NICOLAS BAGANAS

Sur les valeurs algébriques d'une fonction algébroïde et les intégrales pseudo-abéliennes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 66 (1949), p. 161-208

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1949_3_66__161_0>

SUR LES VALEURS ALGÉBRIQUES

D'UNE

FONCTION ALGÉBROÏDE

ET

LES INTÉGRALES PSEUDO-ABÉLIENNES

PAR M. NICOLAS BAGANAS.

INTRODUCTION.

Dans ce travail, entrepris sous la direction de M. Paul Montel, nous traitons de questions rattachées au célèbre théorème de É. Picard fixant à deux le nombre maximum des valeurs non prises par une fonction analytique uniforme au voisinage d'un point singulier essentiel isolé et d'autres concernant les intégrales pseudo-abéliennes [1]. La plupart de nos résultats, obtenus suivant des méthodes élémentaires se basant sur certaines nouvelles généralisations des théorèmes de M. É. Borel concernant l'identité $\sum_{1}^{p} f_i(z)\, e^{F_i(z)} \equiv 0$ (f_i, F_i, fonctions entières assujetties à certaines conditions), comprennent comme cas particuliers des résultats classiques.

Le théorème de M. Paul Montel [2] fixant à deux le nombre maximum des branches distinctes d'une fonction algébrique exceptionnelle pour une fonction

(1) La terminologie sera précisée au Chapitre correspondant.

(2) P. MONTEL, *Sur les valeurs algébriques d'une fonction entière ou méromorphe* (*Journ. Math. pures et appl.*, 1941, p. 305-324).

transcendante méromorphe et celui de G. Remoundos [1], fixant à $2n$ le nombre maximum des valeurs exceptionnelles d'une fonction transcendante algébroïde à n branches, sont des corollaires du théorème (fondamental) : *Si la fonction $u(z)$, transcendante algébroïde à n branches, admet comme exceptionnelle la fonction algébrique $b(z)$ à m branches distinctes, on a*

$$m \leqq 2n.$$

Ce théorème comporte des améliorations analogues à celles, apportées par MM. Th. Varopoulos, M. Ghermanescu et J. Dufresnoy, au théorème de G. Remoundos et d'autres, sous certaines conditions concernant, par exemple, l'irréductibilité de l'équation définissant $b(z)$ ou les points de ramification de $b(z)$, ..., aussi qu'une extension que l'on établit en supposant que $b(z)$ est une fonction algébroïde d'ordre inférieur à celui de $u(z)$. La théorie classique des combinaisons linéaires exceptionnelles des fonctions entières, fondée par M. P. Montel, trouve sa généralisation dans la théorie des combinaisons linéaires exceptionnelles dont les coefficients sont des fonctions algébriques ou algébroïdes.

La théorie de M. G. Valiron, relative aux fonctions entières à valeurs exceptionnelles ou quasi exceptionnelles, est généralisée et complétée sur un point.

La recherche des fonctions algébriques, suggérée par un problème de M. P. Montel, strictement exceptionnelles pour une algébrique donnée et l'étude de la dérivée logarithmique d'une classe de fonctions algébroïdes nous ont amené à faire une étude sommaire des intégrales pseudo-abéliennes et donner une extension d'une identité d'Abel rattachée aux mêmes questions.

Nous avons démontré les théorèmes concernant les identités généralisées de M. Borel, et les théorèmes qui en découlent, en nous limitant aux fonctions d'ordre fini; par des procédés calqués, avec de légères modifications, sur ceux employés dans ce travail, on établirait des théorèmes analogues dans le cas des fonctions d'ordre *infini non transfini*. A plusieurs reprises nous parlerons d'identités dans lesquelles figurent les branches des différentes fonctions algébroïdes (ou algébriques) : par là nous entendons des relations liant les valeurs, en chaque point d'un domaine d'holomorphie D, des branches de ces différentes fonctions.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer ma profonde reconnaissance envers la France qui, en m'accueillant généreusement, m'a donné l'occasion de puiser dans la science de ses savants. Je suis heureux d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. Paul Montel qui m'a suggéré d'entreprendre ce travail et n'a cessé de me prodiguer ses conseils et de m'encourager. Je tiens à adresser également mes vifs remercîments à M. G. Valiron pour l'appui qu'il m'a donné et pour sa bienveillance envers mes travaux.

(1) G. Remoundos, *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* [*Ann. Fac. Sc. de Toulouse*, (2), t. 8, 1906, p. 1-72].

CHAPITRE I.

Généralisation d'une identité de M. É. Borel.

1. *Définitions.* — On appelle *fonction algébroïde méromorphe*, dans un cercle $|z| < R$, la fonction $u(z)$ définie par une équation algébrique

$$(I) \qquad F(u, z) \equiv f_0(z)\, u^n + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0,$$

dont les coefficients $f_i(z)$ sont des fonctions données de la variable z holomorphes dans le cercle $|z| < R$. On suppose essentiellement que les $f_i(z)$ ne s'annulent pas simultanément pour une même valeur de z. Nous ne nous occuperons que des fonctions algébroïdes dont le domaine d'existence est le plan ouvert.

Nous appellerons *fonction algébroïde transcendante* toute fonction algébroïde non algébrique dont le domaine d'existence est le plan ouvert.

Les coefficients $f_i(z)$ de l'équation (I), définissant une fonction algébroïde transcendante $u(z)$, sont des fonctions entières.

Nous pouvons supposer que $f_0(z)$ est un produit canonique.

Avec cette condition, on dit que la fonction algébroïde transcendante $u(z)$ définie par l'équation (I) est *d'ordre fini* ρ, si les fonctions $f_i(z)$ sont toutes d'ordre ρ au plus, l'une au moins étant d'ordre ρ.

2. Lemme. — *Si, pour* $|z|$ *supérieur à* r_0, *toutes les branches de* $u_i(z)$ *vérifient l'inégalité*

$$(1) \qquad |u_j(z)| < r^N,$$

où N *désigne une constante,* $u(z)$ *est une fonction algébrique.*

La démonstration de ce lemme s'appuie sur une extension du théorème de Liouville en tenant compte des relations entre les valeurs de $u_j(z)$ et les coefficients $f_j(z)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, n)$.

La relation

$$(-1)^\nu \frac{f_\nu(z)}{f_0(z)} = \Sigma\, u_1(z) \ldots u_\nu(z),$$

grâce à l'inégalité (1), montre que l'on a

$$(2) \qquad \left|\frac{f_\nu(z)}{f_0(z)}\right| < r^M \qquad (|z| = r > r_1;\ \text{M const.}).$$

De l'inégalité (2) on conclut que $f_0(z)$ a un nombre fini de pôles, c'est-à-dire que le produit canonique $f_0(z)$ est un polynome. Par conséquent, à partir d'une valeur du $|z|$, on a

$$|f_\nu(z)| < r^{M_1} \qquad (M_1 \text{ const.}). \tag{3}$$

L'inégalité (3) prouve que $f_\nu(z)$ est un polynome.

3. Théorème. — *Soit $u(z)$ une fonction algébroïde transcendante d'ordre fini ρ, ayant un nombre fini de zéros, de pôles et de points de ramification.*

La dérivée logarithmique de $u(z)$ est une fonction algébrique.

Soit $u_j(z)$ une branche de $u(z)$. Puisque le nombre des zéros, des pôles et des points de ramification de $u(z)$ est fini, les fonctions $u_j(z)$ et $\log u_j(z)$ ([1]) sont, pour $|z_0|$ suffisamment grand, holomorphes dans le cercle fermé $|z - z_0| \leqq 1$ et vérifient les inégalités

$$e^{-|z|^{\rho+1}} < |u_j(z)| < e^{|z|^{\rho+1}}, \qquad |\log u_j(z)| < |z|^{\rho+2} \leqq (|z_0| + 1)^{\rho+2} < |z_0|^{\rho+3};$$

nous aurions pu remplacer ces inégalités par d'autres plus précises mais cela n'a aucune importance pour la démonstration.

Le théorème de Cauchy, appliqué à la fonction $\log u_j(z)$, holomorphe dans le cercle fermé $|z - z_0| \leqq 1$, donne

$$\left|\frac{u'_j(z_0)}{u_j(z_0)}\right| < \frac{\text{max de } |\log u_j(z)| \text{ sur } |z - z_0| = 1}{1} < |z_0|^{\rho+3}.$$

Cette dernière inégalité prouve, d'après le lemme du paragraphe 2, que la fonction $\dfrac{u'(z)}{u(z)}$ est une fonction algébrique.

4. *Généralisation d'une identité de M. É. Borel.*

Théorème I. — *Considérons l'identité*

$$f_1(z)\,F_1(z) + f_2(z)\,F_2(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) \equiv 0, \tag{I}$$

où :

a. les $f_i(z)$ sont des branches algébroïdes (ou algébriques) d'ordre $< \rho$ ([2]);

b. les $F_i(z)$ sont des branches de fonctions algébroïdes d'ordre fini ayant un nombre limité de pôles, de zéros et de points de ramification;

c. les branches $\dfrac{F_i(z)}{F_j(z)}$ $(i, j = 1, 2, \ldots, n;\ i \neq j)$ sont d'ordre fini $> \rho$.

([1]) Nous appelons $\log u_j(z)$ la branche de $\log u(z)$ qui prend au point z la valeur $\log|u_j(z)| + i\omega$ avec $|\omega| \geqq \pi$.

([2]) Par le mot « ordre » d'une branche algébroïde $u_j(z)$, nous entendons l'ordre de l'algébroïde $u(z)$, dont $u_j(z)$ est une branche, qui est définie par une équation irréductible.

Une telle identité entraîne

$$f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_n(z) \equiv 0.$$

Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Nous pouvons alors supposer que

$$f_1(z) f_2(z) \ldots f_n(z) \not\equiv 0,$$

sinon nous aurions à nous occuper d'une identité ayant moins de n termes. Divisons par $f_1(z) F_1(z)$ les deux membres de l'identité (I) et prenons la dérivée du premier membre ainsi obtenu.

Nous aurons

$$\left[\left(\frac{f_2(z)}{f_1(z)}\right)' + \frac{f_2(z)}{f_1(z)}\left(\frac{F'_2(z)}{F_2(z)} - \frac{F'_1(z)}{F_1(z)}\right)\right]\frac{F_2(z)}{F_1(z)} + \ldots$$
$$+ \left[\left(\frac{f_n(z)}{f_1(z)}\right)' + \frac{f_n(z)}{f_1(z)}\left(\frac{F'_n(z)}{F_n(z)} - \frac{F'_1(z)}{F_1(z)}\right)\right]\frac{F_n(z)}{F_1(z)} \equiv 0,$$

ou, en posant

$$X_i(z) = \left(\frac{f_i(z)}{f_1(z)}\right)' + \frac{f_i(z)}{f_1(z)}\left(\frac{F'_i(z)}{F_i(z)} - \frac{F'_1(z)}{F_1(z)}\right),$$

(II) $$X_2(z) F_2(z) + \ldots + X_n(z) F_u(z) \equiv 0.$$

Les fonctions qui entrent dans l'identité (II) à $n - 1$ termes, remplissent toutes les conditions remplies par celles qui entrent dans l'identité (I).

Considérons, en effet, la fonction $X_i(z)$: elle est d'ordre $< \rho$, car les fonctions $f_1(z)$, $f_i(z)$ sont d'ordre $< \rho$, et $\frac{F'_1(z)}{F_1(z)}$, $\frac{F'_i(z)}{F_i(z)}$ sont des fonctions algébriques (théorème du paragraphe 3).

D'ailleurs, $X_i(z) \not\equiv 0$, sinon nous aurions

$$\frac{F_i(z)}{F_1(z)} \frac{f_i(z)}{f_1(z)} = \text{const.} \neq 0,$$

ce qui est impossible puisque, par hypothèse, l'ordre de $\frac{F_i(z)}{F_1(z)}$ est au moins égal à ρ tandis que les ordres de $f_i(z)$, $f_1(z)$ sont plus petits que ρ.

En partant de l'identité (II), nous arriverons, par la même voie, à une autre identité ayant $n - 2$ termes, et, en continuant ainsi, nous aurons finalement une identité

$$\psi_n(z) F_n(z) \equiv 0,$$

où $\psi_n(z)$ et $F_n(z)$ sont $\not\equiv 0$, ce qui est absurde. Donc,

$$f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_n(z) \equiv 0.$$

Corollaire. — *Une identité de la forme*

(III) $$f_1(z) + f_2(z) F_2 + \ldots + f_n(z) F_n(z) \equiv 0$$

se décompose en les identités

$$f_1(z) \equiv 0, \qquad f_2(z)\,F_2(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) \equiv 0,$$

sous les conditions suivantes :

a. les fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont des branches d'algébroïdes (ou algébriques) d'ordre $< \rho$;

b. les fonctions $F_2(z), \ldots, F_n(z)$ sont des branches d'algébroïdes ayant un nombre fini de pôles, de zéros et de points de ramification;

c. les ordres des fonctions $F_2(z), \ldots, F_n(z)$ sont $\geqq \rho$.

Supposons, en effet, d'abord que tous les rapports $\frac{F_i(z)}{F_j(z)}$ aient des ordres $\geqq \rho$.

Notre corollaire est alors un cas particulier du théorème qne nous venons de démontrer ($F_1 \equiv 1$). Dans le cas général, partageons le groupe des fonctions $F_2, \ldots, F_n$ en un certain nombre de classes

$$\begin{array}{lll} F_2, & \ldots, & F_{\mu_1}, \\ F_{\mu_1+1}, & \ldots, & F_{\mu_2}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \end{array}$$

jouissant des propriétés suivantes :

a. Les fonctions d'une même classe, comprenant plus d'une fonction, sont proportionnelles à des fonctions d'ordre $< \rho$;

b. Le rapport de deux fonctions appartenant à des classes différentes est d'ordre $\geqq \rho$.

En écrivant (III) sous la forme

$$f_1(z) + \left(f_2 \frac{F_2}{F_{\mu_1}} + \ldots + f_{\mu_1}\right) F_{\mu_1} + \ldots \equiv 0,$$

nous arriverons à la conclusion que

$$f_1(z) \equiv 0, \qquad f_2 F_2 + \ldots + f_{\mu_1} F_{\mu_1} \equiv 0, \qquad \ldots.$$

Les raisonnements qui précèdent permettent d'énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME II. — *Une identité de la forme*

$$\text{(IV)} \qquad f_1 F_1 + f_2 F_2 + \ldots + f_n F_n \equiv 0,$$

dans laquelle :

a. $f_1, f_2, \ldots, f_n$ sont des branches d'algébroïdes d'ordre $< \rho$, non identiquement nulles;

b. $F_1, F_2, \ldots, F_n$ sont des branches d'algébroïdes d'ordre $\geqq \rho$ ayant un nombre limité de zéros, de pôles et de points de ramification, *se décompose en les identités*

$$\begin{aligned} f_1 F_1 \quad &+ \dots + f_{\mu_1} F_{\mu_1} \equiv 0, \\ f_{\mu_1+1} F_{\mu_1+1} &+ \dots + f_{\mu_2} F_{\mu_2} \equiv 0, \\ \dots\dots\dots&\dots\dots\dots\dots\dots, \end{aligned}$$

jouissant des propriétés suivantes :

a. chacune de ces identités comprend au moins deux termes;

b. les termes F_i *de chacune de ces identités sont proportionnels à des fonctions d'ordre* $< \rho$.

En particulier, si les f_i *sont algébriques, on démontre de la même manière que, dans chaque identité partielle, les rapports* $\frac{F_i}{F_j}$ *sont algébriques.*

CHAPITRE II.

Nombre maximum de branches d'une fonction algébrique exceptionnelle pour une fonction algébroïde.

5. Soit $u(z)$ une fonction transcendante algébroïde à n branches et $b(z)$ une fonction algébrique à m branches distinctes.

Nous dirons, avec M. P. Montel, que la fonction $u(z)$ admet comme exceptionnelle la fonction $b(z)$ si elle ne prend qu'un nombre fini de fois les valeurs de cette fonction $b(z)$ pour la même valeur de z.

Cette définition est équivalente à la suivante :

La fonction algébrique $b(z)$, définie par l'équation

$$(1) \qquad A(u, z) \equiv a_0(z)\, u^m + a_1(z)\, u^{m-1} + \dots + a_m(z) = 0 \qquad (a_i \text{ polynomes}),$$

sera dite exceptionnelle pour la fonction algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$(2) \qquad F(u, z) \equiv f_0(z)\, u^{n-1} + f_1(z)\, u^{n-1} + \dots + f_n(z) = 0,$$

si le résultat de l'élimination de u entre les équations $F(u, z) = 0$, $A(u, z) = 0$ est de la forme

$$P(z)\, e^{Q(z)},$$

où $P(z)$ est un polynome et $Q(z)$ une fonction entière.

