = r(2a_1 - c_1) + s(2c_2 - a_2) + 2A(r_1 - s_2) - 2ra_1 - 2sc_2 = 2A(r_1 - s_2).$$

Si $L_{12} = 0$, on a $r_1 - s_2 = 0$, car on n'envisage que des régions sans ombilics ($A \neq 0$). Or $r_1 - s_2 = 0$, qui exprime que $s\omega^1 + r\omega^2$ est une différentielle exacte, caractérise comme on sait (¹), les surfaces isothermiques. Notons que, si une surface est isothermique ($L_{12} = 0$) sans être surface d'O. Bonnet ($L^*_{12} \neq 0$), la formule (6.5) est applicable, car $\mathcal{K}_{l^*} \neq 0$, mais le terme en $l^*_{\alpha\beta}$ disparaît; résolvant par rapport à $l_{\alpha\beta}$, on voit qu'alors le tenseur moyen est une combinaison linéaire du tenseur métrique et du tenseur asymptotique. De (6.5), en effet, on tire d'abord, puisque $L_{12} = 0$,

$$(9.3) \qquad AL^*_{12}\, l_{\alpha\beta} = (H\mathcal{K}_{l^*} + A\mathcal{H}_l L^*_{12}) g_{\alpha\beta} - \mathcal{K}_{l^*} \Phi_{\alpha\beta}.$$

Mais ici $\mathcal{K}_{l^*} = -(L^*_{12})^2$. On peut donc simplifier (9.3) en divisant par AL^*_{12} et il vient

$$(9.4) \qquad l_{\alpha\beta} = \left(-\frac{H}{A} L^*_{12} + \mathcal{H}_l\right) g_{\alpha\beta} + \frac{L^*_{12}}{A} \Phi_{\alpha\beta}.$$

Telle est l'expression du tenseur moyen sur les surfaces isothermiques. Si l'on suppose, en outre, que L^*_{12} s'annule lui aussi, c'est-à-dire que la surface est surface d'O. Bonnet, (9.4) se réduit à

$$l_{\alpha\beta} = \mathcal{H}_l g_{\alpha\beta},$$

ce qui concorde avec (8.2).

10. En projetant le tenseur moyen sur le repère moyen, les équations caractéristiques des surfaces d'O. Bonnet deviennent

$$\lambda_{12} = 0, \qquad \lambda^*_{12} = 0,$$

(¹) *Voir* notre Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 223, 1946, p. 707.

ou, d'après (4.6) et (4.7),

(10.1) $$\Theta\left(\mathrm{H}, \log\frac{\Delta_1 \mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}\right) = 0, \qquad \Delta_2 \mathrm{H} = \Delta_1\left(\mathrm{H}, \log\frac{\Delta_1 \mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}\right).$$

La première de ces équations signifie que $\log\frac{\Delta_1 \mathrm{H}}{\mathrm{A}^2}$ est fonction de H, soit F(H); la seconde s'écrit, en conséquence,

$$\Delta_2 \mathrm{H} = \mathrm{F}'(\mathrm{H})\,\Delta_1 \mathrm{H};$$

donc le rapport $\frac{\Delta_2 \mathrm{H}}{\Delta_1 \mathrm{H}}$ est fonction de H. Il est possible, par conséquent, de déterminer une fonction de H, $x(\mathrm{H})$ qui soit harmonique sur la surface. En effet, pour toute fonction x de H, on a

$$\Delta_2 x = x''\,\Delta_1 \mathrm{H} + x'\,\Delta_2 \mathrm{H};$$

ce sera nul si

$$\frac{x''}{x'} = -\frac{\Delta_2 \mathrm{H}}{\Delta_1 \mathrm{H}},$$

ce qu'on peut obtenir, dès lors que $\frac{\Delta_2 \mathrm{H}}{\Delta_1 \mathrm{H}}$ est fonction de H. Cette condition donne, dans le cas présent,

$$\frac{x''}{x'} = -\mathrm{F}'(\mathrm{H}) = -\frac{d}{d\mathrm{H}}\log\frac{\Delta_1 \mathrm{H}}{\mathrm{A}^2},$$

donc

$$x' = \mathrm{C}\,\frac{\mathrm{A}^2}{\Delta_1 \mathrm{H}}, \qquad x = \mathrm{C}\int\frac{\mathrm{A}^2\,d\mathrm{H}}{\Delta_1 \mathrm{H}} + \mathrm{C}_1.$$

Nous prendrons $\mathrm{C} = 1$, de sorte que x vérifiera

(10.2) $$dx = \frac{\mathrm{A}^2\,d\mathrm{H}}{\Delta_1 \mathrm{H}},$$

ou encore, puisque $d\mathrm{H} = \mathrm{H}_1\,\omega^1$ et $\Delta_1 \mathrm{H} = \mathrm{H}_1^2$,

(10.3) $$dx = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}\,\omega^1,$$

relation qui exprime que $\frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}$ est facteur intégrant pour ω^1. Si y est la fonction harmonique sur la surface, directement associée à x, on aura

$$dy = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}\,\omega^2 \qquad \text{et} \qquad ds^2 = (\omega^1)^2 + (\omega^2)^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\mu^2}$$

avec

$$\mu = \frac{\mathrm{A}^2}{\mathrm{H}_1}.$$

La formule (10.2) montre que H est fonction de x; soit $H = f(x)$. Comme $dx = \mu\omega^1$, on a

$$H_1 = \mu f'(x) = \frac{A^2}{H_1} f'(x);$$

donc

$$f'(x) = \frac{\Delta_1 H}{A^2}.$$

Puisqu'il existe une fonction $x(H)$ qui est harmonique sur la surface, *les courbes* $H = C$ *sont isothermes*. Cette propriété, déjà signalée par O. Bonnet (1), a d'importantes conséquences. Pour les exposer, il est indispensable de résumer d'abord la théorie des surfaces à c. m. i. (courbure moyenne isotherme).

