Annales scientifiques de l'É.N.S.

Lucien Godeaux

Les points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 65 (1948), p. 189-210

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1948_3_65__189_0>

LES

POINTS UNIS DES INVOLUTIONS CYCLIQUES APPARTENANT A UNE SURFACE ALGÉBRIQUE

PAR M. LUCIEN GODEAUX.

Nous avons déjà consacré plusieurs travaux à la recherche de la structure des points unis isolés des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique et à celle de la structure des points de diramation correspondants d'une surface image d'une de ces involutions (¹). Dans ce Mémoire nous exposons une méthode permettant de résoudre, dans chaque cas, les problèmes dont il vient d'être question.

Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique d'ordre premier impair p. Considérons un point uni A de cette involution, isolé, simple pour la surface. Dans le domaine du premier ordre de A sur F, l'involution détermine soit l'identité, soit une homographie d'ordre p.

Dans le premier cas, le point A est appelé point uni parfait, dans le second, point uni non parfait. Pour étudier ces points, nous commençons par construire sur F un système linéaire complet $|C|$, contenant p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution, c'est-à-dire p systèmes dont les courbes se rencontrent suivant des groupes de l'involution. L'un de ces systèmes partiels $|C_0|$, est dépourvu de points-base et en rapportant projectivement ses courbes aux hyperplans d'un espace linéaire de dimension convenable, on obtient une surface Φ image de l'involution, c'est-à-dire une surface dont chaque point corres-

(¹) *Recherches sur les involutions douées d'un nombre fini de points de coïncidence appartenant à une surface algébrique* (*Bull. Soc. Math. de France*, 1919, p. 1-16); *Les involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Actualités scient.*, n° 270, Paris, Hermann, 1935); *Sur la structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*Mémoires in 8° de l'Académie Roy. de Belgique*, 1938, p. 1-44); *Sur les surfaces multiples ayant un nombre fini de points de diramation* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, 1938, p. 193-222); *Sur les points de diramation des surfaces multiples* (*Bull. de la Soc. Roy. des Sciences de Liége*, 1940, p. 54-79, 128-137.

pond à un groupe de l'involution. Au point uni A correspond sur Φ un point de diramation A'.

Lorsque le point A est uni parfait, les courbes C_0 passant par A acquièrent en ce point la multiplicité p, les tangentes étant variables. Il est facile de voir que le point de diramation correspondant A' est multiple d'ordre p pour la surface Φ, le cône tangent étant rationnel et irréductible.

Lorsque le point A est uni non parfait, nous construisons une suite de systèmes linéaires $|C'_0|$, $|C''_0|$, ... compris dans $|C_0|$ ayant en A des multiplicités croissantes, inférieures à p et des tangentes en A confondues avec deux droites, unies pour l'involution déterminée, dans le faisceau des tangentes à F en A, par l'involution donnée sur F. Le procédé employé conduit finalement à un système linéaire dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p, à tangentes variables. Déterminer la structure du point A revient à déterminer les différentes branches d'origine A, appartenant aux courbes C'_0, C''_0, ... On en déduit alors la structure du point de diramation A', c'est-à-dire sa multiplicité pour la surface Φ et la configuration formée par les cônes tangents à cette surface en ce point.

Il nous a paru utile, après avoir exposé la méthode générale, de l'appliquer à un cas particulier déterminé, de manière à montrer comment se fait cette application. C'est par là que se termine notre travail.

On trouvera, dans l'exposé cité plus haut ([1]), la bibliographie de la question jusqu'en 1935. Depuis, nous avons publié sur le même objet différentes Notes dans le *Bulletin de l'Académie royale de Belgique* et dans le *Bulletin de la Société royale des Sciences de Liége*. M. S. Lilley a également consacré un Mémoire à la question qui nous occupe ([2]).

Un résumé du présent travail a été présenté récemment à l'Académie des Sciences ([3]).

Ajoutons que les involutions étudiées existent certainement. Il suffit de considérer le cas où F est un plan, l'involution étant engendrée par une homographie de période p non homologique. Nous avons indiqué récemment comment on pouvait construire d'autres exemples ([4]).

I. — Généralités.

1. Soit F une surface algébrique contenant une involution cyclique I_p d'ordre premier impair p. Nous désignerons par T la transformation biration-

([1]) *Les involutions cycliques* (*loc. cit.*).