6. Théorème fondamental. — *Si la fonction algébroïde* $u(z)$, *de degré* n *et d'ordre fini, admet comme exceptionnelle la fonction algébrique* $b(z)$ *de degré* m, *à branches distinctes, on a*

$$m \leq 2n.$$

Supposons $m \geqq 2n+1$. Soient $b_1(z)$, $b_2(z)$, ..., $b_m(z)$ les branches distinctes de $b(z)$. Posons

$$(\mathrm{A})\quad\left\{\begin{array}{l}
\mathrm{F}[b_1(z), z] \quad = f_0(z)\, b_1^n(z) \quad + f_1(z)\, b_1^{n-1}(z) \quad + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_1(z),\\
\mathrm{F}[b_2(z), z] \quad = f_0(z)\, b_2^n(z) \quad + f_1(z)\, b_2^{n-1}(z) \quad + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_2(z),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
\mathrm{F}[b_{2n}(z), z] \quad = f_0(z)\, b_{2n}^n(z) \quad + f_1(z)\, b_{2n}^n(z) \quad + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_{2n}(z),\\
\mathrm{F}[b_{2n+1}(z), z] = f_0(z)\, b_{2+1}^n(z) + f_1(z)\, b_{2n+1}^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_{2n+1}(z),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{array}\right.$$

Les fonctions $\mathrm{G}_1(z)$, $\mathrm{G}_2(z)$, ..., $\mathrm{G}_{2n+1}(z)$, ... sont des branches d'une algébroïde $\mathrm{G}(z)$ d'ordre fini ayant un nombre limité de zéros, de pôles et de points de ramification, car $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ sont des fonctions entières et $b_1(z)$, $b_2(z)$, $b_{2n+1}(z)$, ... sont les branches de la fonction algébrique $b(z)$, exceptionnelle pour la fonction $u(z)$.

Démontrons d'abord que n au plus des $\mathrm{G}_i(z)$ sont des branches algébriques.

En effet, s'il n'en était pas ainsi, on aurait, par exemple,

$$\begin{array}{l}
f_0(z)\, b_1^n(z) \quad + f_1(z)\, b_1^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_1(z),\\
f_0(z)\, b_2^n(z) \quad + f_1(z)\, b_2^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_2(z),\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
f_0(z)\, b_{n+1}^n(z) + f_1(z)\, b_{n+1}^{n-1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv \mathrm{G}_{n+1}(z);
\end{array}$$

où $\mathrm{G}_1, \mathrm{G}_2, \ldots, \mathrm{G}_{n+1}$ sont des branches algébriques et le déterminant des coefficients de $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ n'est pas identiquement nul.

En résolvant le système précédent par rapport à f_0, f_1, ..., f_n, on en déduirait que toutes ces fonctions sont des polynomes, ce qui est contraire à l'hypothèse.

En éliminant $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ entre les $n+2$ premières équations du système (A) nous obtenons

$$\delta_1(z)\, \mathrm{G}_1(z) + \delta_2(z)\, \mathrm{G}_2(z) + \ldots + \delta_{n+2}(z)\, \mathrm{G}_{n+2}(z) \equiv 0.$$

Le nombre des termes algébriques de cette identité est au plus égal à n et tous les déterminants $\delta_i(z)$, ayant comme éléments des branches algébriques distinctes, sont $\not\equiv 0$.

D'après la remarque finale du Chapitre précédent, cette identité donne au moins une identité de la forme

$$\mathrm{G}_{\sigma_2} \equiv \mathrm{G}_{\sigma_1} \gamma_1(z) \qquad (1 \leqq \sigma_2 \neq \sigma_1 \leqq n+2),$$

où $\gamma_1(z)$ désigne une branche algébrique.

En remplaçant, dans le système des $n+2$ équations considérées, l'équation qui correspond à la branche $b_{\sigma_2}(z)$ par celle du système (A) qui correspond à la branche $b_{n+3}(z)$ et raisonnant comme ci-dessus, nous aurons une identité de la forme

$$G_{\sigma_3}(z) \equiv G_{\sigma_1}(z)\gamma_2(z) \qquad (1 \leqq \sigma_3 \neq \sigma_1,\ \sigma_2 \leqq n+3),$$

où $\gamma_2(z)$ désigne une branche algébrique.

Notre mode de raisonner nous permet d'écrire au moins les $m-n-1 \geqq n$ identités

$$\begin{aligned} G_{\sigma_2}(z) &\equiv \gamma_1(z)\, G_{\sigma_1}(z), \\ G_{\sigma_3}(z) &\equiv \gamma_2(z)\, G_{\sigma_1}(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ G_{\sigma_{n+1}}(z) &\equiv \gamma_n(z)\, G_{\sigma_1}(z). \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

En résolvant le système des équations formé avec $n+1$ des G_{σ_i},

$$\begin{aligned} &f_0(z)\, b^n_{\sigma_1}(z) + f_1(z)\, b^{n-1}_{\sigma_1}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_1}(z), \\ &f_0(z)\, b^n_{\sigma_2}(z) + f_1(z)\, b^{n-1}_{\sigma_2}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_2}(z) \equiv \gamma_1(z)\, G_{\sigma_1}(z), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ &f_0(z)\, b^n_{\sigma_{n+1}}(z) + f_1(z)\, b^{n-1}_{\sigma_{n+1}}(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_{\sigma_{n+1}}(z) \equiv \gamma_n(z)\, G_{\sigma_1}(z), \end{aligned}$$

par rapport à $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots$, $f_n(z)$, on en déduirait que toutes les fonctions $f_i(z)$ sont proportionnelles à des fonctions algébriques, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Nous sommes conduits à une contradiction en supposant $m \geqq 2n+1$; donc $m \leqq 2n$.

7. La démonstration n'exige pas que l'équation (1) définissant $b(z)$ soit irréductible. On peut supposer que toutes les branches $b_i(z)$ de $b(z)$, ou quelques-unes d'entre elles, soient des fonctions rationnelles. Dans le cas particulier où les $b_i(z)$ sont des constantes différentes, on obtient le théorème de G. Remoundos (1) :

Une fonction algébroïde à n branches dont le domaine d'existence est tout le plan fini ne peut admettre plus de 2n valeurs exceptionnelles à moins que toutes ses déterminations ne se réduisent à des constantes.

En supposant $n = 1$, on retrouve le théorème de M. P. Montel (2) :

Toute fonction transcendante méromorphe dans le plan prend une infinité de fois les valeurs de toute fonction algébrique qui admet au moins trois déterminations.

8. Supposons que le nombre des pôles de $u(z)$ soit limité. On a alors

$$m \leqq 2n - 1.$$

---

(1) G. Remoundos, *loc. cit.*
(2) P. Montel, *loc. cit.*, p. 309.

Considérons en effet l'algébrique $U(z)$ définie par l'équation

$$0 . u^{m+1} + a_0(z) u^m + \ldots + a_m(z) = 0 \qquad (a_0 \not\equiv 0),$$

qui admet la branche $u \equiv \infty$; cette algébrique est exceptionnelle pour $u(z)$, donc

$$m + 1 \leqq 2n.$$

9. Le maximum $2n$ peut être atteint.

Considérons, en effet, l'équation

$$P_n(u, z) + e^z Q_n(u, z) = 0,$$

où P_n, Q_n sont des polynomes de degré n par rapport à u tels que les équations

$$P_n(u, z) = 0, \qquad Q_n(u, z) = 0$$

définissent deux fonctions algébriques dépourvues de branches multiples et n'ayant aucune branche commune.

La fonction $u(z)$ admet comme exceptionnelle la fonction algébrique $b(z)$ à $2n$ branches distinctes définie par l'équation

$$P_n(u, z) Q_n(u, z) = 0.$$

Cette dernière équation n'est pas irréductible. Voici un exemple où l'équation est irréductible.

Considérons l'équation irréductible

$$A(u, z) = u^{2n} - z = 0,$$

et la fonction algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$F(u, z) = \frac{e^{\sqrt{z}} - e^{-\sqrt{z}}}{2\sqrt{z}} u^n + \frac{e^{\sqrt{z}} + e^{-\sqrt{z}}}{2} = 0.$$

Le résultat de l'élimination de u entre les équations $A(u, z) = 0$, $F(u, z)$ est identiquement égal à 1; $u(z)$ admet comme exceptionnelle l'algébrique $b(z)$.

10. Dans ce paragraphe, nous traitons quelques cas intéressants où $m < 2n$ pour une équation (1) irréductible.

Théorème I. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible et dépourvue de points de ramification d'ordre supérieur à* 1, *est exceptionnelle pour l'algébroïde $u(z)$ à n branches, d'ordre fini, on a*

$$m \leqq n + 1.$$

Pour démontrer ce théorème, reprenons la démonstration du théorème fondamental.

Supposons $m \geqq n+2$. — En éliminant $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ entre les $n+2$ équations

$$F[b_i(z), z] = f_0(z) b_i^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_i(z) \qquad (i = 1, \ldots, n+2),$$

nous obtenons l'identité

$$\delta_1(z) G_1(z) + \delta_2(z) G_2(z) + \ldots + \delta_{n+2}(z) G_{n+2}(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+2),$$

$$\delta_i(z) \not\equiv 0.$$

Un au moins des rapports de deux $G_i(z)$, par exemple le rapport $G_{\lambda_1}(z) : G_{\lambda_2}(z)$ sera algébrique.

Puisque la fonction $b(z)$ est définie par une équation irréductible et que tous ses points de ramification sont d'ordre 1, autour de chacun d'eux ne se permutent que deux branches de $b(z)$, et deux branches quelconques peuvent être échangées de cette façon. Par conséquent, en partant d'un point z et en suivant un chemin fermé convenable, nous pouvons passer de la branche $b_{\lambda_1}(z)$ à la branche $b_{\lambda_3}(z)$ sans que $b_{\lambda_2}(z)$ soit changée; et, par conséquent, de $G_{\lambda_1}(z)$ à $G_{\lambda_3}(z)$ sans que $G_{\lambda_2}(z)$ soit changée; le rapport $G_{\lambda_1}(z) : G_{\lambda_2}(z)$ devient $G_{\lambda_3}(z) : G_{\lambda_2}(z)$ qui est donc algébrique.

De même, en passant de b_{λ_1} à b_{λ_4} sans que b_{λ_2} et b_{λ_3} soient changées, on en conclut que le rapport de G_{λ_4} à G_{λ_1}, est algébrique et par conséquent que les rapports de deux des $G_{\lambda_1}(z)$, $G_{\lambda_2}(z)$, $G_{\lambda_3}(z)$, $G_{\lambda_4}(z)$ sont algébriques. En continuant ainsi, on montre que les rapports de deux quelconques des G_1, G_2, G_3, ..., G_{n+2} sont algébriques, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Donc

$$m \leqq n+1.$$

THÉORÈME II. — *Supposons que la fonction algébroïde $u(z)$ à n branches admette comme exceptionnelles les fonctions algébriques $\beta(z)$, $b(z)$ à μ et m branches respectivement; on a*

$$m \leqq n,$$

si l'équation définissant $b(z)$ est irréductible et si les points de ramification de cette fonction sont distincts de ceux de la fonction $\beta(z)$.

Supposons $m \geqq n+1$. — Soient $b_1(z)$, ..., $b_{n+1}(z)$, ..., $b_m(z)$, les branches de $b(z)$, et $\beta(z)$ une branche de la fonction $\beta(z)$.

Posons encore

$$F[b_i(z), z] = f_0(z) b_i^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv G_i(z) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n+1);$$
$$F[\beta(z), z] = f_0(z) \beta^n(z) + \ldots + f_n(z) \equiv B(z).$$

En éliminant $f_0(z)$, $f_1(z)$, ..., $f_n(z)$ entre ces $n+2$ équations, nous obtenons

$$d_1(z) G_1(z) + d_2(z) G_2(z) + \ldots + d_{n+1}(z) G_{n+1}(z) + d_{n+2}(z) B(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, \ldots, n+2),$$

où

$$d_i(z) \not\equiv 0.$$

Cette identité donne naissance à au moins une identité de la forme

$$\frac{G_\sigma(z)}{B(z)} \equiv \gamma_1(z),$$

$\gamma_1(z)$ étant algébrique. Puisque les points de ramification de $b(z)$ sont distincts de ceux de $\beta(z)$, en partant d'un point z et suivant un chemin fermé convenable, nous pouvons passer de $G_\sigma(z)$ à n'importe lequel des $G_i(z)$ sans que $B(z)$ soit changé, et par conséquent tous les rapports $\frac{G_i(z)}{B(z)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n+1)$ sont algébriques, ce qui est contre l'hypothèse.

Donc

$$m \leqq n.$$

La condition imposée aux points de ramification des $b(z)$ et $\beta(z)$ est vérifiée quand $\beta(z)$ est une fraction rationnelle ou une constante c. En prenant c égal à zéro ou à l'infini, nous obtenons le corollaire :

Corollaire. — *Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible, est exceptionnelle pour la fonction transcendante algébroïde $u(z)$ à n branches, on a*

$$m \leqq n,$$

lorsque le nombre des zéros, ou celui des pôles, de $u(z)$ est limité.

Théorème III. — *Supposons que la fonction exceptionnelle $b(z)$ soit définie par une équation de la forme*

$$A_1(u, z) A_2(u, z) \ldots A_\lambda(u, z) = 0,$$

où $A_1, A_2, \ldots, A_\lambda$ $(\lambda \geqq 2)$ désignent des polynomes indécomposables en u et z. Soit m_i le degré du polynome A_i par rapport à u.

Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ sont premiers entre eux dans leur ensemble, chacun d'eux ne dépasse pas n.

Supposons $m_1 \geqq n+1$. — Soient $a_1(z), a_2(z), \ldots, a_{m_1}(z)$ les branches de la fonction définie par l'équation $A_1(u, z) = 0$ et $b_1(z), b_2(z), \ldots, b_{m_i}(z)$, les branches de la fonction définie par $A_i(u, z) = 0$ $(i \neq 1)$.

Posons

$$F[a_j(z), z] = f_0(z) a_j^n(z) + \ldots + f_n(z) = G_j(z) \qquad (j = 1, 2, \ldots, n+1, \ldots, m),$$
$$F[b_h(z), z] = f_0(z) b_h^n(z) + \ldots + f_n(z) = H_h(z) \qquad (h = 1, \ldots, m_i).$$

En éliminant $f_1(z), \ldots, f_n(z)$ entre les $n+2$ équations

$$F[a_\lambda(z), z] = f_0(z) a_\lambda^n(z) + \ldots + f_n(z) = G_\lambda(z) \qquad (\lambda = 1, 2, \ldots, n+1),$$
$$F[b_1(z), z] = f_0(z) b_1^n(z) + \ldots + f_n(z) = H_1(z),$$

nous en concluons comme précédemment que l'un au moins des rapports $\frac{G_j(z)}{H_1(z)}$ est algébrique.

Soit

$$G_1(z), \quad \ldots, \quad G_\sigma(z), \quad H_1(z), \quad \ldots, \quad H_\rho(z)$$

le groupe formé par *toutes* les branches $G_i(z)$ et $H_j(z)$, telles que les rapports $\frac{G_i(z)}{H_j(z)}$ $(i = 1, 2, \ldots, \sigma;\ j = 1, 2, \ldots, \rho)$ soient algébriques.

Nous savons que $\sigma < n+1$.

En passant, suivant un chemin convenable, de $G_1(z)$ à $G_{\sigma+1}(z)$ nous obtenons le groupe

$$G_{\sigma+1}(z), \quad \ldots, \quad G_{2\sigma}, \quad H_{\rho+1}(z), \quad \ldots, \quad H_{2\rho}(z),$$

formé par des branches telles que les rapports $\frac{G_{\sigma+i}}{H_{\rho+j}}$ soient algébriques; les fonctions de ce nouveau groupe sont différentes de celles contenues dans le premier groupe. En continuant ainsi, s'il est nécessaire, nous formons ν $(\nu \geqq 2)$ groupes contenant toutes les $G_j(z)$. Ces ν groupes contiennent aussi toutes les $H_h(z)$. Supposons, en effet, qu'il n'en soit pas ainsi. Soit $H_{\rho+\lambda}(z)$ une branche qui n'y figure pas. En passant de $H_1(z)$ à $H_{\rho+\lambda}(z)$ on forme, à partir du $G_1, \ldots, G_\sigma, H_1, \ldots, H_\rho$, un groupe qui sera nécessairement un des ν groupes déjà formés.

Ces ν groupes contiennent donc toutes les $H_j(z)$. Chacun de ces groupes contenant σ branches parmi les G_i et ρ parmi les H_j, on a

$$m_1 = \sigma\nu, \qquad m_l = \rho\nu \qquad (\nu \geqq 2);$$

puisque le nombre ν des groupes formés par des branches G dont les rapports sont algébriques ne varie pas quand i prend successivement les valeurs $2, \ldots, \lambda$, les nombres $m_1, \ldots, m_\lambda$ ont un diviseur commun $\nu \geqq 2$, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc

$$m_1 \leqq n.$$

Si m_1 et m_2 ne sont pas premiers entre eux, il peut arriver que l'un d'eux dépasse n. Par exemple, l'algébroïde $u(z)$ définie par l'équation

$$\left(\frac{e^{\sqrt{z}}}{1+\sqrt{z}} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{1-\sqrt{z}}\right) u^3 + \left(\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}\right) u^2$$
$$+ \left(\frac{\sqrt{z}}{1+\sqrt{z}} e^{\sqrt{z}} - \frac{\sqrt{z}}{1-\sqrt{z}} e^{-\sqrt{z}}\right) u + z\left(\frac{e^{\sqrt{z}}}{1+\sqrt{z}} + \frac{e^{-\sqrt{z}}}{1-\sqrt{z}}\right) = 0,$$

admet comme fonction exceptionnelle l'algébrique $b(z)$ définie par l'équation

$$(u^4 - z)(u^2 - z) = 0,$$

dans laquelle

$$m_1 = 4 > n = 3.$$

On peut donner des exemples plus généraux.

