ALBERT EDREI

Sur des formules d'inversion pour les transformées de Stieltjès et certains théorèmes Taubériens

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 395-408

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__395_0>

SUR

DES FORMULES D'INVERSION POUR LES TRANSFORMÉES DE STIELTJÈS ET CERTAINS THÉORÈMES TAUBÉRIENS

PAR M. ALBERT EDREI.

INTRODUCTION. — Soit $\psi(t)$ une fonction réelle, non décroissante (¹), de la variable réelle t, définie pour $t \geqq 0$.

Le plan de la variable complexe z, *privé de l'axe réel non positif*, est un domaine qui joue un rôle important dans la théorie de l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+z} = f(z). \tag{1}$$

Dans tout ce Mémoire, ce domaine sera désigné par $\mathfrak{S}$. On sait que, si l'intégrale (1) converge pour une valeur particulière $z = z_0$ de $\mathfrak{S}$, elle converge pour tout point de $\mathfrak{S}$. Cette intégrale est une branche, holomorphe dans $\mathfrak{S}$, d'une fonction analytique $f(z)$, que l'on appelle transformée de Stieltjès de $\psi(t)$.

Dans le plan des z, considérons le cercle $z = re^{i\theta}[-\pi \leqq \theta \leqq \pi]$ et les deux arcs de ce cercle définis par $[-(\pi-\lambda) \leqq \theta \leqq (\pi-\mu)]$ et par $[(\pi-\mu) \leqq \theta \leqq (\pi+\lambda)]\left(0 < \lambda < \frac{\pi}{2};\ 0 < \mu < \frac{\pi}{2}\right)$. Décrits dans le sens positif, ce cercle et ces arcs constitueront trois contours d'intégration que nous désignerons respectivement par $C(r)$, $\Gamma(r;\lambda,\mu)$, $\Gamma'(r;\lambda,\mu)$.

(¹) Écartons, comme peu intéressant, le cas où $\psi(t)$ se réduit à une constante.

Nous nous proposons de prouver que si toutes les discontinuités de $\psi(t)$ sont régulières ([2]) et si p désigne un entier, on a

$$(2)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(r\,e^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta = \frac{(-1)^p}{r^{p+1}}\int_0^r t^p\,d\psi(t) \qquad (p \geqq 0),$$

$$(3)\qquad \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(r\,e^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta = \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1}}\int_r^\infty t^p\,d\psi(t) \qquad (p < 0).$$

Bien que fort élémentaires, ces formules ne nous paraissent pas avoir été remarquées. L'analogie avec la formule de Jensen est apparente. En effet, dans le cas $p = -1$, (3) devient

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+0}^{\pi-0} \mathcal{R}[f(r\,e^{i\theta})]\,d\theta = \int_r^\infty \frac{d\psi(t)}{t},$$

et, dans certaines conditions faciles à préciser, le second membre peut se mettre sous la forme

$$f(0) - \int_0^r \frac{d\psi(t)}{t}.$$

Les calculs qui conduisent à (2) et (3) se prêtent aisément à l'évaluation asymptotique (pour $r \to +\infty$) des seconds membres de ces formules. Au paragraphe 3, nous prouverons le

THÉORÈME 1. — *Soit $f(z)$ la transformée de Stieltjès d'une fonction non décroissante $\psi(t)$, telle que $\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+z}$ converge pour quelque valeur $z = z_0$ de $\mathfrak{S}$. En outre, $\psi(t)$ est soumise à la restriction suivante :*

(A) *A tout $\varepsilon(>0)$, on peut faire correspondre un nombre positif $\nu = \nu(\varepsilon)$ tel que*

$$\frac{\displaystyle\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \frac{d\psi(t)}{r+t}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{r+t}} < \varepsilon \qquad (r > 0),$$

dès que $r > r_0(\nu)$.

Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné de $\mathfrak{S}$, situé à distance non nulle de l'axe réel négatif.

