BERTRAND GAMBIER

Courbes algébriques de classe p dont une p-sectrice de chaque système de tangentes concourantes passe par un point fixe

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 1-17

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

COURBES ALGÉBRIQUES DE CLASSE p DONT UNE p-SECTRICE DE CHAQUE SYSTÈME DE TANGENTES CONCOURANTES PASSE PAR UN POINT FIXE

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. *Introduction.* — J'ai étudié précédemment [1] *les courbes algébriques de classe p, telles que tout système de tangentes concourantes ait ses p-sectrices de direction fixe chacune* (autrement dit, chacune des p-sectrices passe en un point fixe rejeté à l'infini). Cette question avait été suggérée par M. Hadamard à propos de l'hypocycloïde à trois rebroussements. Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe possède cette propriété sont : *la droite de l'infini est tangente double, les points cycliques étant points de contact; les tangentes isotropes coïncident toutes avec la droite de l'infini.* On constate qu'*une courbe solution fournit, avec une valeur en général différente de la classe, des solutions nouvelles constituées par ses développées de tous ordres et par les courbes qui lui sont parallèles.*

Le problème traité dans ce travail consiste en la recherche *des courbes algébriques de classe p, telles que tout système de tangentes concourantes possède une p-sectrice passant en un point fixe* O, *situé, cette fois, à distance finie.* Les conditions nécessaires et suffisantes sont : *les droites isotropes issues de* O *touchent la*

[1] *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, LXVI, novembre-décembre 1947.

courbe aux points cycliques et sont les seules tangentes isotropes (d'où résulte que la droite de l'infini n'est pas tangente). *Les courbes parallèles à une courbe solution sont encore des solutions (pour une valeur différente ou égale de la classe); la développée n'est solution que si la courbe est unicursale.* Le degré de la courbe varie entre le maximum $p(p-1)$ et un minimum, atteint par les courbes unicursales, qui est $2(p-1)$ si les tangentes doubles ne sont pas tangentes inflexionnelles et si I, J sont points multiples d'ordre $p-1$; ce minimum peut s'abaisser beaucoup pour certaines courbes, telles que les épicycloïdes.

On voit que les critères relatifs à ces deux espèces de courbes s'excluent mutuellement, malgré l'analogie des énoncés. Dans le second énoncé, il ne peut exister qu'une p-sectrice passant en un point fixe; mais, dans le premier, dès qu'une p-sectrice passe par un point fixe, *rejeté à l'infini*, il en est de même de toutes les autres, en vertu de la relation angulaire qui nous sert encore ici,

$$(D_1, \delta)+(D_2, \delta)+\ldots+(D_p, \delta)=0 \qquad \text{ou} \qquad p(Ox, \delta)=(Ox, D_1)+\ldots+(Ox, D_p)$$

définissant la direction δ d'une p-sectrice des directions $D_1, D_2, \ldots, D_p$; les angles en jeu sont des angles orientés de droites non orientées, définis à $k\pi$ près, de sorte qu'il existe p directions de p-sectrices, inclinées les unes sur les autres d'un angle $\frac{\pi}{p}$ ou multiple de $\frac{\pi}{p}$.

Une solution très générale du *premier problème* est fournie par les *hypocycloïdes algébriques*; une solution très générale du second est fournie par les *épicycloïdes algébriques. Nous donnerons explicitement les coordonnées tangentielles des tangentes aux courbes unicursales de notre problème actuel.*

Les courbes de classe 3 et genre 1 méritent qu'on signale la distribution de leurs points de rebroussement; cela revient d'ailleurs à indiquer une propriété curieuse, que je crois inédite, des points d'inflexion de la cubique générale de genre 1.

2. *Coordonnées isotropes et p-sectrices.* — Par rapport à deux axes rectangulaires Ox, Oy le point Ω a des coordonnées x, y; nous appelons *coordonnées ponctuelles isotropes* les quantités X, Y telles que

$$(1) \qquad X=x+iy, \qquad Y=x-iy, \qquad x=\frac{X+Y}{2}, \qquad y=i\frac{Y-X}{2}.$$

L'équation de droite $ux+vy+w=0$ devient, en *coordonnées tangentielles isotropes*, $UX+VY+W=0$ avec

$$(2) \quad U=\frac{u-iv}{2}, \qquad V=\frac{u+iv}{2}, \qquad u=U+V, \qquad v=i(U-V), \qquad w=W.$$

Une droite D d'équation cartésienne $y=mx+p$ a pour équation isotrope

$(i-m)Y=(i+m)X+2p$; nous posons $M=(i+m):(i-m)$ de façon à écrire $Y=MX+P$ et, posant $\varphi=(Ox, D)$,

$$\operatorname{tg}\varphi=m=i\frac{M-1}{M+1}, \qquad M=e^{-2i\varphi}. \tag{3}$$

Soient donc p droites $D_1, D_2, \ldots, D_p$ et δ l'une de leurs p-sectrices; posons $\varphi_i=(Ox, D_i)$, $\psi=(Ox, \delta)$; appelons M_i, μ les coefficients isotropes attribués à D_i et δ; on a

$$p\psi=\varphi_1+\varphi_2+\ldots+\varphi_p \quad (\text{mod } \pi), \tag{4}$$

$$\mu^p=M_1M_2\ldots M_p=e^{-2ip\psi}=e^{-2i(\varphi_1+\ldots+\varphi_p)}. \tag{5}$$

On remarquera que si *l'une ou plusieurs des droites* D_i *sont isotropes et parallèles, aucune des autres n'étant isotrope, toutes les p-sectrices sont confondues avec la droite isotrope en jeu; si deux des droites* D_i, D_j *sont isotropes et non parallèles, les directions de p-sectrices sont indéterminées.*

Nous nous bornons aux courbes réelles ou, du moins, ayant, par rapport à un système d'axes réels, une équation à coefficients réels. Si les tangentes issues du point Ω de coordonnées isotropes (X_0, Y_0) ont des coefficients $M_1, M_2, \ldots, M_p$, et si l'une des p-sectrices passe en O, nous avons

$$\left(\frac{Y_0}{X_0}\right)^p=M_1M_2\ldots M_p. \tag{6}$$

Nous découvrons sans peine les conditions *nécessaires :* la courbe admet au moins une tangente isotrope T; prenons un point Ω sur cette tangente : toutes les p-sectrices des tangentes issues de Ω sont confondues avec T; *donc* O *est sur* T; *il ne peut exister d'autre tangente* T′ *parallèle à* T, car il faudrait que O, qui est à distance finie, soit aussi sur T′. *Il existe de même une tangente isotrope et une seule* T_1 (*de direction autre que* T) *et* O *est le point commun à* T *et* T_1; il ne peut exister d'autre point fixe par lequel passerait une autre p-sectrice, car les deux tangentes isotropes T, T_1 sont uniques et déterminent un seul point O. *La droite de l'infini ne peut être tangente,* sinon tout système de tangentes parallèles aurait ses p-sectrices rejetées toutes à l'infini : p-droites parallèles ont, en effet, une p-sectrice, et une seule, à distance finie que l'on obtient en coupant les p-droites par une sécante arbitraire, puis prenant le centre de gravité G des p points d'intersection obtenus, supposés de même masse : la p-sectrice est la parallèle aux droites menée par G; si l'une des droites parallèles est rejetée à l'infini, ou même plusieurs, la p-sectrice est elle-même rejetée à l'infini.