Mentionnons un autre théorème, dont la démonstration est analogue à celle du précédent.

THÉORÈME IV. — *Si la fonction algébriqne $b(z)$ à m branches, définie par une équation irréductible, est exceptionnelle pour l'algébroïde $u(z)$ à n branches, on a*

$$m \leq n + 1,$$

lorsque m est un nombre premier.

CHAPITRE III.

COMBINAISONS EXCEPTIONNELLES [1].

11. La théorie des combinaisons exceptionnelles des fonctions entières, fondée par M. P. Montel, repose sur l'impossibilité des identités de M. É. Borel. La généralisation que nous avons donnée de ces identités nous permet d'étendre cette théorie aux combinaisons exceptionnelles dont les coefficients sont des fonctions algébriques.

Dans ce Chapitre, nous nous contenterons d'énoncer les théorèmes, leur démonstration étant tout à fait semblable à celle des théorèmes correspondants obtenus en remplaçant dans les énoncés les mots « branche algébrique » par le mot « constante ».

12. *Définitions.* — Considérons un système (f) de $n + 1$ fonctions entières d'ordre fini

$$f_0(z), \quad f_1(z), \quad \ldots, \quad f_n(z),$$

et formons une combinaison linéaire homogène à coefficients algébriques

$$G(z) \equiv g_0(z) f_0(z) + g_1(z) f_1(z) + \ldots + g_n(z) f_n(z),$$

où les $g_i(z)$ sont des branches de fonctions algébriques; nous dirons que le système des $n + 1$ fonctions admet la combinaison exceptionnelle $G(z)$, si cette

(1) *Voir* P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales*; M. GHERMANESCU, *Les combinaisons exceptionnelles* (*Actualités scientifiques*, n° 889, 1940); J. DUFRESNOY, *Théorie nouvelle des familles*... (*Ann. Éc. Norm. sup.*, 61, 1944).

fonction, qui est en général une branche d'algébroïde, est une branche d'une algébroïde ayant un nombre fini de zéros (1).

Nous dirons que $n+1$ combinaisons exceptionnelles

$$\begin{array}{c} g_0^1(z)f_0(z)+g_1^1(z)f_1(z)+\ldots+g_n^1(z)f_n(z),\\ g_0^2(z)f_0(z)+g_1^2(z)f_1(z)+\ldots+g_n^2(z)f_n(z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ g_0^{n+1}(z)f_0(z)+g_1^{n+1}(z)f_1(z)+\ldots+g_n^{n+1}(z)f_n(z) \end{array}$$

sont algébriquement indépendantes si le déterminant

$$\Delta=\begin{vmatrix} g_0^1(z) & g_1^1(z) & \ldots & g_n^1(z)\\ g_0^2(z) & g_1^2(z) & \ldots & g_n^2(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ g_0^{n+1}(z) & g_1^{n+1}(z) & \ldots & g_n^{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

n'est pas identiquement nul.

Substituons aux fonctions $f_0(z)$, $f_1(z)$, $\ldots$, $f_n(z)$ les fonctions $\varphi_0(z)$, $\varphi_1(z)$, $\ldots$, $\varphi_n(z)$ définies par une substitution à coefficients algébriques $\gamma_i^j(z)$:

$$\begin{array}{c} \varphi_0(z)=\gamma_0^1(z)f_0(z)+\gamma_1^1(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^1(z)f_n(z),\\ \varphi_1(z)=\gamma_n^2(z)f_0(z)+\gamma_1^2(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^2(z)f_n(z),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ \varphi_n(z)=\gamma_0^{n+1}(z)f_0(z)+\gamma_1^{n+1}(z)f_1(z)+\ldots+\gamma_n^{n+1}(z)f_n(z), \end{array}$$

dans laquelle le déterminant

$$D=\begin{vmatrix} \gamma_0^1(z) & \ldots & \gamma_0^n(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \gamma_0^{n+1}(z) & \ldots & \gamma_n^{n+1}(z) \end{vmatrix}$$

est supposé $\not\equiv 0$. Nous dirons que les deux systèmes f_0, f_1, $\ldots$, f_n et φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_n appartiennent à la même classe.

Si, dans une combinaison exceptionnelle

$$g_0(z)f_0(z)+g_1(z)f_1(z)+\ldots+g_n(z)f_n(z)$$

relative au système (f), on remplace f_0, f_1, $\ldots$, f_n par leurs valeurs en fonction de φ_0, φ_1, $\ldots$, φ_n tirées des équations précédentes, on obtient une combinaison

$$\delta_0(z)\varphi_0(z)+\delta_1(z)\varphi_1(z)+\ldots+\delta_n(z)\varphi_n(z)$$

relative au système (φ) et qui est aussi exceptionnelle.

Donc : *Le nombre des combinaisons exceptionnelles demeure le même pour tous les systèmes appartenant à une même classe.*

---

(1) Le nombre de pôles de $G(z)$ est fini puisque les $g_i(z)$ sont des branches algébriques.

13. THÉORÈME I. — *Soit un système de $n+1$ fonctions entières d'ordre fini $f_0(z), f_1(z), \ldots, f_n(z)$ dont une, au moins, est transcendante :*

Le nombre des combinaisons linéaires homogènes exceptionnelles, algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$, entre ces fonctions ne peut dépasser $2n$.

Ce théorème peut être précisé comme suit :

THÉORÈME II. — *S'il n'existe entre les $n+1$ fonctions $f_i(z)$ que λ relations linéaires homogènes algébriquement indépendantes au plus ($\lambda < n$), le nombre des combinaisons exceptionnelles (algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$) entre ces fonctions ne peut dépasser $n+\lambda+1$.*

COROLLAIRE I. — *Soit $u(z)$, une algébroïde, d'ordre fini, définie par l'équation*

$$f_0(z)\, u^n + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons qu'il n'existe entre les $f_i(z)$ que λ relations linéaires homogènes, algébriquement indépendantes ($\lambda < n$).

Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches distinctes est exceptionnelle pour la fonction $u(z)$, on a

$$m \leq n + \lambda + 1.$$

En supposant que les m branches de la fonction $b(z)$ soient m constantes distinctes, on retrouve le théorème de M. Th. Varopoulos [1] qui précise celui de G. Remoundos.

Le théorème II de ce paragraphe peut être précisé comme suit.

THÉORÈME III. — *S'il existe entre les $n+1$ fonctions $f_i(z)$ au plus λ relations linéaires homogènes algébriquement indépendantes, ($\lambda < n$), le nombre des combinaisons exceptionnelles (algébriquement indépendantes $n+1$ à $n+1$) entre ces $n+1$ fonctions ne peut dépasser le nombre $n + \dfrac{n}{n-\lambda}$.*

COROLLAIRE II. — *Soit $u(z)$ l'algébroïde, d'ordre fini, définie par l'équation*

$$f_0(z)\, u^n + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons qu'il existe entre les $f_i(z)$ au plus λ relations linéaires homogènes, algébriquement indépendantes, ($\lambda < n$).

---

[1] Th. VAROPOULOS, *Sur le nombre des valeurs exceptionnelles des fonctions multiformes* (*C. R. Acad. Sc.*, **177**, 1923, p. 306; *Bull. Soc. Math. de France*, 53, 1925, p. 23-34).

Si la fonction algébrique $b(z)$ à m branches distinctes, est exceptionnelle pour la fonction $u(z)$, on a

$$m \leqq n + \frac{n}{n-\lambda}.$$

En supposant que les m branches de la fonction $b(z)$ soient des constantes distinctes, on retrouve un théorème de M. Ghermanescu.

CHAPITRE IV.

NOUVELLE GÉNÉRALISATION DE L'IDENTITÉ DE M. E. BOREL ET NOUVELLES EXTENSIONS.

14. L'examen de la démonstration du théorème concernant l'identité

$$f_1(z)\,F_1(z) + f_2(z)\,F_2(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) \equiv 0$$

nous montre que nous sommes parvenus à démontrer que

$$f_1 = f_2 = \ldots = f_n \equiv 0,$$

en passant de cette identité à une autre analogue

$$X_2(z)\,F_2(z) + \ldots + X_n(z)\,F_n(z) \equiv 0,$$

ayant un terme de moins; les fonctions $X_2(z)$, ..., $X_n(z)$ conservent la propriété d'être des fonctions d'ordre $< \rho$ parce que ce sont des fonctions rationnelles des fonctions $f_i(z)$, $f_i'(z)$, dont les ordres sont inférieurs à ρ, et des dérivées logarithmiques des fonctions $F_i(z)$ qui, par suite des conditions imposées, sont des fonctions algébriques.

Mais pour que l'ordre de la fonction $X_i(z)$ soit inférieur à ρ, il n'est pas nécessaire que les dérivées logarithmiques des fonctions $F_i(z)$, soient algébriques; il suffit qu'elles soient d'ordre inférieur à ρ.

Nous avons défini une classe de fonctions algébroïdes dont la dérivée logarithmique est algébrique. Peut-on définir une classe de fonctions algébroïdes dont la dérivée logarithmique soit une fonction algébroïde d'ordre inférieur à ρ, quel que soit l'ordre fini des fonctions de cette classe?

Le théorème suivant fournit la réponse.

THÉORÈME I. — *L'ordre de la dérivée logarithmique d'une fonction algébroïde $u(z)$ d'ordre fini est au plus égal à l'ordre* réel *de ses zéros et à celui des pôles de sa dérivée $u'(z)$.*

Nous démontrerons ce théorème en suivant une voie élémentaire [1].

---

[1] On peut donner une démonstration indirecte de ce théorème en se servant d'un résultat de M. G. Valiron [*Sur la dérivée des fonctions algébroïdes* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1931, fasc. I, p. 17-39)].

Rappelons d'abord la démonstration du théorème de M. Hadamard concernant le module minimum d'une fonction entière, en suivant la marche de M. É. Borel [1], et en apportant quelques compléments utiles pour la suite.

Ce théorème s'énonce comme il suit :

Étant donnés un produit canonique de facteurs primaires $G(z)$ *et un nombre positif arbitraire* ε, *on peut trouver une infinité de cercles de rayons indéfiniment croissants sur chacun desquels on a l'inégalité*

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

M. Borel examine d'abord le cas où le nombre ρ est inférieur à l'unité. Rappelons ses conclusions. Soit

$$G(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{a_n}\right) \qquad (|a_n| = r_n),$$

une fonction entière d'ordre ρ inférieur à 1. Traçons deux cercles, de centre $z = 0$, de rayons respectifs $r_n - 1$, $r_n + 1$ qui limitent la couronne $C_n(r_n - 1, r_n + 1)$ d'épaisseur 2.

Considérons le cercle $K(O, R)$ et les couronnes C_i intérieures à ce cercle.

Soit S, l'épaisseur totale de ces couronnes, M. Borel démontre que

1°
$$\lim_{R \to \infty} \frac{S}{R} = 0.$$

2° Pour chaque point z extérieur aux couronnes C_i, on a l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}},$$

à partir d'une valeur de $|z| = r$; $r > r(\varepsilon)$.

Il passe ensuite au cas d'une fonction d'ordre $\rho \geqq 1$. En prenant un entier $q > \rho$ et considérant la fonction auxiliaire

$$F(y) = G(z)\, G(\omega z) \ldots G(\omega^{q-1} z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{y}{a_n^q}\right),$$

où $y = z^q$ et ω est une racine $q^{\text{ième}}$ primitive de l'unité, il démontre l'existence d'une infinité de circonférences de rayons indéfiniment croissants sur lesquels on a

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

Ajoutons quelques compléments.

Les couronnes correspondant à la fonction $F(y)$ sont $C_n(r_n^q - 1,\ r_n^q + 1)$, donc les couronnes correspondant à la fonction $G(z)$ sont $C'_n\left(\sqrt[q]{r_n^q - 1}, \sqrt[q]{r_n^q + 1}\right)$.

---

[1] *Voir* É. Borel, *Leçons sur les fonctions entières.*

Soit S', l'épaisseur totale des couronnes C'_i comprises dans le cercle $K(O, R)$, on a

$$\lim_{R \to \infty} \frac{S'}{R} = 0.$$

Considérons maintenant les couronnes

$$\ldots, \quad \Gamma_n\left(\sqrt[q]{r''_n - 1} - \frac{1}{r''_n}, \sqrt[q]{r''_n + 1} + \frac{1}{r''_n}\right), \quad \ldots;$$

soit Σ, l'épaisseur totale des couronnes Γ_i comprises dans le cercle $K(O, R)$.

Puisque l'épaisseur $\gamma_n = \left(\sqrt[q]{r''_n + 1} + \frac{1}{r''_n}\right) - \left(\sqrt[q]{r''_n - 1} - \frac{1}{r''_n}\right)$ de Γ_n est, pour r_n assez grand, inférieure à $3\left(\sqrt[q]{r''_n + 1} - \sqrt[q]{r''_n - 1}\right)$, on a encore

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\Sigma}{R} = 0.$$

Soit $a > 1$ et la couronne $L(R, aR)$, d'épaisseur égale à $(a - 1)R$; on a

$$\lim_{R \to \infty} \frac{\Sigma}{(a-1)R} = 0.$$

Appelons *exceptionnelles* les couronnes Γ_i correspondant à la fonction $G(z)$.

Ces compléments nous permettent d'énoncer les conclusions suivantes :

1° L'épaisseur totale des couronnes exceptionnelles Γ_i, comprises dans la couronne $L(R, aR)$, est négligeable par rapport à l'épaisseur $(a-1)R$ de la couronne L, quand $R \to \infty$.

2° A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences $(|z| = R_i)$ situées dans la couronne $L(R, aR)$ telles qu'à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z - z_0| \leqq \frac{1}{|z_0|^q}$ dans lequel $G(z)$ vérifie l'inégalité

$$|G(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}}.$$

3° Supposons que nous ayons un nombre fini des fonctions entières f_1, f_2, ..., f_n d'ordre fini. En considérant les couronnes exceptionnelles correspondant à chaque fonction f_i comprises dans la couronne $L(R, aR)$, nous arrivons à la conclusion suivante :

A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences $(|z| = R_i)$ situées dans la couronne $L(R, aR)$ telles qu'à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z - z_0| \leqq \frac{1}{|z_0|^N}$, N étant fixe et fini, dans lequel on a

$$|f_i(z)| > e^{-r^{\rho_i+\varepsilon}} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

ρ_i étant l'ordre de la fonction $f_i(z)$.

Soit maintenant $u(z)$, une fonction algébroïde d'ordre ρ.

En considérant les zéros, les pôles et les points de ramification de $u(z)$, on démontre aisément la proposition :

A partir d'une valeur R_0 de R, il existe une infinité de circonférences situées dans la couronne $L(R, aR)$ telles que à chaque point z_0 de chacune d'elles peut être attaché le cercle fermé $|z - z_0| \leqq \frac{1}{r^N}$, N désignant un nombre fixe et fini, dans lequel chaque branche $u_j(z)$ de la fonction $u(z)$ est holomorphe et vérifie l'inégalité

$$e^{r^{\rho+\varepsilon}} > |u_j(z)| > e^{-r^{\rho+\varepsilon}} \qquad (\varepsilon > 0);$$

dans le même cercle, la fonction $\log u_j(z)$ est holomorphe et vérifie, pour r assez grand, l'inégalité

$$|\log u_j(z)| < r^{\rho+1}.$$

Nous possédons maintenant les éléments nécessaires pour démontrer le théorème I de ce paragraphe.

Soit $u(z)$ une fonction algébroïde d'ordre ρ définie par l'équation

$$F(u, z) = f_0(u)\, u^n + f_1(z)\, u^{n-1} + \ldots + f_n(z) = 0.$$

Supposons que ses zéros et les pôles de sa dérivée $u'(z)$ aient σ pour ordre réel; on a évidemment $\sigma \leqq \rho$. Il faut montrer que l'ordre de la fonction

$$V(z) = \frac{u'(z)}{u(z)}$$

est au plus égal à σ.

Les pôles de $V(z)$ proviennent des zéros de $u(z)$ et des pôles de $u'(z)$. On peut former un produit canonique $\Pi(z)$ d'ordre σ tel que la fonction

$$W(z) = V(z)\, \Pi(z)$$

soit dépourvue de pôles (à distance finie); on a

$$V(z) = \frac{W(z)}{\Pi(z)}.$$

Il suffit de montrer que l'ordre σ_1 de la fonction $W(z)$ est au plus égal à σ.

