GEORGES BOURION

L'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique de n variables

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 1-10

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

L'INDICATRICE DE CROISSANCE

D'UNE

FONCTION SOUS-HARMONIQUE DE *n* VARIABLES

PAR M. GEORGES BOURION.

Dans une étude antérieure [1], j'ai essayé d'analyser la théorie classique de l'indicatrice de croissance [2] en y séparant les éléments géométriques de ceux qui ressortissent à la théorie des fonctions. Je me propose ici de reprendre cette analyse, sous une forme aussi élémentaire que possible, dans un espace euclidien quelconque [3].

I. — Recouvrements de l'espace par des demi-espaces ouverts.

1. Remarquons tout d'abord que si une droite D est recouverte par une famille *finie* (F) de demi-droites ouvertes Q, D peut être recouverte par *deux* demi-droites de (F). Nous pouvons toujours nous ramener au cas où (F) est *minimale*; nous entendons par là que la suppression d'un élément quelconque

---

(1) G. BOURION, *Sur l'indicatrice de croissance d'une fonction sous-harmonique dans un angle* (*Bull. des Sc. Math.*, 2e série, t. LXXI, 1947, p. 17). — *Erratum :* au paragraphe II, n° 5, supprimer : $\alpha < \varphi < \beta$; (on peut prendre pour φ une détermination quelconque de l'angle polaire de F).

(2) G. PÓLYA, *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* [*Math. Zeitschr.* 29, 1929, p. 549-640 (*voir* p. 581 à 597)].

(3) Le présent travail est indépendant du précédent, sauf pour une démonstration particulière (II.3).

de (F) donne une famille qui ne couvre plus D. Soit alors $Q_0 \in (F)$; l'extrémité D_0 de Q_0, n'appartenant pas à Q_0, appartient à une autre demi-droite Q_1 de (F); si Q_1 avait même direction que Q_0, on aurait $Q_0 \sqsubset Q_1$ et Q_0 serait inutile, contrairement à l'hypothèse; Q_1 a donc la direction opposée à celle de Q_0, et la réunion de Q_0 et Q_1 couvre D.

Ce résultat s'étend à un espace de dimension quelconque sous la forme suivante : *Si l'espace* E^m, *de dimension m, est couvert par une famille finie* (F) *de demi-espaces ouverts* Q [1], E^m *peut être couvert par une famille extraite de* (F) *et comprenant* $m+1$ *au plus des demi-espaces* Q.

Nous pouvons supposer le lemme établi pour les espaces de dimension inférieure à m. Nous pouvons d'autre part supposer la famille (F) minimale : la suppression d'un élément quelconque donne alors une famille qui ne couvre plus E^m. Soit $Q_0 \in (F)$. Il se peut tout d'abord que le bord D_0 de Q_0 soit entièrement recouvert par un même demi-espace Q_1 de (F); le bord D_1 de Q_1 est alors parallèle à D_0; les normales à D_0 et D_1, orientées respectivement vers l'intérieur de Q_0 et de Q_1, sont de directions opposées (sans quoi $Q_0 \sqsubset Q_1$, et Q_0 serait inutile); la réunion de Q_0 et Q_1 couvre donc E^m.

Écartons ce cas particulier : D_0 est alors un espace de dimension $m-1$, couvert par la famille finie (F′) des demi-espaces ouverts $(m-1)$ — dimensionnels $Q.D_0$ correspondants à ceux des demi-espaces Q de (F) dont le bord D n'est pas parallèle à D_0 [2]. Par l'hypothèse de récurrence, on peut extraire de (F′) une famille de m éléments au plus couvrant D_0 : soit

$$D_0 \sqsubset Q_1.D_0 + Q_2.D_0 + \ldots + Q_k.D_0, \qquad k \leqq m;$$

la réunion des demi-espaces ouverts $Q_1, \ldots, Q_k$ couvre D_0 et par suite l'un au moins des deux demi-espaces séparés par D_0 [3]; ce ne peut être Q_0, (F) étant supposée minimale; c'est donc le demi-espace complémentaire, et les demi-espaces $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$, dont le nombre $k+1$ ne surpasse pas $m+1$, couvrent E^m.