Nous avons ainsi obtenu un ensemble de conditions *nécessaires;* un calcul fort simple les prouvera *suffisantes.*

3. *Équation tangentielle des courbes.* — Nous définissons la courbe (C) par son équation tangentielle isotrope $F(U, V, W) = 0$

$$(7)\quad \left\{\begin{array}{l} F(U, V, W) \equiv F_p(U, V) + W F_{p-1}(U, V) + \ldots + W^{p-r} F_r(U, V) + \ldots + W^p F_0, \\ F_r \equiv \alpha_{r,0} U^r + \alpha_{r,1} U^{r-1} V + \ldots + \alpha_{r,r} V^r. \end{array}\right.$$

Si $Y - Y_0 = M(X - X_0)$ est l'équation isotrope d'une tangente issue du point $\Omega(X_0, Y_0)$, en remplaçant U par M, V par (-1) et W par $Y_0 - MX_0$, l'équation $F = 0$ devient une équation de degré p en M dont le produit des racines s'obtient aisément, et l'équation (6) devient

$$(8)\quad \frac{\alpha_{p,p} - Y_0 \alpha_{p-1,\,p-1} + Y_0^2 \alpha_{p-2,\,p-2} \ldots + (-1)^p Y_0^p F_0}{\alpha_{p,0} - X_0 \alpha_{p-1,\,0} \quad + X_0^2 \alpha_{p-2,\,0} \quad \ldots + (-1)^p X_0^p F_0} = \frac{Y_0^p}{X_0^p}.$$

Cette relation est satisfaite, quels que soient les nombres X_0, Y_0; on a donc

$$(9)\quad \alpha_{p,p} = \alpha_{p,0} = 0, \qquad \alpha_{p-1,\,p-1} = \alpha_{p-1,\,0} = 0, \qquad \ldots, \qquad \alpha_{1,1} = \alpha_{1,0} = 0,$$

Autrement dit, tous les polynomes F_p, F_{p-1}, ..., F_2 contiennent UV en facteur; F_1 disparaît; quant à la constante F_0, si elle est nulle, la courbe se décompose en *l'ensemble des deux points cycliques et une courbe de classe* $p - 2$; nous savons qu'alors les p-sectrices sont indéterminées, puisque deux tangentes sont isotropes; nous écartons ce cas et il reste la vraie solution où nous supposerons $F_0 = 1$

$$(10)\quad W^p + UV\Phi_{p-2}(U, V, W) = 0 \qquad \text{ou} \qquad w^p + (u^2 + v^2)\varphi_{p-2}(u, v, w) = 0.$$

Nous avons ainsi vérifié que *les conditions nécessaires trouvées au paragraphe précédent sont suffisantes.* On peut remarquer que φ_{p-2} peut contenir w^r en facteur; *il y a alors décomposition de la courbe en l'origine comptée r fois et une courbe de classe* $p - r$, *solution de notre problème pour la classe* $p - r$. On remarque que les tangentes issues de l'origine à la courbe $\varphi_{p-2} = 0$ sont aussi tangentes à la courbe C : un certain nombre d'entre elles peuvent être isotropes et avoir, sur OI ou OJ, un point de contact quelconque.

Chaque point cyclique I *ou* J *est sur la courbe et point de contact de* OI *ou* OJ *avec la courbe* : il peut arriver que OI n'ait pas d'autre point de contact ou, au contraire, touche la courbe en d'autres points, ou même la coupe en d'autres points, sans la toucher en ces points. Cherchons en effet *le* ou *les* points de contact de la droite isotrope $Y = 0$ dont les coefficients sont $U = 0$, $V = 1$, $W = 0$; les coordonnées du point de contact sont (si la tangente est simple)

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{l} V\Phi_{p-2} + UV\dfrac{\partial}{\partial U}\Phi_{p-2}(U, V, W) \\ U\Phi_{p-2} + UV\dfrac{\partial}{\partial V}\Phi_{p-2}, \\ pW^{p-1} + UV\dfrac{\partial}{\partial W}\Phi_{p-2}, \end{array}\right. \qquad \text{ou} \qquad \left\{\begin{array}{l} \Phi_{p-2}(0, 1, 0), \\ 0, \\ 0. \end{array}\right.$$

Explicitons

$$(12)\qquad \begin{cases} \Phi_{p-2}(U, V, W) \equiv \varphi_{p-2}(U, V) + W\varphi_{p-3}(U, V) + \ldots + W^{p-2}\varphi_0, \\ \varphi_r(U, V) \qquad \equiv \alpha_{r,0}U^r + \alpha_{r,1}U^{r-1}V + \ldots + \alpha_{r,r}V^r. \end{cases}$$

En faisant $V = 1$, nous avons entre U et W la relation

$$(13)\qquad W^p + U[\alpha_{p-2,0}U^{p-2} + \alpha_{p-2,1}U^{p-3} + \ldots + \alpha_{p-2,\,p-2} + W(\ldots)] = 0$$

et cette relation, pour $W = 0$, se réduit à

$$(14)\qquad U[\alpha_{p-2,0}U^{p-2} + \ldots + \alpha_{p-2,\,p-2}] = 0.$$

On voit que, si $\alpha_{p-2,\,p-2} \neq 0$, l'équation (14) admet une racine simple $U = 0$, de sorte que la tangente $Y = 0$, de coordonnées tangentielles isotropes $(0, 1, 0)$ est tangente simple et a pour point de contact le point de coordonnées tangentielles $(\alpha_{p-2,\,p-2}, 0, 0)$, c'est-à-dire le point cyclique situé sur la tangente isotrope en jeu; de plus la racine de l'équation (13) en U qui s'annule pour $W = 0$ est développable en série

$$(15)\qquad U = \frac{-W^p}{\alpha_{p-2,\,p-2}} + \lambda_1 W^{p+1} + \lambda_2 W^{p+2} + \ldots,$$

de sorte que, suivant la terminologie de G. Halphen, le point isotrope est l'*origine d'un cycle de degré* $p-1$ *et classe* 1; *la tangente isotrope en jeu est tangente simple, mais son point de contact est multiple d'ordre* $p-1$ *pour la courbe.*