Soit

$$E(u, z) = W^n + \varphi_1(z)\, W^{n-1} + \ldots + \varphi_n(z) = 0,$$

l'équation qui définit $W(z)$; les $\varphi_i(z)$ sont des fonctions entières.

Une au moins des fonctions $\varphi_i(z)$ est d'ordre σ_1, les autres ont des ordres inférieurs ou égaux à σ_1; soit $\varphi_i(z)$ une des fonctions d'ordre σ_1 et soient ε, ε' deux nombres positifs arbitraires $\varepsilon' > \varepsilon > 0$.

Il existe une suite infinie de points

$$\text{(A)} \qquad z_1, \quad z_2, \quad \ldots, \quad z_n, \quad \ldots, \qquad \lim_{n=\infty} |z_n| = \infty,$$

tels que l'on ait

$$|\varphi_i(z_n)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon}}, \qquad |W_j(z)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}},$$

où $W_j(z)$ est une branche de $W(z)$, qui varie en général pour les différents points de la suite (A).

Prenons un point z_n de module arbitrairement grand.

Sur la circonférence C, qui se trouve dans la couronne $L(r_n, ar_n; a > 1)$ et hors des couronnes exceptionnelles, considérons le point z_0 où le module de $\varphi_i(z)$ atteint son maximum. On a

$$|\varphi_i(z_0)| > \varphi(z_n)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon}};$$

donc, il existe une branche $W_j(z)$ telle que

$$W_j(z_0)| > e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}},$$

et par conséquent

$$(1) \qquad |V_j(z_0)| = \frac{|W_j(z_0)|}{|\Pi(z_0)|} > \frac{e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'}}}{e^{r_0^{\sigma+\varepsilon}}} \geq e^{r_n^{\sigma_1-\varepsilon'} - a^{\sigma+\varepsilon} r_n^{\sigma+\varepsilon}}.$$

D'ailleurs, dans le cercle fermé $K\left(z_0, \frac{1}{|z_0|^N}\right)$, où N est fixe et fini, la fonction $\log u_j(z)$ est holomorphe et vérifie l'inégalité

$$|\log u_j(z)| < r^{\rho+1}.$$

Le théorème de Cauchy donne

$$(2) \qquad \left|\frac{u'_j(z_0)}{u_j(z_0)}\right| = |V_j(z_0)| < \frac{\text{max de } |\log u_j(z)| \text{ sur circonf. de K}}{\frac{1}{r_0^N}}$$
$$< r^{\rho+1} r_0^N < (ar_n)^{\rho+1} (ar_n)^N = a^{\rho+N+1} r_n^{\rho+N+1}.$$

Les nombres N, ρ, a sont finis et fixes, le nombre r_n est arbitrairement grand, tandis que ε, ε' sont arbitrairement petits. Si le nombre σ_1 était plus grand que σ, les inégalités (1) et (2) seraient incompatibles.

Donc,

$$\sigma_1 \leq \sigma.$$

15. En remarquant que les pôles de $u'(z)$ proviennent des pôles et, peut-être, de points de ramification de $u(z)$, nous pouvons énoncer le corollaire suivant :

Corollaire I. — *L'ordre de la dérivée logarithmique d'une fonction algébroïde d'ordre fini est au plus égal à l'ordre réel de l'ensemble de ses zéros, pôles et points de ramification.*

En supposant que $u(z)$ ait un nombre fini de zéros et $u'(z)$ un nombre fini de pôles, nous obtenons le corollaire :

Corollaire II. — *Soit $u(z)$ une fonction algébroïde d'ordre fini ayant un nombre fini de zéros dont la dérivée $u'(z)$ a un nombre limité de pôles.*

La dérivée logarithmique de $u(z)$ est une fonction algébrique.

16. Ayant établi ce théorème I (Chap. IV, § 1), nous sommes en mesure de donner les extensions suivantes des théorèmes concernant les identités de M. Borel.

Théorème I. — *Soit l'identité*

$$\Sigma f_i(z)\,F_i(z) \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n),$$

où

1° *$f_i(z)$ sont des branches algébroïdes (ou algébriques) d'ordre $< \rho$;*

2° *les zéros des fonctions algébroïdes dont les $F_i(z)$ sont des branches et les pôles des fonctions algébroïdes dont les $F'_i(z)$ sont des branches ont des ordres réels $\leqq \rho$; ou les pôles, zéros et points de ramification des fonctions algébroïdes, dont les $F_i(z)$ sont des branches, ont des ordres réels $< \rho$;*

3° *les fonctions $\dfrac{F_i(z)}{F_j(z)}$ $(i, j = 1, \ldots, n;\ i \neq j)$ sont d'ordre $\geqq \rho$.*

Une telle identité entraîne

$$f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_n(z) \equiv 0.$$

Théorème II. — *Une identité de la forme*

$$f_1(z) + \Sigma f_i(z)\,F_i(z) \equiv 0 \qquad (i = 2, \ldots, n)$$

donne

$$f_1(z) \equiv 0$$

sous les conditions suivantes :

1° *les fonctions $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z)$ sont d'ordre $< \rho$;*

2° *les branches algébroïdes $F_i(z)$ sont d'ordre $\geqq \rho$;*

3° *les zéros des fonctions algébroïdes, dont les $F_i(z)$ sont des branches, et les pôles de leurs dérivées premières ont des ordres réels $< \rho$; ou les pôles, zéros et points de ramification des fonctions, dont les $F_i(z)$ sont des branches, ont des ordres réels $< \rho$.*

Théorème III. — *Une identité de la forme*

$$f_1(z)\,F_1(z) + \ldots + f_n(z)\,F_n(z) = 0.$$

se décompose en d'autres analogues

$$f_1(z)\,F_1(z) + \ldots + f_\lambda(z)\,F_\lambda(z) \equiv 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

dont chacune a au moins deux termes sous les conditions du théorème précédent où l'on suppose $f_i(z) \not\equiv 0 \, (i = 1, \ldots, n)$; *les fonctions* $\mathrm{F}_i(z)$ *qui entrent dans une quelconque de ces identités sont proportionnelles à des fonctions d'ordre* $< \rho$.

17. *Fonctions algébroïdes exceptionnelles, au sens Borel-Montel, pour une algébroïde donnée.* — Soit $u(z)$ une algébroïde d'ordre ρ et $v(z)$ une algébroïde (ou algébrique) d'ordre $\sigma < \rho$.

Nous dirons que $u(z)$ *admet* $v(z)$ *comme exceptionnelle au sens de Borel-Montel, si l'ordre réel des points où les fonctions* $u(z)$, $v(z)$ *prennent la même valeur est plus petit que* ρ.

Les généralisations des théorèmes de M. Borel, que nous avons établies, nous permettent d'énoncer les propositions :

Théorème I. — *Si l'algébroïde* $u(z)$ *à* n *branches, d'ordre* ρ, *admet comme fonction exceptionnelle au sens de Borel-Montel* $v(z)$ *à* m *branches distinctes, d'ordre* $\sigma < \rho$, *on a*

$$m \leqq 2n \qquad \text{et} \qquad m \leqq 2n - 1,$$

si l'ordre réel des pôles de $u(z)$ *est* $< \rho$.

Théorème II. — *Supposons que la fonction exceptionnelle* $v(z)$ *soit définie par une équation de la forme*

$$\Phi_1(u, z)\,\Phi_2(u, z)\ldots\Phi_\lambda(u, z) = 0 \qquad [\Phi_i(u, z) = 0 \text{ est irréductible}],$$

où $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_\lambda \, (\lambda \geqq 2)$ *désignent des polynomes en* u *dont les coefficients sont des fonctions entières.*

Soit m_i *le degré par rapport à* u *du polynome* Φ_i.

Si les nombres $m_1, m_2, \ldots, m_\lambda$ *sont premiers entre eux, chacun d'eux ne dépasse pas* n.

Théorème III. — *Si l'algébroïde* $u(z)$ *à* n *branches, d'ordre* ρ, *admet comme exceptionnelle l'algébroïde de* $v(z)$ *à* m *branches d'ordre* $\sigma < \rho$, *définie par une équation irréductible, on a*

$$m \leqq n,$$

si l'ordre réel des zéros (ou celui des pôles) de $u(z)$ *est plus petit que* ρ.

18. Les théorèmes concernant les combinaisons exceptionnelles dont les coefficients sont des branches algébriques comportent des extensions que l'on peut établir en suivant la même voie lorsqu'on fixe l'ordre maximum des fonctions entières supposées d'ordre fini. Supposons que les fonctions entières f_0,

$f_1, \ldots, f_n$ soient d'ordre ρ au plus et que l'une d'elles soit effectivement d'ordre ρ. Nous pouvons reprendre nos raisonnements en désignant par g_0, $g_1, \ldots, g_n$ des branches algébroïdes dont l'ordre est inférieur à ρ.

CHAPITRE V.

SUR LES ALGÉBROÏDES EXCEPTIONNELLES OU QUASI EXCEPTIONNELLES POUR UNE ALGÉBROÏDE DONNÉE.

19. Dans ce Chapitre, nous étendons aux fonctions algébroïdes les théorèmes de M. G. Valiron (1) relatifs aux fonctions entières à valeurs exceptionnelles ou quasi exceptionnelles. Un des importants progrès réalisés sur ce sujet qui a fait l'objet des travaux de MM. Carathéodory, Landau, Montel, Bloch et Fatou, dû à M. Valiron, consiste à remplacer la considération des zéros dont l'ordre est multiple d'un entier donné par celle des zéros d'ordre au moins égal à cet entier. Rappelons les résultats de M. Valiron.

Soit $F(z)$, une fonction uniforme admettant le point à l'infini comme point singulier isolé essentiel. On dit (Valiron) que les zéros de $F(z) - x$ sont exceptionnels B (pour la valeur x) lorsque leur ordre réel est inférieur à l'ordre (apparent) de $F(z)$, et que les zéros *d'ordre de multiplicité p* sont exceptionnels B pour la valeur x lorsque l'ordre de la suite de ces zéros de $F(z) - x$ est inférieur à l'ordre de $F(z)$. On a les propositions suivantes (Valiron) :

S'il existe une valeur a pour laquelle *les zéros* sont exceptonnels B, les *zéros simples* ne peuvent être exceptionnels B pour une valeur x distincte de a.

Il ne peut exister plus de deux valeurs a, b pour lesquelles les *zéros simples* soient exceptionnels B.

S'il existe une valeur a pour laquelle les *zéros simples* et les *zéros doubles* sont exceptionnels B, les *zéros simples* ne peuvent *être* exceptionnels B pour x distinct de a.

20. Soient $u(z)$ une fonction transcendante algébroïde d'ordre fini ρ et $v(z)$ une fonction algébroïde (ou algébrique) d'ordre $\sigma < \rho$.

Nous convenons de dire que la fonction $u(z)$ admet $v(z)$ comme fonction quasi exceptionnelle (E_1) lorsque l'ordre réel de la suite des zéros de la fonction $\psi(z) = u(z) - v(z)$, dont l'ordre (2) est plus petit que *deux*, est inférieur à ρ; et que $u(z)$ admet $v(z)$ comme fonction quasi exceptionnelle (E_2)

(1) *C. R. Acad. Sc.*, 173, 1921, p. 1059-1061.

(2) Précisons ce que nous entendons ici par le mot « ordre » d'un zéro (ξ, η) d'une fonction algébroïde $u(z)$: soit $r - 1 \geqq 0$, l'ordre de ramification du point (ξ, η); dans le domaine de ce point, la

lorsque l'ordre réel des zéros de la fonction $\psi(z)$, dont l'ordre n'est pas plus grand que *deux*, est inférieur à ρ.

Nous dirons enfin qu'une fonction algébroïde est de la classe (A) lorsque l'ordre réel des pôles de sa dérivée est inférieur à l'ordre (apparent) de cette fonction.

Il est évident qu'une fonction entière est de la classe (A).

Dans la suite, *nous supposons* que la fonction transcendante algébroïde $u(z)$ d'ordre ρ *est de la classe* (A) et que *les fonctions exceptionnelles* pour $u(z)$ sont des fonctions *algébroïdes* (ou algébriques) *d'ordre inférieur à* ρ.

Théorème I. — *S'il existe une fonction $v_1(z)$ exceptionnelle au sens Borel-Montel pour $u(z)$, la fonction $u(z)$ ne peut pas admettre une autre fonction $v_2(z)$ quasi exceptionnelle* (E_1).

Supposons que la fonction $u(z)$ admette la fonction $v_1(z)$ comme exceptionnelle au sens Borel-Montel et la fonction $v_2(z)\,[v_1(z)\neq v_2(z)]$ comme exceptionnelle (E_1).

Les fonctions $\psi_1(z)=u(z)-v_1(z)$, $\psi_2(z)=u(z)-v_2(z)$ sont de la classe (A); l'ordre réelle des pôles de leurs dérivées $\psi_1'(z)$, $\psi_2'(z)$ est inférieur à ρ.

L'ordre réel des zéros de la fonction $\psi_1(z)$ et l'ordre réel des pôles de sa dérivée étant plus petits que ρ, la fonction $\dfrac{\psi_1'(z)}{\psi_1(z)}$ est d'ordre $\sigma<\rho$ (§ 14, th. I).

Posons

$$\sqrt{\psi_1(z)}-\sqrt{\psi_2(z)}\equiv G_1(z),\qquad \sqrt{\psi_1(z)}+\sqrt{\psi_2(z)}\equiv G_2(z), \tag{1}$$

les déterminations, pour chaque valeur de z, des expressions $\sqrt{\psi_1(z)}$, $\sqrt{\psi_2(z)}$ étant les mêmes dans les identités ci-dessus. L'ordre réel des pôles et, puisque $G_1(z)G_2(z)\equiv v_2(z)-v_1(z)$, l'ordre réel des zéros des $G_1(z)$, $G_2(z)$ sont inférieurs à ρ. D'ailleurs, puisque l'ordre réel des zéros de $\psi_1(z)$ et l'ordre réel des zéros de $\psi_2(z)$ dont l'ordre est plus petit que deux sont inférieurs à ρ, l'ordre réel des pôles de la dérivée $G_1'(z)$ et celui des pôles de $G_2'(z)$ sont plus petits que ρ; les fonctions $\dfrac{G_1'(z)}{G_1'(z)}$, $\dfrac{G_2'(z)}{G_2'(z)}$ sont d'ordre $<\rho$ (§ 14, th. I).

Des relations (1) on tire

$$2\sqrt{\psi_1(z)}\equiv G_1(z)+G_2(z),$$

---

fonction $u(z)$ sera représentée par un développement de la forme

$$u(z)=c_s(z-\xi)^{\frac{s}{r}}+c_{s+1}(z-\xi)^{\frac{s+1}{r}}+\ldots+c_{s+n}(z-\xi)^{\frac{s+n}{r}}+\ldots\qquad (s=\text{entier}\geqq 1,\ c_s\neq 0).$$

C'est le nombre $\frac{s}{r}$ que nous entendons ici par le mot « ordre » du zéro (ξ,η) et non pas le nombre s comme il est adopté généralement.

cette identité exige que l'on ait (§ 16; th. III) (¹)

$$G_1(z) \equiv 2\sqrt{\psi_1(z)}\, g_1(z), \qquad G_2(z) \equiv 2\sqrt{\psi_1(z)}\,[1 - g_1(z)],$$

$g_1(z)$ désignant une fonction d'ordre inférieur à ρ.

Par conséquent, on a

$$\psi_2(z) \equiv \left[\frac{G_2(z) - G_1(z)}{2}\right]^2 \equiv \psi_1(z)[1 - 2g_1(z)]^2,$$

et la relation

$$\psi_1(z) - \psi_2(z) \equiv [u(z) - v_1(z)] - [u(z) - v_2(z)] \equiv v_2(z) - v_1(z)$$

s'écrit

$$\psi_1(z) - \psi_1(z)[1 - 2g(z)]^2 \equiv v_2(z) - v_1(z);$$

cette dernière identité exige que l'on ait (§ 16; th. II)

$$v_2(z) \equiv v_1(z),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

Théorème II. — *Il n'existe pas deux fonctions algébroïdes $v_1(z)$, $v_2(z)$ $[v_1(z) \not\equiv v_2(z)]$ quasi exceptionnelles respectivement* (E_2), (E_1) *pour* $u(z)$.

Supposons que $u(z)$ admette les fonctions $v_1(z)$, $v_2(z)$ exceptionnelles respectivement (E_2), (E_1). Conservons les notations utilisées pour la démonstration du théorème précédent (I).

Soit z_0 un zéro de $\psi_1(z)$ dont l'ordre est plus grand que deux (²); ce point est aussi un zéro de la fonction $\left[\sqrt{\psi_1(z)}\right]' = \dfrac{d\sqrt{\psi_1}}{dz}$. On a

$$(2) \qquad 2\sqrt{\psi_1(z_0)} = G_1(z_0) + G_2(z_0) = 0, \qquad G'_1(z_0) + G'_2(z_0) = 0.$$

Les fonctions $\dfrac{G'_1(z)}{G_1(z)}$, $\dfrac{G'_2(z)}{G_2(z)}$ étant d'ordre $< \rho$, on a

$$(3) \qquad G'_1(z) \equiv G_1(z)\gamma_1(z), \qquad G'_2(z) \equiv G_2(z)\gamma_2(z),$$

$\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ désignant des fonctions d'ordre $< \rho$.