2. Considérons maintenant une famille infinie (F) de demi-espaces ouverts Q telle que tout point de E^m appartienne à un élément au moins de (F); supposons que l'on puisse extraire de (F) une famille finie (f) couvrant E^m sauf peut-être un ensemble borné B; B borné étant de plus nécessairement fermé peut, d'après le lemme de Borel-Lebesgue, être couvert par une famille finie (f')

(1) Nous emploierons le mot « espace » au sens d'espace euclidien; un demi-espace ouvert Q de E^m est l'une des composantes du complémentaire d'un $(m-1)$-plan D (le *bord* de Q), ou encore l'ensemble des points dont les coordonnées vérifient une même inégalité linéaire avec exclusion de l'égalité.

(2) A.B désigne l'ensemble des points communs aux ensembles A et B.

(3) L'ensemble complémentaire de $Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_k$, c'est-à-dire la partie commune des demi-espaces fermés complémentaires de $Q_1, \ldots, Q_k$, est convexe; il ne peut donc avoir de points à la fois dans les deux demi-espaces de bord D_0, puisqu'il n'a pas de points dans D_0.

extraite de (F). E^m couvert par une famille finie $(f)+(f')$ extraite de (F) peut, d'après le lemme précédent, être couvert par une famille d'au plus $m+1$ demi-espaces Q pris dans (F).

Ce raisonnement est applicable, en particulier, si à toute direction [1] dans E^m correspond au moins un demi-espace $Q \in (F)$ tel que la normale au bord de Q, orientée vers l'intérieur de Q, ait la direction donnée; en effet, si les m droites $Ox_1, \ldots, Ox_m$ sont deux à deux perpendiculaires et si Q'_i et Q''_i sont deux demi-espaces de (F) tels que les normales intérieures correspondantes soient respectivement parallèles aux deux directions de Ox_i, on peut former la famille (f) avec $Q'_1, Q''_1, \ldots, Q'_m, Q''_m$.

En nous plaçant dans l'hypothèse précédente, considérons une famille finie (Φ) extraite de (F), couvrant E^m, et supposons cette famille minimale. Désignons par $Q_0, Q_1, \ldots, Q_k$ les demi-espaces de (Φ), par d_i la normale au bord de Q_i orientée vers l'intérieur de Q_i. Une direction d de E^m ne peut être à angle obtus avec tous les d_i : un point suffisamment éloigné dans une telle direction serait en effet extérieur à tous les Q_i. Supposons maintenant qu'une direction d ne fasse d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$; nous partagerons ces dernières en deux classes, (I) comprenant les directions normales à d et (II) les directions qui forment un angle obtus avec d. Par un point A pris arbitrairement dans E^m, menons une demi-droite Az de direction d; un point suffisamment éloigné sur Az ne peut appartenir à aucun demi-espace de classe (II) et appartient par suite à un Q_i de classe (I); ce dernier contient également A, puisque Az est parallèle au bord de Q_i. A étant un point arbitraire de E^m, nous voyons que les Q_i de classe (I) suffisent à recouvrir E^m; la classe (II) est donc vide, d'après la propriété minimale postulée pour (Φ). En d'autres termes, une direction de E^m qui ne fait d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, d_1, \ldots, d_k$ est normale à toutes ces directions.

Soient alors $D_0, D_1, \ldots, D_k$ les demi-droites menées par un même point Ω parallèlement à $d_0, d_1, \ldots, d_k$, et M^q la multiplicité linéaire déterminée par ces demi-droites [2]. L'enveloppe convexe H de $D_0, D_1, \ldots, D_k$ [3] est certainement contenue dans M^q; si H ne remplit pas M^q, Ω est un point frontière de H; soit, dans l'espace q-dimensionnel M^q, P un $(q-1)$-plan d'appui de H en Ω, et d la direction de la normale menée dans M^q à P et orientée du côté opposé à H; d ne faisant d'angle aigu avec aucune des directions $d_0, \ldots, d_k$, serait d'après ce qui précède normale à toutes ces directions, et $D_0, \ldots, D_k$ appartiendraient toutes au $(q-1)$-plan P, en contradiction avec la définition de M^q. Ainsi l'enveloppe convexe de $D_0, \ldots, D_k$ n'est autre que la multiplicité linéaire M^q déterminée par ces demi-droites.