Si nous restons provisoirement dans ce cas, qui doit être estimé le plus général quand les valeurs numériques des divers coefficients sont choisies au hasard, si la courbe n'a aucune tangente multiple, elle est de degré $p(p-1)$. La droite de l'infini coupe la courbe C en I, J qui comptent chacun pour $p-1$ intersections et en $(p-2)(p-1)$ autres points que nous allons déterminer; si $(\alpha, \beta, 0)$ sont les coordonnées isotropes d'un point de la droite de l'infini, nous obtenons les tangentes issues de ce point en adjoignant à l'équation (10) l'équation $\alpha U + \beta V = 0$, ce qui nous permet de remplacer U par β, V par $-\alpha$ et donne l'équation en W

$$(16)\qquad W^p - \alpha\beta\Phi_{p-2}(\beta, -\alpha, W) = 0.$$

Si cette équation a une racine multiple, deux cas sont possibles et deux seulement :

a. le point $(\alpha, \beta, 0)$ *appartient à la courbe;*
b. le point $(\alpha, \beta, 0)$ *est le point à l'infini d'une tangente multiple.*

On devra donc égaler à zéro le discriminant de l'équation (16) et, si la courbe est effectivement de genre $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$, nous aurons les points à l'infini; l'équation obtenue est homogène en α et β et, en supprimant les facteurs α^{p-1}, β^{p-1}, est de degré $(p-2)(p-1)$ en $\alpha : \beta$. Si la courbe admet une tangente double non inflexionnelle, le genre diminue d'une unité, le nombre des points à l'infini de deux unités; si la courbe devient unicursale grâce à l'existence de $\frac{(p-1)(p-2)}{2}$ tangentes doubles ordinaires, le degré s'abaisse au minimum $2(p-1)$; nous pouvons remarquer que, *dans le cas précis où nous nous sommes placés*, $\alpha_{p-2,\,p-2} \neq 0$, *si la courbe est unicursale grâce uniquement à la présence de tangentes doubles, aucune ne peut être inflexionnelle, puisque le degré est au moins* $2(p-1)$, I *et* J *étant multiples d'ordre* $(p-1)$ *chacun*.

Si $\alpha_{p-2,\,p-2}$ est nul, les résultats sont différents; *mais la droite* OI (*ou* OJ) *reste tangente à la courbe en* I (*ou* J), *avec d'autres points de contact ou de sécance éventuels;* pour ne pas allonger ce travail, nous nous bornerons, en fin d'étude, à donner quelques détails relatifs aux épicycloïdes, aux courbes unicursales et aux courbes de classe 3.

On voit aisément qu'*une courbe* C, *parallèle à une courbe* C *solution de notre problème, est une nouvelle solution*, la classe p étant remplacée par $2p$, si C n'est pas courbe de direction, et restant p si C est de direction. Cela se conçoit géométriquement, en remarquant que les parallèles à la distance a d'une droite (D), $ux+vy+w=0$ ont pour équation $ux+vy+w\pm a\sqrt{u^2+v^2}=0$ et coïncident avec D uniquement si D est isotrope, de sorte que C′ est elle aussi une courbe algébrique ayant pour tangentes isotropes seulement OI, OJ, ce qui est notre critérium. Analytiquement, l'équation

$$W^p + UV\Phi_{p-2}(U, V, W) = 0$$

est remplacée par la nouvelle

$$(W + a\sqrt{UV})^p + UV\Phi_{p-2}[U, V, W + a\sqrt{UV}] = 0,$$

qui devient rationnelle sous la forme

$$[W^p + C_p^2 a^2 UVW^{p-2} + \ldots + UV\psi_{p-2}(U, V, W)]^2 = UV[C_p^1 a W^{p-1} + \ldots + \psi_{p-1}(U, V, W)]^2,$$

où ψ_{p-2}, ψ_{p-1} sont certains polynomes homogènes de degré égal à leur indice [1].

La développée d'une courbe C *étudiée ici n'appartient pas en général au type étudié ici :* si C admet des points à l'infini autres que I, J, la développée C′ admet, en chacun d'eux, la droite de l'infini comme tangente particulière, ce qui exclut C′ [Ainsi, pour l'exemple $w^3+(u^2+v^2)u=0$, la développée a pour

---

(1) Il est facile de voir pourquoi, si la courbe est de direction, la courbe parallèle se décompose en deux courbes, distinctes, de même classe que la courbe de départ. Prenons l'exemple de la courbe de classe 4, $W^2 - \varepsilon\sqrt{UV}(AU+BV+CW)=0$ où ε signifie ± 1; en remplaçant W par $W + a\varepsilon_1\sqrt{UV}$ où ε_1 signifie encore ± 1, on obtient l'équation

$$(W^2 + a^2UV - Ca\varepsilon\varepsilon_1 UV)^2 - UV[2aW - \varepsilon\varepsilon_1(AU+BV+CW)]^2 = 0,$$

qui définit, suivant que $\varepsilon\varepsilon_1 = +1$ ou -1, deux nouvelles courbes de classe 4, analytiquement distinctes.

équation $27v_1^2w_1^3+(u_1^2+v_1^2)u_1^3=0$]. *Si la courbe* C *ne recoupe pas la droite de l'infini, en dehors de* I *et* J, *la développée* C′ *appartient elle aussi au type étudié ici :* c'est le cas pour les courbes unicursales que nous avons indiquées précédemment.

4. *Courbes de classe* 2 *et de classe* 3. — *Pour la classe* 2, la solution est évidente et constituée : *dans le cas de dégénérescence, par les deux points cycliques, dans le cas normal par un cercle quelconque de centre* O.

Pour la classe 3, *les cas de dégénérescence sont constitués soit par l'ensemble des points cycliques et d'un point quelconque, soit par l'ensemble d'un cercle de centre* O *et son centre*. Pour le cas normal, nous obtenons l'équation à trois paramètres

$$w^3+3(u^2+v^2)(Au+Bv+Cw)=0. \tag{17}$$

A et B sont supposés non nuls tous deux; *la courbe possède trois tangentes simples de rebroussement* obtenues en joignant à $w=0$ l'une des équations $u+iv=0$, $u-iv=0$, $Au+Bv+Cw=0$.