([2]) *On the isolated united points of a cyclic involution on an algebric surface* (*Proceedings of the London Mathem. Society*, 1940, p. 312-360).

([3]) *Structure des points unis des involutions cycliques appartenant à une surface algébrique* (*C. R. Acad. Sc.*, 2e sem. 1948, p. 173-175).

([4]) *Sur la construction de modèles de surfaces algébriques contenant des involutions cycliques* (*Bull. de la Soc. des Sciences de Liége*, 1948, p. 56-61).

nelle de F en soi, génératrice de l'involution I_p et nous supposerons que cette involution ne possède qu'un nombre fini de points unis. Un tel point, compté p fois, forme un groupe de l'involution. Nous supposerons en outre que les points unis de l'involution I_p sont des points simples de F.

Considérons un point uni A et soit C une courbe tracée sur F, passant simplement par A. La transformation T lui fait correspondre une courbe C' passant également simplement par A. A la tangente a à C en A, faisons correspondre la tangente a' à C' en A. Dans le faisceau de rayons de sommet A et dont le plan est le plan tangent α à F en A, nous obtenons ainsi une homographie qui est l'identité ou a la période p. Dans le premier cas, nous dirons que le point A est *uni parfait* ou de première espèce, dans le second, qu'il est *uni non parfait* ou de seconde espèce.

Transformons birationnellement F en une surface F' de telle sorte qu'au point A corresponde sur F' une courbe exceptionnelle a'_0. A l'involution I_p correspond sur F' une involution I'_p et à la transformation T, une transformation birationnelle T' de F' en soi, de période p. La courbe a'_0 est transformée en elle-même par T'; si A est uni parfait, tous les points de a'_0 sont unis pour T'; si au contraire A est uni non parfait, T' détermine sur la courbe rationnelle a'_0 une homographie cyclique d'ordre p. Cette homographie possède deux points unis A'_1, A'_2, qui sont des points unis de l'involution I'_p. Les points A'_1, A'_2 ont pour homologues sur F deux points A_1, A_2, infiniment voisins de A, unis pour l'involution I_p. Ces points sont situés sur les tangentes a_1, a_2 à F en A, unies pour l'homographie déterminée dans le faisceau des tangentes; une courbe C touchant en A la droite a_1 ou a_2, a pour transformée une courbe C' tangente en A à la même droite.

2. Supposons que le point A soit uni de seconde espèce. Le point A'_1 par exemple est uni pour l'involution I'_p et nous pouvons reprendre, pour ce point, les développements faits pour A. Suivant que le point A'_1 est uni parfait ou non parfait pour l'involution I'_p, nous dirons que le point A_1 est uni parfait ou non parfait pour l'involution I_p.

Si le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p, il possède deux points unis A'_{11}, A'_{12} infiniment voisins, unis pour l'involution. L'un de ces points est nécessairement situé sur la courbe a'_0. Aux points A'_{11}, A'_{12} correspondent, sur la surface F, des points A_{11}, A_{12} du domaine du second ordre du point A, infiniment voisins de A_1, que nous dirons être unis pour l'involution I_p.

Transformons birationnellement F' en une surface F'' de telle sorte qu'au point A'_1 corresponde sur la surface F'' une courbe exceptionnelle a''_0. Soit T'' la transformation birationnelle de F'' en soi homologue de T'; elle engendre une involution I''_p. Si le point A'_1 est uni parfait pour I'_p, tous les points de a''_0 sont unis pour T'' et I''_p. Si le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p, aux points A'_{11}, A'_{12} correspondent sur F'' deux points A''_{11}, A''_{12}, appartenant à a''_0, unis pour I''_p. On peut reprendre pour ces points les développements précédents et retourner ensuite à la surface F, et ainsi de suite.

On voit que si le point A est uni non parfait, il est l'origine d'une sorte d'arbre dont les branches sont constituées par des points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, chaque branche pouvant se terminer par un point uni parfait pour cette involution. Chaque point uni non parfait du domaine de A, a deux points unis infiniment voisins.

3. Pour poursuivre l'étude des points unis de l'involution I_p, nous allons construire un modèle projectif de la surface F.