---

(1) Le mot « direction » est employé ici et dans la suite au sens de « direction de droites orientées ».
(2) Multiplicité linéaire de plus petite dimension contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.
(3) Plus petit ensemble convexe contenant $D_0, D_1, \ldots, D_k$.

Il résulte de là que la dimension q de M^q, qui *a priori* ne peut surpasser $k+1$, est au plus égale à k. Si l'on avait $q < k$, on pourrait recouvrir M^q avec une famille (Φ') extraite de (Φ) comportant au plus $q+1$ éléments, d'après le n° 1; (Φ') recouvrirait E^m, parce que la multiplicité qui projette orthogonalement sur M^q un point arbitraire de E^m est parallèle au bord de chacun des Q_i et de dimension moindre; il y aurait contradiction avec la propriété minimale de (Φ).

La dimension de M^q est ainsi égale à k.

II. — Lemme sur les ensembles convexes.

1. Considérons dans l'espace n-dimensionnel E^n un ensemble $\mathfrak{A}$ de directions d; chaque direction sera matérialisée par la demi-droite parallèle issue de l'origine O, et l'on pourra sans inconvênient employer la même notation pour une direction et pour la demi-droite correspondante.

Nous supposerons que $\mathfrak{A}$ satisfait aux deux conditions suivantes :

si $d \in \mathfrak{A}$, on peut indiquer un angle α_d tel que toute direction qui fait avec d un angle inférieur à α_d appartient aussi à $\mathfrak{A}$;

si les directions non opposées d_1 et d_2 appartiennent à $\mathfrak{A}$, toute direction comprise entre d_1 et d_2 (¹) appartient aussi à $\mathfrak{A}$.

Alors, si $\mathfrak{A}$ contient deux directions opposées, $\mathfrak{A}$ renferme toutes les directions de E^n. Sinon, les points des demi-droites (ouvertes) associées aux directions de $\mathfrak{A}$ forment un ensemble ouvert convexe $\mathcal{A}$ dont l'origine est un point frontière (²).

A chaque direction $d \in \mathfrak{A}$, nous supposerons associé un $(n-1)$-plan Π_d normal à d; Q_d sera le demi-espace ouvert limité par Π_d et tel que la normale à Π_d orientée vers l'intérieur de Q_d ait pour direction d; P_d sera le demi-espace fermé complémentaire de Q_d.

Nous allons établir le lemme suivant :

Lemme géométrique. — *Soit $\mathcal{C}$ l'ensemble convexe fermé constitué par les points communs à tous les demi-espaces fermés P_d correspondant aux différentes directions d de $\mathfrak{A}$. Pour que $\mathcal{C}$ admette les Π_d comme $(n-1)$-plans d'appui* (³), *il faut et il suffit que la condition suivante soit vérifiée :*

Condition (C). — *Quels que soient : d'une part, le système de directions linéai-*

(¹) C'est-à-dire telle que la demi-droite correspondante appartienne à l'angle d'ouverture inférieure à deux droits limité par d_1 et d_2.

(²) Il existe alors au moins un $(n-1)$-plan qui laisse d'un même côté toutes les demi-droites d : le ou les $(n-1)$-plans d'appui de $\mathcal{A}$ en O possèdent en effet cette propriété.

(³) On entend par là : $\mathcal{C}$ est contenu dans l'un des deux demi-espaces fermés de bord Π_d; Π_d renferme au moins un point frontière de $\mathcal{C}$.

rement indépendantes [1] $d_1, d_2, \ldots, d_p$ *appartenant à* $\mathfrak{A}$*; et, d'autre part, la demi-droite* d *contenue dans l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites* $d_1, d_2, \ldots, d_p$ [2] :

Π_d *n'est pas entièrement recouvert par* $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_p}$.