Soit enfin $g(z)$ une branche de fonction analytique, holomorphe dans $\mathfrak{S}$, et telle que

---

([2]) On sait que les discontinuités de $\psi(t)$ sont toutes de première espèce, c'est-à-dire que $\psi(t+0)$ et $\psi(t-0)$ existent. Il apparaîtra bientôt que l'on ne restreint pas la généralité de nos résultats si l'on suppose que toutes les discontinuités de $\psi(t)$ ont été rendues régulières, c'est-à-dire que l'on a posé

$$\psi(t) = \frac{\psi(t-0)+\psi(t+0)}{2} \qquad (t > 0).$$

(*a*) *pour tout* $\mathcal{D}$, *il existe une borne* $M(\mathcal{D})$ *telle que pour* $z \in \mathcal{D}$ *et* $r > r_1(\mathcal{D})$,

$$\left|\frac{g(zr)}{g(r)}\right| < M(\mathcal{D}) \qquad [g(r) > 0],$$

(*b*)
$$\lim_{r \to \infty} \frac{f(r)}{g(r)} = 1.$$

Dans ces conditions, à tout $\varepsilon_1(> 0)$, *on peut faire correspondre un* $\eta_0(\varepsilon_1)$ *tel que, pour* $\eta(> 0)$ *fixe, inférieur à* $\eta_0(\varepsilon_1)$, *on ait*

$$\left|\frac{1}{2\pi g(r)} \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} \mathcal{R}[g(r e^{i\theta}) e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta - \frac{(-1)^p}{r^{p+1} g(r)} \int_0^r t^p\, d\psi(t)\right| < \varepsilon_1 \qquad (p \geqq 0),$$

$$\left|\frac{1}{2\pi g(r)} \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} \mathcal{R}[g(r e^{i\theta}) e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta - \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1} g(r)} \int_r^\infty t^p\, d\psi(t)\right| < \varepsilon_1 \qquad (p < 0),$$

dès que $r > r_2(\eta)$.

Il s'agit, on le voit, d'un résultat de la nature de ceux que Hardy et Littlewood ont nommés *taubériens*. Ces deux auteurs ont prouvé [3] une proposition que nous traduisons dans notre notation.

THÉORÈME DE HARDY ET LITTLEWOOD. — *Si la fonction positive* $\Phi(t)$ *est intégrable sur tout intervalle fini* (o, T) *et si*

1°
$$f(x) = \int_0^\infty \frac{\Phi(t)}{(t+x)^\rho}\, dt \qquad (\rho > 0)$$

converge pour quelque valeur positive de x;

2° *pour* $x \to \infty$,

$$f(x) \sim \frac{H}{x^\sigma} \qquad (H > 0;\ 0 < \sigma < \rho),$$

on aura

$$\int_0^x \Phi(t)\, dt \sim \frac{H\,\Gamma(\rho)}{\Gamma(\sigma)\Gamma(\rho - \sigma + 1)} x^{\rho - \sigma}.$$

Si dans ce théorème on prend $\rho = 1$, on obtient une proposition qui se trouve généralisée, dans une certaine mesure, par notre théorème 1. En effet, nous ne sommes pas liés à un mode particulier de croissance et, de plus, nous ne supposons point que $d\psi(t)$ est de la forme particulière $\Phi(t)\,dt$. Par contre, notre énoncé a le défaut d'exiger la condition de régularité (A). Il n'est donc pas inutile de remarquer :

1° que cette condition est essentielle à la vérité du théorème. Nous verrons, au paragraphe 6, par un exemple très simple où elle n'est pas réalisée, que le théorème est en défaut;

---

(3) G. H. HARDY et J. E. LITTLEWOOD, *On Tauberian theorems* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), 30, 1930, p. 23-37].

2° que la condition (A) est automatiquement satisfaite dans certains cas. Par exemple, si $d\psi(t)$ est de la forme $\Phi(t)\,dt$ où

(α) *$\Phi(t)$ est une fonction positive, intégrable, pour laquelle il existe un nombre réel τ et une borne t_0 tels que $t^\tau\Phi(t)$ est monotone dès que $t > t_0$.*

Hardy et Littlewood ont montré que, dans le cas $\rho = 1$, leur théorème est équivalent à un théorème de Valiron ([4]). Il apparaît donc naturel de chercher, dans le cadre de ce travail, un énoncé analogue. Cette tentative nous conduit à limiter la classe de fonctions de comparaison $g(z)$, par un groupe (B), de conditions destinées à assurer à $g(z)$ un comportement assez semblable à celui d'une puissance de z.

Posons

$$h_p(r;\eta) = \frac{1}{2\pi g(r)}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} \Re[g(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta \qquad (\eta > 0),$$

et énonçons les

Conditions (B).

1° $$h_p(r) = \lim_{\eta \to +0} h_p(r;\eta)$$

existe, pour des valeurs suffisamment grandes de r.

