MAURICE FRÉCHET

Positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 211-237
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__211_0>

POSITIONS TYPIQUES

D'UN

ÉLÉMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE

PAR M. MAURICE FRÉCHET.

PRÉFACE.

On a défini, dans le *Calcul des Probabilités*, différentes *valeurs typiques* d'un *nombre* aléatoire (ses valeurs : moyenne, équiprobable, dominante, etc.), qui ont toutes leurs usages en statistique mathématique. Nous avons déjà donné des généralisations de ces valeurs typiques sous le nom de « positions typiques d'un élément aléatoire de nature quelconque ». Laissant de côté la « position moyenne », pour laquelle nous renverrons aux Mémoires cités en note aux pages 211, 227, 228 [note (2)], nous étudierons dans ce qui suit de nouvelles généralisations *des autres* valeurs typiques. Elles seront présentées sous *deux* formes *non équivalentes* qui feront respectivement l'objet de la *Première* et de la *Seconde Partie* de ce Mémoire (1).

PREMIÈRE PARTIE.

LES POSITIONS TYPIQUES D'ORDRE NUL OU INFINI D'UN ÉLEMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE.

RAPPEL.

Nous avons indiqué ailleurs (2) *pourquoi et comment s'impose pratiquement* comme théoriquement l'étude des éléments aléatoires de *nature quelconque*

(1) La Seconde Partie ne faisant pas usage des résultats de la Première, peut être lue indépendamment, sauf pour certaines définitions, d'ailleurs classiques, rappelées dans la Première Partie.

(2) *Les éléments aléatoires de nature quelconque* (*Ann. de l'Institut H. Poincaré*, t. XIV, 1948, p. 215-310).

(nombres, points, courbes, surfaces, etc.). Et nous avons montré qu'on peut les étudier simultanément quand on fait usage de la notion de *distance* de deux éléments abstraits.

Nous considérerons donc dans la suite des éléments X, Y, Z, ..., choisis simultanément au hasard à chaque épreuve parmi les éléments (de nature quelconque), dits « points » d'un ensemble $\mathcal{D}$, dit « espace distancié ». On suppose seulement qu'à chaque couple de « points », x, y, de $\mathcal{D}$ correspond un nombre (x, y) appelé *distance* de ces deux points et tel que :

1° $(x, y) = (y, x) \geqq 0$;
2° $(x, y) = 0$ si x et y ne sont pas distincts et seulement dans ce cas;
3° On a l'inégalité triangulaire

$$(x, y) \leqq (x, z) + (z, x).$$

Cela suffit pour qu'on puisse définir *l'écart moyen* $\theta_\alpha(a)$, *d'ordre* $\alpha > 0$ [1], *de l'élément aléatoire* X avec *l'élément certain* a, par la formule

$$\theta_\alpha(a) = \sqrt[\alpha]{\varphi_\alpha(a)},$$

où

$$(1) \qquad \varphi_\alpha(a) = \mathfrak{M}(X, a)^\alpha \quad [2];$$

$\varphi_\alpha(a)$ peut d'ailleurs être fini ou non. Nous avons démontré note [2], page 211 que l'on a

$$(2) \qquad \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Y)^\alpha} \leqq \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(X, Z)^\alpha} + \sqrt[\alpha]{\mathfrak{M}(Z, Y)^\alpha} \qquad \text{pour} \quad \alpha \geqq 1.$$

D'autre part, on démontre facilement que si a, b, c sont trois nombres quelconques, on a

$$(3) \qquad |b + c|^\alpha \leqq |b|^\alpha + |c|^\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \leqq 1,$$

d'où résulte immédiatement que

$$(4) \qquad \mathfrak{M}(X, Y)^\alpha \leqq \mathfrak{M}(X, Z)^\alpha + \mathfrak{M}(Z, Y)^\alpha \qquad \text{pour} \quad \alpha \leqq 1.$$

En prenant $Y \equiv a$, $Z \equiv b$, il résulte alors de (2) et (4) que si $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ est fini pour au moins une position b du point certain a, il en est de même quel que soit a (que α positif soit $\leqq 1$ ou $\geqq 1$). On dira, dans ce cas, que X est *borné en moyenne d'ordre* α.

Observons qu'on a

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha = \int_0^{+\infty} t^\alpha d\varpi(t),$$

où

$$\varpi(t) = \text{Prob}[(X, a) < t].$$

---

[1] Dans la suite, la lettre α désignera toujours un nombre positif.
[2] Nous désignons par $\mathfrak{M}U$ la valeur moyenne d'un nombre aléatoire U.

Or $\int_2^{+\infty} t^\alpha d\varpi(t)$ est évidemment une fonction non décroissante de α; en particulier, si cette intégrale est finie, elle reste finie en remplaçant α par un nombre inférieur. Par conséquent, si X est borné en moyenne d'ordre α, il l'est aussi pour tout ordre positif $\beta < \alpha$.

Quand X est borné en moyenne d'ordre α, nous appellerons *position typique d'ordre* α de X, tout point certain γ_α de $\mathcal{D}$ (s'il en existe) tel que $\mathfrak{M}(\mathrm{X}, a)^\alpha$ atteigne sa borne inférieure au point γ_α. On peut, par un passage à la limite convenablement défini (voir p. 228), étendre cette définition au cas où X n'est pas borné en moyenne d'ordre α.

INTRODUCTION.

Il est clair qu'on ne peut appliquer directement ces définitions pour $\alpha = 0$, ni pour $\alpha = +\infty$. Dans le cas où X est un *nombre* aléatoire, on a cependant déjà interprété le milieu de l'intervalle de variation de X (quand cet intervalle est fini), comme la valeur typique d'ordre infini de X (Gauss) et les dominantes de X comme ses valeurs typiques d'ordre nul (Charles Jordan), — dans les deux cas au moyen de passages à la limite.

Nous n'avons cependant pas trouvé dans les *Traités de Calcul des Probabilités* ou de *Statistique mathématique*, des énoncés précis de ces interprétations et en ce qui concerne l'ordre nul nous n'y avons même trouvé *aucune démonstration*. En cherchant à combler ces lacunes, nous nous sommes d'ailleurs aperçu que *plusieurs* manières d'employer le *passage à la limite* peuvent se présenter et qu'elles *ne sont pas équivalentes*.

C'est ce que nous avons exposé dans un Mémoire [1] concernant uniquement les *nombres* aléatoires.

Nous nous proposons ici d'étendre ces résultats au cas d'éléments aléatoires de nature quelconque.

L'étude que nous avons faite du problème actuel dans le cas des *nombres* aléatoires, nous a conduit à considérer, sans prétendre épuiser toutes les possibilités, trois modes de passage à la limite.

Trois passages à la limite non équivalents.

Première définition. — S'il y a une limite de l'écart moyen $\theta_\alpha(a)$ d'ordre α de X avec le point certain a, quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), on cherche la borne infé-

---

[1] *Les valeurs typiques d'ordre nul et d'ordre infini d'un nombre aléatoire* (*Revue Institut Intern. Statistique*, 1948).

Ce Mémoire a été résumé sous le même titre dans les *Comptes rendus du Colloque International sur le Calcul des Probabilités et ses applications* tenu à Lyon en juin-juillet 1948 (*Publication du Centre National de la Recherche Scientifique*).

rieure de cette limite quand a varie. Ce sera l'écart moyen d'ordre nul (ou infini) de X (tout court). Et si cette borne inférieure est atteinte pour au moins une position particulière de a, celle-ci sera une position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Seconde définition. — Nous verrons que cette première définition ne donne pas toujours un résultat satisfaisant. On cherchera alors la limite de $\varphi_\alpha(a) = [\theta_\alpha(a)]^\alpha$ quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$). Si cette limite existe et si sa borne inférieure est atteinte pour au moins une position de a, on appellera celle-ci position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Troisième définition. — Soit θ_α l'écart moyen d'ordre α de X tout court. S'il tend vers une limite quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), cette limite sera l'écart moyen d'ordre nul (ou infini) de X tout court. Si pour une suite de valeurs de α tendant vers zéro ou l'infini, X a au moins une position typique d'ordre α, γ_α, et si la suite correspondante des points γ_α a une limite quand $\alpha \to 0$ (ou $\to \infty$), cette limite sera une position typique d'ordre nul (ou infini) de X.

Application des trois définitions.

Ordre nul.

Comportement asymptotique de $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$. — Cherchons d'abord la limite de $\varphi_\alpha(a)$ quand $\alpha \to 0$. La question ne se pose que s'il existe au moins une valeur α_0 de α pour laquelle X soit borné en moyenne d'ordre α_0 (et alors comme on l'a vu, de tout ordre positif $\alpha \leqq \alpha_0$).