Soit, sur une surface quelconque à c. m. i., x et y un système de paramètres isométriques, les courbes $x = \text{const.}$ étant les courbes $H = \text{const.}$, de telle sorte que $H = f(x)$. L'élément linéaire est

$$ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{\mu^2},$$

μ étant facteur intégrant à la fois pour ω^1 et ω^2, $\mu\omega^1 = dx$ et $\mu\omega^2 = dy$, d'où, en différentiant extérieurement

$$r = \frac{\partial\mu}{\partial y} = \frac{\mu_2}{\mu}, \qquad s = \frac{\partial\mu}{\partial x} = \frac{\mu_1}{\mu}. \tag{10.4}$$

On en déduit

$$s\omega^1 + r\omega^2 = d\log\mu. \tag{10.5}$$

D'autre part

$$-r\omega^1 + s\omega^2 = -(\log\mu)_2\omega^1 + (\log\mu)_1\omega^2$$

d'où

$$K = \frac{d(-r\omega^1 + s\omega^2)}{[\omega^1\omega^2]} = \Delta_2 \log\mu = \mu^2\left(\frac{\partial^2\log\mu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\log\mu}{\partial y^2}\right). \tag{10.6}$$

Revenons aux équations (4.4), où $\frac{\varphi}{2}$ désigne l'angle du repère principal avec le repère moyen et où les indices désignent des dérivées pfaffiennes moyennes. Deux combinaisons évidentes donnent

$$\varphi_1\cos\varphi + \varphi_2\sin\varphi = \left(\frac{A_2}{A} - 2r\right)\cos\varphi - \left(\frac{A_1}{A} - 2s\right)\sin\varphi$$

$$-\varphi_1\sin\varphi + \varphi_2\cos\varphi = \left(-\frac{A_1}{A} + 2s\right)\cos\varphi - \left(\frac{A_2}{A} - 2r\right)\sin\varphi + \frac{H_1}{A},$$

et cela peut s'écrire, compte tenu de (10.4),

$$\left(\frac{A\sin\varphi}{\mu^2}\right)_1 - \left(\frac{A\cos\varphi}{\mu^2}\right)_2 = 0, \tag{10.7}$$

$$\left(\frac{A\cos\varphi}{\mu^2}\right)_1 + \left(\frac{A\sin\varphi}{\mu^2}\right)_2 = \frac{H_1}{\mu^2}. \tag{10.8}$$

(1) *Journ. de l'Ec. Polyt.*, 42, 1867, p. 82.

La première de ces égalités signifie qu'il existe une fonction $\psi(x, y)$ satisfaisant à

$$d\psi = \frac{A\cos\varphi}{\mu^2}\,dx + \frac{A\sin\varphi}{\mu^2}\,dy \tag{10.9}$$

et ayant, par conséquent, pour premier paramètre différentiel,

$$\Delta_1\psi = \mu^2\left[\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\psi}{\partial y}\right)^2\right] = \frac{A^2}{\mu^2}. \tag{10.10}$$

Nous appellerons $\psi(x, y)$ la *fonction primitive* de la surface à c. m. i.; elle n'est définie qu'à une constante additive près.

L'égalité (10.8), de son côté, signifie que le second paramètre différentiel de la fonction primitive est, H étant toujours désigné par $f(x)$,

$$\Delta_2\psi = \mu^2\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}\right) = f'(x). \tag{10.11}$$

Convenons de poser, pour une fonction $F(x, y)$ quelconque,

$$\delta_1 F = \left(\frac{\partial E}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2, \qquad \delta_2 F = \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial y^2};$$

nous aurons, d'après (10.10) et (10.11),

$$\mu^2 = \frac{f'}{\delta_2\psi}, \qquad A = f'(x)\frac{\sqrt{\delta_1\psi}}{\delta_2\psi}. \tag{10.12}$$

L'équation de Gauss (10.6) devient, puisque $K = H^2 - A^2$,

$$f^2 - f'^2\frac{\delta_1\psi}{(\delta_2\psi)^2} = \frac{f'}{2\,\delta_2\psi}\,\delta_2\log\frac{f'}{\delta_2\psi}$$

ou encore

$$\delta_2\log\frac{\delta_2\psi}{f'} = 2f'\frac{\delta_1\psi}{\delta_2\psi} - 2\frac{f^2}{f'}\,\delta_2\psi. \tag{10.13}$$

La détermination des surfaces à c. m. i. se ramène à l'intégration de cette équation, qui est du quatrième ordre en ψ, et contient dans ses coefficients la fonction arbitraire $f(x)$ (1).

Compte tenu de (10.12), le ds^2 d'une surface à c. m. i. s'écrit

$$ds^2 = \frac{\delta_2\psi}{f'}(dx^2 + dy^2). \tag{10.14}$$

Quant à sa forme asymptotique qui, d'après (1.1), est

$$\Phi = H\,ds^2 + A\cos\varphi[(\omega^1)^2 - (\omega^2)^2] + 2A\sin\varphi\,\omega^1\omega^2,$$

(1) Sur cette question, voir notre Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 226, 1948, p. 1339,

elle devient, en vertu de (10.9),

$$\Phi = f\,ds^2 + \frac{\partial\psi}{\partial x}(dx^2 - dy^2) + 2\frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\,dy. \tag{10.15}$$

On remarquera que les deux dérivées premières de la fonction primitive figurent dans Φ isolément, tandis que, dans le ds^2, la fonction primitive ne figure que par son second paramètre différentiel.