2° *A tout $\varepsilon_2 (> 0)$, on peut faire correspondre un $\eta_1(\varepsilon_2)$, tel que pour $\eta < \eta_1(\varepsilon_2)$ on ait*

$$|h_p(r) - h_p(r;\eta)| < \varepsilon_2,$$

dès que $r > r_3(\eta)$.

3° $$\lim_{r \to \infty} h_p(r) = \mathrm{H}_p.$$

4° $$-\mathrm{G} = \lim_{r \to \infty} \frac{rg'(r)}{g(r)}.$$

5° $$r^2 g''(r) = O[g(r)].$$

Il n'est pas inutile d'observer que ces conditions sont satisfaites, non seulement pour $g(z) = z^\beta$, mais aussi pour des fonctions plus générales, par exemple pour $g(z) = z^\beta(\log z)^\gamma$.

Une combinaison très simple des conditions (B) et du théorème 1, nous donnera le

---

([4]) G. Valiron, *Sur les fonctions entières d'ordre fini et d'ordre nul, et en particulier les fonctions à correspondance régulière* [*Annales de Toulouse*, (3), 5, 1914, p. 117-257].

Le résultat de M. Valiron fut redécouvert par E. C. Titchmarsh, *On integral functions with real negative zeros* [*Proc. London Math. Soc.*, (2), 26, 1927, p. 185-200].

Une démonstration élémentaire se trouve dans M. Heins, *Entire functions with bounded minimum modulus; subharmonic function analogues* [*Annals of Math.*, 49, 1948, p. 200-213].

THÉORÈME 2. — *Si $\Phi(t)$ satisfait à la condition (α) et $g(z)$ aux conditions du théorème 1 et aux conditions* (B), *on a*

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)}=(-1)^p(p+1-G)H_p.$$

M. Valiron a montré comment une proposition de ce genre, appliquée au logarithme d'un produit canonique, fournit d'intéressantes indications sur la densité de ses zéros supposés tous au voisinage de l'axe réel négatif.

1. Posons

$$R_K(z)=\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t+z}\qquad \text{où}\quad K>2|z|.$$

En vertu des hypothèse, $\int_0^\infty\frac{d\psi(t)}{t+1}$ converge, d'où l'on conclut que $\int_1^\infty\frac{d\psi(t)}{t}$ converge aussi; on a donc

$$|R_K(z)|\leq\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}\,\frac{1}{\left|1+\frac{z}{t}\right|}\leq 2\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}.$$

Si p désigne un entier quelconque, et en écrivant Γ et Γ' au lieu de $\Gamma(r;\lambda,\mu)$ et $\Gamma'(r;\lambda,\mu)$,

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_\Gamma z^p\left[\int_0^K\frac{d\psi(t)}{t+z}\right]dz+\int_\Gamma R_K(z)z^p\,dz.$$

En intervertissant l'ordre des intégrations, dans le premier terme du second membre,

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_0^K d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{t+z}\,dz+\int_\Gamma R_K(z)z^p\,dz. \tag{4}$$

Le module de la dernière intégrale écrite n'excède pas $4\pi r^{p+1}\int_K^\infty\frac{d\psi(t)}{t}$; on voit donc que, pour $K\to\infty$, (4) devient

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\int_0^\infty d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz. \tag{5}$$

Par des calculs élémentaires, nous évaluerons $\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}dz$ et le passage aux limites $\lambda\to 0$ et $\mu\to 0$ livrera les formules (2) et (3).

Considérons un nombre $\nu(0<\nu<1)$ et mettons (5) sous la forme

$$\int_\Gamma f(z)z^p\,dz=\left\{\int_0^{r(1-\nu)}+\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}+\int_{r(1+\nu)}^{2r}+\int_{2r}^\infty\right\}\left[d\psi(t)\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}dz\right]. \tag{6}$$

Si λ et μ tendent vers zéro, indépendamment l'un de l'autre, seule la partie imaginaire de $\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz$ a un comportement simple. Cette remarque conduit à ne considérer que la partie imaginaire de chaque membre de (6). Il y a lieu de distinguer entre $p \geqq 0$ et $p < 0$.