La condition (C) peut d'ailleurs être remplacée par l'une ou l'autre des conditions équivalentes que voici :

Pour les mêmes choix des d_i *et de* d :

Condition (C′). — *Les demi-espaces fermés* $P_{d_1}, P_{d_2}, \ldots, P_{d_p}$ *recouvrent complètement* Π_d.

Condition (C″). — *L'intersection* (certainement non vide) *de* $\Pi_{d_1}, \Pi_{d_2}, \ldots, \Pi_{d_p}$ *est dans* Q_d *ou sur* Π_d.

L'intersection S des Π_{d_i} est un point si $p = n$, un $(n-p)$-plan normal aux d_i et par suite également à d, si $p < n$. Soit Q' le demi-espace déduit de Q_d par une translation qui amène son bord Π' à passer par S. La réunion des Q_{d_i} recouvre Q' d'après l'hypothèse faite sur les d_i et sur d, mais ne couvre pas S et par suite ne couvre pas Π'. Pour que Π_d soit recouvert, il faut et il suffit qu'il soit intérieur à Q', c'est-à-dire que S soit intérieur au complémentaire de Q_d. Ceci établit l'équivalence des conditions (C) et (C″).

Soit A un point de S. Si M est un point de l'intersection K (non vide) des Q_{d_i}, la demi-droite (ouverte) d'origine A passant par M est contenue dans K. D'autre part, si $\vec{u}_i$ et $\vec{u}$ sont des vecteurs de directions respectives d_i et d, $\vec{u}$ est une combinaison linéaire des $\vec{u}_i$ avec des coefficients positifs; les points M de K étant caractérisés par $\overrightarrow{AM}.\vec{u}_i > 0$ pour $i = 1, 2, \ldots, p$, et ceux de Q' par $\overrightarrow{AM}.\vec{u} > 0$, on voit que $K \sqsubset Q'$. Pour que Π_d soit complètement recouvert par les P_{d_i}, c'est-à-dire pour qu'il ne rencontre pas K, il faut et il suffit que Π_d ne soit pas intérieur à Q'. Les conditions (C′) et (C″) sont donc bien équivalentes.

2. La nécessité de la condition (C) est immédiate. Si en effet un choix particulier du système $d_1, d_2, \ldots, d_p$ et de d met en défaut cette condition, tout point de Π_d est contenu dans l'un au moins des Q_{d_i}, et par suite étranger à l'un au moins des P_{d_i}, donc étranger à $\mathcal{C}$; Π_d, qui ne contient aucun point de l'ensemble fermé $\mathcal{C}$, ne peut en être un $(n-1)$-plan d'appui.

3. Supposons maintenant vérifiée la condition (C); envisageons d'abord le cas où $\mathfrak{A}$ renferme deux directions opposées d' et d'', et montrons que les demi-

---

[1] On suppose donc que les p demi-droites $d_1, \ldots, d_p$ déterminent une multiplicité linéaire de dimension p.

[2] d appartient à $\mathfrak{A}$ d'après la seconde condition imposée à cet ensemble.

espaces $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$ sont sans points communs; pour cela, considérons les directions d appartenant à un même 2-plan K passant par d' et d'', et pour chacune de ces directions la trace $Q_d^\star$ de Q_d sur K. Les conclusions de mon travail cité ci-dessus (*voir* en particulier le paragraphe I, nos 4 et 5) s'appliquent et montrent que $Q_{d'}^\star$ et $Q_{d''}^\star$, donc aussi $Q_{d'}$ et $Q_{d''}$, sont sans points communs.

4. Supposons toujours la condition (C) vérifiée, et supposons de plus que le $(n-1)$-plan Π_δ correspondant à une direction particulière δ, $\delta \in \mathfrak{A}$, ne soit pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$. Chaque point de Π_δ appartient alors à un demi-espace Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, qui d'ailleurs ne peut être ni Q_δ, ni $Q_{\delta'}$ si la direction δ' opposée à δ appartient à $\mathfrak{A}$: Q_δ est en effet sans point commun avec Π_δ par sa définition même, et $Q_{\delta'}$ d'après le numéro précédent.