Soit, dans cette hypothèse, ε, un nombre positif arbitraire; on peut trouver un nombre $k > 1$, tel que

$$1 - \varpi(k) < \varepsilon \qquad \text{et} \qquad \int_k^{+\infty} t^{\alpha_0}\, d\varpi(t) < \varepsilon,$$

d'où

$$\int_k^{+\infty} t^\alpha\, d\varpi(t) < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad \alpha < \alpha_0.$$

On peut alors écrire, en désignant par ξ, un nombre positif $< 1 (< k)$,

$$\varphi_\alpha(a) = \int_0^\xi t^\alpha\, d\varpi(t) + \int_\xi^k + \int_k^{+\infty} = \mathrm{I} + \mathrm{J} + \mathrm{K},$$

avec $\mathrm{K} < \varepsilon$ pour $\alpha < \alpha_0$. D'autre part, on a

$$\xi^\alpha[\varpi(k) - \varpi(\xi)] \leqq \mathrm{J} \leqq k^\alpha[1 - \varpi(\xi)].$$

Enfin pour évaluer I, on peut observer que t^α étant nul pour $t = 0$, on ne change pas l'intégrale I en modifiant $\varpi(t)$ pour $t = 0$ seulement, en particulier en remplaçant $\varpi(0)$ par $\varpi(+0)$. On a alors

$$\mathrm{I} \leqq \xi^\alpha[\varpi(\xi) - \varpi(+0)],$$

et pour $\xi < 1$,

$$\mathrm{I} \leqq \varpi(\xi) - \varpi(+0).$$

On peut alors choisir ξ assez petit, indépendamment de α, pour que I soit inférieur à ε. D'où

$$\xi^\alpha[\varpi(k) - \varpi(\xi)] \leqq \varphi_\alpha(a) \leqq 2\varepsilon + k^\alpha[1 - \varpi(\xi)].$$

En prenant α assez petit ($\alpha < \alpha_1 < \alpha_0$) on aura

$$1 - \varepsilon < \xi^\alpha, \qquad k^\alpha < 1 + \varepsilon,$$

d'où

$$\varpi(k) - 1 - \varepsilon[\varpi(k) - \varpi(\xi)] \leqq \varphi_\alpha(a) - [1 - \varpi(\xi)] < 2\varepsilon + \varepsilon[1 - \varpi(\xi)]$$

et par suite,

$$-2\varepsilon < \varphi_\alpha(a) - [1 - \varpi(\xi)] < 3\varepsilon \qquad \text{pour} \quad \alpha < \alpha_1.$$

ε et ξ étant fixés, on a, pour chacune des limites λ de $\varphi_\alpha(a)$ quand $\alpha \to 0$,

$$|\lambda - [1 - \varpi(\xi)]| < 3\varepsilon,$$

et en faisant tendre ε et ξ vers zéro

$$\lambda = 1 - \varpi(+0).$$

D'où enfin

$$\varphi_0(a) = \left[\lim_{\alpha \to 0} \mathfrak{M}(\mathrm{X}, a)^\alpha\right] = 1 - \mathrm{Prob}[\mathrm{X} \equiv a]. \tag{5}$$

Seconde définition. — Ainsi, quand $\alpha \to 0$, $\mathfrak{M}(\mathrm{X}, a)^\alpha \to 1$, sauf peut-être pour les points a qui seraient les positions prises chacune par X avec une probabilité positive. Comme la somme de ces probabilités est $\leqq 1$, il ne peut y avoir qu'un ensemble dénombrable (infini, fini ou vide) de tels points x_1, x_2, ... Dès lors si p_i est la probabilité que X vienne en x_i, on voit que :

ou bien il n'existe pas de points x_i (positions prises chacune par X avec une probabilité positive p_i) et alors

$$\varphi_0(a) = 1$$

partout dans $\mathcal{D}$;

ou bien il existe au moins un point x_i et alors

$$\varphi_0(a) = 1$$

partout dans $\mathcal{D}$, *sauf* quand a est l'un des points x_i, *auquel cas*

$$\varphi_0(x_i) = 1 - p_i.$$

Puisque, alors, il y a au moins un point a pour lequel la fonction $\varpi(t)$ correspondante est discontinue pour $t = 0$, nous appellerons ce cas, le *cas discontinu*.

Dans le premier de ces deux cas, la deuxième définition ne conduit à *aucun résultat*. Au contraire, dans le second cas, le cas discontinu, il y a dans l'ensemble dénombrable des $p_i \leqq 1$, un nombre maximum p (qui est l'un au moins des p_i, mais ne peut être égal qu'à un nombre fini des $p_i : p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots, p_{h_s}$). Il y a donc un nombre fini de *dominantes* (ou positions *les plus probables*) de X, soient $x_{h_1}, x_{h_2}, \ldots, x_{h_s}$ et $\varphi_0(x)$ atteint son minimum en ces points :

Ainsi, *lorsque l'un au moins des points de l'espace distancié $\mathcal{D}$ peut être occupé par* X *avec une probabilité positive, il y a un nombre fini de dominantes de* X *et l'ensemble de ces dominantes est précisément l'ensemble des positions d'ordre nul de* X *au sens de la seconde définition.*

Comportement asymptotique de l'écart moyen d'ordre α. — Pour étudier la première et la troisième définition, nous allons chercher si $\theta_\alpha(a)$ a une limite quand $\alpha \to 0$.

S'il existe au moins un point x_i qu'occupe X avec une probabilité p_i positive, on a simultanément

$$\lim_{\alpha \to 0} \varphi_\alpha(x_i) = 1 - p_i < 1 \qquad \text{et} \qquad \theta_\alpha(x_i) = [\varphi_\alpha(x_i)]^{\frac{1}{\alpha}},$$

d'où

$$\theta_0(x_i) = \lim_{\alpha \to 0} \theta_\alpha(x_i) = 0. \tag{6}$$

Puisque, quel que soit a, $\theta_\alpha(a) \geqq 0$, $\theta_0(a)$ atteint nécessairement son minimum aux points x_i. Donc, si X peut occuper au moins un point x_i avec une probabilité positive, tous les points x_i de cette nature sont positions typiques d'ordre nul au sens de la première définition. Dans ce cas discontinu, la première définition est trop lâche, la seconde définition désigne des positions typiques plus représentatives de X. Nous allons voir que c'est l'inverse dans l'autre cas, que nous pourrons appeler le cas continu.

Sans distinguer immédiatement entre le cas continu et le cas discontinu, soit a une position de X de probabilité nulle, telle donc que la fonction $\varpi(t)$ correspondante soit continue pour $t = 0$. On a vu qu'alors

$$\varphi_\alpha(a) = 1 + \varepsilon_\alpha(a) \qquad \text{avec} \qquad \lim_{\alpha \to 0} \varepsilon_\alpha(a) = 0.$$

Dès lors

$$\mathcal{L}\theta_\alpha(a) = \frac{1}{\alpha} \mathcal{L}[1 + \varepsilon(a)] \quad (^1)$$

dont la partie principale est $\frac{1}{\alpha}\varepsilon_\alpha(a)$. Si cette dernière quantité a une limite $\lambda_0(a)$ quand $\alpha \to 0$, on pourra écrire

$$\lim_{\alpha \to 0} \frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} = \lambda_0(a) = \lim_{\alpha \to 0} \mathcal{L}\theta_\alpha(a).$$

(1) Nous désignerons ici, en général, par $\mathcal{L}y$ le logarithme népérien de y.

On peut écrire

$$\frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} = \mathfrak{M}\left[\frac{(X, a)^\alpha - 1}{\alpha}\right] = \mathfrak{M}\left[\frac{e^{\alpha U} - 1}{\alpha}\right] = \mathfrak{M}\mu(\alpha) \qquad \text{avec} \quad U = \mathcal{L}(X, a) \quad (^1).$$

Or, en posant $z = \alpha U$, on a

$$\frac{d\mu(\alpha)}{d\alpha} = \frac{e^{\alpha u} U \alpha - (e^{\alpha U} - 1)}{\alpha^2} = \frac{e^{\alpha U}}{\alpha^2}[z - 1 + e^{-z}].$$

Mais, quel que soit z, la parenthèse est positive (nulle pour $z = 0$), donc $\mu(\alpha)$ est une fonction croissante de α, qui d'ailleurs, quand $\alpha \to 0$, converge vers $U = \mathcal{L}(X, a)$. Si donc, bien que $U = \mathcal{L}(X. a)$ soit infini pour $X = a$, ce nombre aléatoire a une moyenne finie $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$, on aura d'abord

$$\frac{\varepsilon_\alpha(a)}{\alpha} \geqq \mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a),$$

c'est-à-dire

$$\int_0^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}\right) d\varpi(t) \geqq \int_0^{+\infty} (\mathcal{L} t)\, d\varpi(t).$$

Mais puisque $\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}$ tend vers $\mathcal{L} t$ quand $\alpha \to 0$, la première intégrale qui décroît avec α et reste constamment au moins égale à la seconde, tendra vers la seconde.

En résumé, quand il y a une probabilité nulle que $X = a$ et quand, de plus, $\mathcal{L}(X, a)$ a une moyenne finie, $\theta_\alpha(a)$ a une limite $\theta_0(a)$ quand $\alpha \to 0$ et l'on a

$$(7) \qquad \mathcal{L}\theta_0(a) = \lim_{\alpha \to 0} \mathcal{L}\theta_\alpha(a) = \mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a).$$

Remarque. — Dans le cas particulier, le cas *discret*, où X n'a qu'un nombre fini de positions possibles, alors, si a est distinct de ces positions, $\mathcal{L}(X, a)$ n'a qu'un nombre fini de valeurs, toutes finies, donc $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$ existe et est égal à

$$\sum_{i=1}^{r} p_i \mathcal{L}(x_i, a),$$

où $x_1, x_2, \ldots, x_r$ sont les positions possibles de X, qui ont des probabilités positives $p_1, \ldots, p_r$. D'où

$$(8) \qquad \theta_0(a) = \prod_{i=1}^{r} (x_i, a)^{p_i} \qquad \text{avec} \quad \sum_{i=1}^{r} p_i = 1.$$

De sorte que l'écart moyen d'ordre nul de X avec a est alors moyenne géométrique (pondérée par les probabilités p_i) des distances de a aux positions

(1) *Loc. cit.*, p. 216.

possibles de X. Ceci a lieu d'après (7) pour $a \neq$ des x_i; et nous avons prouvé plus haut l'égalité (6) d'après laquelle cette formule (8) reste exacte pour $a \equiv$ l'un des x_i.