I. *Cas* $p \geqq 0$.

(a) Pour $t \leqq r(1-\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz - 2\pi i(-t)^p\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}\,dz\right| \leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p.$$

(b) Pour $r(1-\nu) \leqq t \leqq r(1+\nu)$,

$$\mathrm{J}\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz = \mathrm{J}\left\{\frac{z^p}{p} - \frac{z^{p-1}}{p-1}t + \frac{z^{p-2}}{p-2}t^2 + \ldots + (-1)^{p-1}\frac{z}{1}t^{p-1}\right\}_\Gamma + (-t)^p\{\arg(z+t)\}_\Gamma;$$

l'expression $\mathrm{J}\int \frac{z^p}{z+t}\,dz$ est donc une fonction continue de t dont la valeur n'excède pas

$$2\left[\frac{r^p}{p} + \frac{r^{p-1}}{p-1}t + \ldots + \frac{r}{1}t^{p-1}\right] + 2\pi t^p,$$

et cette expression est majorée par $\mathrm{C}r^p$, où C est une constante convenable.

(c) Pour $r(1+\nu) \leqq t$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}\,dz\right| \leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p.$$

(d) Pour $t \geqq 2r$,

(7)
$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz\right| = \left|-\int_{\Gamma'} \frac{z^p}{z+t}\,dz\right| \leqq \frac{r^{p+1}}{t-r}(\lambda+\mu) \leqq \frac{2r^{p+1}}{t}(\lambda+\mu).$$

En utilisant, dans (6), toutes ces estimations, on obtient

(8)
$$\begin{aligned}\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz - 2\pi(-1)^p\int_0^{r(1-\nu)} t^p\,d\psi(t)\right| &\leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p \int_0^{r(1-\nu)} d\psi(t) + \mathrm{C}r^p\int_{c(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t)\\ &+ \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p\int_{r(1+\nu)}^{2r} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}.\end{aligned}$$

En groupant certains termes et en tenant compte de certaines inégalités évidentes

(9)
$$\begin{aligned}\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz - 2\pi(-1)^p\int_0^{r} t^p\,d\psi(t)\right| &\leqq \frac{\lambda+\mu}{\nu} r^p \int_0^{2r} d\psi(t)\\ &+ (\mathrm{C}+2\pi)r^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^{\infty}\frac{d\psi(t)}{t}.\end{aligned}$$

Supposons d'abord $\psi(t)$ continue au point $t=r$. Posons $\nu=\max(\sqrt{\lambda}, \sqrt{\mu})$ et faisons $\lambda\to 0$, $\mu\to 0$; il vient

$$\lim_{\substack{\lambda\to 0\\ \mu\to 0}} \mathrm{J}\left[\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz\right]=(-1)^p\int_0^r t^p\,d\psi(t), \tag{10}$$

ce qui est équivalent à (2).

Au paragraphe suivant, nous lèverons la restriction relative à la continuité de $\psi(t)$ au point $t=r$.

II. *Cas* $p<0$.

(a) Pour $t\leqq r(1-\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma \frac{z^p}{z+t}\,dz\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leqq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p.$$

(b) Pour $r(1-\nu)\leqq t\leqq r(1+\nu)$,

$$\begin{aligned}\mathrm{J}\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz=\mathrm{J}&\left[\frac{1}{p+1}\,\frac{z^{p+1}}{t}-\frac{1}{p+2}\,\frac{z^{p+2}}{t^2}+\ldots+(-1)^{p+1}\frac{z^{-1}}{t^{-p-1}}\right]_\Gamma\\ &+(-1)^{p+1}t^p\{\arg z\}_\Gamma+(-1)^p t^p\{\arg(z+t)\}_\Gamma.\end{aligned}$$

Le module de cette expression est majoré par une quantité de la forme $\mathrm{C}r^p$, où C est une constante convenable.

(c) Pour $t\geqq r(1+\nu)$,

$$\left|\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz-2\pi i(-1)^{p+1}t^p\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leqq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p.$$

(d) Pour $t\geqq 2r$,

$$\left|\int_\Gamma\frac{z^p}{z+t}\,dz-2\pi i(-1)^{p+1}t^p\right|=\left|-\int_{\Gamma'}\frac{z^p}{z+t}\,dz\right|\leqq\frac{r^{p+1}}{t-r}(\lambda+\mu)\leqq\frac{2r^{p+1}}{t}(\lambda+\mu).$$

L'inégalité (8) est à remplacer par

$$\begin{aligned}&\left|\mathrm{J}\int_\Gamma f(z)z^p\,dz-2\pi(-1)^{p+1}\int_{r(1+\nu)}^\infty t^p\,d\psi(t)\right|\\ &\quad\leqq\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_0^{r(1-\nu)}d\psi(t)+\mathrm{C}r^p\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)}d\psi(t)\\ &\qquad+\frac{\lambda+\mu}{\nu}r^p\int_{r(1+\nu)}^{2r}d\psi(t)+2(\lambda+\mu)r^{p+1}\int_{2r}^\infty\frac{d\psi(t)}{t},\end{aligned}\tag{12}$$

où il y a lieu d'observer que $\int_{r(1+\nu)}^\infty t^p\,d\psi(t)$ converge.