Considérons sur F un système linéaire $|H_1|$, simple, irréductible, dépourvu de points-base. Soient $|H_2|$, $|H_3|$, ..., $|H_p|$ les systèmes linéaires que T, T^2, ..., T^{p-1} lui font correspondre. Le système linéaire complet

$$|C| = |H_1 + H_2 + \ldots + H_p|$$

est irréductible et dépourvu de points-base. De plus, il est transformé en lui-même par T.

Deux cas peuvent se présenter suivant que toute courbe de $|C|$ est transformée en elle-même par T ou bien qu'une courbe de $|C|$ est transformée en général par T en une autre courbe de $|C|$. Dans le premier cas, le système $|C|$ appartient à l'involution I_p; recommençons alors les opérations précédentes en prenant pour système $|H_1|$ le système $|C|$ lui-même. Nous obtenons ainsi le système linéaire complet $|pC|$. Si ce système appartenait encore à l'involution I_p, nous recommencerions l'opération précédente, et ainsi de suite. On parviendra finalement à un système linéaire transformé en lui-même par T et n'appartenant pas à l'involution I_p. Supposons en effet que les systèmes linéaires complets $|\lambda C|$ appartiennent tous à l'involution I_p, quel que soit l'entier positif λ. Les groupes de l'involution I_p appartenant à une courbe C irréductible déterminée, ne passant par aucun des points unis de l'involution, forment une série γ'_p; soient Γ une courbe image de cette série, π le genre de Γ. Les courbes λC découpent sur la courbe C envisagée une série linéaire composée au moyen de γ'_p et à laquelle correspond sur Γ une série linéaire. On peut prendre λ assez grand pour que la série considérée sur C soit complète et non spéciale. Soit pn l'ordre de cette série; la courbe C ayant, d'après la formule de Zeuthen, le genre $p(\pi - 1) + 1$, la série a la dimension $pn - p(\pi - 1) - 1$. Il lui correspond sur Γ une série d'ordre n, complète, non spéciale, de même dimension. Mais cette dimension est d'autre part $n - \pi$. On en conclut $p = 1$.

On en conclut qu'il est toujours possible de déterminer sur F un système linéaire complet, irréductible, privé de points-base $|C|$, transformé en lui-même par T et n'appartenant pas à l'involution I_p.

4. Considérons un système linéaire complet $|C|$ répondant aux conditions précédentes et soit r sa dimension. Rapportons projectivement les courbes C

aux hyperplans d'un espace linéaire S_r à r dimensions. A la surface F correspond point par point dans S_r une surface normale que nous continuerons à désigner par F. Sur ce modèle projectif de la surface F, la transformation T échange entre elles les sections hyperplanes et est par conséquent déterminée sur la surface par une homographie cyclique de période p de S_r; nous désignerons par T cette homographie.

L'homographie T possède un certain nombre t d'axes ponctuels que nous désignerons par $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{t-1}$. Soient $r_0, r_1, \ldots, r_{t-1}$ les dimensions de ces axes. On a, d'après la théorie des homographies cycliques,

$$r_0+r_1+\ldots+r_{t-1}+t=r+1 \qquad (1<t\leq p).$$

Désignons par Σ_i le système linéaire des hyperplans de S_r passant par les axes $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{t-1}$. Les hyperplans de Σ_i sont unis pour T et découpent, sur F, un système linéaire partiel appartenant à l'involution I_p et que nous désignerons par $|C_i|$. Il existe donc, dans $|\mathfrak{C}|$, t systèmes linéaires partiels $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$ appartenant à l'involution I_p.

Reprenons la formation du système $|C|$. Une courbe $H_1+H_2+\ldots+H_p$ est transformée en soi par T et appartient donc à l'un des systèmes $|C_0|$, $|C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$. D'après les hypothèses faites, elle varie d'autre part dans un système linéaire dépourvu de points-base; par conséquent, l'un des systèmes $|C_0|, |C_1|, \ldots, |C_{t-1}|$ est dépourvu de points-base; nous supposerons que c'est le système $|C_0|$. Mais alors, les axes ponctuels $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{t-1}$ de T ne peuvent rencontrer la surface F. Un point uni de l'involution I_p appartenant nécessairement à un axe ponctuel de l'homographie T, les points unis de I_p sont les points de rencontre de F et de l'axe ponctuel σ_0. Il en résulte que les systèmes linéaires $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{t-1}|$ ont pour points-base les points unis de l'involution I_p et seulement ces points.