Des relations (2) et (3), on tire

$$(4) \qquad G_1(z_0)[\gamma_1(z_0) - \gamma_2(z_0)] = 0.$$

Supposons $\gamma_1(z) \not\equiv \gamma_2(z)$, puisque l'ordre réel des zéros de la fonction $G_1(z)$ et l'ordre (apparent) des fonctions $\gamma_1(z)$, $\gamma_2(z)$ sont inférieurs à ρ, la rela-

(¹) D'après ce qui est dit plus haut, les fonctions $\psi_1(z)$, $G_1(z)$, $G_2(z)$ remplissent les conditions sous lesquelles le théorème mentionné s'applique.

(²) S'il n'y avait pas de tels points, la fonction $v_1(z)$ serait exceptionnelle au sens Borel-Montel et l'on se trouverait dans le cas du théorème démontré.

tion (4) montre que l'ordre réel des zéros de $\psi_1(z)$, dont l'ordre est plus grand que deux, est plus petit que ρ; la fonction $v(z)$ est exceptionnelle au sens Borel-Montel pour $u(z)$. On retombe dans le cas du théorème I.

Si $\gamma_1(z) \equiv \gamma_2(z)$, on a alors

$$\frac{G'_1(z)}{G_1(z)} = \frac{G'_2(z)}{G_2(z)}, \qquad G_2(z) \equiv CG_1(z) \qquad (C \text{ const.});$$

la relation $G_1(z_0) + G_2(z_0) = 0$ s'écrit

$$G_1(z_0)(1 + C) = 0. \tag{5}$$

La constante C ne pouvant être égal à -1, car, autrement, on aurait $2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z) + G_2(z) \equiv 0$, la relation (5) montre que l'ordre réel des points z_0 est plus petit que ρ; on se retrouve de nouveau dans le cas examiné.

Théorème III. — *Il n'existe pas de fonctions algébroïdes $v(z)$ ayant au moins trois branches distinctes quasi exceptionnelles* (E_1) *pour $u(z)$.*

Supposons qu'il n'en soit pas ainsi, soient

$$v_1(z), \quad v_2(z), \quad v_3(z), \quad \ldots, \quad v_m(z),$$

les branches distinctes de la fonction $v(z)$ exceptionnelle (E_1) pour $u(z)$. Posons

$$\psi_1(z) \equiv u_i(z) - v_1(z), \qquad \psi_2(z) \equiv u_i(z) - v_2(z),$$
$$\psi_3(z) \equiv u_i(z) - v_3(z), \qquad \ldots, \qquad \psi_m(z) \equiv u_i(z) - v_m(z);$$
$$\sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_2(z)} \equiv G_1(z), \qquad \sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_2(z)} \equiv \overline{G}_1(z), \qquad \sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_3(z)} \equiv G_2(z),$$
$$\sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_3(z)} \equiv \overline{G}_2(z), \qquad \ldots, \qquad \sqrt{\psi_1(z)} + \sqrt{\psi_m(z)} \equiv G_{m-1}(z),$$
$$\sqrt{\psi_1(z)} - \sqrt{\psi_m(z)} \equiv \overline{G}_{m-1}(z).$$

On démontre encore que l'ordre réel des zéros des fonctions $G_1(z)$, $\overline{G}_1(z)$, ..., $G_{m-1}(z)$, $\overline{G}_{m-1}(z)$ et celui des pôles de leurs dérivées sont inférieurs à ρ.

On a

$$2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z) + \overline{G}_1(z) \equiv G_2(z) + \overline{G}_2(z),$$

d'où

$$G_1(z) + \overline{G}_1(z) - G_2(z) - \overline{G}_2(z) \equiv 0. \tag{6}$$

On constate que l'identité (6) ne peut se décomposer en d'autres; par conséquent (§ 16; th. III) les fonctions G_1, $\overline{G}_1$, G_2, $\overline{G}_2$ sont proportionnelles à des fonctions d'ordre $< \rho$; on a ainsi

$$\overline{G}_1(z) = G_1(z)\gamma_1(z)$$

et, par suite,

$$(7) \qquad 2\sqrt{\psi_1(z)} \equiv G_1(z)\,[1+\gamma_1(z)],$$

où $\gamma_1(z)$ désigne une fonction d'ordre $< \rho$.

La relation (7), puisque l'ordre réel des zéros de $G_1(z)$ est inférieur à ρ et que $\gamma_1(z)$ est d'ordre $< \rho$, nous montre que l'ordre réel des zéros de la fonction $\psi_1(z)$ est plus petit que ρ. Les fonctions (branches) $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$ jouant un rôle identique dans nos raisonnements, on en conclut que l'ordre réel des zéros de toutes ces fonctions est inférieur à ρ.

Considérons maintenant l'identité

$$(8) \qquad \psi_1(z) - \psi_2(z) \equiv v_2(z) - v_1(z),$$

l'ordre des $v_1(z)$, $v_2(z)$ et l'ordre réel des zéros des ψ_1, ψ_2 et des pôles des $\psi'_1 = u'_i - v'_1$, $\psi'_2 = u'_i - v'_2$ étant inférieurs à ρ, tandis que l'ordre (apparent) des ψ_1, ψ_2 est égal à ρ, l'identité (8) exige que l'on ait (§ 16; th. II)

$$v_1(z) \equiv v_2(z),$$

ce qui est contraire à l'hypothèse.

On obtient les théorèmes mentionnés, dans le cas des fonctions entières d'ordre fini, de M. Valiron, en supposant que la fonction $u(z)$ soit une fonction entière d'ordre ρ et que les fonctions exceptionnelles $v(z)$ se réduisent à des constantes différentes.

Théorème IV. — *Il n'existe pas de fonction $v(z)$ (d'ordre inférieur à ρ) ayant au moins deux branches distinctes exceptionnelles au sens Borel-Montel pour $u(z)$.*

Voici quelques indications sur la démonstration. On supposera qu'il existe une fonction $v(z)$ ayant $m \geqq 2$ branches distinctes exceptionnelles au sens Borel-Montel pour $u(z)$ et l'on posera, $u_i(z)$ étant une branche quelconque de $u(z)$,

$$u_i(z) - v_1(z) \equiv G_1(z), \qquad u_i(z) - v_2(z) \equiv G_2(z), \qquad \ldots;$$

on a

$$(9) \qquad G_1(z) - G_2(z) \equiv v_2(z) - v_1(z).$$

On constate que l'identité (9) exige que l'on ait

$$v_2(z) \equiv v_1(z).$$

Ce théorème généralise, dans le cas des fonctions d'ordre fini, celui de M. H.-L. Selberg (1), d'après lequel une fonction transcendante algébroïde $u(z)$, dont la dérivée $u'(z)$ est dépourvue de pôles, ne peut admettre plus d'une valeur exceptionnelle (l'infini non compris). Nous voulons clore ce Chapitre en

(1) *Algebroïde Funktionen und Umkehrfunktionen Abelscher Integrale*, Oslo, 1934, p. 57-58.

énonçant des théorèmes, dont nous ne donnerons pas la démonstration (leur démonstration est abordable par des procédés calqués sur ceux que nous venons d'employer pour la démonstration des théorèmes précédents) :

THÉORÈME V. — *Il n'existe pas de fonctions algébroïdes* $v(z)$ *ayant au moins deux branches distinctes quasi exceptionnelles* (E_2) *pour* $u(z)$.

THÉORÈME VI. — *S'il existe une fonction algébroïde* $v(z)$ *à deux branches distinctes quasi exceptionnelles* (E_1) *pour* $u(z)$*; l'ordre réel des zéros de la fonction* $\psi(z) = u(z) - v(z)$ *dont l'ordre est plus grand que deux est inférieur à* ρ.

COROLLAIRE. — *Soit* $F(z)$ *une fonction entière d'ordre fini. S'il existe deux valeurs* a, b *pour lesquelles les zéros simples des* $F(z) - a$, $F(z) - b$ *sont exceptionnels* B [1]; *les zéros d'ordre de multiplicité* $p \geqq 3$ *sont aussi exceptionnels* B [2].

CHAPITRE VI.

SUR LES ALGÉBRIQUES STRICTEMENT EXCEPTIONNELLES POUR UNE ALGÉBRIQUE DONNÉE.

21. Remarquant, dans son article [3] que les seules fonctions entières qui ne peuvent jamais prendre les valeurs d'une fonction algébrique admettant au moins deux branches sont des polynomes, qu'il appelle *exceptionnnels* par rapport à cette algébrique, M. P. Montel pose et résout le problème de trouver les polynomes exceptionnels pour une algébrique donnée.

Ce problème est un cas particulier du suivant :

Étant donnée une fonction algébrique $u(z)$, *trouvez les fonctions algébriques exceptionnelles (au sens strict) pour* $u(z)$.

Est-il possible de résoudre ce problème par des opérations algébriques en nombre fini ?

La réponse paraît négative, du moins dans le cas général. En voici un exemple :

Considérons la fonction $u = \sqrt{R(z)}$, où $R(z)$ est un polynome premier avec sa dérivée; cherchons les fonctions rationnelles $\frac{A(z)}{B(z)}$ exceptionnelles pour $u(z)$,

(1) *Voir* les définitions de M. Valiron (§ 19).

(2) Nous croyons que ce théorème est nouveau et qu'il n'est pas une conséquence immédiate des résultats de M. Valiron.

(3) P. MONTEL, *loc. cit.*

$A(z)$ et $B(z)$ désignant des polynomes premiers entre eux. Pour que la fonction $\frac{A(z)}{B(z)}$ soit exceptionnelle pour $u(z)$, il faut et il suffit que l'on ait

$$A^2(z) - B^2(z)\,R(z) \equiv C, \tag{1}$$

C étant une constante non nulle.

L'identité (1) est l'identité d'Abel. Il est clair que, pour qu'il existe deux polynomes A, B vérifiant (1), il est nécessaire que le degré $R(z)$ soit pair. Abel a été amené à cette identité en se posant le problème suivant [1] :

Étant donné un polynome $R(z)$, *premier avec sa dérivée, de degré pair, reconnaître si l'on peut trouver un autre polynome* ρ *tel que l'intégrale* $\int \frac{\rho\, dz}{\sqrt{R}}$ *s'exprime par un logarithme d'une fonction algébrique; il a montré que, si* ρ *existe, l'identité* (1) *est possible et réciproquement.*

En rattachant la solution de ce problème à la théorie des fractions continues algébriques, Abel a donné le critère suivant : *pour qu'il existe un polynome* ρ *répondant à la question, il faut et il suffit que le développement de* $\sqrt{R(z)}$ *en fraction continue algébrique soit périodique. Mais il ne semble pas possible, au moins dans le cas général, de trouver, étant donné* $R(z)$, *une limite pour le nombre des essais à faire pour reconnaître si le développement de* $\sqrt{R(z)}$ *est périodique ou non* [2].

Dans le cas spécial où $R(z)$ est du quatrième degré et ses coefficients sont commensurables ou sont des nombres entiers complexes, le problème a été résolu, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, par Tchebycheff [3] et Jolotareff [4].

Sur des problèmes du même genre, I. Dolbnia [5] a obtenu des résultats intéressants.

22. Nous nous proposons d'obtenir la solution, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, du problème suivant :

Étant donnée une fonction algébrique $b(z)$, *trouver les fonctions algébriques exceptionnelles au sens strict pour* $b(z)$, *dépourvues de pôles à distance finie et dont les branches forment un seul système circulaire dans le domaine du point* $z = \infty$.

---

(1) N.-H. ABEL, *Sur l'intégration de la formule différentielle* $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, etc. (*Œuvres complètes*, t. I).

(2) Pour plus de détails sur ce sujet, *voir* APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, 2e édit., t. I, p. 347-358.

(3) *Journal de Liouville*, 1864.

(4) Voir, *Bull. Sci. math.*, 1879, p. 475-478.

(5) *Œuvres mathématiques*, Hermann, 1913.

Ce problème contient comme cas particulier celui de M. Montel :

Trouver les polynomes exceptionnels au sens strict pour une fonction algébrique donnée.

Considérons d'abord une équation irréductible

$$F(u, z) = u^n + A_1(z)u^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0,$$

les $A_i(z)$ étant des polynomes définissant une fonction algébrique $\mathrm{a}(z)$, dépourvue de pôles à distance finie et qui admet le point $z = \infty$ comme point de ramification d'ordre $n - 1$.

Lemme. — *Toute fonction algébrique $b(z)$ exceptionnelle au sens strict pour* $\mathrm{a}(z)$ *est définie par une équation de la forme*

$$E(u, z)F(u, z) + C = 0,$$

$E(u, z)$ *étant un polynome en* u, z *et* C *une constante* $\neq 0$; *la réciproque est évidente.*

Soit $\Phi(u, z) = 0$ l'équation définissant $b(z)$, et $\mathrm{a}_1(z)$, $\mathrm{a}_2(z)$, $\ldots$, $\mathrm{a}_n(z)$ les branches de $\mathrm{a}(z)$.

On a

$$\Phi[\mathrm{a}_1(z), z]\Phi[\mathrm{a}_2(z), z], \ldots, \Phi[\mathrm{a}_n(z), z] \equiv C,$$

C étant une constante $\neq 0$; les fonctions $\Phi[\mathrm{a}_i(z), z]$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ sont les branches d'une fonction algébrique $G(z)$, dépourvue de pôles à distance finie.

Le point $z = \infty$ étant un point de ramification d'ordre $n - 1$, les branches $\Phi[\mathrm{a}_i(z), z]$ ont le même développement dans le domaine de ce point et par conséquent puisque l'on a $\Phi[\mathrm{a}_1, z], \ldots, \Phi[\mathrm{a}_n, z] \equiv C$, $G(z)$ est finie pour $z = \infty$.

La fonction algébrique $G(z)$, dépourvue de pôles à distance finie ou infinie, est une constante. Donc

$$\Phi[\mathrm{a}_1, z] = \Phi[\mathrm{a}_2, z] = \ldots = \Phi[\mathrm{a}_n, z] \equiv C$$

ou

$$\Phi[\mathrm{a}_i, z] - C \equiv 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

D'après un théorème classique, on a

$$\Phi(u, z) \equiv E(u, z)F(u, z) + C,$$

$E(u, z)$ désignant un polynome en u, z et C une constante.

Ce lemme nous permet d'affirmer, dans certains cas, que deux courbes algébriques ont au moins un point commun à distance finie.

Exemple. — Soit $u(z)$ la fonction algébrique définie par l'équation

$$u^3 - au + bz = 0 \qquad (a, b = \text{const.}\, b \neq 0);$$

le point $z = \infty$ est un point de ramification d'ordre 2.

Il n'existe pas de polynomes, de fonctions rationnelles, ni de fonctions algébriques à deux branches, exceptionnels pour $u(z)$.

Les courbes $u^3 - au + bz = 0$, $P(z)u^2 + Q(z)u + R(z) = 0$ (P, Q, R polynomes) se coupent toujours à distance finie.

Passons maintenant à la solution de notre problème. Soit $b(z)$, une fonction algébrique donnée définie par l'équation

$$\Phi(u, z) = B_0(z)\,u^m + B_1(z)\,u^{m-1} + \ldots + B_m(z) = 0.$$

Nous allons montrer que l'on saura toujours reconnaître, au moyen d'un nombre fini d'opérations algébriques, s'il existe des fonctions algébriques $\mathrm{a}(z)$, du type considéré, exceptionnelles pour $b(z)$, et donner leur expression.

Soit, en effet, $\mathrm{a}(z)$ définie par

$$F(u, z) = u^n + A_1(z)\,u^{n-1} + \ldots + A_n(z) = 0.$$

D'après le lemme précédent, on aura l'identité

$$\Phi(u, z) \equiv F(u, z)E(u, z) + C. \tag{1}$$

Pour reconnaître, au bout d'un nombre fini d'opérations algébriques, s'il existe des identités de la forme (1) et les déterminer il suffit de limiter le nombre n et les degrés des polynomes $A_i(z)$. On a évidemment $n \leqq m$.