Cas général. — Nous savons déjà que si l'on était dans le cas discontinu, $\theta_0(a)$ serait nul pour $a \equiv$ l'un des x_i.

Qu'on soit ou non dans ce cas, on peut dire, d'après (7), que $\theta_0(a)$ est une sorte de moyenne géométrique de la distance (X, a).

Cas continu. — Si $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$ atteint sa borne inférieure pour $a \equiv \gamma_0$, on pourra dire que γ_0 est une *position typique d'ordre nul de* X *au sens de la première définition.* Mais il n'y a plus, dans le cas continu, *aucune raison d'interpréter une telle position comme une dominante de* X. Cela est bien clair quand il s'agit d'une position qui aurait la probabilité positive maximum, puisque nous nous plaçons maintenant dans le cas continu où aucune position de X n'a une probabilité positive. Mais l'interprétation par les dominantes reste inadmissible si, dans le cas continu, on appelle, comme d'habitude, dominante, une position où la densité de probabilité a sa valeur maxima. On pourrait essayer d'éluder la difficulté en disant qu'on ne voit pas bien dans le cas d'un élément de nature quelconque comment définir la densité. Mais même dans le cas des nombres aléatoires, nous avons montré, dans notre mémoire cité plus haut en note [1], p. 213, que cette interprétation est impossible. Elle l'est pour deux raisons. D'une part, il peut arriver qu'on soit dans le cas continu sans que X ait partout une densité de probabilité et que partout $\mathfrak{M}\mathcal{L}|X - a|$ existe. D'autre part, même parmi les cas où X a partout une densité de probabilité — et nous allons montrer qu'en ce cas $\mathfrak{M}\mathcal{L}|X - a|$ existe (en supposant toujours l'existence de $\mathfrak{M}|X - a|^{\alpha_0}$) — nous avons pu citer un exemple où il y a à la fois une valeur où la densité de probabilité est maximum et une valeur typique d'ordre nul, mais où ces valeurs sont distinctes. Tel est le cas où le nombre aléatoire X reste entre -1 et 2 et a une densité de probabilité

$$\delta(x) = \begin{cases} \dfrac{2}{3}(1 - x) & \text{pour} \quad -1 \leqq x \leqq 0, \\[2ex] \dfrac{2 - x}{3} & \text{pour} \quad 0 \leqq x \leqq 2. \end{cases}$$

La dominante est évidemment égale à zéro et la valeur typique d'ordre nul, au sens de la troisième comme au sens de la première définition, est égale à $0,144 \neq 0$.

Question d'existence. — Il reste important de voir à quelle condition existe la moyenne de $\mathcal{L}(X, a)$

$$\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a) = \int_0^{+\infty} (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t).$$

A priori, il y a doute sur la convergence aux deux limites d'intégration. Cependant, observons que si, comme on l'a supposé jusqu'ici, $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ existe pour au moins une valeur α_0 de α, alors l'intégrale $\int_1^{+\infty}\left(\frac{t^\alpha - 1}{\alpha}\right) d\varpi(t)$ est finie pour $\alpha = \alpha_0$ et la fonction sous le signe $\int$ est supérieure à celle figurant dans $\int_1^{+\infty} (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t)$. Dès lors, cette dernière est finie et nous voyons que pour que $\mathfrak{M}\mathcal{L}(X, a)$ existe il faut et il suffit que l'intégrale $\int_0^1 \mathcal{L}t\, d\varpi(t)$ existe. On peut d'ailleurs donner une condition suffisante (non nécessaire) pour que cette dernière intégrale existe. Il suffit en effet que $\varpi(t)$ ait une dérivée pour $t = 0$. Car, on peut écrire

$$\int_0^1 (\mathcal{L}t)\, d\varpi(t) = [(\mathcal{L}t)\, \varpi(t)]_0^1 - \int_0^\eta \frac{\varpi(t)}{t}\, dt - \int_\eta^1 \frac{\varpi(t)}{t}\, dt,$$

et ε étant donné, on peut choisir η de sorte que

$$\frac{\varpi(t)}{t} = \varpi'(0) + \theta \qquad \text{avec} \quad |\theta| < \varepsilon \qquad \text{pour} \quad 0 < t < \eta < 1.$$

Et alors

$$[(\mathcal{L}t)\, \varpi(t)]_0^1 = -\lim_{t \to 0} \{ t\mathcal{L}t [\varpi'_0 + \theta] \} = 0,$$

$$\int_0^\eta \frac{\varpi(t)}{t}\, dt < [\varpi'(0) + \varepsilon]\, \eta, \qquad \int_\eta^1 \frac{\varpi(t)}{t}\, dt < \frac{1}{\eta}(1 - \eta).$$

Dans le cas où X est un nombre aléatoire, $\varpi'(0)$ existe évidemment si X a une densité de probabilité pour $X = a$.

Valeurs plus typiques *que les dominantes*. — Revenons au cas *discret* où il n'existe qu'un nombre fini de positions de X et soient $x_1, x_2, \ldots, x_r$, celles de ces positions qui ont des probabilités positives $p_1, p_2, \ldots, p_r$. Nous allons montrer que dans ce cas, la troisième définition est plus stricte que la première et plus précisément que si toute position typique d'ordre nul au sens de la *troisième* définition est une dominante, la réciproque n'est pas vraie.

On a ici $\theta_\alpha \leqq \theta_\alpha(x_i) \to 0$ d'après (6). Donc $\theta_\alpha \to 0$ et l'écart moyen d'ordre nul au sens de la troisième définition est nul comme au sens de la première.

La propriété annoncée ci-dessus et la fausseté de sa réciproque sont évidentes dans le cas où il n'existe aucune suite de valeurs de $\alpha \to 0$ pour chacune desquelles il existe une position typique d'ordre α, γ_α, de X. La question n'est intéressante que lorsque, au contraire, il existe une telle suite σ. Plaçons-nous dans ce cas.

On a vu que si x_h est une dominante, $\lim \varphi_\alpha(x_h) = 1 - p$. Donc, pour ε donné et pour α assez petit, ($\alpha < \beta$), on a

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha) \leqq \varphi_\alpha(x_h) < 1 - p + \varepsilon.$$

On peut prendre $\varepsilon > 0$, tel que $0 < 1 - p + \varepsilon < 1$ et, s'il existe des $p_i < p$, on peut même prendre ε, de sorte que $1 - p + \varepsilon$ soit inférieur à tous les $1 - p_i$ correspondants.

Soit, d'autre part, Δ, la plus petite des distances mutuelles des points x_j et $\delta < \frac{\Delta}{2}$. S'il existe un point a à distance au moins égale à δ de tous les x_j, on aura pour ce point

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \geqq \delta^\alpha.$$

Mais il existe $\beta' < \beta$, tel que pour $\alpha < \beta'$, on ait $\delta^\alpha > 1 - p + \varepsilon$, d'où

$$\varphi_\alpha(a) > 1 - p + \varepsilon > \varphi_\alpha(\gamma_\alpha) \qquad \text{pour} \quad \alpha < \beta'.$$

Ainsi γ_α ne peut être un tel point a et par suite, pour $\alpha < \beta'$, il existe au moins un des points x_k, soit x_{i_α} tel que $(\gamma_\alpha, x_{i_\alpha}) < \delta$. Pour $j \neq i_\alpha$, on aura

$$(\gamma_\alpha, x_j) \geqq (x_j, x_{i_\alpha}) - (x_{i_\alpha}, \gamma_\alpha) > \Delta - \delta > \delta,$$

d'où

$$1 - p + \varepsilon > \varphi_\alpha(\gamma_\alpha) = \mathfrak{M}(\gamma_\alpha, X)^\alpha \geqq \sum_{j \neq i_\alpha} p_j (\gamma_\alpha, x_j)^\alpha > \delta^\alpha (1 - p_{i_\alpha}).$$

Quand $\alpha \to 0$ par une suite σ de valeurs, on peut extraire de cette suite une suite pour laquelle i_α, qui ne peut prendre que les valeurs $1, 2, \ldots, r$, garde la même valeur l. Il résulte alors des dernières inégalités qu'on aura

$$1 - p + \varepsilon \geqq 1 - p_l,$$

ce qui, d'après ce qui précède, n'est possible que si $p_l = p$, c'est-à-dire si x_l est une dominante.

Ainsi, en appelant β_δ le nombre β', à tout $\delta < \frac{\Delta}{2}$ correspond une dominante x_l telle que pour la suite σ

$$(\gamma_\alpha, x_l) < \delta \qquad \text{pour} \quad \alpha < \beta_\delta.$$

Prenons $\delta = \frac{\Delta}{n+2}\left(< \frac{\Delta}{2}\right)$; à tout entier n correspondent des valeurs ω_n, l_n de β_δ et de l. On peut supposer $\omega_n < \frac{1}{n}$ et l'on a sur σ

$$(\gamma_\alpha, x_{l_n}) < \frac{\Delta}{n+2} \qquad \text{pour} \quad \alpha < \omega_n.$$

L'une au moins, h, des valeurs de l_n est répétée une infinité de fois quand n croît. Donc l'une au moins, x_h, des dominantes de X est la limite d'une suite des γ_α et par suite est position typique d'ordre nul de X au sens de la troisième définition. Inversement soit γ_0, une telle position, c'est-à-dire la limite d'une suite convergente σ' de points γ_α; de cette suite on pourra, comme pour la suite σ, extraire une suite tendant vers une dominante de X, donc γ_0 est une telle dominante.