Au lieu de (9), nous obtiendrons

$$(13)\quad \left| J\int_{\Gamma} f(z)\, z^p\, dz - 2\pi(-1)^{p+1}\int_r^{\infty} t^p\, d\psi(t) \right|$$
$$\leq \frac{\lambda+\mu}{\nu}\, r^p \int_0^{2r} d\psi(t) + (C+2\pi)\, r^p \int_{r(\nu-1)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) + 2(\lambda+\mu) r^{p+1}\int_{2r}^{\infty} \frac{d\psi(t)}{t}.$$

La démonstration s'achève comme pour le cas $p \geqq 0$.

2. *Modifications dans le cas où $\psi(t)$ est discontinue.* — Si $\psi(t)$ admet, pour $t=r$, un saut σ, on pourra définir une fonction $\psi^*(t)$, continue en $t=r$, et telle que

$$\psi^*(t) = \psi(t) \qquad \text{pour} \quad t < r,$$
$$\psi^*(t) = \psi(t) - \sigma \qquad \text{pour} \quad t > r.$$

On aura alors

$$f(z) = \int_0^{\infty} \frac{d\psi^*(t)}{z+t} + \frac{\sigma}{z+r},$$

et les modifications à apporter à (2) et (3) résultent simplement de l'évaluation de

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to 0}} J\left[\sigma \int_{\Gamma} \frac{z^p}{z+r}\, dz\right] = S_p;$$

on trouve

$$S_p = \sigma(-1)^p \quad r^p\pi \qquad \text{pour} \quad p \geqq 0,$$
$$S_p = \sigma(-1)^{p+1} r^p\pi \qquad \text{pour} \quad p < 0.$$

La formule (10) devient, dans le cas général,

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to 0}} J\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(r;\lambda,\mu)} f(z)\, z^p\, dz\right] = (-1)^p \left\{\int_0^{r} t^p\, d\psi^*(t) + \frac{\sigma}{2} r^p\right\} \qquad (p \geqq 0).$$

Pour $p < 0$, on trouve

$$\lim_{\substack{\lambda \to 0 \\ \mu \to 0}} J\left[\frac{1}{2\pi}\int_{\Gamma(r;\lambda,\mu)} f(z)\, z^p\, dz\right] = (-1)^{p+1} \left\{\int_r^{\infty} t^p\, d\psi^*(t) + \frac{\sigma}{2} r^p\right\}.$$

En revenant à la fonction $\psi(t)$, dont les discontinuités sont supposées régulières, on obtient de nouveau (2) et (3).

3. *Inégalités asymptotiques tirées des formules d'inversion.* — On reprendra les inégalités (9) et (13) et l'on remarquera que les seconds membres en sont identiques; on peut donc poser

$$L_p(r) = \frac{(-1)^p}{r^{p+1}} \int_0^{r} t^p\, d\psi(t) \qquad (p \geqq 0)$$

et

$$L_p(r) = \frac{(-1)^{p+1}}{r^{p+1}} \int_r^\infty t^p \, d\psi(t) \qquad (p < 0),$$

et ne plus distinguer deux cas.

Estimons les seconds membres de (9) et (13), *avant de passer aux limites* $\lambda \to 0$, $\mu \to 0$; en tenant compte des deux inégalités suivantes

$$(14) \qquad \begin{cases} \displaystyle\int_0^{2r} d\psi(t) \leq 3r \int_0^{2r} \frac{d\psi(t)}{t+r} \leq 3rf(r), \\ \displaystyle\int_{2r}^\infty \frac{d\psi(t)}{t} = 2\int_{2r}^\infty \frac{d\psi(t)}{t+t} \leq 2\int_{2r}^\infty \frac{d\psi(t)}{r+t} \leq 2f(r), \end{cases}$$

on obtient

$$(15) \qquad \left| \frac{r^{p+1}}{2\pi} \int_{-(\pi-\lambda)}^{(\pi-\mu)} \mathcal{R}[f(re^{i\theta})\, e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta - r^{p+1} L_p(r) \right|$$
$$\leq \frac{3(\lambda+\mu)}{2\pi\nu} r^{p+1} f(r) + \frac{4(\lambda+\mu)}{2\pi} r^{p+1} f(r) + \frac{C+2\pi}{2\pi} r^p \int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t).$$