L'espace $(n-1)$-dimensionnel Π_δ est donc couvert par la famille (F) des demi-espaces $(n-1)$-dimensionnels $Q_d^\star$ découpés sur lui par les Q_d, $d \in \mathfrak{A}$, $d \neq \delta$, $d \neq \delta'$: $Q_d^\star = \Pi_\delta . Q_d$. Nous pouvons appliquer à cette famille (F) les considérations du paragraphe I, n° 2 : Π_δ peut donc être recouvert par une famille finie (Φ) extraite de (F) et comprenant au plus n éléments; nous supposerons (Φ) minimale et nous désignerons ses éléments par $Q_{d_i}^\star = \Pi_\delta . Q_{d_i}$, $i = 1, 2, \ldots, k$, $k \leqq n$. Soit D_i la demi-droite obtenue en projetant sur Π_δ la demi-droite d_i, M^{k-1} la multiplicité linéaire déterminée par $D_1, D_2, \ldots, D_k$; rappelons que l'enveloppe convexe de $D_1, D_2, \ldots, D_k$ est identique à M^{k-1}. Si nous prenons d_i' entre δ et d_i, la projection de d_i' sur Π_δ est encore D_i; d'autre part $\Pi_\delta . Q_{d_i'} \sqsupset \Pi_\delta . Q_{d_i}$ (1) ou $Q_{d_i'}^\star \sqsupset Q_{d_i}^\star$; le système des $Q_{d_i'}^\star$, $i = 1, 2, \ldots, k$ recouvre aussi Π_δ. Nous pouvons donc supposer que les demi-droites d_i forment avec δ des angles aigus. Le point A_i où la droite qui porte d_i perce Π_δ appartient alors à la demi-droite D_i, si Π_δ coupe la demi-droite δ elle-même, à son prolongement si Π_δ coupe δ'; dans l'un ou l'autre cas, la projection Ω de l'origine sur Π_δ est intérieure à l'enveloppe convexe des A_i et il en résulte que δ est intérieure à l'angle polyèdre qui a les d_i pour arêtes; cette conclusion est encore valable si Π_δ passe par O.

L'hypothèse que Π_δ n'est pas un $(n-1)$-plan d'appui de $\mathcal{C}$ nous met ainsi en contradiction avec la condition (C), ce qui achève la démonstration du lemme.

5. *Remarque.* — Dans l'énoncé du lemme, la condition (C) peut être remplacée par la condition suivante, moins restrictive en apparence :

Condition (Γ). — *Quels que soient, d'une part, le système de n directions linéairement indépendantes $d_1, d_2, \ldots, d_n$ prises dans $\mathfrak{A}$, et d'autre part la demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre qui a pour arêtes les demi-droites $d_1, d_2, \ldots, d_n$:*

Π_d *n'est pas entièrement recouvert par* $Q_{d_1}, Q_{d_2}, \ldots, Q_{d_n}$.

---

(1) Conséquence immédiate de la condition (C) appliquée à δ, d_i et à d_i'. *Voir* travail cité I, **4**.

La démonstration du lemme avec la condition (Γ) est plus longue, et ce nouvel énoncé ne présente pas d'avantage pour les applications analytiques que nous avons en vue [1].

III. — Lemmes sur les fonctions sous-harmoniques.

1. Nous aurons besoin de quelques lemmes se rattachant à des propriétés simples de l'équation des fonctions de Legendre.

Considérons une fonction des n variables $x_1, \ldots, x_n$ de la forme particulière

$$F(M) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = r^\lambda \varphi(u), \tag{1}$$

où l'on pose

$$r = OM, \qquad r^2 = x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2, \qquad u = \cos\theta = \frac{x_n}{r}, \qquad \theta = (Ox_n, OM).$$

Le calcul du laplacien

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \ldots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

donne

$$\frac{1}{r^{\lambda-2}} \Delta[r^\lambda \varphi(u)] = (1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u). \tag{2}$$

L'équation différentielle

$$(1-u^2)\varphi''(u) - (n-1)u\varphi'(u) + \lambda(\lambda+n-2)\varphi(u) = 0, \tag{3}$$

devient, par le changement de variables $u = 1 - v$, $\varphi(u) = \psi(v)$,

$$(2v - v^2)\psi''(v) + (n-1)(1-v)\psi'(v) + \lambda(\lambda+n-2)\psi(v) = 0. \tag{4}$$