Ainsi, quand il existe au moins une suite de valeurs de $\alpha \to 0$ pour chacune desquelles il existe au moins une position typique γ_α d'ordre α de X, alors, au sens de la troisième définition comme de la première : il existe au moins une position typique d'ordre nul de X et toute telle position est une dominante de X. Mais la différence entre les deux définitions intervient dans la réciproque. [Bien entendu, cette différence *disparaît* quand il n'y a qu'*une* dominante. Dans ce cas (mais supposant toujours l'existence de la suite σ des γ_α), alors au sens de la troisième comme de la première définition, il existe une position typique d'ordre nul et *une seule* et *elle coïncide* avec *la* dominante].

Pour montrer que s'il y a plusieurs dominantes, elles ne sont pas toutes nécessairement positions typiques d'ordre nul au sens de la troisième définition, il suffit de considérer le cas d'un *nombre* aléatoire X qui ne peut prendre que les valeurs 0, 8, 9, (par exemple), avec les mêmes probabilités $\frac{1}{3}$. Alors ces trois valeurs sont des dominantes. On peut montrer que pour chaque α, γ_α existe et est une de ces trois valeurs. Mais on a $\varphi_\alpha(0) > \varphi_\alpha(9) > \varphi_\alpha(8)$. Donc $\gamma_\alpha = 8$ et par suite, il existe une position typique $\gamma_0 = 8$ d'ordre nul et une seule et celle-ci est une dominante; mais les deux autres dominantes ne sont pas des positions typiques d'ordre nul au sens de la troisième définition.

On peut d'ailleurs indiquer des cas très généraux où il en est ainsi pour des éléments aléatoires de nature quelconque. Revenons, en effet, au cas d'un élément aléatoire pris au hasard dans un espace distancié $\mathcal{D}$ et qui, dans celui-ci, ne peut prendre qu'un nombre fini de positions. Soit Δ_h la plus petite des distances du point x_h aux autres x_i et D_h la plus grande des distances mutuelles de ces autres x_i. Nous dirons que x_h est une position de X qui est *éloignée* si $\Delta_h > D_h$. Nous voulons montrer que si une dominante de X est éloignée sans être unique, elle ne peut être position typique d'ordre nul au sens de la troisième définition. Autrement dit, une dominante éloignée, x_h ne peut être limite d'une suite σ de positions typiques γ_α d'ordre α tendant vers zéro. Car s'il en était ainsi, il existerait un nombre $\beta < 1$ tel que pour $\alpha < \beta$ les γ_α de la suite σ soit à distance

$$(\gamma_\alpha, x_h) < \frac{1}{2}(\Delta_h - D_h) \tag{9}$$

de x_h. On aurait alors, si h' est une autre dominante,

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha) - \varphi_\alpha(x_{h'}) = \sum_{h \neq i \neq h'} p_i[(\gamma_\alpha, x_i)^\alpha - (x_{h'}, x_i)^\alpha] + p[(\gamma_\alpha, x_h)^\alpha + (\gamma_\alpha, x_{h'})^\alpha - (x_{h'}, x_h)^\alpha].$$

Pour $\alpha < \beta < 1$, le dernier crochet est, d'après (3), $\geqq 0$. Dans le crochet précédent, on a

$$(\gamma_\alpha, x_i) \geqq (x_h, x_i) - (\gamma_\alpha, x_h) > \Delta_h - \frac{1}{2}(\Delta_h - D_h) = \frac{\Delta_h + D_h}{2},$$
$$(x_{h'}, x_i) \leqq D_h,$$

de sorte que ce crochet est supérieur à

$$\left[\left(\frac{\Delta_h+D_h}{2}\right)^\alpha-(D_h)^\alpha\right](1-p_h-p_{h'}).$$

D'après la définition même de D_h, on a supposé implicitement qu'il y a au moins trois positions de X à probabilités positives et l'on a supposé l'existence des deux dominantes x_h, $x_{h'}$. On a donc

$$1-p_h-p_{h'}>0.$$

Finalement, on voit qu'on aurait

$$\varphi_\alpha(\gamma_\alpha)>\varphi_\alpha(x_{h'}) \qquad \text{pour} \quad \alpha<\beta<1,$$

contrairement à la définition de γ_α.

La condition suffisante que nous venons d'établir n'est d'ailleurs pas nécessaire, car dans l'exemple numérique précédent, elle exclurait la valeur 0 comme valeur typique d'ordre nul (au sens de la troisième définition), mais elle n'exclurait pas la valeur 9. Mais ce même exemple a suffit pour montrer que la troisième définition *sélectionne*, parmi les dominantes, certaines d'entre elles. *Cette sélection paraît légitime* : le simple fait que les dominantes distinguées ainsi sont positions typiques d'ordre nul les rend plus typiques que les autres. Ce point de vue est confirmé par l'exclusion des dominantes éloignées qui, par le fait même de cet éloignement, sont intuitivement moins représentatives que les autres, du point aléatoire X. Nous verrons, d'ailleurs, dans la seconde partie de ce Mémoire, page 237, qu'on peut opérer dans le même cas discret, une sélection différente parmi les dominantes.

Ordre infini.

Borne stochastique. — Supposons qu'il existe un sphéroïde de rayon fini ρ et de centre a tel qu'il y ait une probabilité nulle que X soit en dehors de ce sphéroïde. Alors, quel que soit le point b de $\mathcal{D}$, il existe aussi un sphéroïde de centre b ayant la même propriété. [Il suffit évidemment de lui donner le rayon $(a, b)+\rho$]. Nous dirons alors que X est *stochastiquement borné*.

Quand X n'est pas stochastiquement borné, la probabilité p_ρ que $(X, a)>\rho$ est positive quel que soit ρ. On a donc

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \geqq p_\rho \rho^\alpha,$$

d'où

$$\theta_\alpha(a) \geqq \rho\,(p_\rho)^{\frac{1}{\alpha}}. \tag{10}$$

Dès lors quand $\alpha\to\infty$, la plus petite des limites de $\theta_\alpha(a)$ est $\geqq\rho$ et ceci quel que soit ρ. Donc $\theta_\alpha(a)\to\infty$ et par suite aussi $\varphi_\alpha(a)$. Ainsi la *seconde* comme la *première* définition des positions typiques d'ordre infini de X ne sont applicables que *si* X *est borné stochastiquement.*

Plaçons-nous donc dans ce cas, et désignons par ρ_a *la borne inférieure* ($\geqq 0$) *des valeurs de* ρ *telles que* Prob $[(X, a) > \rho]$ soit nulle. On aura aussi évidemment

$$\text{Prob}\,[(X, a) > \rho_a] = 0. \tag{11}$$

L'inégalité (10) subsistera pour tout $\rho < \rho_a$ (si $\rho_a \neq 0$), de sorte que

$$\lim_{\alpha \to \infty} \theta_\alpha(a) \geqq \rho_a \tag{12}$$

(et ceci subsiste même si $\rho_a = 0$).

D'autre part, on a évidemment d'après (11)

$$\mathfrak{M}\,(X, a)^\alpha \leqq (\rho_a)^\alpha,$$

d'où

$$\theta_\alpha(a) \leqq \rho_a. \tag{13}$$

Il résulte finalement de (13) et (12) que

$$\rho_a = \lim_{\alpha \to \infty} . \theta_\alpha(a) = \theta_\infty(a). \tag{14}$$

Soit maintenant R la borne inférieure des rayons ρ_a quand a varie dans $\mathcal{D}$. On pourra appeler R le *rayon de variation de* X. Alors quand X est stochastiquement borné :

l'écart moyen θ_∞ *d'ordre infini de* X (tout court) *est égal au rayon de variation de* X.

Lorsque, de plus, il existe un point a pour lequel $\rho_a = R$, on pourra appeler a un *centre de variation* de X. Alors *s'il existe* un centre de variation de X, *ce centre est une position typique d'ordre infini* γ_∞, *de* X au sens de la première définition et réciproquement.

La seconde définition donne ici un résultat peu satisfaisant. En effet, on a l'égalité (14), avec

$$\varphi_\alpha(a) = [\theta_\alpha(a)]^\alpha.$$

Donc $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ tend vers $+\infty$ pour $\rho_a > 1$ et vers zéro pour $\rho_a < 1$. Dès lors quand le rayon de variation R est plus grand que l'unité, la seconde définition n'est pas plus applicable que quand il était infini. Quand $R < 1$, il y a peut être des points a pour lesquels $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha \to \infty$ et il y en a sûrement d'autres pour lesquels $\mathfrak{M}(X, a)^\alpha$ atteint son minimum qui est nul. Dès lors, l'ensemble des positions typiques d'ordre infini au sens de la seconde définition sera l'ensemble des points a pour lesquels $\rho_a < 1$. (Il faudrait voir ce qui concerne les points a pour lesquels $\rho_a = 1$, mais la seconde définition étant évidemment trop lâche, nous négligeons l'étude de ce cas.)

Par contre, la seconde définition peut rendre service, en la modifiant légèrement, dans le cas où la première est inapplicable, c'est-à-dire où X n'est pas borné stochastiquement.

Il peut arriver dans ce cas que cependant X soit borné en moyenne de tout ordre α (comme cela a lieu, par exemple, pour un *nombre* aléatoire laplacien). Soit alors m_α la borne inférieure de $\varphi_\alpha(a)$ quand a varie; il peut arriver en outre que la plus petite des limites de

$$\mathfrak{M}(X, a)^\alpha - m_\alpha,$$

(qui est $\geqq 0$) quand $\alpha \to \infty$ soit une fonction finie $h(a)$ pour au moins un point a de $\mathcal{D}$. Il sera alors naturel de considérer $h(a)$ comme une « *partie finie* » de $\varphi_\infty(a)$ et d'appeler position typique d'ordre infini de X, toute position de a s'il en existe où $h(a)$ atteint un minimum. Dans le mémoire cité plus haut, nous avons montré que de telles circonstances peuvent se présenter au moins pour les nombres aléatoires, en donnant comme exemple, le cas où X a une densité de probabilité égale à $\frac{e^{-|x|}}{2}$. On trouve que $h(a)$ est nul pour $a = 0$ et infini pour $a \neq 0$.