5. Prenons comme sommets de la figure de référence dans S_r, r_0+1 points o_0, $o_1, \ldots, o_{r_0}$ indépendants de σ_0, r_1+1 points $o_{r_0+1}, \ldots, o_{r_0+r_1+1}$ points indépendants de $\sigma_1, \ldots, r_{t+1}+1$ points indépendants de σ_{t-1}. Les équations de l'homographie T peuvent s'écrire

$$\rho x'_i=\rho_i x_i \qquad (i=0, 1, \ldots, r),$$

les invariants projectifs ρ_i étant des racines d'ordre p de l'unité. Précisément, on pourra prendre

$$\begin{aligned}
&\rho_0=\rho_1=\ldots=\rho_{r_0}=1,\\
&\rho_{r_0+1} \quad =\ldots=\rho_{r_0+r_1+1}=\varepsilon_1,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\
&\rho_{r_0+\ldots+r_{t-1}+t-1}=\ldots=\rho_r=\varepsilon_{t-1},
\end{aligned}$$

où $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1}$ sont des racines primitives d'ordre p, distinctes, de l'unité.

Aux systèmes linéaires $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{t-1}|$, nous associerons les racines 1, $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{t-1}$. On observera que si l'on écrit l'équation des hyperplans de Σ_i et si l'on applique l'homographie T, on obtient la même équation, le premier membre étant multiplié par ε_i.

Cela étant, considérons le système $|\lambda C|$, découpé sur F par les hypersurfaces, d'ordre λ, de S_r. Ce système contiendra $t'(t \leqq t' \leqq p)$ systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p. Pour les former, il suffira de considérer les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \ldots + \lambda_{t-1} C_{t-1},$$

où $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_{t-1}$ sont des entiers positifs dont la somme est λ. A ce système sera attachée la racine $\varepsilon_1^{\lambda_1} \varepsilon_2^{\lambda_2} \ldots \varepsilon_{t-1}^{\lambda_{t-1}}$. Il est clair que l'on pourra prendre λ assez grand pour obtenir toutes les racines primitives d'ordre p de l'unité. Dans ces conditions, le système $|\lambda C|$ contiendra p systèmes linéaires partiels appartenant à l'involution I_p dont l'un, contenant les courbes λC_0, est dépourvu de points-base. Cela revient évidemment à dire que dans les développements précédents, on peut supposer $t = p$. Si ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité, on pourra, en modifiant éventuellement la numérotation des axes ponctuels de T, prendre $\varepsilon_1 = \varepsilon$, $\varepsilon_2 = \varepsilon^2$, ..., $\varepsilon_{p-1} = \varepsilon^{p-1}$.

En résumé, nous avons construit une surface normale F sur laquelle l'involution I_p est déterminée par une homographie cyclique T de l'espace ambiant S_r. L'homographie T possède p axes ponctuels $\sigma_0, \sigma_1, \ldots, \sigma_{p-1}$ de dimensions r_0, $r_1, \ldots, r_{p-1}$, dont le premier seul rencontre F, aux points unis de l'involution. Le système des sections hyperplanes $|C|$ de F contient p systèmes linéaires partiels $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ appartenant à l'involution I_p; le premier est dépourvu de points-base; les autres ont pour points-base les points unis de I_p.

Aux systèmes $|C_0|$, $|C_1|$, ..., $|C_{p-1}|$ sont respectivement attachés les nombres $1, \varepsilon, \varepsilon^2, \ldots, \varepsilon^{p-1}$, où ε est une racine primitive d'ordre p de l'unité.

Les courbes C_i sont découpées sur F par les hyperplans d'une gerbe Σ_i ayant comme base les espaces $\sigma_0, \ldots, \sigma_{i-1}, \sigma_{i+1}, \ldots, \sigma_{p-1}$.

6. Rapportons projectivement les courbes du système $|C_0|$ aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0 dimensions. Aux courbes C_0 passant par un groupe de l'involution I_p correspondent les hyperplans passant par un point dont le lieu est une surface normale Φ, image de l'involution I_p. On peut d'ailleurs obtenir la surface Φ (à une homographie près) en projetant la surface F à partir de l'espace linéaire de dimension minimum contenant $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur l'espace σ_0.