11. Les formules (10.14) et (10.15) donnent les deux formes fondamentales d'une surface à c. m. i. quelconque, la fonction $\psi(x, y)$ étant censée vérifier (10.13), qui contient $f(x)$ dans ses coefficients. Si la surface considérée est une surface d'O. Bonnet, il se trouve, comme nous allons le voir, que $\psi(x, y)$ satisfait en outre une seconde équation qui peut être intégrée, et (10.13) devient une équation différentielle ordinaire en f.

L'équation supplémentaire concernant ψ est

$$\Delta_2\psi = \Delta_1\psi. \tag{11.1}$$

Nous avons trouvé, en effet, au n° 10, que sur les surfaces d'O. Bonnet,

$$\mu = \frac{A^2}{H_1}, \qquad f'(x) = \frac{\Delta_1 H}{A^2}.$$

En portant dans (10.10) et (10.11), on trouve bien (11.1). Si ψ satisfait cette équation, on en déduit $\mu^2 = \frac{A^2}{f'}$, d'où $\mu = \frac{A^2}{H_1}$.

Il s'ensuit que le paramètre isométrique x vérifie (10.3), donc (10.2). On a

$$\frac{\Delta_1 H}{A^2} = \frac{1}{x'(H)}.$$

donc la première équation (10.1) est satisfaite. On a, en outre,

$$\frac{x''}{x'} = -\frac{d}{dH}\log\frac{\Delta_1 H}{A^2} = -\frac{\Delta_2 H}{\Delta_1 H},$$

donc

$$\Delta_2 H = \Delta_1 H \frac{d}{dH}\log\frac{\Delta_1 H}{A^2} = H_1\left(\log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right)_1 = \Delta_1\left(H, \log\frac{\Delta_1 H}{A^2}\right),$$

ce qui est la seconde équation (10.1) : la surface est donc surface d'O. Bonnet.

L'équation (11.1), suffisante, n'est toutefois pas nécessaire. Au lieu de $\mu = \frac{A^2}{H_1}$, on pouvait en effet prendre comme facteur intégrant commun à ω^1 et ω^2, $\bar\mu = C\mu$, C étant une constante arbitraire. Alors, x devenait $\bar x = Cx$ et ψ, $\bar\psi = \frac{\psi}{C}$, d'où

$$\Delta_1\bar\psi = \frac{\Delta_1\psi}{C^2}, \qquad \Delta_2\bar\psi = \frac{\Delta_2\psi}{C}$$

et enfin

$$\Delta_2\bar\psi = C\,\Delta_1\bar\psi.$$

Ce qui caractérise donc les surfaces d'O. Bonnet, en tant que surfaces à c. m. i., c'est que *les deux paramètres différentiels de leur fonction primitive sont proportionnels*. Par un choix convenable du système isométrique x, y, *ces deux paramètres différentiels peuvent être rendus égaux*. C'est ce choix que nous ferons dans la suite.

L'équation (11.1) s'écrit aussi

$$\delta_2\psi = \delta_1\psi.$$

Pour l'intégrer, il suffit de poser $\psi = -\log Q$; on obtient

$$\delta_2 Q = 0.$$

Q doit donc être une fonction harmonique (dans le plan (x, y). Il suit de là que, compte tenu de

$$\delta_2 \log Q = \frac{\delta_2 Q}{Q} - \frac{\delta_1 Q}{Q^2},$$

les deux formes fondamentales d'une surface d'O. Bonnet auront pour expression, d'après (10.14) et (10.15),

$$(11.2)\quad ds^2 = \frac{1}{f'(x)}\frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2}(dx^2+dy^2), \qquad \Phi = f\,ds^2 - \frac{Q_x'}{Q}(dx^2-dy^2) - \frac{2Q_y'}{Q}dx\,dy,$$

où $Q(x, y)$ est une solution de l'équation de Laplace.

12. La fonction $f(x)$ et la fonction harmonique $Q(x, y)$ qui figurent dans (11.2) ne peuvent être choisies arbitrairement à la fois. Elles sont liées par une relation qui se déduit de (10.13) et qui n'est autre que l'équation de Gauss. Faisons $\delta_2\psi = \delta_1\psi$ dans (10.13) et tenons compte, en outre, que

$$\delta_2 \log f' = \frac{d^2}{dx^2}\log f', \qquad \delta_2 \log \delta_2\psi = \delta_2 \log \frac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2} = 2\,\delta_2\psi,$$

car $\log(Q_x'^2 + Q_y'^2)$ est harmonique; il vient

$$(12.1)\qquad \frac{d^2}{dx^2}\log f' = 2\left(1+\frac{f^2}{f'}\right)\delta_2\psi - 2f',$$

où l'on a conservé $\delta_2\psi$ pour $\dfrac{\delta_1 Q}{Q^2} = \dfrac{Q_x'^2 + Q_y'^2}{Q^2}$.

L'examen de cette équation montre la nécessité de distinguer deux classes parmi les surfaces d'O. Bonnet à courbure moyenne variable (la première classe est, nous l'avons dit au n° 7, formée des surfaces à courbure moyenne constante). (12.1) est satisfaite, quelle que soit Q, si $f' + f^2 = 0$: les surfaces correspondantes seront dites *de seconde classe*. Si, au contraire, $f' + f^2 \neq 0$, (12.1) détermine $\delta_2\psi$ comme fonction de x, ce qui revient à dire, comme on le voit en se reportant à l'expression (10.14) du ds^2, que les surfaces correspondantes sont applicables sur une surface de révolution. Une surface d'O. Bonnet sera dite *de troisième classe,* si $\delta_2\psi$ n'est fonction que de x; cette condition détermine Q. Une fois Q convenablement choisie, (12.1) devient une équation différentielle ordinaire du troisième ordre pour $f(x)$. La deuxième et la troisième classe ne sont pas disjointes, car rien n'empêche que, sur une surface vérifiant $f'+f^2=0$, on ait $\delta_2\psi$ fonction de x.