Une définition géométrique du centre de variation.

Domaine de variation. — Les éléments ou *points* de l'espace distancié $\mathcal{D}$ se partagent en deux catégories : dans l'une figure tout point c de $\mathcal{D}$ qui est le centre d'un sphéroïde σ_c de rayon non nul tel que la probabilité que X appartienne à σ_c soit nulle. Pour tout point p de $\mathcal{D}$ de la seconde catégorie il y a, quel que soit le nombre positif r, une probabilité positive que X soit à distance $\leqq r$ de p.

Nous appellerons *domaine de variation de* X, l'ensemble $\mathcal{D}_1$ des points de la seconde catégorie (que nous appellerons *points positifs* par rapport à X). Il peut d'ailleurs arriver que $\mathcal{D}_1$ soit identique à $\mathcal{D}$. Dans tous les cas, il est clair que $\mathcal{D}_1$ est un ensemble *fermé* (c'est-à-dire contenant ses points limites).

La définition même de $\mathcal{D}_1$ justifie assez bien sa dénomination de domaine de variation. Elle est encore mieux justifiée quand l'espace distancié $\mathcal{D}$ est en même temps *séparable* (c'est-à-dire quand il existe un ensemble dénombrable N de points $r_1, r_2, \ldots, r_n, \ldots$ de $\mathcal{D}$ tel que tout point de $\mathcal{D}$ soit un point de N ou limite d'une suite de points de N). On peut démontrer dans ce cas que la probabilité que X se trouve dans le domaine de variation $\mathcal{D}_1$ est égale à l'unité. Cela est évident si $\mathcal{D}_1$ est identique à $\mathcal{D}$. Dans le cas contraire, il suffit de démontrer que la probabilité que X appartienne à $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ est nulle. Soit x un point de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$; il est centre d'un sphéroïde S de rayon $\lambda \neq 0$, tel que $\{\text{Prob}[X \in S]\} = 0$; il existe au moins un point r_n de N tel que $(x, r_n) < \frac{\lambda}{4}$. Le sphéroïde S' de centre r_n et rayon $\frac{\lambda}{4}$ contient x. Le sphéroïde S'' de centre r_n et de rayon double,

$\frac{\lambda}{2}$ appartient à S, donc $\{\text{Prob}[X \in S'']\} = 0$. Si l'on associe à r_n le sphéroïde S_n de centre r_n dont le rayon est la moitié de la borne supérieure λ_n des rayons R tels que $\{\text{Prob}[(X, r_n) \leqq R]\} = 0$, S_n contiendra S', le rayon de S_n est $\geqq \frac{\lambda}{4}$, donc S_n contient x. Ainsi tout point x de $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ appartient à l'un des sphéroïdes S_n et l'on a, quel que soit n, $\{\text{Prob}[X \in S_n]\} = 0$. Comme la famille des S_n est dénombrable, il en résulte que la probabilité que X appartienne à l'ensemble K des points des S_n est nulle et comme $\mathcal{D} - \mathcal{D}_1$ appartient à K, on a bien $\{\text{Prob}[X \in \mathcal{D} - \mathcal{D}_1]\} = 0$.

Soit, maintenant, ρ'_x la borne supérieure des distances de x aux points de $\mathcal{D}_1$. On a évidemment $\rho'_x \leqq \rho_x$. Or, on n'a $(X, x) > \rho'_x$ que si X n'appartient pas à $\mathcal{D}_1$ et par suite $\{\text{Prob}[(X, x) > \rho'_x]\} = 0$. Mais ceci n'est possible, par définition de ρ_x, que si $\rho'_x \geqq \rho_x$. D'où finalement $\rho_x = \rho'_x$.

Mais alors, on voit que le calcul de ρ_x est devenu indépendant du Calcul des Probabilités, dès qu'on a déterminé $\mathcal{D}_1$; ρ_x est défini *géométriquement* comme la borne inférieure de la distance de x aux points de $\mathcal{D}_1$.

En ce qui concerne la détermination de $\mathcal{D}_1$, si, par exemple, $\mathcal{D}$ est un espace cartésien à un nombre fini r de dimensions, $\mathcal{D}_1$ contient les points (en ensemble tout au plus dénombrable et éventuellement vide) qui sont des positions de X à probabilité positive, $\mathcal{D}_1$ contient aussi les lignes à une dimension sur lesquels la densité *linéaire* de probabilité de X est positive, s'il en existe, etc., ..., il contient les points s'il en existe où la densité de probabilité à r dimensions de X est positive; et $\mathcal{D}_1$ peut encore contenir d'autres catégories de points.

Cas du plan. — Nous donnerons deux exemples de centre de variation.

Soit X un point choisi au hasard dans un plan et supposons que son domaine $\mathcal{D}_1$ de variation soit borné avec un centre de symétrie O. Alors il y a un centre de variation et un seul, qui est confondu avec O.

En effet, puisque $\mathcal{D}_1$ contient ses points limites et est borné, ρ_0 est égal à la distance de O à un point y au moins de $\mathcal{D}_1$. Soit y' symétrique de y par rapport à O (*fig.* 1). Pour tout point x, la plus grande des distances xy, xy', par

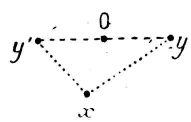

Fig. 1.

exemple xy est $\leqq \rho_x$ et $\geqq Oy = \rho_0$. D'où $\rho_x \geqq \rho_0$. Donc O est un centre de variation de X. S'il y en avait un autre, par exemple x, on aurait $\rho_x \geqq xy \geqq Oy = \rho_0$ avec $\rho_x = \rho_0$; on aurait $Oy = xy \geqq xy'$, d'où $yy' \geqq xy' + xy$, ce qui n'est possible que si $yy' = xy' + xy$. Donc x devrait être sur yy' entre y et y' et puisque $Oy = xy$, x serait confondu avec O.

II. Soient a, b, c trois points non alignés. Nous allons examiner simultanément les trois cas suivants pour la loi de probabilité d'un point X pris au hasard dans le plan abc : 1° X ne peut prendre que les positions a, b, c chacune avec une probabilité positive; 2° X ne peut être que sur les côtés du triangle abc, avec une densité *linéaire* de probabilité, éventuellement variable, mais toujours positive sur ces côtés; 3° X a une densité superficielle de probabilité partout positive à l'intérieur et sur le périmètre du triange abc et nulle ailleurs. Dans les trois cas, $\mathcal{D}_1$ comprend les trois points a, b, c et ne comprend aucun point extérieur au triangle abc.

Alors pour tout point x du plan, ρ_x sera égal à la plus grande des distances xa, xb, xc. Si $\rho_x = xa$, par exemple, c'est que x est du côté opposé à a des perpendiculaires N, M aux milieux des côtés ab, ac, c'est-à-dire dans la région couverte de hachures. Pour que x soit un centre de variation, il faut que x soit, dans cette région, le plus rapproché possible de a. Quand les trois angles du triangle abc sont aigus (*fig.* 2), x doit être au centre O du cercle circonscrit

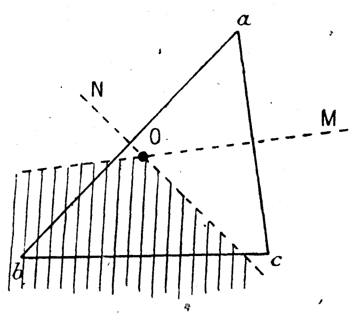

Fig. 2.

à abc. Dans le cas contraire, si par exemple l'angle en b est obtus (*fig.* 3), le le point de la région qui est le plus proche de a est le milieu m du côté opposé

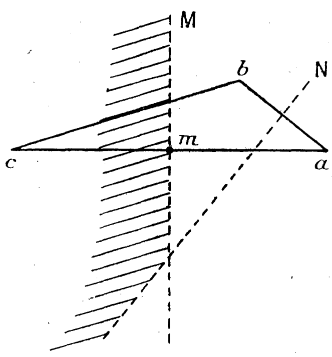

Fig. 3.

à l'angle obtus. Réciproquement, ces deux points O ou m sont dans les deux cas respectifs des points où ρ_x atteint son minimum.

Ainsi, il existe un centre de variation de X et un seul; il n'est jamais extérieur au triangle *abc*; il est confondu avec le centre du cercle circonscrit à *abc* si tous les angles de ce triangle sont aigus et si un de ces angles est obtus ou droit, le centre de variation de X est le milieu du côté opposé.

Cas de l'espace cartésien à r dimensions. — Il est évident que le raisonnement fait pour l'exemple I précédent s'étend au cas où X est choisi au hasard dans un espace cartésien à un nombre fini r de dimensions et où son domaine de variation est borné et a un centre de symétrie.

DEUXIÈME PARTIE.

UNE SECONDE DÉFINITION GÉNÉRALE DES POSITIONS TYPIQUES D'UN ÉLÉMENT ALÉATOIRE DE NATURE QUELCONQUE.

Rappel de définitions précédentes des positions typiques. — Dans deux mémoires récents (¹), nous avons entrepris une étude de la théorie des éléments aléatoires de nature quelconque. (Nous renverrons à ces mémoires pour la justification de la nécessité de cette étude, *tant du point de vue pratique*, que du point de vue théorique).