Les points de contact sont respectivement I, J et K (A, B, C). Une rotation des axes autour de O permet de supposer B nul : K est alors sur Ox. Pour la clarté, séparons d'abord les cas où le genre est un ou zéro; appliquons la méthode exposée au paragraphe précédent pour obtenir soit les points à l'infini, soit les tangentes doubles; en remplaçant (u, v) par $(\beta, -\alpha)$, nous avons l'équation en w,

$$w^3+3(\alpha^2+\beta^2)(Cw-A\beta)=0,$$

qui admet une racine double si l'on a

$$(\alpha^2+\beta^2)^2[4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2]=0;$$

la solution $\alpha^2+\beta^2=0$ fournit I, J qui sont points de rebroussement ($w=0$ est alors racine triple); étudions donc le cas où le rapport $\alpha:\beta$ est racine de $4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2=0$; si C est nul, on trouve $\beta^2=0$ et nous obtenons le point de rebroussement K situé à l'infini sur Ox. Écartant $C=0$ et $\alpha^2+\beta^2=0$, nous avons l'équation $4C^3(\alpha^2+\beta^2)+9A^2\beta^2=0$, qui fournit deux valeurs opposées, distinctes, de $\beta:\alpha$, *si* $9A^2+4C^3$ *n'est pas nul; la courbe est alors de degré* 6 *et genre* 1; les deux points à l'infini, autres que I et J, sont réels si $C(9A^2+4C^3)$ est négatif, imaginaires conjugués si ce produit est positif. Mais si A, C varient d'une façon continue, de sorte que $9A^2+4C^3$, d'abord non nul, tende vers zéro, deux asymptotes de la courbe, d'abord distinctes, se confondent en une seule droite Δ, parallèle à l'axe Oy; la courbe se décompose en cette droite Δ comptée deux fois et un résidu de degré 4, tangent deux fois à Δ; nous savons qu'*une courbe de degré* 4, *qui est de classe* 3 *et admet* I, J *comme rebroussements, est une cardioïde*. Vérifions-le : on peut, en vertu de $9A^2+4C^3=0$, exprimer A, C au moyen d'un paramètre R par les formules $A = \frac{R^3}{12}$, $C = -\frac{R^2}{4}$; si l'on pose $u = \cos 3\varphi$, $v = \sin 3\varphi$, l'équation tangentielle cartésienne devient

$$4\left(\frac{w}{R}\right)^3 + \cos 3\varphi - 3\left(\frac{w}{R}\right) = 0,$$

qui se résoud aussitôt par division de l'angle 3φ par 3, car l'équation de degré 3 en w équivaut à $\frac{w}{R} = -\cos\varphi$ (l'angle 3φ a été déterminé à 2π près et l'on a bien, pour w, trois déterminations); l'équation de la tangente est obtenue sous la forme paramétrique

$$x\cos 3\varphi + y \sin 3\varphi - R\cos\varphi = 0. \tag{18}$$

Le paramètre unicursal à employer est $t = \operatorname{tg}\varphi$.

Supposons maintenant (avec $B = 0$, obtenu par rotation des axes autour de O), $9A^2 + 4C^3 \neq 0$; *la courbe* (C) *est de classe* 3, *degré* 4, *genre* 1. *L'axe* OK (*devenu* Ox) *est axe de symétrie de la courbe*, car chaque solution (u, v, w) est accompagnée de la solution $(u, -v, w)$. Rappelons la propriété classique : *une courbe de classe* 3 *et genre* 1 *possède neuf tangentes de rebroussement; le point de concours de deux quelconques d'entre elles appartient à une troisième, de sorte que sur chaque tangente de rebroussement, il y a quatre points de cette espèce; sur les neuf rebroussements, un ou trois seulement sont réels* (*si trois rebroussements sont réels, les tangentes correspondantes sont concourantes*).

Soient (L, L'), (L_1, L'_1), (L_2, L'_2) les six points de rebroussement autres que I, J, K, les points d'un même groupe étant symétriques par rapport à OK; deux de ces couples (L_1, L'_1), (L_2, L'_2) sont sûrement imaginaires, l'autre (L, L') est formé soit de deux points réels, soit de deux points imaginaires conjugués. Les trois tangentes à la courbes issues de l'un quelconque L des six points de rebroussement sont confondues avec la tangente de rebroussement, de sorte que *cette tangente est l'une des p-sectrices, donc fait avec* OL *un angle égal à* $\pm\frac{\pi}{3}$. Or la tangente en L doit porter quatre points où se croisent trois tangentes de rebroussement : trois de ces points sont à la rencontre avec OI, OJ, OK; le quatrième correspond à un point commun à cette tangente et aux tangentes en L_1, L_2 (on peut en effet choisir les notations pour qu'il en soit ainsi); appelons-le λ; les trois angles $(OL, \lambda L)$, $(OL_1, \lambda L_1)$, $(OL_2, \lambda L_2)$, d'après un résultat précédent, sont égaux à $\frac{\pi}{3}$ ou $-\frac{\pi}{3}$, de sorte que deux d'entre eux sont certainement égaux : or ces trois points L, L_1, L_2 *jouent le même rôle, de sorte que les trois angles sont égaux et que les points* O, λ, L_1, L_2, L_3 *sont sur un même cercle* Γ (ceci sera vérifié analytiquement, de façon à dissiper tout doute sur la rigueur du raisonnement) De chaque point l du cercle Γ, le vecteur $\overrightarrow{O\lambda}$ est vu sous un angle $(Ol, l\lambda)$ égal à $\varepsilon\frac{\pi}{3}$ ($\varepsilon = +1$ ou -1) et les points $(O, \lambda', L', L'_1, L'_2)$ symétriques des précédents par rapport à OK sont sur le cercle Γ' tel que de chacun des points l' de ce cercle le vecteur $\overrightarrow{O\lambda'}$ soit vu sous l'angle $(Ol', l'\lambda')$ constamment égal à $-\frac{\varepsilon\pi}{3}$. Or chaque cercle Γ ou Γ' coupe la courbe C en douze points, dont cinq, à savoir (I, J, L, L_1, L_2) ou (J, I, L', L'_1, L'_2) sont des rebroussements; il reste donc deux points d'intersection à trouver qui sont sûrement des points remarquables de C : *nous allons voir que ces deux points sont réunis en* K (*aussi bien pour* Γ *que pour* Γ') *et que* (O, λ, λ') *sont les sommets d'un triangle équilatéral dont* K *est le centre de gravité*. Les droites λL, λL_1, λL_2 admettent λO comme trisectrice.