On arrive à la même distinction en deux classes, si l'on part de la première équation (10.1), qui donne $\dfrac{\Delta_1 H}{A^2}=g(H)$, et si l'on tient compte de (10.2), $g(H)=\dfrac{dH}{dx}=f'(x)$. Le facteur intégrant $\mu=\dfrac{A^2}{H_1}$ s'écrit donc aussi

$$\mu=\frac{A}{\sqrt{g(H)}}.$$

Par suite, la relation (10.6) devient

$$K=\Delta_2\log A-\frac{1}{2}\Delta_2\log g. \tag{12.2}$$

Or

$$\Delta_2\log g=\mu^2\frac{d^2}{dx^2}\log g=\mu^2 g\frac{d^2 g}{dH^2}=A^2\frac{d^2 g}{dH^2},$$

donc

$$K=\Delta_2\log A-\frac{A^2}{2}\frac{d^2 g}{dH^2}. \tag{12.3}$$

Or, la relation $Z=0$ s'écrit, d'après (4.3), compte tenu de la signification de g,

$$\Delta_2\log A=g(H)+2K. \tag{12.4}$$

Portant dans (12.3), et remplaçant K par H^2-A^2, il vient

$$g+H^2-A^2\left(1+\frac{1}{2}\frac{d^2 g}{dH^2}\right)=0,$$

ce qui s'écrit plus simplement, en posant $G(H)=g(H)+H^2$,

$$2G-A^2\frac{d^2 G}{dH^2}=0. \tag{12.5}$$

Cette équation est satisfaite par $G=0$, qui équivaut à $f'+f^2=0$; dans ce cas, (12.5) ne détermine pas A, on a les surfaces *de deuxième classe.* Si $G\neq 0$, (12.5) exige que $\dfrac{d^2 G}{dH^2}$ soit aussi différent de zéro; alors (12.5) détermine A comme fonction de H; on a les surfaces de troisième classe, et l'on constate que ce sont toutes des surfaces W.

13. La condition que $\delta_2\psi$ ne dépende que de x entraîne que, *sur une surface de troisième classe, les lignes* $H=C$ *sont géodésiquement parallèles.* En effet, (10.11) donne alors $\mu=\mu(x)$, donc, d'après (10.4), $r=0$, et, comme

$H_{12} = rH_1$, on a $H_{12} = 0$, c'est-à-dire $\Delta_1 H$ fonction de H, ce qui démontre la proposition.

Proposons-nous, réciproquement, de chercher toutes les surfaces sur lesquelles les lignes $H = C$ sont à la fois, comme sur les surfaces d'O. Bonnet de troisième classe, isothermes et géodésiquement parallèles ([1]). On a la proposition suivante : *les surfaces sur lesquelles les lignes* $H = C$ *sont à la fois isothermes et géodésiquement parallèles sont : 1° les surfaces admettant un groupe de mouvements à un paramètre; 2° les surfaces d'O. Bonnet de troisième classe.*

En effet, les lignes $H = C$ étant isothermes, $s\omega^1 + r\omega^2$ est une différentielle exacte (ω^1 et ω^2 désignant ici les projections de dM sur le repère moyen); donc $s_2 = r_1$. Ces lignes étant géodésiquement parallèles, $H_{12} = 0$. Or $H_{12} = rH_1$, donc $r = 0$ (car on suppose que la surface est à courbure moyenne variable). Il s'ensuit $r_1 = 0$, d'où $s_2 = 0$. La courbure totale $s_1 + r_2 - r^2 - s^2$ se réduit alors à $s_1 - s^2$, qui, à cause de $s_2 = 0$, n'est fonction que de H; donc la surface est W. Dans la formule (4.5), λ_{12} est présentement nul, λ^*_{12} et L^*_{12} ne dépendent que de H. (4.5) se réduit à

$$\lambda^*_{12} \cos\varphi = L^*_{12}.$$

Si cette équation définit φ, φ ne dépend que de H : les surfaces correspondantes admettent un groupe de mouvements à un paramètre, puisque les coefficients de leurs deux formes fondamentales ne dépendent que d'une variable. Si $\lambda^*_{12} = 0$, comme λ_{12} est déjà nul, on a des surfaces d'O. Bonnet, qui sont de troisième classe, puisque W.

14. En examinant les deux formes fondamentales (11.2) d'une surface de O. Bonnet, on voit que la déformabilité spéciale d'une telle surface tient à ce que l'on peut modifier la fonction harmonique $Q(x, y)$ de façon que $\dfrac{Q'_x}{Q}$ et $\dfrac{Q'_y}{Q}$ soient changées sans que le soit la somme de leurs carrés, qui, seule, figure dans le ds^2.