Les sections hyperplanes de Φ seront désignées par Γ_0; elles ont pour transformées, dans la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F, les courbes C_0.

Si n désigne l'ordre de Φ et π le genre des courbes Γ_0, les courbes C_0 et par suite les courbes C ont le degré pn et le genre $p(\pi - 1) + 1$.

Aux systèmes linéaires $|C_1|, |C_2|, \ldots, |C_{p-1}|$ correspondent sur Φ des systèmes linéaires complets que nous désignerons par $|\Gamma_1|, |\Gamma_2|, \ldots, |\Gamma_{p-1}|$. Les courbes $\Gamma_1, \Gamma_2, \ldots, \Gamma_{p-1}$ sont d'ordre n, mais les degrés et les genres de ces courbes dépendent du comportement des courbes $C_1, C_2, \ldots, C_{p-1}$ aux points unis de l'involution I_p.

Aux points unis de I_p correspondent sur Φ les points de diramation ou de ramification de la correspondance $(1, p)$ existant entre Φ et F. Nous verrons que ces points sont singuliers pour la surface Φ.

7. Soient A un point uni de l'involution I_p, α le plan tangent à F en ce point. Le plan α est uni pour l'homographie T et nous supposerons qu'il ne rencontre l'espace σ_0 qu'au seul point A. Le plan α doit par conséquent s'appuyer suivant une droite sur l'un des espaces $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ ou rencontrer suivant un point deux de ces espaces.

Plaçons-nous dans le premier cas. L'homographie T détermine dans le plan α une homologie de centre A, c'est-à-dire l'identité dans le faisceau (A, α). Le point A est uni parfait.

Dans le second cas, l'homographie T détermine dans α une homographie non homologique et par conséquent, dans le faisceau (A, α), une homographie de période p. Le point A est uni non parfait.

Considérons le cas où A est uni parfait et soit A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Les courbes C_0 passant par A sont découpées sur F par les hyperplans de Σ_0 passant par A et contenant par conséquent α; il en résulte que ces courbes, que nous désignerons par C'_0, ont un point au moins double en A, à tangentes variables. Soit k la multiplicité du point A pour les courbes C'_0. Sur une de ces courbes, il y a k groupes de I_p formés des k points infiniment voisins de A, comptés chacun p fois. Il en résulte que les courbes Γ'_0 qui correspondent sur Φ aux courbes C'_0 ont k points infiniment voisins de A'. En d'autres termes, les hyperplans passant par A' découpent sur Φ des courbes ayant la multiplicité k en A', donc ce point est multiple d'ordre k pour la surface.

Le système $|C'_0|$ a le degré $pn - k^2$, donc le système $|\Gamma'_0|$ a le degré $n - \frac{k^2}{p}$. Il en résulte que k est multiple de p.

Les courbes Γ'_0 ont le genre $\pi-(k-1)$ et les courbes C'_0, le genre $p(\pi-1)+1-\frac{1}{2}k(k-1)$. Dans la correspondance $(1, p)$ existant entre deux courbes Γ'_0, C'_0 homologues, il y a k points de diramation. La formule de Zeuthen donne

$$2p(\pi-k)+k(p-1)=2p(\pi-1)-k(k-1).$$

On en conclut $k=p$.

Si A est un point uni parfait, les courbes C_0 passant par ce point y ont un point multiple d'ordre p à tangentes variables. Le point de diramation correspondant sur Φ est multiple d'ordre p pour cette surface. Le cône tangent en ce point à Φ est d'ailleurs rationnel, car ses génératrices correspondent biunivoquement aux droites du faisceau (A, α).

8. Considérons maintenant un point uni non parfait A et soit encore A' le point de diramation qui lui correspond sur Φ. Le plan tangent α à F en A s'appuie en un point sur deux des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ et les droites qui projettent de A les points d'appui sont unies pour T. Appelons-les a_1 et a_2 et reprenons la construction du système $|C|$.