On sait que les rebroussements de (C) s'obtiennent en adjoignant à l'équation

$$(19)\qquad (C) \equiv w^3 + 3(u^2 + v^2)(Au + Cw) = 0,$$

l'équation de la hessienne (H), courbe ayant les mêmes tangentes de rebroussement, et que quatre courbes du faisceau tangentiel $(C) + \lambda(H) = 0$ dégénèrent en trois points, de façon à obtenir ainsi le total des 12 points où il y a concours de trois tangentes de rebroussement. On a

$$(20)\qquad (H) \equiv C^2 w^2 + 4ACuw^2 + [(3A^2 - C^2)u^2 - (A^2 + C^2)v^2]w - AC^2 u(u^2 + v^2) = 0,$$

$$(21)\qquad C^2(C) + 3(H) \equiv [(2Cw + 3Au)^2 - 3A^2v^2]w = 0$$

(cette dernière combinaison est facile à obtenir, puisque l'un des 12 points de concours des tangentes de rebroussement est l'origine, qui a $w = 0$ pour équation tangentielle). Les facteurs $2Cw + Av\sqrt{3} + 3Au = 0$ donnent les points λ, λ', à distance finie, si $C \neq 0$

$$\lambda\left(\frac{3A}{2C}, \frac{A\sqrt{3}}{2C}\right), \qquad \lambda'\left(\frac{3A}{2C}, \frac{-A}{2C}\sqrt{3}\right).$$

L'angle $(Ox, O\lambda)$ vaut $\frac{\pi}{6}$, $O\lambda = O\lambda' = \frac{A\sqrt{3}}{C}$, $OK = \frac{A}{C}$, de sorte que $O\lambda\lambda'$ est un triangle équilatéral de centre K; le cercle Γ a pour centre le point μ, symétrique de K par rapport à $O\lambda$ et pour rayon $\frac{A}{C}$; μ et μ' sont les sommets des deux triangles équilatéraux dont O, K sont deux sommets et ont pour coordonnées

$$\mu\left(\frac{A}{2C}, \frac{A}{2C}\sqrt{3}\right), \qquad \mu'\left(\frac{A}{2C}, \frac{-A}{2C}\sqrt{3}\right).$$

Les coordonnées tangentielles des six tangentes de rebroussement autres que OI, OJ, OK s'obtiennent en adjoignant à l'équation de (C) les équations

$$3Au \pm Av\sqrt{3} + 2Cw = 0.$$

Pour faire toutes les vérifications, supposons $C \neq 0$, de façon que K soit à distance finie; en faisant une homothétie de pôle O, les coefficients A, C sont remplacés par $A:\lambda^3$ et $C:\lambda^2$; on peut donc supposer, pour simplifier, $C=1$; le cercle Γ doit donc avoir pour équation $x^2+y^2-Ax-A\sqrt{3}y=0$; l'équation tangentielle de λ est $3Au+A\sqrt{3}v+2w=0$; en remplaçant w par la valeur déduite de cette équation, l'équation de (C) devient

$$A^2[3u+v\sqrt{3}]^3+12(u^2+v^2)(u+v\sqrt{3})=0. \tag{22}$$

Les coordonnées du point de contact d'une tangente issue de λ s'obtiennent en calculant

$$3Au^2+Av^2+2uw, \qquad 2Auv+2vw, \qquad w^2+u^2+v^2,$$

remplaçant w par $-\frac{A}{2}(3u+v\sqrt{3})$ et divisant les deux premières expressions par la dernière, on a ainsi

$$x=\frac{Av(v-u\sqrt{3})}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2}, \qquad y=\frac{-vA(u+v\sqrt{3})}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})}. \tag{23}$$

Si l'on calcule x^2+y^2, $A(x+y\sqrt{3})$, on obtient

$$x^2+y^2=\frac{4A^2v^2(u^2+v^2)}{\left[u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2\right]}, \qquad Ax+Ay\sqrt{3}=\frac{-2A^2v(u\sqrt{3}+v)}{u^2+v^2+\frac{A^2}{4}(3u+v\sqrt{3})^2} \tag{24}$$

et l'on constate sans peine que l'équation $x^2+y^2-Ax-Ay\sqrt{3}=0$, une fois le facteur v enlevé, équivaut à l'équation (22), de sorte que nous avons bien vérifié que le cercle (Γ) contient I, J, K, O, λ, et les trois points de contact des tangentes de rebroussement issues de λ; on peut remarquer que les tangentes à (Γ) en O et λ concourent en λ'. Nous avons ainsi vérifié toutes les circonstances prévues.

Si C *est nul*, les points λ, λ' sont à l'infini sur les droites issues de O et inclinées de l'angle $\pm\frac{\pi}{6}$ sur Ox; les six tangentes de rebroussement autres que Ox, OL, OJ ont pour équation $x\pm\sqrt{3}y-\sqrt[3]{12}A=0$, où la racine cubique est prise successivement avec ses trois déterminations. Chaque cercle Γ ou Γ' est devenu une droite, issue de O, faisant avec Ox un angle égal à $\pm\frac{\pi}{6}$ et porte trois points de rebroussement; *avec la droite de l'infini, on a aussi trois droites contenant chacune trois points de rebroussement, tandis que les sommets du triangle qu'elles forment sont points de concours de trois tangentes de rebroussement.*

Il y a lieu maintenant de tirer les conséquences de ces résultats au point de vue des cubiques planes générales de genre 1 *ou de courbes de classe* 3 *et genre* 1. Les courbes de classe 3 et genre 1 que nous venons d'étudier sont, *projectivement parlant*, les courbes les plus générales de cette classe 3 et, par suite, les propriétés que nous venons de signaler sur l'ensemble des points et tangentes de *rebroussement* (s'il s'agit de courbes de classe 3 et genre 1), ou d'*inflexion* s'il s'agit de cubiques de genre 1) ne sont qu'une forme *métrique* d'une propriété *projective* qu'il s'agit de mettre en évidence; contrairement à la règle générale, c'est la propriété projective qui revêt l'énoncé le plus simple, tandis que l'énoncé métrique, tout en ayant l'avantage de faire découvrir l'énoncé projectif, risque de le masquer au premier abord,

Énonçons la propriété projective pour les cubiques Γ de genre 1; *soit une répartition des neuf points d'inflexion* (A_1, A_2, A_3), (B_1, B_2, B_3), (C_1, C_2, C_3) *sur trois droites* A, B, C; *il y a quatre répartitions de cette nature. Les six tangentes d'inflexion* B_i, C_j *et les deux droites* B, C *sont tangentes à une même conique* Γ *que* B, C *touchent aux points où* A *les rencontre*. (Je ne puis garantir que cette propriété soit inédite, mais je ne l'ai trouvée signalée nulle part; elle rentre dans la catégorité de ces propriétés qui sont presque évidentes, dès qu'elles sont signalées, et qui, souvent, ne sont découvertes que par hasard, à propos d'un problème plus ou moins éloigné [1]. En effet, chaque point tel que A_1 est pôle d'une homologie involutive, dont l'axe est la polaire de A_1 par rapport au couple B, C, transformant Γ en elle-même et les tangentes aux B_i en les tangentes aux C_j (dans un ordre inutile à préciser ici); ces six tangentes touchent donc une même conique γ coupant B en deux points qui, par l'homologie précédente, deviennent les points où γ coupe C; mais ce raisonnement est aussi valable pour chaque point A_2 ou A_3 et sa polaire par rapport au couple B, C, de sorte que les deux points communs à γ et B sont confondus avec le point (A, B), les points communs à γ et C confondus avec le point (A, C). Ce théorème fournit ainsi huit tangentes d'une certaine conique et les points de contact de deux d'entre elles, ce qui fait, somme toute, l'équivalent de dix droites tangentes à une même conique.