Il est aisé de limiter l'ordre *commun* s du pôle $z = \infty$ pour chaque branche $\mathrm{a}_i(z)$ de $\mathrm{a}(z)$. Écrivons

$$\Phi[\mathrm{a}_i(z), z] = B_0(z)\mathrm{a}_i^m(z) + B_1(z)\mathrm{a}_i^{m-1}(z) + \ldots + \mathrm{a}_m(z) \equiv C.$$

Soient $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ les degrés des polynomes $B_0(z), B_1(z), \ldots, B_m(z)$. Dans chaque terme de la forme $B_\nu(z)\mathrm{a}_i^{m-\nu}(z)$ supposé développé dans le domaine du point $z = \infty$ figure un monome de plus haut degré $\alpha_\nu + (m-\nu)\frac{s}{n}$. Pour que l'expression se réduise à une constante, il faut qu'il y ait au moins deux de ces monomes qui soient semblables, leur degré commun étant supérieur ou égal à celui de tous les autres. On doit donc avoir

$$\alpha_h + (m-h)\frac{s}{n} = \alpha_\nu + (m-\nu)\frac{s}{n},$$

$$\alpha_{h'} + (m-h')\frac{s}{n} \leqq \alpha_\nu + (m-\nu)\frac{s}{n} \qquad (h' \neq h).$$

Donc

$$s = \frac{n\alpha_h - n\alpha_\nu}{h-\nu}, \qquad n\alpha_{h'} \leqq n\alpha_\nu + (h'-\nu)s.$$

On en déduit que, pour chaque valeur de $n \leqq m$, s est égal à la pente d'un des côtés du polygone de Newton formé avec les points $(i, n\alpha_i)$. Si tous les côtés de ce polygone correspondant à la valeur n_0 de $n \leqq m$ ont des pentes négatives ou fractionnaires, il n'existe pas de fonction $\mathrm{a}(z)$ à n_0 branches.

Les nombres n, s étant limités, les relations

$$\Sigma a_1(z), \ldots, a_j(z) = (-1)^j A_j(z) \qquad (j = 1, \ldots, n)$$

nous permettent de limiter les degrés μ_j des polynomes $A_j (j = 1, 2, \ldots, n)$, on a

$$\mu_j \leqq j\frac{s}{n}.$$

23. Supposons que, $R(z)$ étant donné et supposé premier avec sa dérivée, l'identité d'Abel admette une solution $A_1(z)$, $B_1(z)$. Soit m le maximum des nombres entiers donnant lieu à une identité de la forme

$$A_1(z) + B_1(z)\sqrt{R(z)} \equiv [A_0(z) + B_0(z)\sqrt{R}]^m,$$

$A_0(z)$, $B_0(z)$ désignant des polynomes (on a $[A_0^2(z) - B_0^2(z)]^m \equiv 1$); choisissons $A_0(z)$, $B_0(z)$ tels que l'on ait

$$A_0^2(z) - B_0^2(z) R(z) \equiv 1.$$

Nous allons voir que la formule

$$A(z) + B(z)\sqrt{R(z)} \equiv \pm [A_0(z) + B_0(z)\sqrt{R(z)}]^m$$

donne, en y faisant $n = \pm 1, \pm 2, \ldots$, la solution générale.

En effet, soient $A(z)$, $B(z)$ deux polynomes vérifiant l'identité d'Abel.

Le degré du polynome $R(z)$ étant pair, la surface de Riemann correspondant à l'algébrique $u = \sqrt{R(z)}$ a deux points distincts ∞_1, ∞_2 à l'infini.

Les fonctions algébriques $F(z) = A(z) + B(z)u$, $\Phi(z) = A_0(z) + B_0(z)u$ sont dépourvues de pôles et de zéros à distance finie. Soient s_1, s_0 les ordres de ∞_1 (pôle ou zéro) respectivement pour $F(z)$, $\Phi(z)$; $-s_1$, $-s_0$ seront ceux de ∞_2 (1). La fonction algébrique $\frac{[F(z)]^{s_0}}{[\Phi(z)]^{s_1}}$ est régulière partout. Donc

$$F(z) \equiv [C[\Phi(z)]^{s_1}]^{\frac{1}{s_0}}.$$

La fonction $\Phi(z) = A_0(z) + B_0(z)u$ ne pouvant pas vérifier une identité de la forme

$$A_0(z) + B_0(z)u \equiv [\Gamma_0(z) + \Delta_0(z)u]^n,$$

$\Gamma_0(z)$, $\Delta_0(z)$ désignant des polynomes et n un nombre entier > 1, des considérations élémentaires, que nous omettons pour abréger, montrent que $\frac{s_1}{s_0}$ doit être un entier et que l'identité $F(z) \equiv [C[\Phi(z)]^{s_1}]^{\frac{1}{s_0}}$ pourra s'écrire sous la

(1) Les nombres s_1 et s_0 sont entiers.

forme

$$A(z) + B(z)u \equiv \varepsilon[A_0(z) + B_0(z)u]^n,$$

où n est un entier et $\varepsilon = \pm 1$. Cette formule est analogue à celle qui donne la solution générale de l'équation arithmétique de Fermat

$$x^2 - Ky^2 = 1.$$

CHAPITRE VII.

SUR LES INTÉGRALES PSEUDO-ABÉLIENNES.

24. Soit $G(z)$ une fonction algébroïde d'ordre fini ayant un nombre fini de pôles, de zéros et de points de ramification; la dérivée logarithmique $\frac{G'(z)}{G(z)}$ étant une fonction algébrique (§ 3), la fonction $H(z) = \log G(z)$ est une intégrale abélienne.

Cette remarque nous a conduit à traiter quelques questions concernant les intégrales que nous appelons pseudo-abéliennes. Ce sont des intégrales abéliennes qui s'expriment par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes ou algébriques.

Avant de passer à l'étude des intégrales pseudo-abéliennes nous rappellerons quelques notions sur les intégrales abéliennes attachées à une courbe algébrique donnée.

Soit $F(u, z) = 0$ une équation algébrique entière irréductible, de degré m par rapport à u, s la surface de Riemann correspondante, composée de m feuillets plans, de genre p, et $u(z)$ la fonction algébrique définie par cette équation.

On rend la surface s simplement connexe par un système de p rétrosections (a_ν, b_ν) $(\nu = 1, 2, \ldots, p)$ reliées à la manière d'une chaîne par des coupures auxiliaires. Un point analytique (z, u) de cette surface est obtenu en associant une valeur quelconque z à une des m valeurs correspondantes de u. A la courbe $F(u, z) = 0$ sont attachées p intégrales normales $W^{(1)}(z, u), \ldots, W^{(p)}(z, u)$ de première espèce linéairement indépendantes.

Le tableau suivant donne les modules de périodicité de ces intégrales :

	a_1.	a_2.	...	a_p.	b_1.	b_2.	...	b_p.
$W^{(1)}$	$2\pi i$	0	0...	0	$2\alpha_{11}$	$2\alpha_{12}$	...	$2\alpha_{1p}$
$W^{(2)}$	0	$2\pi i$	0...	0	$2\alpha_{21}$	$2\alpha_{22}$	...	$2\alpha_{2p}$
....	...	...	....	...	....	....	...	....
$W^{(p)}$	0	0	....	$2\pi i$	$2\alpha_{p1}$	$2\alpha_{p2}$	...	$2\alpha_{pp}$

$$(\alpha_{mn} = \alpha_{nm});$$

les modules de périodicité de chaque intégrale $W^{(1)}$, $W^{(2)}$, ..., $W^{(p)}$ sont inscrits sur une même ligne et, dans une même colonne, sont inscrits les modules relatifs à chaque coupure a_m ou b_m.

Appelons $\Pi_{(\alpha,\beta)}^{(\alpha',\beta')}(z, u)$ l'intégrale normale de troisième espèce, attachée à la même courbe, ayant comme points singuliers logarithmiques les points (α, β), (α', β'). Les modules de périodicité de cette intégrale sont

Sur les coupures $\alpha_i (i=1, 2, \ldots, p)$................	0
Sur une coupure $b_i (i=1, 2, \ldots, p)$................	$W^{(i)}(\alpha', \beta') - W^{(i)}(\alpha, \beta)$
Modules correspondant aux points (α, β), (α', β')....	$2\pi i$

Soient enfin $Z(z, u; \xi, \eta)$, $Z^{(1)}(z, u; \xi, \eta)$, ..., $Z^{(\nu)}(z, u; \xi, \eta)$ les intégrales normales de deuxième espèce ayant le seul pôle (ξ, η) avec respectivement les parties principales $\frac{1}{(z-\xi)^{\frac{1}{r}}}$, $\frac{1}{(z-\xi)^{\frac{2}{r}}}$, ..., $\frac{1.2\ldots\nu}{(z-\xi)^{\frac{\nu+1}{r}}}$, où r désigne le nombre de feuillets passant par le point (ξ, η); si $\xi = \infty$, il faut remplacer $z - \infty$ par $\frac{1}{z}$. Les modules de périodicité de ces intégrales le long des coupures a sont tous nuls.

Soit

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\xi, \eta) + (z-\xi)^{\frac{1}{r}}\varphi_i(\xi, \eta) + \frac{(z-\xi)^{\frac{2}{r}}}{1.2}\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta) + \ldots$$
$$+ \frac{(z-\xi)^{\frac{\nu+1}{r}}}{1.2\ldots(\nu+1)}\varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta) + \ldots,$$

le développement d'une intégrale $W^{(i)} (i=1, 2, \ldots, \rho)$ dans le domaine du point (ξ, η); les modules de périodicité des intégrales Z, $Z^{(1)}$, ..., $Z^{(\nu)}$ le long d'une coupure $b_i (i=1; 2, \ldots, \rho)$ sont respectivement $-\varphi_i(\xi, \eta)$, $-\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta)$, ..., $-\varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta)$.

Les quantités $\varphi_i(\xi, \eta)$, $\varphi_i^{(1)}(\xi, \eta$, ..., $\varphi_i^{(\nu)}(\xi, \eta)$, ... sont les valeurs des dérivées successives de l'intégrale $W_i(z, u)$ au point (ξ, η) lorsque ce point n'est pas un point de ramification, ni un point à l'infini; en général leur signification résulte du développement écrit plus haut pour cette intégrale.

On dit que N intégrales $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_N$ abéliennes, composées uniquement d'intégrales de première et de seconde espèce sont *algébriquement distinctes* s'il n'existe aucune combinaison linéaire à coefficients constants, non tous nuls, telle que

$$W = A_1\zeta_1 + A_2\zeta_2 + \ldots + A_N\zeta_N$$

qui se réduise à une fonction rationnelle de z et de u. On dit aussi que $2p$ intégrales algébriquement distinctes $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ forment un *système fondamental*. Pour qu'il en soit ainsi, il faut et il suffit que le déterminant d'ordre $2p$ formé par les $(2p)^2$ périodes de ces $2p$ intégrales soit différent de zéro.

On démontre que :

Toute intégrale abélienne, n'ayant aucun point critique logarithmique, est égale à une combinaison linéaire à coefficients constants des $2p$ intégrales $\zeta_1, \ldots, \zeta_{2p}$ formant un système fondamental augmentée d'une fonction rationnelle de z et de u.

25. Théorème. — *Soit (ξ, η) un point analytique donné, d'ordre de ramification $r-1$, à distance finie ou infinie; il existe un système de p intégrales normales de seconde espèce, $Z^{(\mu_1)}(z, u; \xi, \eta), Z^{(\mu_2)}(z, u; \xi, \eta), \ldots, Z^{(\mu_p)}(z, u; \xi, \eta)$, formant avec les intégrales normales de première espèce $W^{(1)}, W^{(2)}, \ldots, W^{(p)}$ un système fondamental.*

Il suffit de démontrer qu'il existe un système de p intégrales

$$Z^{(\mu_1)}(z, u; \xi, \eta), \quad \ldots. \quad Z^{(\mu_p)}(z, u; \xi, \eta),$$

tel que le déterminant d'ordre p formé par les p^2 modules de périodicités de ces p intégrales soit différent de zéro.

Considérons le tableau

$$\left\| \begin{matrix} \varphi_1(\xi, \eta) & \varphi_1^{(1)}(\xi, \eta) & \ldots & \varphi_1^{(i)}(\xi, \eta) & \ldots \\ \varphi_2(\xi, \eta) & \varphi_2^{(1)}(\xi, \eta) & \ldots & \varphi_2^{(i)}(\xi, \eta) & \ldots \\ \ldots\ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots \\ \varphi_p(\xi, \eta) & \varphi_p^{(1)}(\xi, \eta) & \ldots & \varphi_p^{(i)}(\xi, \eta) & \ldots \end{matrix} \right\|$$

à p lignes et un nombre infini de colonnes, formé par les modules de périodicité des intégrales $Z(z, u; \xi, \eta), Z^{(1)}(z, u; \xi, \eta), \ldots, Z^{(i)}(z, u; \xi, \eta), \ldots$, les modules de périodicité de l'intégrale $Z^{(i)}(z, u; \xi, \eta)$ étant inscrites dans la même $(i+1)^{\text{ième}}$ colonne. Nous allons démontrer que l'on peut extraire de ce tableau au moins un déterminant d'ordre p, en prenant les éléments communs à un nombre p de colonnes et aux p lignes qui ne soit pas nul. En effet, si tous les déterminants d'ordre p, extraits du tableau considéré, étaient nuls, il existerait un système de p constantes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ non toutes nulles, tel que l'on ait

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda_1\varphi_1\ \ (\xi, \eta) + \lambda_2\varphi_2\ \ (\xi, \eta) + \ldots + \lambda_p\varphi_p\ \ (\xi, \eta) = 0, \\ \lambda_1\varphi_1^{(1)}(\xi, \eta) + \lambda_2\varphi_2^{(1)}(\xi, \eta) + \ldots + \lambda_p\varphi_p^{(1)}(\xi, \eta) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \\ \lambda_1\varphi_1^{(i)}\ (\xi, \eta) + \lambda_2\varphi_2^{(i)}\ (\xi, \eta) + \ldots + \lambda_p\varphi_p^{(i)}\ (\xi, \eta) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots ; \end{array} \right.$$

en prenant en considération les relations (1), en nombre infini, et les p développements

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\xi, \eta) + (z-\xi)^{\frac{1}{r}}\varphi_i(\xi, \eta) + \ldots, \qquad (i = 1, 2, \ldots, \rho),$$

des p intégrales normales $W^{(i)}(z, u)(i = 1, \ldots, p)$, linéairement indépendantes, on obtient la relation

$$\begin{aligned}&\lambda_1 W^{(1)}(z, u) + \lambda_2 W^{(2)}(z, u) + \ldots \\ &\quad + \lambda_p W^{(p)}(z, u) = \lambda_1 W^{(1)}(\xi, \eta) + \lambda_2 W^{(2)}(\xi, \eta) + \ldots + \lambda_p W^{(p)}(\xi, \eta),\end{aligned}$$

ce qui est absurde. La proposition énoncée est donc établie.

26. Soit $v(z)$ une algébroïde transcendante (d'ordre fini ou non), définie par une équation irréductible, ayant m branches et un nombre *fini* de points de ramification. On peut former, comme l'on fait dans le cas d'une fonction algébrique, une surface S, composée de m feuillets superposés ayant un nombre limité de lignes de croisement sur laquelle $v(z)$ est uniforme. A cette surface S, d'après un théorème classique, correspond une fonction algébrique $u(z)$ (une classe de fonctions algébriques) ramifiée de la même manière que $v(z)$; la fonction $v(z)$ est une fonction uniforme du point analytique $z(u)$: on a

$$v(z) = f_0(z) + f_1(z)\, u(z) + \ldots + f_{m-1}(z)\, u^{m-1}(z),$$

$f_0(z), f_1(z), \ldots, f_{m-1}(z)$ désignant des fonctions méromorphes.

La fonction $v(z)$ étant une fonction uniforme du point analytique (z, u), considérons l'intégrale

$$\mathrm{I}(z, u) = \int_{v_0(z_0)}^{v(z)} v(z)\, dz = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \mathrm{E}(z, u)\, dz,$$

où $v_0(z_0) = \mathrm{E}(z_0, u_0)$, $v(z) = \mathrm{E}(z, u)$, $\mathrm{E}(z, u)$ étant le polynome de $u(z)$ à coefficients des fonctions méromorphes donnant les valeurs de $v(z)$.

Nous supposons la limite inférieure placée en un point analytique déterminé (z_0, u_0), et l'intégration effectuée le long d'une certaine courbe tracée sur la surface S et aboutissant au point analytique (z, u) qui forme la limite supérieure. Il est évident que l'on peut établir pour cette intégrale des propriétés analogues à celles d'une intégrale abélienne attachée à une fonction algébrique :

1° *la valeur de l'intégrale* $\mathrm{I}(z, u)$ *dépend, du chemin d'intégration allant du point* (z_0, u_0) *au point* (z, u); *quand, ces points restant fixes, le chemin d'intégration varie, les différentes valeurs que peut acquérir l'intégrale ne diffèrent que par certaines constantes additives, les modules de périodicité.*

2° *Les périodes sont de deux sortes. Les unes, périodes polaires, proviennent de points singuliers logarithmiques de* $\mathrm{I}(z, u)$; *elles peuvent être en nombre infini.* Les autres périodes, *cycliques en nombre* $\leqq 2p$, *proviennent de coupures* (¹) a_1, $a_2, \ldots, a_p$; $b_1, b_2, \ldots, b_p$.

3° *Si l'intégrale* $\int_{v_0}^{v} v\, dz = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \mathrm{E}(z, u)\, dz$ *est dépourvue de points critiques*

(¹) Ces coupures ont la même signification que celles du paragraphe 24.

logarithmiques, elle s'exprime par une combinaison linéaire à coefficients constants des $2p$ *intégrales abéliennes* $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{2p}$ [*attachées à la fonction algébrique* $u(z)$] *formant un système fondamental augmenté d'une fonction algébroïde uniforme sur la surface* S.