Si nous considérons les courbes H_1 tangentes à a_1 en A, les courbes H_2, $H_3, \ldots, H_p$ toucheront également a_1 en A. La courbe $H_1 + H_2 + \ldots + H_p$ aura en A un point multiple d'ordre p auquel sera infiniment voisin, sur a_1, un point multiple d'ordre p. Comme nous l'avons vu, ces courbes appartiennent au système $|C_0|$. Nous voyons donc que dans $|C_0|$, il existe un système linéaire partiel dont les courbes ont la multiplicité p en A, les p tangentes étant confondues avec a_1. Pour la même raison, il existe un système linéaire partiel de courbes C_0 ayant la multiplicité p en A, les p tangentes étant confondues avec a_2 Ces deux systèmes linéaires partiels appartiennent à un même système linéaire, que nous désignerons par $|C_0^{(\nu)}|$, dont les courbes ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables.

Sur une courbe $C_0^{(\nu)}$, l'involution I_p détermine une involution privée de points unis, les p points infiniment voisins de A forment un groupe de cette involution. Nous allons montrer que les courbes $C_0^{(\nu)}$ ne peuvent coïncider avec les courbes C'_0 assujetties à la seule condition de passer par A. Supposons en effet qu'il en soit autrement. Aux courbes $C_0^{(\nu)}$ correspondent sur Φ des courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ qui ont un point simple en A' et ce point est par conséquent simple pour la surface Φ. Appliquons la formule de Zeuthen à la correspondance entre deux courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$, $C_0^{(\nu)}$ homologues. Le genre de la dernière courbe étant

$$p(\pi - 1) + 1 - \frac{1}{2}p(p-1),$$

on a

$$2p(\pi - 1) = 2p(\pi - 1) - p(p-1),$$

d'où $p = 1$, ce qui est absurde.

On en conclut que les courbes C_0, assujetties à la seule condition de passer par A, ont en ce point une multiplicité inférieure à p. Cette multiplicité est d'autre part au moins égale à deux, car les hyperplans de Σ_0 découpant les courbes en question passent par A et contiennent le plan α. Les tangentes en A à ces courbes sont d'autre part unies pour T et sont donc confondues avec les droites a_1, a_2.

II. — Structure des points unis.

9. Soit A un point uni de seconde espèce. Nous pouvons toujours supposer, en changeant éventuellement de notation, que l'un des axes $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_{p-1}$ sur lesquels le plan tangent α à F en A s'appuie en un point est σ_1. Nous supposerons que α s'appuie en outre en un point sur $\sigma_k (1 < k \leqq p-1)$. Soient a_1, a_k les droites projetant de A les points d'appui de α sur σ_1, σ_k.

Les hyperplans de Σ_1 coupent le plan α suivant la droite a_k, par conséquent les courbes C_1 ont un point simple en A et y touchent la droite a_k. De même, les hyperplans Σ_k coupent α suivant la droite a_1 et les courbes C_k passent simplement par A en y touchant la droite a_1.

Appelons C'_0 les courbes C_0 assujetties à la seule condition de passer par A. Elles ont en ce point une certaine multiplicité $\rho_1 (2 \leqq \rho_1 < p)$, les tangentes étant confondues avec a_1 et a_k. Le système $|C'_0|$ a la dimension $r_0 - 1$.

Appelons C''_0 les courbes C'_0 assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de a_1, a_k. Elles forment un système linéaire $|C''_0|$ de dimension $r_0 - 2$ et ont en A une multiplicité $\rho_2 (\rho_1 < \rho_2 \leqq p)$.

Si $\rho_2 < p$, les tangentes en A aux courbes C''_0 sont confondues avec a_1 et a_k. Nous appellerons C'''_0 les courbes C''_0 assujetties à toucher en A une droite du plan α distincte de a_1, a_k. Et ainsi de suite.

Nous formerons ainsi une suite de systèmes linéaires

$$|C'_0|, \quad |C''_0|, \quad \ldots, \quad |C_0^{(\nu-1)}|,$$

de dimensions $r_0 - 1$, $r_0 - 2$, ..., $r_0 - \nu + 1$, dont les courbes ont en A des multiplicités $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{\nu-1}$ telles que

$$2 \leqq \rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\nu-1} < p,$$

les tangentes en A étant confondues avec a_1 et a_k.

Les courbes $C_0^{(\nu-1)}$ assujetties à toucher en A une droite de α distincte de a_1, a_k, forment un système linéaire de dimension $r_0 - \nu$ et ont en A la multiplicité p. Elles coïncident nécessairement avec les courbes $C_0^{(\nu)}$ rencontrées plus haut et leurs tangentes en A sont variables.