On transforme sans difficulté ce théorème par polarité : *soit une courbe* (C) *de genre* 1 *et classe* 3, *et une répartition des neuf tangentes de rebroussement* $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha)$, $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ *en trois groupes de trois droites concourant en un point* α, β *ou* γ; *il y a quatre répartitions de cette nature; les six points de rebroussement relatifs aux deux groupes* β, γ *sont, avec ces deux points* β, γ, *situés sur une même conique dont les tangentes en* β, γ *sont* $\alpha\,\beta$ *et* $\alpha\,\gamma$.

Nous pouvons remarquer que la répartition signalée des neuf points d'inflexion sur trois droites A, B, C nous a fait découvrir trois coniques que nous appellerons (B, C), (C, A) (A, B) : les tangentes communes à (C, A) et (A, B) sont la droite A et les trois tangentes d'inflexion en A_1, A_5, A_3. Or il y

---

[1] Au cours de la correction des épreuves, M. B. Segre me communique très aimablement que ce résultat a été, partiellement, obtenu par Laguerre (*Jounal de Math.*, II, 17, 1872, p. 15) : le procédé de Laguerre, fondé sur l'emploi des invariants et covariants, prouve que les 6 tangentes aux B_i et C_j ainsi que les droites B et C sont tangentes à une même conique, sans préciser que le point de contact de B ou C et celui où A les rencontre.

a un cas spécial à signaler, c'est celui où la conique (A, B) par exemple, qui est définie *tangentiellement*, dégénère *en deux points*, ce qui ne peut arriver que si *les tangentes en* A_1, A_2, A_3 *concourent* : d'après ce que nous avons dit sur les quatres tangentes communes à (C, A) et (A, B), *il en résulte que* (C, A) *dégénère aussi; donc aussi* (B, C), et l'on voit aussitôt que les sommets du triangle de côtés, A, B, C fournissent les couples de points en lesquels dégénèrent les coniques : *les tangentes en* B_1, B_2, B_3 *concourent au point commun à* C *et* A, *les tangentes en* C_1, C_2, C_3 *concourent au point commun à* B *et* A. C'est ce qui arrive pour la cubique d'équation $(x^2+y^2)x+1=0$; nous avons vérifié la propriété corrélative pour la courbe de classe 3 $w^3+(u^2+v^2)u=0$.

Si nous réfléchissons aux propositions qui précèdent, nous voyons sans peine qu'une transformation homographique simple réduit l'équation tangentielle de la courbe (C) générale de classe 3 et genre 1 à la forme

$$w^3+3(u^2+v^2)(Au+Cw)=0.$$

Il suffit en effet de considérer deux tangentes de rebroussement, prises au hasard parmi les neuf tangentes de cette espèce : soient I, J les points de contact et O le point commun à ces deux tangentes; par homographie, nous pouvons convertir I, J en les points cycliques et l'équation tangentielle de (C) prend la forme annoncée. Mais alors la propriété *métrique* que nous obtenons sur (C) après la transformation, propriété des trisectrices des tangentes concourantes, doit correspondre à une propriété *projective* commune à tout système de tangentes concourantes menées à une courbe arbitraire de classe 3 et genre 1 ; par dualité, il y a une propriété *projective* commune à tous les systèmes de points alignés que l'on peut obtenir sur une cubique plane Γ de genre 1. Énonçons-la : *étant donné une droite quelconque* D *coupant* Γ *en* M_1, M_2, M_3 *et la droite* $A(A_1, A_2, A_3)$, *portant les trois points d'inflexion* A_1, A_2, A_3, *en un point* d, *projetons* M_1, M_2, M_3 *sur* (A) *en* m_1, m_2, m_3 *à partir du point* α_3 *commun aux tangentes en* A_1 *et* A_2 : *le produit des trois birapports* (A_1, A_2, d, m_i) *est égal à l'unité*; pour retrouver la forme métrique, supposons qu'une homographie fasse coïncider A_1, A_2, avec les points cycliques I, J et α_3 avec O : nous avons l'énoncé suivant : *soit une cubique* Γ *admettant* I *et* J *comme points d'inflexion; soit* O *le point commun aux deux asymptotes inflexionnelles isotropes; coupons* Γ *par une droite quelconque* D : *les droites* OM_1, OM_2, OM_3 *joignant le foyer* O *aux points d'intersection ont l'une de leurs trisectrices parallèle à* D. Si maintenant nous transformons ce dernier énoncé par polarité relativement à l'une des coniques $x^2\pm y^2=\pm 1$, nous trouvons une courbe de classe 3, et genre 1, admettant I, J comme points de rebroussement, et OI, OJ comme tangentes en ces points.

5. *Courbes de classe p ou de degré p.* — Autrement dit les équations

$$(26)\qquad w^p+(u^2+v^2)f_{p-2}(u, v, w)=0, \qquad z^p+(x^2+y^2)f_{p-2}(x, y, z)=0$$

sont, par rapport à un système d'axes cartésiens rectangulaires, les équations, tangentielles ou ponctuelles, homogènes d'une courbe algébrique de classe p ou degré p, telles que :

pour la première, tout système de tangentes concourantes admette pour p-sectrice la droite joignant leur point commun à l'origine;

pour la seconde, les rayons, joignant l'origine aux points communs à la courbe et à une droite D *quelconque, admettent la droite* D *comme direction de p-sectrice.*

Cette seconde propriété se déduit en effet de la première par polarité relativement à une conique d'équation $x^2 \pm y^2 = K$, où K est une constante quelconque; si l'on prend, par exemple, $x^2 + y^2 + 1 = 0$, chaque tangente issue d'un point donné P a pour transformée un point commun à la seconde courbe et à une droite arbitraire, le rayon vecteur étant perpendiculaire à la tangente relative à la première courbe.

Ce que nous venons d'expliquer donne le moyen d'énoncer *la propriété possédée par une courbe* (C) *de classe p possédant un certain point* I *telle que la tangente en* I *à* (C) *soit la seule tangente à* (C) *issue de ce point* I *et un autre point* J *de même définition;* O *étant le point commun aux tangentes en* I *et* J, *et si* $m_1, m_2, \ldots, m_p$ *sont les points de contact avec* (C) *des tangentes issues d'un point* M *quelconque, le produit des p birapports* (MI, MJ, MO, Mm_i) *est égal à l'unité* et c'est d'ailleurs ce qu'exprime l'égalité (6) qui nous a servi de point de départ.