27. Passons maintenant à l'étude des intégrales pseudo-abéliennes. Nous gardons les notations du paragraphe 24. Soit

$$\mathrm{I} = \int \mathrm{R}(z, u)\, dz$$

une intégrale abélienne attachée à la courbe $\mathrm{F}(u, z) = 0$, où $\mathrm{R}(z, u)$ est une fonction rationnelle de z et de u. Supposons que l'intégrale considérée s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes (ou algébriques), d'ordre fini ou infini, uniformes sur la surface S, c'est-à-dire que l'on ait

$$(1) \qquad \mathrm{I} = \int \mathrm{R}(z, u)\, dz = \mathrm{C}_1 \log v_1(z) + \mathrm{C}_2 \log v_2(z) + \ldots + \mathrm{C}_\mu \log v_\mu(z),$$

$\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\mu$ étant des constantes, et $v_1(z), v_2(z), \ldots, v_\mu(z)$ étant des fonctions algébroïdes uniformes sur la surface S. Les points singuliers de l'intégrale I, qui sont à distance finie, proviennent de zéros et de pôles des fonctions $v_i(z)$. Donc, cette intégrale doit être dépourvue de pôles à distance finie; *tous les points singuliers à distance finie de* I *sont des points singuliers logarithmiques*. Il est loisible d'admettre qu'il n'existe entre les constantes $\mathrm{C}_1, \mathrm{C}_2, \ldots, \mathrm{C}_\mu$, aucune relation linéaire et homogène à coefficients entiers; si, en effet, il existait une pareille relation

$$m_1 \mathrm{C}_1 + m_2 \mathrm{C}_2 + \ldots + m_\mu \mathrm{C}_\mu = 0,$$

où l'un au moins des coefficients, m_μ par exemple, est différent de zéro, on en tirerait

$$\mathrm{C}_\mu = -\frac{m_1 \mathrm{C}_1 + m_2 \mathrm{C}_2 + \ldots + m_{\mu-1} \mathrm{C}_{\mu-1}}{m_\mu},$$

et l'expression (1) pourrait s'écrire

$$\mathrm{I} = \frac{\mathrm{C}_1}{m_\mu} \log\left(\frac{v_1^{m_\mu}}{v_\mu^{m_1}}\right) + \ldots + \frac{\mathrm{C}_{\mu-1}}{m_\mu} \log\left(\frac{v_{\mu-1}^{m_\mu}}{v_\mu^{m_{\mu-1}}}\right).$$

La nouvelle formule, dans laquelle les fonctions figurant avec leur logarithme sont évidemment des fonctions algébroïdes uniformes sur S, contient un logarithme de moins que la précédente. Si donc on suppose qu'on a réduit, de cette façon, autant que possible le nombre des logarithmes, il ne peut exister entre les constantes C_i aucune relation de la forme indiquée; *c'est ce que nous admettrons désormais*.

Démontrons que chacune des fonctions $v_i(z)$ a un nombre fini de zéros et de pôles. Pour cela, étant donné que le nombre des points singuliers d'une intégrale abélienne est fini, il suffit de démontrer que chaque zéro ou pôle d'une ou plusieurs fonctions v_i est un point singulier pour l'intégrale $\int R(z, u)\,dz$. Soit (ξ, η) un zéro ou pôle des fonctions $v_1, v_2, \ldots, v_\lambda$ $(\lambda \leqq \mu)$ d'ordre respectivement $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$; $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_\lambda$ sont des nombres entiers, positifs ou négatifs. Dans le domaine du point (ξ, η), on a

$$\begin{aligned}\int R(z, u)\,dz = {} & C_1 \log(z-\xi)^{\nu_1} + C_2 \log(z-\xi)^{\nu_2} + \ldots + C_\lambda \log(z-\xi)^{\nu_\lambda} \\ & + \text{fonction régulière} = (C_1\nu_1 + C_2\nu_2 + \ldots + C_\lambda\nu_\lambda)\log(z-a) \\ & + \text{fonction régulière}.\end{aligned}$$

La relation écrite ci-dessus montre, étant donné que la quantité $C_1\nu_1 + \ldots + C_\lambda\nu_\lambda$ ne peut être égal à zéro (après la supposition faite sur les C_i), que le point (ξ, η) est un point singulier logarithmique pour l'intégrale $\int R(z, u)\,dz$. Notre proposition est donc établie.

On en conclut que la dérivée logarithmique $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)} = \gamma_i(z)$ est une fonction ayant un nombre fini de pôles et, par conséquent, un point ∞_1 à l'infini de la surface S est pour la fonction $\gamma_i(z)$ ou un point régulier, ou un point singulier isolé; on peut parler du développement et en série de $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ dans le domaine d'un point quelconque, à distance finie ou infinie, de la surface S.

Soient $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_\rho, \eta_\rho)$ l'ensemble des zéros et des pôles à distance finie de la fonction $v_i(z)$ d'ordre respectivement $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\rho$; ces nombres entiers sont les résidus de la fonction $\gamma_i(z) = \frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ respectivement au points $(\xi_1, \eta_1), (\xi_2, \eta_2), \ldots, (\xi_\rho, \eta_\rho)$.

Soient aussi $s_1, s_2, \ldots, s_\sigma$ les résidus de la fonction $\gamma_i(z)$ respectivement aux points à l'infini $\infty_1, \infty_2, \ldots, \infty_\sigma$ de la surface S; *les nombres s_i sont entiers*. En effet, le résidu s_i est égal à la valeur de l'intégrale $\frac{1}{2\pi i}\int \frac{v_i'}{v_i}dz = \frac{1}{2\pi i}\int d[\log v_i(z)]$, prise dans le sens positif sur une circonférence tracée dans le domaine du point ∞_i et entourant ce point, cette circonférence étant parcourue un nombre de fois égal au nombre des feuillets passant par le point ∞_i; or, il est connu que la valeur de cette intégrale est un nombre entier.

La fonction $\frac{v_i'(z)}{v_i(z)}$ étant uniforme sur la surface S et ayant un nombre fini de points singuliers, la somme de ses résidus en tous les points de S doit être égale à zéro; donc, on a

$$\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_\rho + s_1 + s_2 + \ldots + s_\sigma = 0. \tag{2}$$

Appelons v_{i_0} la valeur de $v_i(z)$ au point (z_0, u_0); on a

$$\log \frac{v_i}{v_{i_0}} = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{v_i'}{v_i}\, dz.$$

La différence

$$J = \int_{(z_0, u_0)}^{(z, u)} \frac{v_i'}{v_i}\, dz - \mu_1 \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_1, \eta_1} - \mu_2 \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_2, \eta_2} - \ldots - \mu_\rho \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_\rho, \eta_\rho} - s_1 \Pi_{\infty_\sigma}^{\infty_1} - \ldots - s_{\sigma-1} \Pi_{\infty_\sigma}^{\infty_{\sigma-1}}$$

est dépourvue de points singuliers logarithmiques à distance finie ou infinie (et de pôles à distance finie). Soit $Z^{(\mu_1)}(z, u; \infty_1)$, $Z^{(\mu_2)}(z, u; \infty_1)$, $\ldots$, $Z^{\mu_p}(z, u; \infty_1)$, $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$, $\ldots$, $W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental formé par p intégrales normales de deuxième espèce admettant comme pôle un des points à l'infini, le ∞_1 par exemple, et les p intégrales normales de première espèce W^1, $\ldots$, W^p; nous avons vu (§ 25) qu'un tel système existe. L'intégrale J, dépourvue des points singuliers logarithmiques, peut s'exprimer (§ 26) par une combinaison linéaire à coefficients constants de ces $2p$ intégrales $Z^{(\mu_1)}$, $\ldots$, $Z^{(\mu_p)}$, $W^{(1)}$, $\ldots$, $W^{(p)}$ augmentée d'une fonction algébroïde $g_i(z)$ uniforme sur la surface S; *on voit tout de suite que cette fonction $g_i(z)$ ne peut avoir de pôles à distance finie.* Donc, on a

$$\log \frac{v_i}{v_{i_0}} = \sum_{j=1}^{\rho} \mu_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_j, \eta_j} + \sum_{j=1}^{\sigma-1} s_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\infty_j} + \sum_{j=1}^{p} \varepsilon_j W^{(j)} + \sum_{i=1}^{p} \delta_j Z^{(\mu_j)}(z, u; \infty_1) + g_i(z),$$

d'où

$$(3) \qquad v_i(z) = v_{i_0}\, e^{\sum_1^{e} \mu_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_j, \eta_j} + \sum_1^{\sigma-1} s_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\infty_j} + \sum_1^{p} \varepsilon_j W^{(j)} + \sum_1^{p} \delta_j Z^{(\mu_j)}(z, u; \infty_1)}\, e^{g_i(z)},$$

où les ε_j, δ_j sont des constantes; les fonctions $v_i(z)$, $e^{g_i(z)}$ étant des algébroïdes uniformes sur la surface S, la fonction

$$(4) \qquad A_i(z) = v_{i_0}\, e^{\Sigma \mu_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_j, \eta_j} + \ldots} = v_{i_0}\, e^{B_i(z)} \qquad (B_i = \Sigma \mu_j \Pi_{\infty_\sigma}^{\xi_j, \eta_j} + \ldots)$$

est aussi une fonction algébroïde uniforme sur S, c'est-à-dire toutes les périodes que la fonction $B_i(z)$ puisse avoir sont des multiples entiers de $2\pi i$. Les points singuliers à distance finie de $B_i(z)$ étant des points critiques logarithmiques et ceux à distance infinie étant des pôles ou (et) des points critiques logarithmiques, nous concluons que l'algébroïde $A_i(z)$ *est d'ordre fini. Ainsi nous avons démontré que les fonctions* $v_i(z)$ $(i = 1, 2, \ldots, \mu)$ *figurant dans la relation* (1) *sont de la forme*

$$(5) \qquad v_i(z) = A_i(z)\, e^{g_i(z)} \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

où $A_i(z)$ *est une algébroïde d'ordre fini uniforme sur* S, *et* $g_i(z)$ *est une fonction algébroïde dépourvue de pôles à distance finie uniforme sur la surface* S.

La relation (1) peut s'écrire

$$\int R(z, u)\,dz = C_1 \log A_1(z) + C_2 \log A_2(z) + \ldots + C_\mu \log A_\mu(z) + C_1 g_1(z) + C_2 g_2(z) + \ldots + C_\mu g_\mu(z).$$

Les fonctions $\log A_i(z) = \int \frac{A'_i(z)}{A_i(z)} dz$ étant des intégrales abéliennes, car les $A_i(z)$ sont d'ordre fini et ont un nombre fini de zéros, de pôles et de points de ramification, la relation ci-dessus montre que la fonction

$$g(z) = C_1 g_1(z) + C_2 g_2(z) + \ldots + g_\mu(z)$$

est dépourvue de points singuliers essentiels; donc, cette fonction $g(z)$ est une fonction algébrique uniforme sur S *et dépourvue de pôles, à distance finie.* En écrivant maintenant la relation (5) sous la forme

$$\int R(z, u)\,dz = C_1 \log A_1(z) + C_2 \log A_2(z) + \ldots + C_\mu \log[A_\mu(z)\, e^{g(z)}], \tag{6}$$

nous pouvons énoncer ce théorème général :

THÉORÈME. — *Si l'intégrale $I = \int R(z, u)\,dz$ peut être exprimée au moyen d'une somme de logarithmes des fonctions $v_i(z)$ algébroïdes uniformes sur* S, *on pourra toujours supposer que ces fonctions $v_i(z)$ sont d'ordre fini et qu'elles ont un nombre fini de pôles et de zéros.*

28. *Remarque.* — La condition imposée *a priori*, de l'uniformité sur S des fonctions $v_i(z)$ n'est pas indispensable : en effet, on peut démontrer que, si l'intégrale considérée s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes, on pourra toujours supposer que ces fonctions sont uniformes sur S. Voici une démonstration de cette proposition dans le cas particulier où l'intégrale $I = \int R(z, u)\,dz$ s'exprime par un seul logarithme d'une fonction algébroïde $v(z)$ [1], de sorte que l'on ait

$$I = \int R(z, u)\,dz = C \log v(z) \qquad (C = \text{const.}) \tag{a}$$

On a

$$v(z) = e^{\frac{1}{C}\int R(z, u)\,dz};$$

la fonction algébroïde $v(z)$ ayant, en chaque point z, un nombre fini de déterminations, toutes les périodes de l'intégrale $J = \frac{1}{C}\int R(z, u)$ doivent être

---

[1] On remarquera que cette fonction est nécessairement d'ordre fini et a un nombre fini de zéros et de pôles.

commensurables avec $2\pi i$ et, par suite, il existe un entier n tel que toutes les périodes de l'intégrale $n\mathrm{J}$ soient des multiples entiers de $2\pi i$. Pour un tel nombre n les différentes valeurs de $n\mathrm{J} = \frac{n}{\mathrm{C}}\int \mathrm{R}(z, u)\,dz$, en chaque point analytique (z, u), ne diffèrent que par des multiples entiers de $2\pi i$ et, par conséquent, la fonction $[\varphi(z)]^n = e^{\frac{n}{\mathrm{C}}\int \mathrm{R}(z,u)\,dz} = \mathrm{V}(z)$ est une fonction uniforme du point (z, u); la démonstration s'achève en écrivant la relation (a) sous la forme

$$(b) \qquad \int \mathrm{R}(z, u)\,dz = \frac{\mathrm{C}}{n}\log[\varphi(z)]^n = \frac{\mathrm{C}}{n}\log \mathrm{V}(z).$$

29. Comme application de la théorie précédente, traitons le problème suivant (extension du problème d'Abel; § 21) :

Étant donné un polynome $\mathrm{R}(z)$, *premier avec sa dérivée, trouver la forme générale du polynome* $\rho(z)$ *tel que l'intégrale* $\int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}dz$ *puisse s'exprimer au moyen du logarithme d'une fonction algébroïde transcendante.*

Soit $\rho(z)$ un polynome tel que l'on ait

$$(1) \qquad \int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}dz = \mathrm{A}\log\varphi(z) \qquad (\mathrm{A}\ \text{const.}),$$

où $\varphi(z)$ désigne une fonction algébroïde, nécessairement d'ordre fini, que l'on peut supposer (§ 28), *et nous le supposons*, uniforme sur la surface S, à deux feuillets, correspondant à la fonction $u(z) = \sqrt{\mathrm{R}(z)}$. En prenant en considération que l'intégrale $\int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}dz$ est dépourvue de singularités à distance finie, on démontre aisément que la fonction $\varphi(z)$ doit être de la forme

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u(z) \qquad [u(z) = \sqrt{\mathrm{R}(z)}],$$

où $f_1(z)$, $f_2(z)$ désignent des fonctions entières d'ordre fini.

Soient $u_1(z)$, $u_2(z) = -u_1(z)$ les deux valeurs, en un point quelconque z, de $u(z)$ et $\varphi_1(z) = f_1(z) + f_2(z)u_1(z)$, $\varphi_2(z) = f_1(z) + f_2(z)u_2(z)$ les deux valeurs correspondantes de $\varphi(z)$; d'après la relation (1), on a

$$\frac{\varphi_1'(z)}{\varphi_1(z)} + \frac{\varphi_2'(z)}{\varphi_2(z)} \equiv \frac{1}{\mathrm{A}}\left[\frac{\rho(z)}{u_1(z)} + \frac{\rho(z)}{u_2(z)}\right] \equiv 0,$$

et, par suite, le produit

$$[f_1(z) + f_2(z)\,u_1(z)][f_1(z) + f_2(z)\,u_2(z)] \equiv f_1^2(z) - f_2^2(z)\,\mathrm{R}(z)$$

doit être égal à une constante que l'on peut supposer égale à l'unité. Donc, les fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ doivent vérifier l'identité

$$f_1^2(z) - f_2^2(z)\,\mathrm{R}(z) \equiv 1. \tag{2}$$

Inversement, si deux fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$, d'ordre fini, donnent lieu à l'identité (2), on en déduit une solution du problème proposé. En effet, soient $f_1(z)$, $f_2(z)$ deux telles fonctions. La fonction

$$\varphi(z) = f_1(z) + f_2(z)\,u(z) \qquad (u = \sqrt{\mathrm{R}}),$$

est une algébroïde d'ordre fini, dépourvue de zéros et de pôles à distance finie, et ayant un nombre fini de points de ramification; par conséquent, sa dérivée logarithmique doit être une fonction algébrique. Cherchons la forme de cette fonction algébrique : on a

$$\begin{aligned}
\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} &= \frac{f_1' + f_2' u + \dfrac{1}{2u} f_2 \mathrm{R}'}{(f_1 + f_2 u)(f_1 - f_2 u)}(f_1 - f_2 u) = f_1 f_1' - f_2 f_2' \mathrm{R} - \frac{1}{2} f_2^2 \mathrm{R}' \\
&\quad + f_1 f_2' u + \frac{1}{2u} f_1 f_2 \mathrm{R}' - f_1' f_2 u = \frac{1}{2}[f_1^2 - f_2^2 \mathrm{R}]' \\
&\quad + \frac{1}{u}\left[(f_1 f_2' - f_1' f_2)\mathrm{R} + \frac{1}{2} f_1 f_2 \mathrm{R}'\right] = \frac{1}{u}\left[(f_1 f_2' - f_1' f_2)\mathrm{R} + \frac{1}{2} f_1 f_2 \mathrm{R}'\right];
\end{aligned}$$

puisque $\dfrac{\varphi'(z)}{\varphi(z)}$ est une fonction algébrique, la fonction qui entre dans le dernier crochet doit être un polynome $\rho(z)$. On a ainsi

$$\frac{\varphi'(z)}{\varphi(z)} = \frac{\rho(z)}{u(z)}, \qquad \log \varphi(z) = \int \frac{\rho(z)}{\sqrt{\mathrm{R}(z)}}\,dz = \log\left[f_1(z) + f_2(z)\sqrt{\mathrm{R}(z)}\right].$$

Soit s le degré du polynome $\mathrm{R}(z)$, σ celui du polynome $\rho(z)$ correspondant à un couple de fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre m vérifiant l'identité (2); on a

$$f_1(z) + f_2(z)\,u(z) = e^{\int \frac{\rho(z)\,dz}{u(z)}}. \tag{3}$$

Pour $|z| = r \to \infty$, le maximum de la partie réelle de l'intégrale $\displaystyle\int \frac{\rho(z)\,dz}{u(z)}$ étant de l'ordre de $r^{\sigma - \frac{s}{2} + 1}$, la relation ci-dessus (3) nous donne

$$m = \sigma - \frac{s}{2} + 1.$$

On en conclut que m doit être un nombre entier si s est pair, et de la forme $m = \dfrac{2l+1}{2}$ (l entier non négatif), si s est impair. Par exemple, il n'existe pas de fonctions entières f_1, f_2, dont l'ordre est un nombre entier, vérifiant l'identité (1), si $s = 2p + 1$ (p entier).