Soient Q et $\overline{Q}$ deux fonctions harmoniques, telles que

$$\frac{\overline{Q}'^2_x + \overline{Q}'^2_y}{\overline{Q}^2} = \frac{Q'^2_x + Q'^2_y}{Q^2}, \tag{14.1}$$

et considérons les deux fonctions analytiques de $z = x + iy$, dont Q et $\overline{Q}$ sont les parties imaginaires

$$w = P + iQ, \qquad \overline{w} = \overline{P} + i\overline{Q}.$$

On a

$$\frac{|dw|^2}{Q^2} = \frac{dP^2 + dQ^2}{Q^2} = \frac{Q'^2_x + Q'^2_y}{Q^2}(dx^2 + dy^2).$$

([1]) Sur ce problème, *voir* ma Note aux *C. R. Acad. Sc.*, 226, 1948, p. 1950

Donc, d'après (14.1),

$$\frac{|d\overline{w}|^2}{\overline{Q}^2} = \frac{|dw|^2}{Q^2}. \tag{14.2}$$

La solution est fournie par la transformation fuchsienne générale

$$\overline{w} = \frac{aw+b}{cw+d},$$

où a, b, c, d sont réels, et $ad - bc = 1$. On en déduit

$$\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{1}{(cw+d)^2}\frac{dw}{dz}, \qquad \overline{Q} = \frac{Q}{|cw+d|^2};$$

donc, en divisant membre à membre,

$$\frac{1}{\overline{Q}}\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{|cw+d|^2}{(cw+d)^2}\frac{1}{Q}\frac{dw}{dz}.$$

Si α est l'argument de $cw+d$, on aura donc

$$\frac{1}{\overline{Q}}\frac{d\overline{w}}{dz} = \frac{e^{-2i\alpha}}{Q}\frac{dw}{dz},$$

ou, en développant,

$$\frac{\overline{Q}'_y + i\overline{Q}'_x}{\overline{Q}} = e^{-2i\alpha}\frac{Q'_y + iQ'_x}{Q}.$$

Égalant les parties réelles et les parties imaginaires, on obtient

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\overline{Q}'_x}{\overline{Q}} &= \frac{Q'_x}{Q}\cos 2\alpha - \frac{Q'_y}{Q}\sin 2\alpha, \\ \frac{\overline{Q}'_y}{\overline{Q}} &= \frac{Q'_x}{Q}\sin 2\alpha + \frac{Q'_y}{Q}\cos 2\alpha. \end{aligned}\right. \tag{14.3}$$

Ces formules, qui résolvent le problème, dépendent d'une fonction α, argument de $c(P+iQ)+d$, qui vérifie donc

$$\alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{cQ}{cP+d}.$$

On voit qu'on peut prendre comme paramètre le rapport $\frac{c}{d}$. Si l'on remplace dans (14.3), $\frac{Q'_x}{Q}$ et $\frac{Q'_y}{Q}$ par $-\psi'_x$ et $-\psi'_y$, et de même en surlignant, qu'on tienne compte par ailleurs de (10.9) et de l'équation analogue obtenue en surlignant ψ et φ, on obtiendra

$$\frac{\overline{\varphi}}{2} - \frac{\varphi}{2} = \alpha = \operatorname{arc\,tg}\frac{cQ}{cP+d}. \tag{14.4}$$

L'angle $\frac{\overline{\varphi}}{2} - \frac{\varphi}{2}$ est l'angle que fait le réseau des lignes de courbure virtuelles défini par la solution $\overline{Q}(x, y)$, avec le réseau défini par la solution $Q(x, y)$. (14.4) montre comment cet angle s'exprime en fonction de x et y.

15. Les surfaces de deuxième classe sont *imaginaires*; on ne saurait avoir, en effet, $\frac{\Delta_1 H}{A^2} + H^2 = 0$ sur une surface réelle, avec $H \neq 0$. Cette propriété, ainsi que la relation $\Delta_1 H + A^2 H^2 = 0$, ont été signalées par M. É. Cartan (1).

Sur ces surfaces, $\frac{1}{H}$ est une fonction harmonique. En effet, la relation $g(H) + H^2 = 0$, qui s'écrit aussi $f' + f^2 = 0$, s'intègre par $f = \frac{1}{x + C}$; donc $\frac{1}{H} = x + C$, fonction qui est bien harmonique sur la surface. On peut faire $C = 0$, par un choix convenable de l'origine des x. La formule (10.14) donne alors, pour l'élément linéaire

$$ds^2 = -x^2 \frac{Q'^2_x + Q'^2_y}{Q^2}(dx^2 + dy^2),$$

où $Q(x, y)$ est une solution *quelconque* de l'équation de Laplace. La formule (10.15) donne ensuite Φ, en faisant $f = \frac{1}{x}$, $\psi = -\log Q$. On passe d'une surface S de cette classe à une autre, $\overline{S}$, en formant $w = P + iQ$, puis en effectuant la transformation fuchsienne

$$\overline{w} = \frac{aw + b}{cw + d}, \qquad \text{d'où} \quad \overline{Q} = \frac{Q}{|cw + d|^2}.$$

$\overline{S}$ ne sera différente de S que si $c \neq 0$, c'est-à-dire, que si la transformation ne conserve pas le point infini.

16. Pour les surfaces de troisième classe, $\delta_1 \psi$ et $\delta_2 \psi$, qui sont égaux, ne dépendent que de x. Posons donc

$$\frac{Q'^2_x + Q'^2_y}{Q^2} = X^2(x). \tag{16.1}$$

La fonction $X(x)$ vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2}{dx^2} \log X = X^2. \tag{16.2}$$

En effet, d'après (16.1),

$$\delta_2 \log X = \delta_2 \log \sqrt{Q'^2_x + Q'^2_y} - \frac{\delta_2 Q}{Q} + \frac{\delta_1 Q}{Q^2}.$$

Le premier membre est $\frac{d^2}{dx^2} \log X$; au second membre, les deux premiers termes

(1) *Bull. des Sc. Math.*, 61, 1942, p. 57.

disparaissent, parce que $\log\sqrt{Q_x'^2+Q_y'^2}$ et Q sont harmoniques; reste le troisième, qui est X^2; on a donc bien (16.2).