La série $\sum_0^\infty a_k v^k$ vérifie formellement l'équation (4) si les coefficients consécutifs sont liés par la relation

$$\frac{a_{k+1}}{a_k} = \frac{k(k+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)}{(2k+n-1)(k+1)}, \tag{5}$$

qui détermine complètement les a_k si l'on prend $a_0 = 1$. Comme $\lim\limits_{k\to\infty} \dfrac{a_{k+1}}{a_k} = \dfrac{1}{2}$, cette série converge uniformément sur tout segment $|v| \leqq v_0$ avec $v_0 < 2$, donc en particulier sur le segment $0 \leqq v \leqq 1$, et sa somme $\Psi(v; \lambda)$ y vérifie l'équation (4).

Limitons la variation de λ à un segment $\lambda_0 \leqq \lambda \leqq \lambda_1$ avec $\lambda_0 \geqq 0$; la condition (5) jointe à $a_0 = 1$ montre qu'un a_k de rang donné est borné supé-

[1] Il est clair que la condition (C) contient la condition (Γ). D'autre part, si la condition (Γ) est vérifiée, on peut montrer que la distance de l'origine à Π_d est une fonction continue de la direction d; on déduit facilement de là que la condition (Γ) implique la condition (C).

rieurement en module pour ces λ. Nous appliquerons ce résultat aux coefficients dont le rang ne surpasse pas λ_1 et nous utiliserons pour les autres l'inégalité

$$(6)\qquad 0 < \frac{a_{k+1}}{a_k} < \frac{1}{2}\,\frac{k(k+n-2)}{(k+1)\left(k+\frac{n-1}{2}\right)} \qquad (k>\lambda).$$

Pour les valeurs considérées de λ et pour $|v| \leqq v_0$, $v_0 < 2$, la série $\sum a_k v^k$ est donc majorée par une série convergente de constantes. $\Psi(v;\lambda)$ est par suite une fonction continue de l'ensemble des deux variables pour $\lambda \geqq 0$, $|v| < 2$.

Posons alors

$$\Psi(v;\lambda) = \Phi(u;\lambda);$$

nous obtenons une solution $\Phi(u;\lambda)$ de l'équation différentielle (3), dépendant du paramètre λ, qui est définie en particulier pour $0 \leqq u \leqq 1$, $\lambda \geqq 0$ et qui est alors une fonction continue de l'ensemble des variables u et λ; cette solution prend pour $u=1$ la valeur 1 [1].

Notons que, pour $\lambda = 1$, a_2 s'annule d'après (5) ainsi que les coefficients suivants; $\Psi(v;1)$ se réduit à $1-v$, et l'on a

$$\Phi(u;1) = u \quad [2].$$

2. $\Phi(u;1)$ étant positif pour $0 < u \leqq 1$, la continuité de Φ montre que, sur un segment donné $u_0 \leqq u \leqq 1$ avec $u_0 > 0$, $\Phi(u;\lambda)$ a une borne inférieure positive pour toute valeur de λ suffisamment voisine de 1.

D'autre part, d'après (2) et la définition de $\Phi(u;\lambda)$,

$$\frac{1}{r^{\mu-2}}\Delta[r^\mu \Phi(u;\lambda)] = [\mu(\mu+n-2) - \lambda(\lambda+n-2)]\Phi(u;\lambda);$$

si $0 < \mu < \lambda$ et si $\Phi(u;\lambda) > 0$, cette expression est négative.

Étant donnée une valeur u_0 : $0 < u_0 < 1$, nous pourrons choisir une valeur $\lambda_0 > 1$ telle que $\Phi(u;\lambda_0) \geqq h$ pour $u_0 \leqq u \leqq 1$, avec un h positif. Si nous prenons ensuite μ_0 entre 1 et λ_0, la fonction $f_0(\mathrm{M}) = r^{\mu_0}\Phi(u;\lambda_0)$ est surharmonique dans la région définie par $\cos\frac{x_n}{r} \geqq u_0$, et le rapport $\frac{f_0(\mathrm{M})}{r^{\mu_0}}$ est borné inférieurement dans cette région par un nombre positif h.