Étant donné $\varepsilon_1 (>0)$, choisissons d'abord ν en sorte que

$$\frac{1}{3rf(r)} \int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} d\psi(t) \leq \frac{\displaystyle\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \frac{d\psi(t)}{t+r}}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+r}} < \frac{\varepsilon_1 \pi}{6(C+2\pi)} \qquad [r > r_0(\nu)].$$

Prenons ensuite $\eta = \lambda = \mu < \dfrac{\pi\varepsilon_1}{4\left(\dfrac{3}{\nu}+4\right)}$; pour $r > r_0(\nu)$, le second membre de (15) est inférieur à $\frac{\varepsilon_1}{2} r^{p+1} f(r)$. La démonstration s'achève en substituant aux intégrales

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta} \mathcal{R}[f(re^{i\theta})\, e^{i(p+1)\theta}]\, d\theta,$$

des intégrales approchées où $f(z)$ est remplacée par $g(z)$. Nous nous baserons sur les lemmes 1 et 2 que nous allons maintenant énoncer et prouver :

Lemme 1. — *Soient $f(z)$ la fonction définie par* (1) *et $\mathcal{D}$, un domaine borné de $\mathcal{S}$, dont la distance à l'axe réel négatif n'est pas nulle.*

Il existe alors deux bornes M *et* m *telles que, pour tout* $r > 0$, *et tout* z *de* $\mathcal{D}$

$$m < \left| \frac{f(zr)}{f(r)} \right| < M.$$

Posons

$$U = \overline{\text{borne}}_{z \in \mathcal{D}} |z|, \qquad u = \underline{\text{borne}}_{\substack{z \in \mathcal{D} \\ x > 0}} |z + x|.$$

On a

$$f(zr) = \left(\int_0^{2rU} + \int_{2rU}^{\infty}\right)\left[\frac{d\psi(t)}{t+r}\,\frac{t+r}{t+zr}\right]. \tag{16}$$

Pour $t \leqq 2rU$,

$$\left|\frac{\frac{t}{r}+1}{\frac{t}{r}+z}\right| \leqq \frac{1+2U}{u}, \tag{17}$$

pour $t \geqq 2rU$,

$$\left|\frac{\frac{r}{t}+1}{\frac{rz}{t}+1}\right| \leqq \frac{1+\frac{1}{2U}}{\frac{1}{2}}. \tag{18}$$

En utilisant (17) et (18), dans (16), on obtient

$$|f(zr)| \leqq f(r)\max\left[\frac{1+2U}{u}, 2+\frac{1}{U}\right] = f(r)\,M,$$

Observons maintenant que $f(z) > 0$, pour des valeurs positives de z. Si z n'est pas réel, la partie imaginaire de $f(z)$ n'est pas nulle. On voit donc que, pour tout z de $\mathcal{D}$, et toute valeur positive du paramètre r, la famille de fonctions $\left\{\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est holomorphe dans $\mathcal{D}$ et bornée inférieurement par $\frac{1}{M}$. Si $\mathcal{D}$ ne contient pas le point $z = 1$, on considérera un domaine $\mathcal{D}'$ contenant $\mathcal{D}$ et ce point, et situé à distance non nulle de l'axe réel négatif. Dans $\mathcal{D}'$, la famille $\left\{\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est normale et, pour $z = 1$, elle est bornée. On sait alors qu'il existe une borne $\frac{1}{m}$ telle que

$$\left|\frac{f(r)}{f(zr)}\right| < \frac{1}{m},$$

pour $z \in \mathcal{D}'$ et $r > 0$.

Lemme 2. — *Soit $g(z)$ une fonction holomorphe dans la portion de $\mathfrak{S}$ où $|z| > \rho_0$. S'il existe une borne M' telle que, pour r suffisamment grand et $z \in \mathcal{D}$, on ait*

$$\left|\frac{g(zr)}{g(r)}\right| < M', \tag{19}$$

et si

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g(r)}{f(r)} = 1, \tag{20}$$

on aura, pour tout $\delta (> 0)$,

$$\frac{f(zr)}{g(zr)} = 1 + \zeta(z; r),$$

où $|\zeta(z; r)| < \delta$, dès que $r > r_1(\delta)$.