10. Les systèmes $|C'_0|, |C''_0|, \ldots, |C_0^{(\nu)}|$ appartiennent évidemment à l'involution I_p et n'ont que A comme point-base. Il en résulte qu'en dehors de A, les courbes C_1, C_k doivent rencontrer les courbes de ces systèmes en des groupes de I_p. Par conséquent, le nombre des points d'intersection de chacune des courbes C_1, C_k avec les courbes C'_0, C''_0, ... absorbés en A, doit être multiple de p.

Soient $\rho'_1, \rho'_2, \ldots, \rho'_\nu$ les nombres de points d'intersection absorbés en A de C_1 avec $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(\nu)}$. On a

$$1 < \rho'_1 \leqq \rho'_2 \leqq \ldots \leqq \rho'_\nu.$$

Or, on a $\rho'_\nu = p$. On en conclut

$$\rho'_1 = \rho'_2 = \ldots = \rho'_\nu = p.$$

Ainsi, les courbes C_1 rencontrent chacune des courbes $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$ en p points confondus en A. Comme on a $\rho_1 < \rho_2 < \ldots < \rho_{\nu-1} < p$, on en conclut également que ces dernières courbes ont effectivement a_k comme tangente au point A.

De même, les courbes C_k rencontrent chacune des courbes $C'_0, C''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$ en p points confondus en A et ces dernières courbes ont effectivement a_1 comme tangente au point A.

11. Fixons l'attention sur le système $|C_0^{(i)}|$, $(1 \leqq i < \nu)$. Les courbes $C_0^{(i)}$ ont la multiplicité ρ_i en A; nous supposerons qu'elles ont ρ_{i1} tangentes en A confondues avec a_1 et $\rho_{ik} = \rho_i - \rho_{i1}$ tangentes confondues avec a_k. Désignons par A_1, A_k les points de F infiniment voisins de A situés respectivement sur a_1, a_k et soient $\rho'_{i1} \leqq \rho_{i1}$, $\rho'_{ik} \leqq \rho_{ik}$ leurs multiplicités pour les courbes $C_0^{(i)}$.

Considérons un hyperplan S_{r-1} de Σ_0 ne passant pas par A et projetons la surface F à partir de A sur cet hyperplan. Nous obtenons une surface F', d'ordre $pn - 1$, transformée en soi par T. Aux points A_1, A_k correspondent respectivement un point A'_1 de σ_1 et un point A'_k de σ_k. Au domaine du premier ordre du point A sur F correspond sur F' la droite $A'_1 A'_k$.

Aux courbes $C_0^{(i)}$ correspondent sur F' des courbes d'ordre $pn - \rho_i$, que nous continuerons à désigner par le même symbole. Sur F', les courbes $C_0^{(i)}$ ont les multiplicités ρ'_{i1} en A'_1 et ρ'_{ik} en A'_k, mais la droite $A'_1 A'_k$ doit rencontrer ces courbes en ρ_{i1} points confondus en A'_1 et en ρ_{ik} points confondus en A'_k.

Sur F', l'homographie T engendre une involution I'_p, projection de I_p et les points A'_1, A'_k sont unis pour I'_p.

Supposons en premier lieu que le point A'_1 soit uni parfait pour l'involution I_p. Alors, le point A'_1 est uni parfait pour I'_p. Sur F', les courbes $C_0^{(i)}$ ont des tangentes variables en A'_1 et l'on a nécessairement $\rho'_{i1} = \rho_{i1}$. De plus, comme les courbes C_k doivent rencontrer les courbes $C_0^{(i)}$ en p points confondus en A, on a nécessairement $\rho_i + \rho_{i1} = p$.

Supposons maintenant que A_1 soit uni non parfait pour I_p. Le point A'_1 est uni non parfait pour I'_p et le plan tangent α'_1 à F' en A'_1, qui contient la droite $A'_1 A'_k$ et s'appuie donc en un point A'_k sur σ_k, s'appuie en outre en un point sur un autre axe ponctuel de l'homographie T, distinct de σ_1. Si ρ'_{i1} est inférieur à ρ_{i1}, les courbes $C_0^{(i)}$ sur F' ont en commun un certain nombre de points infiniment voisins successifs, fixes, unis pour I'_p, situés sur la droite $A'_1 A'_k$.