Une fois (16.2) intégrée, $f(x)$ devra vérifier

$$\frac{d^2}{dx^2}\log f' = 2X^2\left(1+\frac{f^2}{f'}\right)-2f', \tag{16.3}$$

qui est la forme que prend (12.1). Quant au ds^2, il s'écrit

$$ds^2 = \frac{X^2}{f'}(dx^2+dy^2); \tag{16.4}$$

il est connu dès qu'on a intégré (16.2) et (16.3), sans qu'on ait besoin de connaître Q elle-même.

17. L'équation (16.2) signifie que la courbure de la forme quadratique $X^2(dx^2+dy^2)$ est égale à -1. On peut donc trouver deux fonctions, $P(x, y)$ et $Q(x, y)$, telles qu'on ait

$$X^2(dx^2+dy^2) = \frac{dP^2+dQ^2}{Q^2}, \tag{17.1}$$

car la courbure du second membre est aussi -1. Cette relation montre que $P+iQ$ est fonction de $x+iy$, ou de $x-iy$, et l'on peut choisir les signes de P et Q pour que ce soit de $x+iy$. Posons $P+iQ = w(x+iy) = w(z)$; on en tire $w'(z) = Q'_y + iQ'_x$, d'où en prenant les modules,

$$\frac{dP^2+dQ^2}{dx^2+dy^2} = Q_x'^2+Q_y'^2.$$

Comparant avec (17.1), on voit que Q, partie imaginaire de $w(z)$, vérifie (16.1). Donc, intégrer (16.1), c'est trouver une fonction analytique $w(z) = P+iQ$ qui vérifie (17.1).

Dans le domaine réel (16.2) a trois types de solutions. En choisissant convenablement l'origine des x, et a désignant une constante arbitraire, ce sont

$$X = \frac{a}{\sin ax}, \qquad X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}, \qquad X = \frac{1}{x}.$$

X étant choisi, si l'on connaît une solution $w = P+iQ$ de (17.1), on en déduira la solution générale, du fait qu'on doit avoir

$$\frac{|d\overline{w}|^2}{\overline{Q}^2} = \frac{|dw|^2}{Q^2};$$

donc, deux solutions w et $\overline{w}$ sont liées par

$$\overline{w} = \frac{aw+b}{cw+d} \qquad (a,\ b,\ c,\ d,\ \text{réels};\ ad-bc=1). \tag{17.2}$$

En ce qui concerne Q, la solution générale ne dépend que de deux constantes arbitraires, car (17.2) entraîne

(17.3) $$\overline{Q} = \frac{Q}{|cw + d|^2}.$$

On peut remarquer que, si $Q(x, y)$ est une solution de (16.1), $CQ(x, y-m)$ en est une aussi, qui contient deux constantes arbitraires, C et m. Nous constaterons cependant que la totalité des solutions (17.3) ne peut pas toujours être représentée par une seule formule

(17.4) $$\overline{Q} = CQ(x, y-m),$$

où m serait réel.

18. Sur toute surface d'O. Bonnet, il existe une infinité de réseaux orthogonaux aptes à jouer le rôle de lignes de courbure. Pour les surfaces de troisième classe, les équations (4.4), où l'on fait $A_2 = 0$, $r = 0$, $s = \frac{\mu_1}{\mu}$, permettent d'écrire

(18.1) $$d\varphi = -X \sin\varphi \, dx + \left(X \cos\varphi - \frac{d}{dx} \log X\right) dy,$$

équation dont l'étude est indépendante de l'intégration de (16.3). D'après (10.9), φ est l'angle que fait gradψ avec grad H; il s'ensuit que les premières lignes de courbure bissectent les lignes tangentes à gradψ et celles tangentes à grad H, et que les secondes lignes de courbure bissectent les lignes $\psi = C$ et $H = C$.

Au réseau orthogonal isotherme formé des lignes $H = C$ et de leurs trajectoires orthogonales, nous avons fait correspondre une variable complexe $z \doteq x + iy$; à chaque réseau de lignes de courbure virtuelles, correspondra de même une variable complexe z_m, fonction analytique de z, dont la partie imaginaire restera constante le long des premières lignes de courbure, la partie réelle le long des secondes. Enfin, à chaque solution Q de (16.1) correspond une variable complexe w_m, fonction analytique de z, dont la partie imaginaire reste constante le long des lignes $\psi = C$. Comme les secondes lignes de courbure bissectent les lignes $\psi = C$ et $H = C$, il est possible de choisir le facteur réel qui reste arbitraire dans la définition de z_m et w_m, de sorte qu'on ait

(18.2) $$dz_m^2 = i \, dw_m \, dz,$$

si bien que, une fois déterminée l'une des fonctions $z_m(z)$, $w_m(z)$, l'autre s'obtiendra par une quadrature.

Nous étudierons (18.1) successivement dans les hypothèses

$$X = \frac{a}{\sin ax}, \qquad X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}, \qquad X = \frac{1}{x};$$

les ds^2 correspondants, donnés par (16.4), seront dits respectivement du type **A**, **B** ou **C**, conformément à la terminologie de M. E. Cartan.

Type **A** : $X = \frac{a}{\sin ax}$. — L'équation (18.1) s'écrit

(18.3) $$d\varphi = -\frac{a \sin\varphi}{\sin ax} dx + a \frac{\cos\varphi + \cos ax}{\sin ax} dy$$

et devient, en posant $\operatorname{tg}\frac{ax}{2} = u$, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = v$,

(18.4) $$a\, dy = \frac{2\, d(uv)}{1 - u^2 v^2}.$$

On doit distinguer suivant que $|uv|$ est inférieur, supérieur, ou égal à 1.