En vertu du lemme 1, et de (19), la famille de fonctions $\left\{\frac{g(zr)}{g(r)}\frac{f(r)}{f(zr)}\right\}$ est bornée dans $\mathcal{D}$.

On peut évidemment, sans restreindre la généralité, supposer qu'il existe un segment de l'axe réel positif complètement intérieur à $\mathcal{D}$. Si z désigne un point quelconque de ce segment, on déduit de (20),

$$\lim_{r\to\infty}\frac{g(zr)}{f(zr)}\frac{f(r)}{g(r)}=1,$$

et, d'un théorème bien connu de Stieltjès, il résulte que cette limite existe uniformément, pour tout $z\in\mathcal{D}$.

Du lemme 2, on déduit que, pour $\eta>0$ fixe, l'égalité

$$\begin{aligned}&ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta\\&\quad-ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}g(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta=ir^{p+1}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}g(e^{i\theta})\zeta(e^{i\theta};\,r)\,e^{i(p+1)\theta}\,d\theta,\end{aligned}$$

entraîne

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\mathcal{R}[f(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta-\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi+\eta}^{\pi-\eta}\mathcal{R}[g(re^{i\theta})\,e^{i(p+1)\theta}]\,d\theta=o[g(r)],$$

qui, rapprochée de (15), donne le théorème 1. $\left[\text{On voit que l'on peut prendre } \eta_0(\varepsilon_1)=\dfrac{\pi\varepsilon_1}{4\left(\dfrac{3}{\nu}+4\right)}\right]$.

4. *Un corollaire du théorème* 1. — Le théorème 1 affirme que

$$\left|h_p(r;\,\eta)-\frac{L_p(r)}{g(r)}\right|<\varepsilon_1, \tag{21}$$

dès que $\eta<\eta_0(\varepsilon_1)$ et $r>r_2(\eta)$.

Les trois premières conditions (B) permettent de trouver un η satisfaisant simultanément (21) et

$$|H_p-h_p(r;\,\eta)|<\varepsilon_1,$$

pour des valeurs suffisamment grandes de r. Donc, pour de telles valeurs de r,

$$\left|H_p-\frac{L_p(r)}{g(r)}\right|<2\varepsilon_1.$$

Si $H_p\neq 0$, ceci signifie

$$\left\{\begin{aligned}&\int_0^r t^p\,d\psi(t)\sim(-1)^p H_p r^{p+1}g(r)\qquad(p\geqq 0),\\&\int_r^\infty t^p\,d\psi(t)\sim(-1)^{p+1}H_p r^{p+1}g(r)\qquad(p<0).\end{aligned}\right. \tag{22}$$

Le théorème 1 admet donc le corollaire suivant, analogue au théorème de Hardy-Littlewood :

Corollaire. — *Avec les hypothèses du théorème 1 et les trois premières conditions* (B), *on a* (22), *si* $H_p \neq 0$.

5. *Démonstration du théorème* 2. — Nous vérifierons d'abord que la condition (A), du théorème 1, est satisfaite si $d\psi(t) = \Phi(t)\,dt$, où $\Phi(t)$ est assujettie à la condition (α) de la page 398.

Supposons, pour fixer les idées, que $t^\tau\Phi(t)$ $(\tau > 0)$ n'est pas décroissante pour $t > t_0$. En tenant compte de (14),

$$\int_{\frac{r}{2}}^{3\frac{r}{2}} \Phi(t)\,dt = \psi\left(\frac{3r}{2}\right) - \psi\left(\frac{r}{2}\right) \leqq \psi(2r) - \psi(0) \leqq 3rf(r);$$

et, pour $r > 2t_0$,

$$r\frac{\Phi\left(\frac{r}{2}\right)\left(\frac{r}{2}\right)^\tau}{\left(\frac{3r}{2}\right)^\tau} \leqq \int_{\frac{r}{2}}^{\frac{3r}{2}} \Phi(t)\,dt \leqq 3rf(r).$$