La propriété corrélative s'énonce ainsi : *si une courbe algébrique* Γ *de degré p possède deux points* I, J *tel que les tangentes en* I *ou* J *coupent la courbe en p points réunis en* I *ou* J, *soit* O *le point de concours des tangentes en* I, J; *coupons la courbe par une droite quelconque* D *qui la rencontre en* $m_1, m_2, \ldots, m_p$; D *coupe la droite* I J *en* μ : *le produit des p birapports* (OI, OJ, Oμ, Om_i) *est égal à l'unité.*

Si nous appliquons ces principes au cas de $p = 2$, nous retrouvons des théorèmes classiques : soient deux points I, J d'une conique et O le point commun aux tangentes en I et J; d'un point M menons les tangentes Mm_1, Mm_2 touchant la conique en m_1, m_2 : MO est rayon double de l'involution définie par les couples (MI, MJ) et (Mm_1, Mm_2). Coupons la conique par une droite D quelconque qui donne deux points d'intersection d_1, d_2 et coupe IJ en d : le point d est point double de l'involution définie par les couples (OI, OJ) et (Om_1, Om_2).

6. *Épicycloïdes algébriques.* — Sur le cercle de centre O et rayon R, joignons les points (R cos$m\varphi$, R sin$m\varphi$), (R cos $q\varphi$, R cos$q\varphi$, R sin$q\varphi$) où m, q sont deux entiers *positifs, premiers entre eux.* La corde obtenue a pour équation

$$x \cos \frac{m+q}{2} \varphi + y \sin \frac{m+q}{2} \varphi - R \cos \frac{m-q}{2} \varphi = 0, \tag{27}$$

ou encore, en posant $X = x + iy$, $Y = x - iy$, $t = \cos\varphi + i\sin\varphi$,

$$X + Yt^{m+q} - R(t^m + t^q) = 0. \tag{28}$$

La droite $X = 0$ est obtenue pour $t = 0$ et il n'y a pas d'autre tangente qui lui soit parallèle; de même pour la droite $Y = 0$ et $t = \infty$; la droite de l'infini n'est jamais obtenue; nous avons ainsi prouvé que toute épicycloïde algébrique est solution de notre problème. Les coordonnées du point de contact sont

$$X = \frac{R(mt^q + qt^m)}{m+q}, \qquad Y = \frac{R(mt^{-q} + qt^{-m})}{m+q}. \tag{29}$$

La courbe est de classe $p = m + q$, de degré $2m$ si $m > q$. La courbe ne coupe la droite de l'infini qu'en I et J, qui sont des points multiples d'ordre m; la tangente $X = 0$ coupe la courbe aux points donnés par $qt^{m-q} + m = 0$ situés à distance finie et en nombre $m - q$; il y a donc $m + q$ points d'intersection réunis au point de contact. On remarquera, conformément à ce qui a été indiqué en introduction, que le degré, au lieu d'être égal à $2(m + q - 1)$, n'est égal qu'à $2m$; cela tient aux caractéristiques du cycle $t = 0$ et du cycle $t = \infty$. Si l'on prend la courbe C′ parallèle, à la distance a, la tangente générale a pour équation

$$X + Yt^{m+q} - R(t^m + t^q) + at^{\frac{m+q}{2}} = 0. \tag{30}$$

Si m et q sont impairs tous deux, cette équation est rationnelle en t, car l'épicycloïde est alors courbe de direction, de sorte que C′ est elle aussi courbe de direction et de classe $m + q$. Si m et q sont l'un pair, l'autre impair, en posant $t = \theta^2$, on a une représentation, impropre de C et propre de C′ qui, cette fois, est de classe $2(m + q)$; de toutes façons C′ est elle aussi une solution de notre problème.

7. *Courbes unicursales.* — Supposons la courbe réelle et rapportée à un paramètre réel; l'équation isotrope de la tangente générale est

$$Xf(t) + Y\varphi(t) + \psi(t) = 0,$$

où $\psi(t)$ est un polynome à coefficients réels et f, φ deux polynomes à coefficients respectivement imaginaires conjugués. Il n'y a pas d'autres tangentes isotropes que $X = 0$ ou $Y = 0$: donc toute racine de f(ou φ) est racine de ψ sans être racine de φ(ou f); puisque la droite de l'infini n'est pas tangente, f et φ ne peuvent avoir de racine commune et, de plus, le degré de ψ est au plus égal au degré commun de f, φ. Comme toute racine de $(f\varphi)$ est racine de ψ, et que les degrés de multiplicité des racines n'ont pas été invoqués jusqu'ici, puisque le degré de ψ est au plus égal à celui de f, et φ, on en conclut que parmi les racines de f(ou φ) il y en a une ou plusieurs qui ont un degré de multiplicité supérieur à celui qu'elles ont dans ψ. D'ailleurs, comme le point de contact d'une tangente (t) est donné par les coordonnées isotropes homogènes

$$\varphi\psi' - \psi\varphi', \quad \psi f' - f\psi', \quad f\varphi' - \varphi f',$$

un nombre t racine d'ordre n de φ, et n_1 de ψ fournit la tangente $X = 0$ avec le point de contact à l'infini si $n > n_1$, à l'origine si $n < n_1$, en un point de $X = 0$ distinct de l'origine et du point à l'infini si $n = n_1$; donc, puisque nous avons vu que φ a au moins une racine de degré de multiplicité supérieur à celui qu'elle a dans ψ, le point cyclique situé sur $X = 0$ est le point de contact d'une certaine branche de la courbe avec cette droite (ou de plusieurs branches). Aucune racine de f ni φ ne peut être réelle, car elle serait commune à f, φ et aussi à ψ.

D'après cela, t_1, t_2, ... t_h étant des nombres *imaginaires* quelconques, en nombre h supérieur ou égal à 1, on aura

$$f \equiv (t - t_1)^{\alpha_1}(t - t_2)^{\alpha_2} \ldots (t - t_h)^{\alpha_h},$$

où α_1, α_2, ..., α_h sont des entiers dont l'un au moins est supérieur à l'unité. Le polynome φ est le polynome conjugué de f; enfin ψ admet *toutes* les racines t_1, t_2, ..., t_h et les racines conjuguées t'_1, t'_2, ..., t'_h avec des exposants *non nuls*, α'_1, α'_2, ..., α'_h, au plus égaux respectivement au nombre correspondant α_1, α_2, ..., α_h, un ou plusieurs des α' étant inférieur à l'α correspondant; ψ peut admettre d'autres racines arbitraires, avec la restriction que le degré de ψ soit au plus égal à $\alpha_1 + \ldots + \alpha_h$; on a donc

$$\psi \equiv [(t - t_1)(t - t'_1)]^{\alpha'_1}[(t - t_2)(t - t'_2)]^{\alpha'_2} \ldots [(t - t_h)(t - t'_h)]^{\alpha'_h} X(t),$$

où $X(t)$ est un polynome entier dont le degré est au plus égal à la différence *positive ou nulle* $\Sigma\alpha_i - 2\Sigma\alpha'_i$; si nous posons $\alpha'_i = \alpha_i - \beta_i$, on a $0 \leqq \beta_i < \alpha_i$ et l'on doit avoir $2\Sigma\beta_i - \Sigma\alpha_i \geqq 0$. Nous obtenons ainsi la courbe unicursale générale solution de notre problème.