3. Soit $v(\mathrm{M})$ harmonique ou sous-harmonique dans un domaine infini $\mathcal{D}$, compris dans un cône $(\mathrm{O}x_n, \mathrm{OM}) < \theta_0$ dont le demi-angle au sommet θ_0 est aigu. Supposons :

d'une part, que $\frac{v(\mathrm{M})}{r}$ est borné supérieurement dans $\mathcal{D}$ (ou tout au moins dans la partie de $\mathcal{D}$ extérieure à une certaine sphère de centre O); $v(\mathrm{M}) \leqq \mathrm{A}r$;

---

[1] Il est facile de montrer que $\Phi(u;\lambda)$ est une fonction décroissante de λ pour $0 \leqq u \leqq 1$. Nous n'aurons pas à utiliser cette propriété.

[2] Ceci exprime simplement que ru, c'est-à-dire x_n, est une fonction harmonique.

d'autre part, qu'il existe un nombre B, et pour chaque point frontière P de $\mathcal{D}$, un voisinage $\mathcal{V}_P$ tel qu'en tout point M de $\mathcal{V}_P$ contenu dans $\mathcal{D}$ la valeur de $v(M)$ ne surpasse pas B.

L'inégalité $v(M) \leqq B$ *est alors vérifiée en tout point de* $\mathcal{D}$.

On peut supposer $B = 0$. Prenons $\varepsilon > 0$ et introduisons la fonction $f_0(M)$ du numéro précédent, en prenant $u_0 = \cos\theta_0$. On a sur $\mathcal{D}$ au voisinage d'un point frontière quelconque $v(M) \leqq 0 < \varepsilon f_0(M)$; d'autre part, pour les valeurs de r suffisamment grandes, $v(M) \leqq Ar \leqq \varepsilon h r^{\mu_0}$.

Si l'on considère le domaine borné $\mathcal{D}'$ découpé dans $\mathcal{D}$ par une sphère de rayon suffisamment grand, la fonction surharmonique $\varepsilon f_0(M)$ majore $v(M)$ dans un voisinage de chaque point frontière, donc dans $\mathcal{D}'$ tout entier.

$v(M)$ est ainsi majoré en tout point de $\mathcal{D}$ par $\varepsilon f_0(M)$ quel que soit ε positif. On a donc bien $v(M) \leqq 0$ dans $\mathcal{D}$ (1).

4. Gardons les mêmes hypothèses, et supposons de plus qu'il existe un nombre $B' < B$ tel que l'inégalité $v(M) \leqq B'$ soit vérifiée sur $\mathcal{D}$ au voisinage de chaque point frontière extérieur à une certaine sphère S. Le lemme précédent, avec B' au lieu de B, s'applique à la fonction $v(M) - \frac{a}{r^{n-2}}$ où le coefficient positif a est pris assez grand pour que $B - \frac{a}{r^{n-2}} < B'$ dans S. Cette remarque nous permet d'énoncer le lemme suivant :

Si la fonction $v(M)$ *est harmonique ou sous-harmonique dans un domaine* $\mathcal{D}$ *contenu dans un cône de révolution dont le demi-angle au sommet est aigu, si* $v(M)$ *est défini sur la frontière* $\mathcal{F}$ *de* $\mathcal{D}$ (2) *et reste sous-harmonique sur* $\mathcal{D} + \mathcal{F}$ *on a*

$$\overline{\lim_{M\in\mathcal{D},\, r\to\infty}}\, v(M) = \overline{\lim_{P\in\mathcal{F},\, r\to\infty}}\, v(P). \text{ (3)}$$

5. Supposons maintenant que $\mathcal{D}$ soit un angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_n$. $v(M)$ vérifiant les hypothèses précédentes, nous supposons que $\frac{v(M)}{r}$ a une

---

(1) Le raisonnement reste valable si l'on remplace l'hypothèse $v(M) \leqq Ar$ par la suivante :

$$\lim_{\rho\to\infty}\left[\frac{1}{\rho^{1+\varepsilon}}\operatorname*{borne\ sup}_{M\in\mathcal{D},\, r=\rho} v(M)\right] = 0$$

quel que soit $\varepsilon > 0$.