Dans la suite, nous distinguons deux cas suivant la parité de s.

a. Soit $s = 2p + 2$.

Il y a deux points analytiques à l'infini ∞_1, ∞_2. Soient

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\infty_1) + C_i\left(\frac{1}{z}\right) + \frac{C_i^1}{1.2}\left(\frac{1}{z}\right)^2 + \ldots + \frac{C_i^{(p-1)}}{p!}\left(\frac{1}{z}\right)^p + \ldots \qquad (i = 1, 2, \ldots, p),$$

les développements de p intégrales normales de première espèce, attachées à $u(z) = \sqrt{R(z)}$, dans le domaine du point ∞_1; les modules de périodicité des intégrales $\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u)$, $Z(z, u; \infty_1)$, $Z^{(1)}(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$, ... le long d'une coupure $b_i (i = 1, 2, \ldots, p)$ sont respectivement

$$W^{(i)}(\infty_1) - W^{(i)}(\infty_2), \quad -C_i, \quad -C_i^{(1)}, \quad \ldots, \quad -C_i^{(p-1)}, \quad \ldots.$$

Il est facile de démontrer que le déterminant

$$\Delta = \begin{vmatrix} C_1 & C_1^{(1)} & \ldots & C_1^{(p-1)} \\ C_2 & C_2^{(1)} & \ldots & C_2^{(p-1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_p & C_p^{(1)} & \ldots & C_p^{(p-1)} \end{vmatrix}$$

n'est pas nul.

Supposons, en effet, $\Delta = 0$; on pourrait trouver p constantes $A_1, A_2, \ldots, A_p$, dont une au moins n'est pas nulle, telles que la fonction

$$E(z, u) = A_1 Z(z, u; \infty_1) + A_2 Z^{(1)}(z, u; \infty_2) + \ldots + A_p Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1),$$

soit dépourvue de périodes. La fonction $E(z, u)$ est une fonction rationnelle de z et de $u = \sqrt{R(z)}$ n'ayant pour pôle que le point ∞_1, d'ordre p au plus. Mais, une telle fonction ne peut pas exister. En effet, autrement on aurait

$$E(z, u) = P(z) + Q(z)\sqrt{R(z)} \qquad [P(z), Q(z) \text{ polynomes}; Q(z) \not\equiv 0];$$

or l'un des points ∞_1, ∞_2 est pôle d'ordre $p + 1$ au moins pour $E(z, u)$. Donc, les intégrales $Z(z, u; \infty_1)$, $Z^{(1)}(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$ forment avec les intégrales $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u)$, ..., $W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental. Le résidu de la fonction $\frac{\rho(z)}{u(z)}$ à un point quelconque à distance finie étant nul, soient μ, $-\mu$ ses résidus aux points ∞_1, ∞_2. La différence

$$\int \frac{\rho(z)}{u(z)} dz - \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u),$$

dépourvue de points singuliers logarithmiques, à distance finie ou infinie, et de pôles à distance finie, peut s'exprimer par une combinaison linéaire à coefficients constants de $2p$ intégrales $Z(z, u; \infty_1)$, ..., $Z^{(p-1)}(z, u; \infty_1)$, $W^{(1)}(z, u)$, ..., $W^p(z, u)$ augmentée d'une fonction rationnelle de z et de $u(z)$

dépourvue de pôles à distance finie; on a, par conséquent,

$$\int \frac{\rho(z, u)}{u(z)} dz = \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z, u) + \delta Z(z, u; \infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z, u; \infty_1) + P(z) + Q(z) u(z),$$

où les μ, ε_i, δ, δ_i sont des constantes et, $P(z)$, $Q(z)$ sont des polynomes. La formule (3) nous donne

$$(4) \qquad f_1(z) + f_2(z) u(z) = e^{\mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z, u) + \delta Z(z, u; \infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z, u; \infty_1) + P(z) + Q(z) u(z)}.$$

La formule (4) montre immédiatement que les coefficients μ, ε_i, δ, δ_i ne peuvent pas être pris arbitrairement. Il faut, en effet, que les périodes de l'exposant $G = \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u) + \ldots$, figurant dans cette formule, soient toutes des multiples entiers de $2\pi i$. On montre tout de suite que μ doit être entier. La période de G relative à une coupure a_i $(i = 1, 2, \ldots, p)$ est $2\pi i \varepsilon_i$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$ doivent donc être entiers. La période de G relative à une coupure b_i $(j = 1, \ldots, p)$ est (§ 24)

$$\mu [W^{(j)}(\infty_1) - W^{(j)}(\infty_2)] + 2 \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \alpha_{ij} - \delta C_j - \delta_1 C_j^{(1)} - \ldots - \delta_{p-1} C_j^{(p-1)};$$

les coefficients $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ doivent donc vérifier les p relations

$$(5) \qquad \delta C_j + \delta_1 C_j^{(1)} + \ldots + \delta_{p-1} C_j^{(p-1)} = \mu [W^{(j)}(\infty_1) - W^{(j)}(\infty_2)] + 2 \sum_{i=1}^p \varepsilon_i \alpha_{ij} + 2 N_j \pi i$$
$$(N_j \text{ entier}; j = 1, 2, \ldots, p).$$

Le déterminant $\Delta = \Sigma \pm C_1 C_2^{(1)} \ldots C_p^{(p-1)}$ n'étant pas nul, les relations (5) déterminent les coefficients $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ en fonction de $2p + 1$ nombres *entiers* (arbitraires) μ, $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_p$; $N_1, \ldots, N_p$; les intégrales $W^{(j)}$, figurant aux deuxièmes membres de ces relations sont toujours supposées prises suivant des chemins qui ne rencontrent pas les coupures. Nous allons montrer, grâce à la relation $f_1^2(z) - f_2^2(z) R(z) \equiv 1$, que le polynome $P(z)$ entrant dans (4) est déterminé, à une constante près, chaque fois qu'on a déterminé un système de valeurs $\delta, \delta_1, \ldots, \delta_{p-1}$ vérifiant les relations (5).

Soient $u_1(z)$ et $u_2(z) = -u_1(z)$ les deux déterminations de $u(z)$ correspondant à une même valeur de z; on doit avoir,

$$e^{G(z, u_1) + G(z, u_2)} \equiv 1$$

$$\left[G(z, u) = \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z, u) + \delta Z(z, u; \infty_1) + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z, u; \infty_1) + P(z) + Q(z) u(z) \right]$$

Il est

$$G(z, u_1) + G(z, u_2) = C + \delta z + 1\,!\,\delta_1 z^2 + \ldots + (p-1)\,!\,\delta_{p-1} z^p + 2\,P(z) \qquad (C \text{ const});$$

le polynome $P(z)$ doit donc être de la forme

$$P(z) = C_1 - \frac{1}{2}(\delta z + 1\,!\,\delta_1 z^2 + \ldots + (p-1)\,!\,\delta_{p-1} z^p) \qquad (C_1 \text{ const}).$$

La forme générale de l'exposant $G(z)$ est

$$(6) \quad \begin{aligned} G(z, u) = C_1 + \mu \Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z_1, u) + \sum_1^p \varepsilon_i W^{(i)}(z, u) + \delta Z(z, u; \infty_1) \\ + \sum_1^{p-1} \delta_i Z^{(i)}(z, u; \infty_1) - \frac{1}{2}[\delta z + \ldots + (p-1)\,!\,\delta_{p-1} z^p] + Q(z)\,u(z), \end{aligned}$$

où les μ, ε_i sont des entiers arbitraires, les δ, δ_i sont des nombres vérifiant les relations (5), et $Q(z)$ est un polynome arbitraire; en supposant que les intégrales $\Pi_{\infty_2}^{\infty_1}(z, u)$, $W^{(i)}(z, u)$, $Z^{(i)}(z, u; \infty_1)$ soient prises suivant des chemins partant par un point déterminé (z_0, u_0), on choisira une valeur pour C_1 telle que l'on ait $e^{G(z, u_1)+G(z, u_2)} \equiv 1$. Les fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$, d'ordre fini, vérifiant l'identité (2) et le polynome $\rho(z)$ donnant lieu à la relation (1) sont donnés par les formules

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} & f_1(z) = \frac{e^{G(z, u_1)} + e^{G(z, u_2)}}{2}, \qquad f_2(z) = \frac{e^{G(z, u_1)} - e^{G(z, u_2)}}{2\,u_1(z)}, \\ & \rho(z) = C\,u(z)\,\frac{d\,G(z, u)}{du} \qquad (C \text{ const}). \end{aligned} \right.$$

Du fait que les nombres μ, ε_i, N_j doivent être entiers, l'annulation du coefficient δ_{p-1}, déterminé par les relations (5), doit être considéré comme un cas exceptionnel; en général on a $\delta_{p-1} \neq 0$ et, par conséquent, *l'ordre m des fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$, déterminées par les relations* (7) *est* $\geqq p$ (¹).

b. Soit $s = 2p + 1$; m doit être de la forme $m = \frac{2l+1}{2}$.

Il n'y a qu'un point analytique à l'infini ∞ et, tous les résidus de la fonction $\frac{\rho(z)}{u(z)}$, à distance finie ou infinie, sont nuls $\left[\text{l'intégrale } \int \frac{\rho\,dz}{u(z)} \text{ est dépourvue de points singuliers logarithmiques}\right]$. Soit

$$W^{(i)}(z, u) = W^{(i)}(\infty) + d_i\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{1}{2}} + \frac{d_i^{(2)}}{3\,!}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{3}{2}} + \ldots + \frac{d_i^{(2p-2)}}{(2p-1)\,!}\left(\frac{1}{z}\right)^{\frac{2p-1}{2}} + \ldots$$
$$(i = 1, 2, \ldots, p),$$

(¹) Pour que m soit égal à p il faut et il suffit de prendre, dans la formule (6), $Q(z) \equiv 0$.

les développements de p intégrales $W^{(i)}(z, u)$, attachées à $u=\sqrt{R(z)}$, dans le domaine du point ∞; les modules de périodicité des intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty), \ldots, Z^{(2p-2)}(z, u)$, le long d'une coupure b_i $(i=1, 2, \ldots, p)$ sont respectivement $-d_i$, $-d_i^{(2)}, \ldots, d_i^{(2p-2)}$. On démontre aisément aussi que le déterminant

$$\Delta = \Sigma \pm d_1\, d_2^{(2)} \ldots d_2^{(2p-2)}$$

est différent de zéro; les intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty), \ldots, Z^{(2p-2)}$ forment avec les intégrales $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u), \ldots, W^{(p)}(z, u)$ un système fondamental. Par une marche analogue à celle suivie dans le cas où $s=2p+2$, on trouve la forme générale de $G(z, u)$ (combinaison linéaire à coefficients constants) de $2p$ intégrales $Z(z, u; \infty)$, $Z^{(2)}(z, u; \infty), \ldots, Z^{(2p-2)}(z, u; \infty)$, $W^{(1)}(z, u)$, $W^{(2)}(z, u) \ldots, W^{(p)}(z, u)$ augmentée de $P(z)+Q(z)u(z)$; on déterminera $P(z)$ comme dans le cas où $s=2p+2$ et ensuite, par des formules comme les (7), la forme des $f_1(z)$, $f_2(z)$, $\rho(z)$. L'ordre m des fonctions $f_1(z)$, $f_2(z)$ est (dans le cas $s=2p+1$), en général, $\geqq \frac{2p-1}{2}=p-\frac{1}{2}$.

Nous pouvons donc énoncer le théorème suivant :

THÉORÈME. — *Soit* $R(z)$, *un polynome de degré s premier avec sa dérivée, et p, le genre de la courbe* $u^2-R(z)=0$;

α. *Il n'existe pas, en général, de fonctions entières* $f_1(z)$, $f_2(z)$ *d'ordre* $m<p$, *quand* $s=2p+2$, *ou d'ordre* $m<p-\frac{1}{2}$, *quand* $s=2p+1$, *vérifiant l'identité*

$$f_1^2(z)-f_2^2(z)\,R(z) \equiv 1;$$

il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ *d'ordre* $m \geqq p$ *lorsque* $s=2p+2$, *ou d'ordre* $m \geqq p-\frac{1}{2}$, $m-\frac{1}{2}$ *étant entier, pour* $s=2p+1$, *vérifiant cette identité.*

Signalons qu'il est impossible, du moins dans le cas général, de reconnaître, étant donné $R(z)$, au bout d'un nombre fini d'opérations, s'il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre $m<p$ lorsque $s=2p+2$, ou d'ordre $m<p-\frac{1}{2}$ pour $s=2p+1$, vérifiant la dite identité. Pour le montrer supposons, par exemple, $s=2p+2$ et cherchons, étant donné $R(z)$, s'il existe des fonctions entières $f_1(z)$, $f_2(z)$ d'ordre $m=p-1$ vérifiant l'identité ci-dessus. Pour qu'il existe un tel couple $[f_1(z), f_2(z)]$ il est nécessaire qu'il existe un système de valeurs des nombres *entiers* μ, ε_i, δ_{i-1} $(i=1, \ldots, p;$ $\delta_0=\delta)$ figurant dans (6) tel que la valeur correspondant de δ_{p-1}, tirée des relations (6), soit nulle. En prenant en considération l'expression donnant la valeur de δ, tirée de relations (6), on voit que le problème en question est de même nature que celui-ci : Etant donné des nombres que l'on peut calculer

avec une approximation indéfinie, reconnaître s'il existe une combinaison linéaire et homogène de ces quantités à coefficients entiers égale à zéro; or, il est impossible, dans le cas général, de limiter le nombre des essais à faire pour reconnaître s'il existe une telle combinaison.

30. É. Goursat a établi ce théorème intéressant (¹), soit

$$\int R(z, u)\,dz = c_1 \log b_1 + c_2 \log b_2 + \ldots + c_r \log b_r + W(z)$$

une intégrale abélienne qui s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions rationnelles de z et de u, b_i, et d'une intégrale $W(z)$ de première espèce; on peut toujours supposer que le nombre r de ces logarighmes est égal au nombre minimum des constantes dont les résidus de $R(z, u)$ sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients entiers.

En suivant, avec de légères modifications, la voie (²) de É. Goursat, on démontre le théorème suivant : *soit*

$$(1) \qquad \int R(z, u)\,dz = C_1 \log v_1 + C_2 \log v_2 + \ldots + C_\mu \log v_\mu + J(z, u)$$

une intégrale abélienne qui s'exprime par une somme de logarithmes de fonctions algébroïdes (uniformes sur la surface S*),* v_i*, et d'une intégrale abélienne* $J(z, u)$ *dépourvue de points singuliers logarithmiques; on peut toujours supposer que le nombre* μ *des logarithmes de la formule* (1) *est égal au nombre minimum des constantes dont les résidus de* $R(z, u)$ *sont des combinaisons linéaires et homogènes à coefficients entiers.*

(¹) É. Goursat, *C. R. Acad. Sc.*, t. 118, p. 1894.

(²) *Voir* P. Appell et É. Goursat, *Théorie des fonctions algébriques*, t. I, p. 347-352.