Nous allons maintenant déduire de courbes épicycloïdales algébriques, ayant toutes leur foyer en O, de même classe p (ou diviseur de p), une courbe que nous pourrons déclarer *transformée de ces épicycloïdes par parallélisme moyen*, de même classe p et solution de notre problème. Choisissons un nombre *d entier positif, inférieur à p, de même parité que p*; calculons les entiers m, q par les relations

$$m + q = p, \qquad m - q = d, \qquad m = \frac{p + d}{2}, \qquad q = \frac{p - d}{2},$$

et sur le cercle du centre O, rayon R, joignons les points M, M', tel que $(Ox, OM) = \beta + m\psi$, $(Ox, OM') = \beta + q\psi$, β désignant un angle fixe choisi arbitrairement. La corde MA' a pour équation

$$x\cos\left(\beta + \frac{m + q}{2}\psi\right) + y\sin\left(\beta + \frac{m + q}{2}\psi\right) - R\cos\frac{m - q}{2}\psi = 0.$$

En posant

$$\psi = \varphi - \frac{2\beta}{m+q} = \varphi - \frac{2\beta}{p}, \qquad \alpha = \frac{2\beta}{p},$$

nous avons l'équation

$$(22) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - R\cos\frac{d}{2}(\varphi - \alpha) = 0.$$

La droite (22) enveloppe une épicycloïde de classe p, déduite de l'épicycloïde enveloppe de (19) par une rotation d'angle β autour de O; le nombre de rebroussements est égal à d : du moins, ces résultats sont exacts si les deux entiers p, d (de même parité) sont premiers entre eux s'ils sont impairs ou, s'ils sont pairs, si $\frac{p}{2}$ et $\frac{d}{2}$ sont premiers entre eux; dans le cas où les entiers en jeu $\left(p \text{ et } d,\ \frac{p}{2}\right.$ et $\left.\frac{d}{2}\text{ suivant le cas}\right)$ ont un plus grand commun diviseur D non égal à 1, la classe et le nombre de rebroussements seraient $\frac{p}{D}$, $\frac{d}{D}$; mais en conservant le paramètre φ, nous avons une représentation impropre de la courbe qui la fournit parcourue D fois quand φ varie de zéro à 2π et nous regarderons cette courbe, parcourue D fois, comme étant de classe p encore. Considérons diverses valeurs d_k, α_k, R_k de l'entier d et des paramètres α, R, l'entier k pouvant prendre les valeurs $1, 2, \ldots, N$ (d_k est inférieur à p et de même parité que p).

Chacune des droites

$$(23) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - R_k\cos\frac{d_k}{2}(\varphi - \alpha_k) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ldots, N)$$

est tangente à une certaine épicycloïde E_k; nous allons, pour une direction déterminée, Oy par exemple, mener à chaque courbe E_k une tangente (et une seule) parallèle à cette direction; on peut supposer que, pour chacune de ces tangentes, le paramètre φ est égal à *zéro* $\left(\text{car, sans changer la courbe, on peut remplacer } \alpha_k \text{ par } \alpha_k + \frac{2\lambda\pi}{p}, \text{ où } \lambda \text{ est un entier arbitraire, et } \varphi \text{ par } \varphi + \frac{2\lambda\pi}{p}\right)$; si nous faisons varier φ de zéro à 2π, chacune des tangentes choisies pour chaque E_k varie et, pour chaque valeur de φ, nous avons N tangentes parallèles; la droite d'équation

$$(24) \qquad x\cos\frac{p\varphi}{2} + y\sin\frac{p\varphi}{2} - \frac{1}{N}\sum_{1}^{N} R_k\cos\frac{d_k}{2}(\varphi - \alpha_k) = 0$$

enveloppe une courbe E' solution de notre problème; *la tangente de paramètre φ est parallèle aux tangentes (φ) des diverses courbes E_k, son point de contact est le centre de gravité des points de contact de ces tangentes et la distance algébrique de cette droite à l'origine est la moyenne arithmétique des distances algébriques de ces droites à l'origine.*

Puisque, pour la valeur initiale de φ, nous avons pu choisir *ad libitum* pour chaque courbe E_k l'une des p tangentes parallèles à cette direction, nous avons N^{p-1} courbes algébriquement distinctes déduites de $E_1, E_2, \ldots, E_N$ $\Big($ou du moins le quotient de N^{p-1} par le produit des plus grands communs diviseurs de chaque couple $\frac{p+d_k}{2}, \frac{p-d_k}{2}\Big)$. Quel que soit le nombre N, chacune des courbes E′ ainsi obtenues peut être regardée comme enveloppe d'une droite

$$X + Yt^p - \sum_d \left\{ (a_d + ib_d)t^{\frac{p+d}{2}} + (a_d - ib_d)t^{\frac{p-2}{2}} \right\} = 0,$$

où l'entier d prend toutes les valeurs de même parité que p et inférieures ou égales à $\frac{p}{2}$.

Les courbes parallèles à une épicycloïde s'obtiennent par ce procédé : si l'épicycloïde est de classe $2p$, elle est courbe de direction; si elle est de classe impaire, on lui donne la classe apparente double en remplaçant le paramètre t qui figure dans l'équation (28) par θ, avec $t = \theta^2$; cela fait, la seconde courbe épicycloïdale est simplement le cercle de centre O que l'on considère comme enveloppe de la droite

$$x \cos p\,\varphi + y \sin p\varphi - a = 0,$$

pendant que l'épicycloïde est l'enveloppe de la droite

$$x \cos p\varphi + y \sin p\varphi - R \cos d(\varphi - \alpha) = 0.$$

8. *Courbes*

$$f_p(u, v) + w(u^2 + v^2) f_{p-3}(u, v, w) = 0 \qquad \text{et} \qquad f_p(x, y) + z(x^2 + y^2) f_{p-3}(x, y, z) = 0,$$

— J'ai rappelé les propriétés des premières dans l'Introduction; les secondes, déduites des premières par polarité relativement à un cercle $x^2 + y^2 \pm z^2 = 0$ (ou par rapport à une hyperbole équilatère $x^2 \pm y^2 = 1$) sont telles que, coupant la courbe par une droite quelconque D, les rayons vecteurs joignant O aux points d'intersection, forment un système dont les p-sectrices sont fixes, indépendantes du choix de la droite D. Par transformation homographique, on obtient, pour la première série, des courbes de classe p ayant une tangente double T touchant la courbe en deux points I, J tels que toutes les tangentes issues de I ou J coïncident avec T; la seconde série donne des courbes de degré p ayant un point double O tel que les points communs à la courbe et à chacune des tangentes en O soient tous confondus avec O. L'interprétation projective se fera comme au paragraphe 5.