(2) Cette hypothèse n'est donnée que pour la commodité de l'énoncé; en l'abandonnant, il faudrait poser pour $P \in \mathcal{F}$, $w(P) = \overline{\lim_{M\in\mathcal{D},\, M\to P}}\, v(M)$ et l'énoncé du lemme deviendrait

$$\overline{\lim_{M\in\mathcal{D},\, r\to\infty}}\, v(M) = \overline{\lim_{P\in\mathcal{F},\, OP\to\infty}}\, w(P).$$

(3) La valeur commune des deux membres pouvant être finie ou infinie.

limite supérieure finie a_i quand M s'éloigne indéfiniment sur $d_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Sur la droite support de d_i, orientée dans la direction d_i, nous prenons le point A_i tel que $\overline{OA_i} = a_i$ et nous considérons le $(n-1)$-plan Π_i normal en A_i à d_i; soit F le point de concours de ces hyperplans. Le produit scalaire $\overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ est une fonction harmonique de M, égale sur d_i à $\overline{OA_i}.\overline{OM}$. Le lemme précédent appliqué à $v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM}$ montre, en opérant par récurrence sur n, que

$$\overline{\lim_{M \in \mathcal{D},\, r \to \infty}} \left[v(M) - \overrightarrow{OF}.\overrightarrow{OM} \right] \leq 0.$$

La limite supérieure de $\frac{v(M)}{r}$ quand M s'éloigne indéfiniment sur une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre ne peut donc surpasser $\overline{OL}$, si L désigne la projection de F sur la droite support de d.

IV. — L'indicatrice de croissance.

Considérons dans l'espace euclidien E^n un ensemble ouvert convexe $\mathcal{A}$ ayant la propriété suivante : si le point M, autre que l'origine, appartient à $\mathcal{A}$, la demi-droite ouverte d'origine O passant par M est tout entière contenue dans $\mathcal{A}$. L'ensemble $\mathfrak{A}$ de ces demi-droites a les propriétés postulées au paragraphe précédent. Soit $v(M)$ une fonction définie et sous-harmonique, soit dans $\mathcal{A}$, soit dans la partie de $\mathcal{A}$ extérieure à un certain ensemble $\mathcal{R}$ fermé et borné. Nous supposerons que $\frac{v(M)}{r}$ est bornée supérieurement sur $\mathcal{A}$ ou sur $\mathcal{A} - \mathcal{R}$ (en excluant au besoin une sphère de centre O). A chaque demi-droite $d \in \mathfrak{A}$, dont nous désignerons le vecteur unitaire par $\vec{u}_d$, nous associons le nombre $h_d = \overline{\lim_{M \in d,\, r \to \infty}} \frac{v(M)}{r}$, le demi-espace fermé P_d défini par $\overrightarrow{OM}.\vec{u}_d \leq h_d$ et le bord Π_d de P_d.

$d_1, d_2, \ldots, d_r$ étant un système de demi-droites de $\mathfrak{A}$, linéairement indépendantes, qui définissent une multiplicité linéaire $\mathcal{M}^p$, nous considérons dans $\mathcal{M}^p$ une demi-droite d intérieure à l'angle polyèdre d'arêtes $d_1, d_2, \ldots, d_r$; d appartient nécessairement à $\mathfrak{A}$. Le dernier énoncé du paragraphe précédent peut s'interpréter comme suit : l'intersection de $\Pi_{d_1}, \Pi_{d_2}, \ldots, \Pi_{d_r}$ est dans Q_d ou sur Π_d. Nous reconnaissons la condition (C″) du lemme géométrique.

Par conséquent, *les points communs aux demi-espaces* P_d $(d \in \mathfrak{A})$ *forment un ensemble convexe fermé non vide* $\mathcal{J}$ *dont les* Π_d *sont les* $(n-1)$ *plans d'appui.* $\mathcal{J}$ sera encore appelé l'*indicatrice de croissance* de $v(M)$ dans $\mathcal{A}$.