Dans le premier mémoire, nous avons donné une définition de la moyenne d'un élément aléatoire abstrait, basée sur une nouvelle généralisation de la notion d'*intégrale*. Mais il fallait supposer que l'élément abstrait fut choisi au hasard dans un espace *vectoriel* distancié (dit encore de Wiener-Banach). Étant donné qu'on n'as pas encore résolu la question de savoir si certains espaces distanciés (aussi importants que l'espace des courbes, l'espace des surfaces, par exemple), peuvent être considérés de façon naturelle comme vectoriels distanciés, nous avons cru nécessaire de donner dans le second mémoire, une définition de la moyenne tout à fait différente de la première et applicable à des éléments aléatoires appartenant à un espace distancié quelconque (défini p. 212). Cette seconde définition a en outre l'avantage de se prêter à une généralisation, la nouvelle définition de la moyenne apparaissant comme le cas particulier où $\alpha = 2$, d'une définition des positions typiques d'ordre α. Or on sait que lorsque l'élément aléatoire est un nombre, les valeurs typiques les plus connues peuvent être considérées comme des valeurs typiques

---

(¹) *L'intégrale abstraite d'une fonction abstraite d'une variable abstraite et son application à la moyenne d'un élément aléatoire de nature quelconque* (*Revue Scientifique*, 82ᵉ année, 1944, p. 483-512). Pour le second mémoire, *voir* la note (²), p. 211.

d'ordre α avec $\alpha = 0$, 1, 2 ou infini (1). Cette définition des positions typiques d'ordre α se subdivise en deux. Soit U un élément aléatoire pris au hasard dans un espace distancié quelconque $\mathcal{D}$.

1° S'il existe au moins un élément certain c de $\mathcal{D}$ tel que la moyenne $\mathfrak{M}(\mathrm{U}, c)^{\alpha}$ soit finie (on dira alors que U est borné en moyenne d'ordre α), on appellera position typique d'ordre α de X tout élément certain de $\mathcal{D}$ s'il en existe tel que $\mathfrak{M}(\mathrm{U}, a)^{\alpha}$ (qui est une fonction du point certain a), atteigne pour $a \equiv \gamma$ sa borne inférieure. (C'est la définition déjà donnée page 213 où avait été annoncé le complément qui suit.)

2° Quand U n'est pas borné en moyenne d'ordre α, on considère un élément certain b et l'on définit un élément aléatoire auxiliaire U_n comme identique à U pour $(\mathrm{U}, b) \leqq n$ et à b dans le cas contraire. Soit alors m_n la borne inférieure de $\mathfrak{M}(\mathrm{U}_n, a)^{\alpha}$. Supposons qu'il existe au moins un point certain a, de $\mathcal{D}$, tel que la plus petite des limites pour n infini de

$$\mathfrak{M}(\mathrm{U}_n, a)^{\alpha} - m_n,$$

soit une quantité finie $h(a)$. On pourra considérer $h(a)$ comme la « *partie finie* » de $\mathfrak{M}(\mathrm{U}, a)^{\alpha}$ et l'on appellera position typique d'ordre α de U tout point γ de $\mathcal{D}$ indépendant de b, s'il en existe, tel que $h(a)$ atteigne sa borne inférieure pour $a \equiv \gamma$.

Cette définition en deux temps s'applique en particulier à la moyenne pour $\alpha = 2$.

Ultérieurement, M. Shafik Doss a donné (2) une *troisième* définition de la moyenne, qui a sur la première l'avantage d'être applicable à tout espace distancié et sur la seconde de n'avoir qu'une forme valable (que l'élément aléatoire considéré, U soit ou non borné en moyenne d'ordre 2). Nons avons indiqué (3) à la suite de la note de M. Doss, que sa définition pouvait, par une modification très simple, s'étendre à d'autres positions typiques que la moyenne. C'est cette extension que nous allons étudier, laissant à M. Doss le soin de tirer les conséquences (4) de sa définition de la moyenne.

Toutefois, avant de procéder à cette extension dans le cas d'un élément U de nature quelconque, il nous a paru nécessaire d'étudier son application au cas

---

(1) Toutefois les cas de $\alpha = 0$ et $\alpha = \infty$ sont des cas limites où le processus de convergence peut être envisagé de diverses manières non équivalentes. En particulier, quand une dominante n'est pas unique, elle n'est pas toujours d'ordre nul. Voir à ce sujet notre mémoire, *Les valeurs typiques d'ordre nul ou infini d'un nombre aléatoire*, en cours d'impression, ou bien la Première Partie du présent mémoire.

(2) *Sur la moyenne d'un élément aléatoire abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1418-1419).

(3) *Sur une nouvelle définition des positions typiques d'un élément aléatoire abstrait* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 226, 1948, p. 1420).

(4) Dans un mémoire en cours d'impression au *Bulletin des Sciences Mathématiques*.

classique où U est un *nombre* aléatoire, dans un mémoire séparé (¹) auquel nous renverrons dans la suite en le désignant par la lettre N.

Troisième définition de la moyenne. — Shafik Doss appelle moyenne d'un élément aléatoire U choisi au hasard dans un espace distancié $\mathcal{D}$, tout élément certain a de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(a, \lambda) = \mathfrak{M}(\mathrm{U}, \lambda),$$

quel que soit l'élément certain λ de $\mathcal{D}$. Dans cette définition de la moyenne intervient déjà une moyenne, mais c'est la moyenne $\mathfrak{M}(\mathrm{U}, \lambda)$ d'un *nombre* aléatoire, moyenne qu'on peut supposer définie d'avance.

Et d'autre part si l'on applique la définition au cas où $\mathcal{D}$ est l'espace des nombres réels et où $(x, y) = |x - y|$, on peut prouver d'après Shafik Doss que si la moyenne classique du nombre U existe, il existe un nombre a et un seul et il est égal à $\mathfrak{M}\mathrm{U}$.

Seconde définition des positions typiques.

On peut généraliser l'idée qui est à la base de la définition de Shafik Doss *en remplaçant* le symbole $\mathfrak{M}$ de la moyenne *par le symbole* T *d'une autre valeur typique d'un nombre aléatoire.*

Supposant d'une façon générale que l'on ait défini une valeur typique TP d'un nombre aléatoire P (il suffit que TP soit défini pour $\mathrm{P} \geqq 0$), on pourra représenter par $\mathfrak{T}\mathrm{U}$ et appeler position typique de U correspondante au symbole T, tout élément certain a de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(a, \lambda) \leqq \mathrm{T}(\mathrm{U}, \lambda),$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

Comme dans le mémoire N, nous allons étudier l'application de cette définition en prenant pour TP successivement les valeurs typiques les plus usuelles d'un nombre aléatoire P (laissant de côté le cas traité par Shafik Doss, où TP est la moyenne de P). A titre d'application, on montrera aussi comment la théorie des éléments aléatoires abstraits peut apporter des faits nouveaux non seulement dans des domaines nouveaux, mais aussi dans la Théorie classique des probabilités en l'appliquant pour commencer aux points aléatoires d'un plan et plus généralement aux points aléatoires d'un espace euclidien à un nombre fini de dimensions.

Position centrale.

Nous emploierons (provisoirement, dans ce mémoire) l'expression (parfois usitée en d'autres sens) valeur centrale d'un nombre aléatoire X pour l'abscisse

(¹) *Une propriété des valeurs typiques d'un nombre aléatoire.*

du milieu de « l'intervalle de variation stochastique » de P. (L'intervalle de variation stochastique de X étant par définition le plus petit segment α, β tel que la probabilité que $\alpha \leqq X \leqq \beta$ soit égale à l'unité.) Nous dirons que X est *stochastiquement borné* quand cet intervalle est fini. La définition de la valeur centrale de X n'a évidemment de sens que si X est stochastiquement borné. Dans ce cas, nous représenterons cette valeur centrale par $\dot{X}$.

Nous allons maintenant appliquer notre définition générale en prenant pour TP la valeur centrale $\dot{P}$ de P.

Par définition, nous appellerons position centrale d'un élément U choisi au hasard dans un espace distancié $\mathcal{D}$ tout élément certain γ de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que,

$$(\gamma, \lambda) \leqq \dot{R}, \qquad \text{avec} \quad R = (U, \lambda), \tag{1}$$

par tout élément certain λ de $\mathcal{D}$, en représentant par $\dot{R}$ la « valeur centrale » du nombre aléatoire R.