Cas α : $|uv| < 1$; la solution est

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2} \operatorname{tg}\frac{ax}{2}.$$

Cas β :

$$|uv| > 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cth}\frac{a(y-m)}{2} \cot\frac{ax}{2}.$$

Cas γ :

$$uv = 1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \cot\frac{ax}{2}.$$

Cas δ :

$$uv = -1, \qquad \operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = -\cot\frac{ax}{2}.$$

Dans le cas α, en un point donné de la surface, $\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2}$ varie, avec m, de $-\cot\frac{ax}{2}$ à $\cot\frac{ax}{2}$, c'est-à-dire que φ varie de $-(\pi - ax)$ à $\pi - ax$, en passant par zéro; dans le cas β, $|\varphi|$ varie de $|\pi - ax|$ à π; dans le cas γ, $\varphi = \pi - ax$; dans le cas δ, $\varphi = -(\pi - ax)$.

Pour obtenir z_m, on observe que, dans le cas α, l'équation différentielle des premières lignes de courbure virtuelles est

$$dx \operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2} - dy \operatorname{tg}\frac{ax}{2} = 0;$$

elle exprime la condition pour que $d \log \operatorname{tg}\frac{a(z - im)}{4}$ soit réel. On obtient donc ces lignes en égalant à une constante la partie imaginaire de

$$z_m = \log \operatorname{tg}\frac{a(z - im)}{4}.$$

Pour le cas β, z_m est remplacée par

$$z'_m = i \log \operatorname{tg}\left[\frac{\pi}{4} - \frac{a(z-im)}{4}\right].$$

Pour le cas γ, par

$$z'' = e^{ia\frac{z}{2}}.$$

Pour le cas δ, par

$$z''' = e^{-\frac{iaz}{2}}.$$

La fonction w_m s'obtiendra par application de (18.2). En négligeant un facteur $\frac{a}{2}$ sans importance, on aura :

Cas α :

$$w_m = i \operatorname{cotg} \frac{a(z-im)}{2}, \qquad Q_m = \frac{\sin ax}{\operatorname{ch} a(y-m) - \cos ax}.$$

Cas β :

$$w'_m = i \operatorname{tg} \frac{a(z-im)}{2}, \qquad Q'_m = \frac{\sin ax}{\operatorname{ch} a(y-m) + \cos ax}.$$

Cas γ :

$$w'' = e^{iaz}, \qquad Q'' = \sin ax\, e^{-ay}.$$

Cas δ :

$$w''' = e^{-iaz}, \qquad Q''' = -\sin ax\, e^{ay}.$$

19. *Type* **B** : $X = \frac{a}{\operatorname{sh} ax}$. — La solution générale tient en une seule formule

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{tg}\frac{a(y-m)}{2} \operatorname{cth}\frac{ax}{2}$$

et

$$z_m = \log \operatorname{th} \frac{a(z-im)}{4}, \qquad w_m = i \operatorname{cth} \frac{a(z-im)}{2}, \qquad Q_m = \frac{\operatorname{sh} ax}{\operatorname{ch} ax - \cos a(y-m)}.$$

Type **C** : $X = \frac{1}{x}$. — L'équation (18.1) devient

$$d\varphi = -\frac{1}{x}\sin\varphi\, dx + \frac{1+\cos\varphi}{x}\, dy.$$

La solution générale est

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \frac{y-m}{x}$$

et il y a une solution singulière $\varphi = \pi$.

De là, pour le *cas général*

$$z_m = \log(z-im), \qquad w_m = \frac{i}{z-im}, \qquad Q_m = \frac{x}{x^2+(y-m)^2}$$

et, pour le *cas singulier*,

$$z' = iz, \qquad w' = -iz, \qquad Q' = -x.$$

20. Il est possible, comme l'a montré M. É. Cartan, de faire sur un plan la représentation conforme de n'importe quelle surface d'O. Bonnet de troisième classe de façon que la carte de toutes ses lignes de courbure virtuelles soit formée de cercles (ou droites). Considérons par exemple le type **A**, cas α. Dans le plan (z_m), les lignes de courbure seraient représentées par des parallèles aux axes; si nous posons

$$\zeta_m = e^{z_m},$$

ces mêmes lignes, dans le plan (ζ_m), seraient représentées par les demi-droites rayonnant de l'origine et par les cercles centrés à l'origine.

Pour le cas β, on obtiendrait le même résultat en posant

$$\zeta'_m = e^{-iz'_m}.$$

Or ζ_m, ζ'_m, et aussi z''', sont des fonctions homographiques de z'' : tout faisceau de cercles ou de droites d'un des plans (ζ_m), (ζ'_m), (z''') sera donc représenté aussi par un tel faisceau dans le plan (z''). On voit facilement que, dans le plan (z''), le réseau (m) d'espèce α sera représenté par les faisceaux de cercles orthogonaux ayant pour points de base ou pour points de Poncelet $\pm e^{-\frac{am}{2}}$; le réseau (m) d'espèce β, par les faisceaux ayant pour points de base ou de Poncelet $\pm ie^{-\frac{am}{2}}$; le réseau singulier γ est évidemment représenté par les parallèles aux axes, tandis que le réseau singulier δ est représenté par les cercles tangents en O à l'axe réel ou à l'axe imaginaire. Les deux réseaux singuliers se présentent comme des cas limites communs aux réseaux d'espèce α et β, pour $am = \pm \infty$.

Pour étudier le type **B**, on posera $\zeta_m = e^{z_m}$. Dans le plan (ζ_0), le réseau (m) sera représenté par les faisceaux de cercles orthogonaux ayant pour points de base ou de Poncelet les points $i \operatorname{tg} \frac{am}{4}$ et $-i \operatorname{cotg} \frac{am}{4}$. Si l'on prenait comme plan de la carte celui de

$$\zeta' = \frac{\zeta_0 + 1}{\zeta_0 - 1} = -e^{\frac{dz}{2}},$$

on obtiendrait les faisceaux de cercles orthogonaux de points de base ou de Poncelet $\pm e^{\frac{iam}{2}}$, diamétralement opposés sur la circonférence unité. Dans le type **B**, il n'y a pas de réseaux singuliers.