De cette inégalité, on tire

$$\Phi\left(\frac{r}{2}\right) \leqq 3^{\tau+1} f(r),$$

ou

$$\Phi(r) \leqq 3^{\tau+1} f(2r) \leqq 3^{\tau+1} f(r). \tag{23}$$

Enfin, en combinant

$$\int_{(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt \leqq 2\nu r \Phi[r(1+\nu)] \frac{r^\tau(1+\nu)^\tau}{r^\tau(1-\nu)^\tau}$$

et (23), on obtient

$$\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt \leqq 2\nu r \frac{(1+\nu)^\tau}{(1-\nu)^\tau} 3^{\tau+1} f[r(1+\nu)] \leqq 2.3^{\tau+1} \frac{(1+\nu)^\tau}{(1-\nu)^\tau} \nu r f(r).$$

Donc, en prenant ν suffisamment petit, la quantité $\frac{1}{rf(r)}\int_{r(1-\nu)}^{r(1+\nu)} \Phi(t)\,dt$ peut être rendue arbitrairement petite, indépendamment de r. Ceci entraîne, manifestement, la condition (A).

En utilisant les deux dernières conditions (B), nous obtiendrons aisément le théorème 2. Le cas $p = -1$ ne se distingue des autres que par des détails d'écriture. Nous ferons les calculs dans ce cas particulier, en continuant à supposer que $t^\tau\Phi(t)$ $(\tau > 0)$, ne décroît pas.

Du corollaire du théorème 1, il résulte que, pour $\xi(>0)$ donné,

$$(\mathrm{H}_{-1}-\xi^2)g(r) \leqq \int_r^\infty \frac{\Phi(t)}{t}\,dt \leqq (\mathrm{H}_{-1}+\xi^2)g(r),$$

dès que r est suffisamment grand. Donc,

$$(24)\qquad \begin{aligned} &-\mathrm{H}_{-1}\{g[r(1+\xi)]-g(r)\}-\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}\\ &\leqq \int_r^{r(1+\xi)} \frac{\Phi(t)}{t}\,dt \leqq -\mathrm{H}_{-1}\{g[r(1+\xi)]-g(r)\}+\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}. \end{aligned}$$

En appliquant le théorème de la moyenne au membre central et la formule de Taylor, au troisième membre,

$$\begin{aligned} \xi r\frac{\Phi(r)r^\tau}{r^{\tau+1}(1+\xi)^{\tau+1}} &= \frac{\xi\Phi(r)}{(1+\xi)^{\tau+1}}\\ &\leqq -\mathrm{H}_{-1}\left\{\xi r g'(r)+\frac{\xi^2 r^2}{2}g''[r(1+\theta\xi)]\right\}+\xi^2\{g(r)+g[r(1+\xi)]\}. \end{aligned}$$

En tenant compte de l'hypothèse (a) du théorème 1, et deux dernières conditions (B); en gardant ξ fixe et en passant à la limite $r\to\infty$, il vient

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)} \leqq (1+\xi)^{\tau+1}[\mathrm{H}_{-1}\mathrm{G}+\xi\mathrm{V}],$$

où V est une constante convenable. Puis en faisant $\xi\to 0$,

$$\varlimsup_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)} \leqq \mathrm{H}_{-1}\mathrm{G}.$$

En traitant de même le premier et le deuxième membre de (24),

$$\varliminf_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)} \geqq \mathrm{H}_{-1}\mathrm{G}.$$

Donc

$$\lim_{r\to\infty}\frac{\Phi(r)}{g(r)} = \mathrm{H}_{-1}\mathrm{G}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

6. Nous terminerons ce travail en montrant la nécessité d'une condition telle que (A), pour $\psi(t)$.

Prenons pour $\psi(t)$, une fonction constante quand

$$3^n \leqq t < 3^{n+1} \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots),$$

nulle pour $0 \leqq t < 1$, et telle que

$$\int_0^\infty \frac{d\psi(t)}{t+x} = \sum_{n=0}^\infty \frac{2^n}{x+3^n} = f(x).$$

Il est clair que l'on peut prendre $g(z)=f(z)$ et la condition (a) est satisfaite en vertu du lemme 1. D'autre part, pour tout $\eta(>0)$, l'expression $h_p(r;\eta)$

est manifestement une fonction continue de r. Le théorème 1 se trouvera en défaut dès que l'on aura vérifié que $\frac{1}{rf(r)}\int_0^r d\psi(t)$ admet aux points $r=3^n$, des sauts tous supérieurs à une borne positive. Il suffit, pour cela, d'observer que $f(3^n) \leqq 4\frac{2^n}{3^n}$ et que, par conséquent, les sauts en question sont tous supérieurs à $\frac{1}{4}$.