La définition n'a évidemment de sens que si U est *borné stochastiquement*, c'est-à-dire s'il existe au moins un point certain a de $\mathcal{D}$ tel que l'intervalle de variation stochastique de (U, a) soit fini. Car dans ce cas

$$(U, \lambda) \leqq (U, a) + (a, \lambda)$$

et (U, λ) est aussi stochastiquement borné pour chaque position de λ, tandis que si l'intervalle de variation stochastique de (U, a) est infini, il en sera de même de

$$(U, \lambda) \geqq (U, a) - (a, \lambda).$$

Supposons donc U stochastiquement borné; pour chaque point certain λ de $\mathcal{D}$, il existe au moins un nombre $\rho \geqq 0$ tel que l'on ait

$$\{\text{Prob}\,[(U, \lambda) \leqq \rho]\} = 1.$$

Soit ρ_λ la borne inférieure de ρ. Il est clair que la valeur centrale de (U, λ) est $\leqq \rho_\lambda$. Donc si γ existe, un premier renseignement sur sa position sera fourni par la relation

$$(\gamma, \lambda) \leqq \rho_\lambda.$$

Et si la borne inférieure R de ρ_λ est atteinte au moins en un point c (qu'on peut appeler centre de variation de U), on aura

$$(\gamma, c) \leqq R.$$

Cas du plan. — Supposons que U soit un point pris au hasard dans un plan et plaçons-nous dans le cas où U est stochastiquement borné et où γ existe, cas où il existe au moins un cercle S de centre γ dans lequel U se trouve « presque certainement », c'est-à-dire avec une probabilité égale à l'unité. Soit Δ un diamètre illimité de ce cercle. Si l'on prend λ sur Δ et si l'on appelle (m, M) les extrémités de l'intervalle de variation stochastique de $\mathrm{R} = (\mathrm{U}, \lambda)$, il est clair que m et M sont égales aux longueurs de deux vecteurs λl, $\lambda \mathrm{L}$ issus de λ (*fig.* 4)

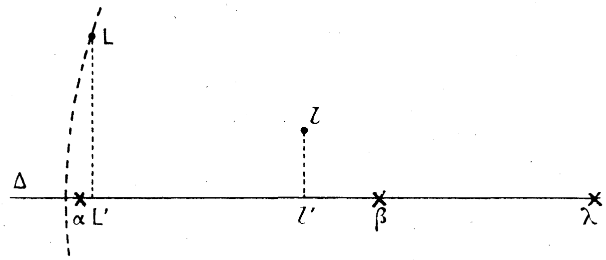

Fig. 4.

et où les points l, L appartiennent à S. En appelant α, β les extrémités de l'intervalle de variation stochastique de la projection X de U sur Δ et μ le milieu de cet intervalle, on va montrer que, quand λ s'éloigne à l'infini, les projections l', L' de l, L sur Δ tendent vers α, β et que $(\lambda, l) - (\lambda, \beta)$, $(\lambda, \mathrm{L}) - (\lambda, \alpha)$ tendent vers zéro de sorte que

$$\dot{\mathrm{R}} = \frac{1}{2}[(\lambda, l) + (\lambda, \mathrm{L})] \to \frac{(\lambda, \beta) + (\lambda, \alpha)}{2} = (\lambda, \mu).$$

Si $\gamma\mu$ n'était pas nul, alors en ayant soin de placer λ en dehors de $\gamma\mu$, du côté de μ, on aurait ainsi, d'après (1),

$$0 \leqq (\gamma, \mu) = (\lambda, \gamma) - (\lambda, \mu) \leqq (\lambda, \gamma) - [\dot{\mathrm{R}} - \varepsilon] \leqq \varepsilon,$$

où $\varepsilon \to 0$ quand $\lambda \to \infty$, d'où $(\gamma, \mu) = 0$. Il en résultera que si γ existe, sa projection sur une droite quelconque est le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur cette droite.

Reste à prouver que

$$\varepsilon = \dot{\mathrm{R}} - (\lambda, \mu) = \frac{1}{2}\{[(\lambda, l) - (\lambda, \beta)] + [(\lambda, \mathrm{L}) - (\lambda, \alpha)]\}$$

tend vers zéro quand $\lambda \to \infty$.

Les points l' et L' sont évidemment sur le segment $\alpha\beta$ (*fig.* 4). Soit l_0 un des points-limites de l' quand $\lambda \to \infty$; l_0 est sur $\alpha\beta$. Le cercle S' de centre λ passant par l, aurait pour une de ses limites la perpendiculaire D à Δ en l_0 et il y a une probabilité nulle que U soit intérieur à ce cercle S', donc une probabilité nulle que U soit du même côté de D que λ. Supposons que λ se soit éloigné du côté de β. Si l_0 était distinct de β, β ne serait donc pas une extrémité de l'intervalle de variation stochastique de X. Ainsi, finalement, l' tend vers β. De même L' tend vers α. Or

$$l\lambda - \beta\lambda = \sqrt{l'\lambda^2 + ll'^2} - \beta\lambda = \frac{l'\lambda^2 - \beta\lambda^2 + ll'^2}{\sqrt{} + \beta\lambda} \leqq \frac{l'\beta(l'\lambda + \beta\lambda) + ll'^2}{2\beta\lambda} \leqq \frac{l'\beta}{2} + \frac{l'\beta\, l'\lambda + ll'^2}{2\beta\lambda}.$$

Mais $l'\beta \to 0$, $\frac{l'\lambda}{\beta\lambda} \to 1$, ll' reste borné quand $\lambda \to \infty$ puisque l et l' restent dans S. On voit bien que $|l\lambda - \beta\lambda| \to 0$. On verrait de même que $L\lambda - \alpha\lambda \to 0$.

Ce résultat étant acquis, deux conclusions s'en suivent. Pour toute droite Δ' du plan, appelons D' la perpendiculaire à Δ' menée par le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur Δ' :

Ou bien il existe un point O par lequel passent toutes les droites D'. Alors, si γ existe, il est confondu avec O;

Ou bien un tel point O n'existe pas alors γ n'existe pas non plus.

On voit d'abord que s'il existe une position centrale, elle est *unique*. Mais il est bien clair qu'en général un tel point O n'existe pas et par conséquent, en général, il n'existe pas de position centrale. Par exemple, supposons que U ait partout une densité de probabilité et que celle-ci soit positive sur une aire triangulaire *abc* et nulle en dehors. En prenant pour Δ' successivement chacun des côtés et supposant qu'aucun des angles du triangle *abc* ne soit obtus, on voit que si O existait, il serait le centre du cercle circonscrit à *abc*. Mais en prenant pour Δ' successivement les trois hauteurs du triangle, on voit que ce point devrait se projeter sur les trois hauteurs en leurs milieux, ce qui n'est pas possible.

Même dans le cas où O existe, l'existence de γ n'est pas démontrée. Cependant, il y a des cas où il existe certainement une position centrale. Reprenons le même exemple, mais en remplaçant l'aire triangulaire par un ensemble E de points dont nous supposons d'abord seulement qu'il soit borné et qu'il ait un centre de symétrie, O. Il est clair que toutes les droites D' passeront par ce centre. S'il existe une position centrale, elle sera en ce centre. Pour montrer que ce centre est bien une position centrale, soient λ un point quelconque du plan, λn la plus courte distance de λ à E (n appartenant à E ou en étant un point limite) et n' le point symétrique de n par rapport à O. On a évidemment en posant encore $R = (U, \lambda)$

$$\dot{R} \geqq \frac{(\lambda, n) + (\lambda, n')}{2},$$

et puisque λO est une médiane du triangle $\lambda n n'$, on a

$$\frac{(\lambda, n) + (\lambda, n)}{2} \geqq (\lambda, O).$$

Ainsi on a bien

$$(\lambda, O) \leqq \dot{R}.$$

Cas d'un espace euclidien à n dimensions. — Le raisonnement précédent s'étend au cas où le point U est pris au hasard dans un espace euclidien $\mathcal{D}_n$ à un nombre entier n de dimensions. On suppose qu'on a pris pour distance (x, y) de deux points de coordonnées $x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n$;

$$(x, y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + \ldots + (x_n - y_n)^2}.$$

Supposons que U soit stochastiquement borné et qu'il ait une position centrale γ. Soit alors Δ' une droite quelconque de $\mathcal{D}_n$ et Δ une parallèle à Δ' par γ. Par un changement de coordonnées orthogonales, on peut supposer que Δ soit l'axe des x_1 et γ l'origine. Le raisonnement précédent sera encore valable et montrera que si γ existe, γ est situé sur le plan D' perpendiculaire à Δ' mené par le milieu de l'intervalle de variation stochastique de la projection de U sur Δ'.

Une position centrale ne peut donc exister que si les plans D' correspondant aux diverses directions Δ' passent par une même point qui serait la position centrale. Donc, s'il en existe une, il n'en existe qu'une, mais en général, il n'en existe pas.

Cependant, le raisonnement fait dans le cas du plan peut se répéter ici et montre que si U a partout une densité de probabilité et si celle-ci est positive sur un ensemble E de points de $\mathcal{D}_n$ et nulle en dehors, alors, dans le cas où E est borné et possède un centre de symétrie O, U a ce point pour position centrale.

Position équiprobable.

Rappelons d'abord, pour éviter toute confusion, qu'on appelle valeur équiprobable d'un *nombre* aléatoire X, tout nombre certain ν tel que l'on ait simultanément

$$\{\text{Prob}\,[X \leqq \nu]\} \geqq \frac{1}{2} \leqq \text{Prob}\,[X \geqq \nu].$$

On représente un tel point, ν, par la notation $\overline{\overline{X}}$.

Nous allons alors appliquer la définition générale de la page 229 en prenant pour valeur typique TP de P une valeur équiprobable de P. Nous appellerons alors *position équiprobable* d'un élément U choisi au hasard dans un espace *distancié* quelconque $\mathcal{D}$, tout élément certain δ de $\mathcal{D}$, s'il en existe, tel que

$$(\delta, \lambda) \leqq \overline{\overline{(U, \lambda)}},$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

Cas du plan. — Le résultat et la méthode seront analogues à ceux qui concernent la position centrale.

Supposons qu'un point U, choisi au hasard dans un plan π, ait au moins une position équiprobable δ, et soit X la projection de U sur une droite quelconque Δ passant par δ dans le plan π. Soit (α, β) le segment équiprobable de X (éventuellement réduit à un point).

Nous voulons montrer que δ est sur le segment (α, β). En effet, en orientant les abscisses sur Δ de α vers β, supposons par exemple $\alpha \leqq \beta < \delta$. Prenons alors λ sur Δ de sorte que $\lambda < \alpha$.