Pour le type **C**, on peut faire la carte sur le plan (z), c'est-à-dire sur le plan (e^{z_0}). Les premières lignes du réseau (m) y sont représentées par les droites rayonnant du point im, celles du réseau singulier sont représentées par les parallèles à l'axe imaginaire; c'est le cas limite du précédent pour $m = \pm \infty$.

21. Il nous reste à tirer les conséquences de nos formules, en ce qui concerne l'immersion d'un ds^2 de la forme (16.4).

Si $X = \frac{a}{\sin ax}$ (type **A**), et si nous considérons l'espèce α, la seconde forme fondamentale s'écrira

$$\Phi_m = (H + A\cos\varphi)(\omega^1)^2 + 2A\sin\varphi\,\omega^1\omega^2 + (H - A\cos\varphi)(\omega^2)^2, \tag{21.1}$$

avec $H = f(x)$, solution quelconque de (16.3), $A = \frac{f'}{X}$, et φ donné par

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{th}\frac{a(y-m)}{2}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2}.$$

En outre

$$\omega^1 = Xf'^{-\frac{1}{2}}\,dx, \qquad \omega^2 = Xf'^{-\frac{1}{2}}\,dy.$$

On obtient donc apparemment, pour une solution $f(x)$ déterminée, une infinité d'immersions possibles, dépendant du paramètre m. En fait les surfaces S_m ainsi obtenues ne sont pas essentiellement distinctes; on le prouve immédiatement en remarquant que, par le changement de coordonnées curvilignes

$$x = x', \qquad y - m = y',$$

la surface S_m acquiert les mêmes formes fondamentales que S_0, à la dénomination près des coordonnées. Entre S_0 et S_m, il y a donc lieu de distinguer deux correspondances ponctuelles différentes : si l'on regarde comme homologues les points de S_0 et de S_m ayant les mêmes x et y, on réalise une application de S_0 sur S_m, avec conservation des courbures principales, application qui pourrait s'obtenir par une déformation continue de S_0; si en revanche, on regarde comme homologues le point (x, y) de S_0 et le point $(x, y-m)$ de S_m, on réalise une simple superposition de S_0 sur S_m. En d'autres termes, S_0 est susceptible d'une infinité de déformations, avec conservation des courbures principales, et elle jouit de la propriété remarquable de rester superposable à elle-même après une telle déformation.

Si dans (21.1), on suppose φ donné par

$$\operatorname{tg}\frac{\varphi}{2} = \operatorname{cth}\frac{a(y-m)}{2}\operatorname{cotg}\frac{ax}{2},$$

on a les surfaces d'espèce β. Les surfaces S'_m correspondant à un même choix de $f(x)$, sont encore toutes égales entre elles, et s'obtiennent par déformation continue de l'une d'elles, S'_0 par exemple. Mais S'_0 n'est pas superposable à S_0; S'_0 et S_0 sont isométriques, $f(x)$ étant supposé le même, mais S'_0 ne peut s'obtenir par une déformation continue de S_0.

Le cas singulier γ conduit à une forme Φ dont les coefficients, comme ceux du ds^2, ne dépendent que de la coordonnée x. La surface $\mathcal{H}$ correspondante admet donc un groupe de mouvements à un paramètre, et, puisque φ n'est ni nul, ni égal à π, $\mathcal{H}$ est un hélicoïde. Bien qu'isométrique à S_0 et de S'_0, pour une même solution $f(x)$, cet hélicoïde ne peut s'appliquer sur aucune d'elles par une déformation continue avec conservation des courbures principales.

Des considérations analogues s'appliquent au cas singulier δ. On a encore un hélicoïde $\mathcal{H}'$. Pour un même $f(x)$, $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ ne sont pas superposables. En effet leurs formes asymptotiques respectives sont

$$\Phi = \frac{X^2}{f'}[(H - A\cos ax)\,dx^2 + 2A\sin ax\,dx\,dy + (H + A\cos ax)\,dy^2],$$

$$\Phi' = \frac{X^2}{f'}[(H - A\cos ax)\,dx^2 - 2A\sin ax\,dx\,dy + (H + A\cos ax)\,dy^2];$$

On réalise, à la dénomination près des coordonnées, l'identification, en posant, dans Φ',

$$x = x', \qquad y = -y',$$

mais, quand on effectue ce changement de variables, Φ' ne doit pas être simplement transformé par invariance, du fait que le jacobien de cette transformation est négatif : il faut, concomitamment, changer le signe de Φ', si bien que l'expression finale de Φ' est $-\Phi$: cela prouve que $\mathcal{H}'$ est superposable à un hélicoïde qui serait symétrique de $\mathcal{H}$ par rapport à un plan.

En résumé, dans le type **A**, à chaque solution $f(x)$ de (16.3) et à chaque choix de la constante a correspondent quatre surfaces distinctes, dont deux hélicoïdes symétriques; ces quatre surfaces forment la *famille* relative à la solution $f(x)$ et au choix de a.

Il en va plus simplement dans le type **B** : à chaque solution $f(x)$ de (16.3) et à chaque choix de a, ne correspond qu'une immersion du ds^2 : toutes les surfaces correspondantes sont superposables.

Dans le type **C**, à chaque solution $f(x)$ correspondent deux surfaces distinctes, constituant à elles deux une famille. L'une d'elles est déformable à la Bonnet, et reste superposable à elle-même après une telle déformation. L'autre admet un groupe de mouvements à un paramètre, et c'est une surface de révolution, car ses lignes d'égale courbure moyenne sont lignes de courbure.