L'intérieur du cercle $(U, \lambda) < (\delta, \lambda)$ tend, sans décroître, quand λ s'éloigne de α vers $-\infty$, vers le demi-plan $X < \delta$. La probabilité que U appartienne à ce cercle tend donc vers la probabilité que U appartienne à ce demi-plan. Or

$$\{\mathrm{Prob}[X < \delta]\} > \frac{1}{2}, \qquad \text{puisque} \quad \delta > \beta.$$

Donc pour λ assez loin de α et négatif, on aurait aussi

$$\{\mathrm{Prob}[(U, \lambda) < (\delta, \lambda)]\} > \frac{1}{2},$$

et par suite

$$(\delta, \lambda) > \overline{\overline{R}},$$

contrairement à l'hypothèse sur δ.

On verrait de même qu'on ne peut avoir $\delta < \alpha$; d'où finalement

$$\alpha \leqq \delta \leqq \beta.$$

En prenant pour Δ' une parallèle à Δ, on voit donc que si δ existe, la projection de δ sur Δ' est située sur le segment équiprobable σ de la projection de U sur Δ'.

Ou encore, δ doit se trouver sur la bande D' (éventuellement réduite à une droite) des perpendiculaires à Δ' menées par les points du segment équiprobable σ.

Mais en général, il n'existe pas de point qui soit commun aux bandes D' correspondant à toutes les directions Δ'.

Cependant il y a des cas particuliers (cependant assez généraux) où l'on peut établir l'existence de positions équiprobables.

Supposons que U ait partout une densité de probabilité.

Prenons d'abord le cas où celle-ci est positive à l'intérieur d'une région V bornée et d'un seul tenant et nulle en dehors. Alors la projection X de U sur une droite Δ' a aussi une densité de probabilité (linéaire) et le segment équiprobable de X sera toujours réduit à un point et la bande D' à une droite. En général, les droites D' ne seront pas concourantes et il n'y aura pas de position centrale. *Lorsqu'il y en a une, elle est unique.*

Plaçons-nous dans le cas particulier où la densité de probabilité est *constante* dans V. Alors il est clair qu'une droite D' est une droite qui sépare V en *deux aires égales*. S'il y a une position centrale δ, deux droites voisines passant par δ ne pourront diviser chacune V en deux parties égales que si elles se coupent à l'intérieur de V, découpant dans V deux triangles curvilignes d'aires égales. Ainsi δ doit être dans V et si les deux droites font un angle très petit les côtés de ces triangles issus de O devront être sensiblement égaux. En faisant tendre cet angle vers zéro, on voit que U ne peut, dans le cas actuel, avoir une position centrale que si V a un centre O de symétrie.

Alors ce centre O sera effectivement la position équiprobable de U. En effet, soit LL′ la perpendiculaire à Oλ en O. Le cercle de centre λ, rayon λO, appar tient au demi-plan W limité par LL′ du côté de λ.

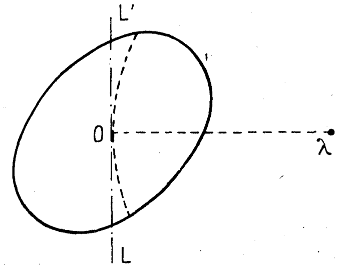

Fig. 5.

Donc

$$\{\operatorname{Prob}[(U, \lambda) < (O, \lambda)]\} \leqq \{\operatorname{Prob}[U \text{ appartient à } W]\} = \frac{1}{2}.$$

Donc

$$(o, \lambda) \leqq \overline{\overline{(U, \lambda)}}$$

comme il le fallait.

Extension au cas d'un espace euclidien. — Plus généralement, supposons que U soit choisi au hasard dans un espace euclidien à n dimensions $\mathcal{D}_n$, mais que U soit borné stochastiquement. La méthode et les résultats précédents s'étendent à ce cas. On voit comme plus haut que s'il existe une position centrale δ du point aléatoire U dans $\mathcal{D}$, elle se trouve dans la région D′ balayée par les plans perpendiculaires à une direction Δ', qui coupent Δ' sur le segment équiprobable de la projection de U sur Δ.

En général, il n'y aura aucun point commun aux régions D′ qui correspondent aux diverses directions Δ' et par suite pas de position centrale de U.

Mais cependant une telle position centrale peut exister. Si par exemple U a une densité de probabilité constante dans une région bornée V d'un seul tenant et nulle hors de V, alors pour que U ait une position centrale, il faut et il suffit que V ait un centre de symétrie O et alors O est l'unique position centrale.

Dominante.

Soit U un élément aléatoire de nature quelconque. Nous dirons encore ici, provisoirement, pour abréger le langage, que la loi de probabilité de U est discontinue s'il existe au moins une position de U dont la probabilité est positive. Comme on l'a vu, pages 215, 216, il ne peut y avoir qu'un ensemble dénombrable $u_1, u_2, \ldots, u_n, \ldots$ de ces positions; soient $p_1, p_2, \ldots, p_n, \ldots$ leurs probabilités; la borne supérieure P des p_n est atteinte pour au moins l'un des p_n et en tout cas pour un nombre fini d'entre eux $p_{h_1}, p_{h_2}, \ldots, p_{h_s}$. Une extension naturelle de la notion de dominante d'un *nombre* aléatoire consiste à appeler dominantes d'un élément aléatoire U de nature quelconque, mais à loi de probabilité discontinue, les positions les plus probables de U, c'est-à-dire chacune des positions $u_{h_1}, u_{h_2}, \ldots, u_h$ qui sont prises par U avec la probabilité maximum P. Chacune de ces positions pourra être représentée par le symbole $\hat{U}$.

On observera que cette définition ne suppose pas que l'espace où U est choisi au hasard soit distancié. Étudions maintenant les relations de cette définition avec celle des valeurs typiques $\mathfrak{T}$U qu'on obtient en appliquant la définition générale de la page 229 au cas où l'on prend pour valeur typique T d'un *nombre* aléatoire N, une dominante $\hat{N}$ de N. Ici il nous faut au contraire supposer que U est choisi dans un espace distancié.

Pour une raison qui sera expliquée plus loin nous appellerons dominante *au sens strict* d'un élément U pris au hasard dans un espace *distancié* $\mathcal{D}$, tout élément certain φ de $\mathcal{D}$ tel que

$$(\varphi, \lambda) \leqq \widehat{(U, \lambda)},$$

pour tout élément certain λ de $\mathcal{D}$.

L'étude que nous avons faite de cette inégalité dans le cas où U est un nombre, dans le Mémoire cité plus haut (en note, p. 229), ayant montré que le cas où il y a plusieurs dominantes est assez compliqué et beaucoup moins intéressant, même dans ce cas simple, nous n'examinerons ici que le cas où U n'a qu'une dominante au sens ordinaire, soit u_h.

Le nombre aléatoire (U, λ) prend les valeurs (u_j, λ) avec des probabilités positives. Quand ces valeurs sont différentes, il est clair que (U, λ) a une dominante unique (u_h, λ) et l'on doit avoir

$$(\varphi, \lambda) \leqq (u_h, \lambda).$$

Mais il peut arriver que plusieurs des nombres (u_j, λ) soient égaux à un même nombre

$$r = (u_{l_1}, \lambda) = (u_{l_2}, \lambda) = \ldots.$$

Dans ce cas (U, λ) prendra la valeur r avec la probabilité $p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots$ qui pourra être supérieure à P.

Pour éviter cette circonstance, choisissons un nombre ε positif arbitraire et prenons λ à distance de u_h inférieure à ε. En général, on pourra le faire de façon que les distances (λ, u_1), (λ, u_2), ... autres que (λ, u_h) soient différentes [1]. Alors on aura

$$\widehat{(U, \lambda)} = (u_h, \lambda) < \varepsilon,$$

[1] Il peut arriver que ceci n'ait pas lieu pour des espaces distanciés singuliers. Par exemple, si dans $\mathcal{D}$, on prenait $(x, y) = 1$ ou 0 suivant que x et y sont distincts ou non, (x, y) vérifierait les

d'où si φ existe

$$(\varphi, \lambda) < \varepsilon,$$

et par suite

$$(\varphi, u_h) \leqq (\varphi, \lambda) + (u_h, \lambda) < 2\varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

Donc *si φ existe, c'est la dominante*. Mais nous avons donné dans le Mémoire cité page 229 des exemples où une dominante unique existe et où φ n'existe pas. Ce sont les raisons pour lesquelles quand φ existe, nous l'appellerons dominante au sens strict.

---

conditions imposées à une distance, page 212 et si l'on prenait $\varepsilon < 1$ et $(\lambda, u_h) < \varepsilon$, on aurait $\lambda \equiv u_h$ et les (λ, u_j), autres que $(\lambda, u_h) = 0$, seraient égaux entre eux.

Mais si, *par exemple*, $\mathcal{D}$ est un espace euclidien à un nombre fini n de dimensions, et si les points u_h sont en nombre fini, le choix de λ de la façon indiquée est toujours possible.

En effet, cela revient à dire qu'il y a des points de $\mathcal{D}$ qui n'appartiennent à aucun des hyperplans $(\lambda, u_k) = (\lambda, u_j)$ et qui ne sont pas non plus limites de l'ensemble de ces hyperplans.

Même lorsque les u_i sont en nombre infini, la possibilité de choisir λ de la façon indiquée peut subsister.

Supposons par exemple que U reste dans un plan. On peut d'abord prendre pour abscisse de λ un nombre ξ différent de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'abscisse de u_h. Si λ était à égale distance de deux des points u_i, il appartiendrait à l'ensemble dénombrable des perpendiculaires aux segments $u_i u_j$ en leurs milieux; ξ étant choisi, l'ordonnée η de λ ne pourrait donc prendre qu'un ensemble dénombrable de valeurs η_1, η_2, ... Il suffira alors de choisir pour η un nombre différent de η_1, η_2, ... et différant de moins de $\frac{\varepsilon}{2}$ de l'ordonnée de u_h, ce qui est toujours possible.