Pour préciser ce point, observons que A_1 étant uni non parfait pour I_p, il existe deux points A_{11}, A_{12}, infiniment voisins de A_1 dans des directions différentes, unis pour I_p. A ces points correspondent sur F' des points A'_{11}, A'_{12}, unis pour I'_p, infiniment voisins de A'_1 dont l'un, par exemple A'_{11}, est situé sur la droite $A'_1A'_k$. Si ρ''_{i1} est le nombre des tangentes aux courbes $C_0^{(i)}$ sur F', confondues avec la droite $A'_1A'_{12}$, la multiplicité du point A'_{11} pour ces courbes est au plus égale aux nombres $\rho_{i1} - \rho'_{i1}$, $\rho'_{i1} - \rho''_{i1}$.

On peut poursuivre l'examen du point A'_1 en répétant l'opération précédente. Considérons un hyperplan de Σ_1 ne passant pas par A'_1; il coupe l'espace S_{r-1} suivant un espace S_{r-2}. Projetons la surface F' de A'_1 sur cet espace S_{r-2}; nous obtenons une surface F'', transformée en elle-même par l'homographie T. Au domaine de A'_1 sur F' correspondra sur F'' une droite s'appuyant en A'_k sur σ_k et en un point correspondant à A'_{12}, situé sur un axe ponctuel de T distinct de σ_1, σ_k. Il faudra étudier les multiplicités de ces deux points unis pour les courbes correspondant, sur F'', aux courbes $C_0^{(i)}$.

De ce qui précède, on conclut que sur une courbe $C_0^{(i)}$, le point A est l'origine d'un certain nombre de branches. Sur chacune de ces branches, il existe un certain nombre de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs à toutes les courbes $C_0^{(i)}$.

Le degré du système $|C_0^{(i)}|$ est inférieur à pn, donc le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$ absorbés en A est fini (et d'ailleurs multiple de p). Il en résulte que le nombre de points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, est fini.

Considérons une suite de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs aux courbes $C_0^{(i)}$ et soit P le point qui termine cette suite. Dans le domaine du premier ordre de P, les points situés sur une courbe $C_0^{(i)}$ sont échangés entre eux par T et d'autre part, ils sont variables avec la courbe. Comme la multiplicité de P pour les courbes C_0 est inférieure à p, les points en question doivent être unis pour I_p. En d'autres termes, P est un point uni parfait pour I_p.

Chaque suite de points infiniment voisins successifs, unis pour I_p, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, se termine par un point uni parfait.

12. Soit A' le point de diramation de Φ qui correspond au point A. Aux courbes C'_0 correspondent, sur Φ, les sections Γ'_0 de cette surface par les hyperplans passant par A'.

Les courbes C'_0 ont en commun un certain nombre de suites de points infiniment voisins successifs de A, terminées par des points unis parfaits de I_p. Soient P_{11}; $P_{12}, \ldots, P_{1\eta}$ les points unis parfaits qui terminent les suites comprenant le point infiniment voisin de A sur a_1 et $\tau_{11}, \tau_{12}, \ldots, \tau_{1\eta}$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0. Soient $P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{k\zeta}$ les points unis parfaits qui terminent les suites comprenant le point infiniment voisin de A sur a_k et τ_{k1}, $\tau_{k2}, \ldots, \tau_{k\zeta}$ leurs multiplicités pour les courbes C'_0.

Rapportons projectivement les courbes C'_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à $r_0 - 1$ dimensions. Il correspond à F une surface Φ_1, image de l'involution I_p, dont les sections hyperplanes sont les courbes Γ'_0. Cette surface est projectivement identique à la projection, à partir de A′, de la surface Φ sur un hyperplan de l'espace ambiant.

Aux points de F infiniment voisins du point P_{11} correspondent sur Φ les points d'une courbe γ_{11}, rationnelle, d'ordre τ_{11}. De même aux domaines des points $P_{12}, \ldots, P_{1\eta}, P_{k1}, P_{k2}, \ldots, P_{k\zeta}$ sur F correspondent sur Φ des courbes rationnelles $\gamma_{12}, \ldots, \gamma_{1\eta}, \gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, respectivement d'ordres $\tau_{12}, \ldots, \tau_{1\eta}, \tau_{k1}, \tau_{k2}, \ldots, \tau_{k\zeta}$.

Les $\eta+\zeta$ courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ représentent le domaine du point A′ sur la surface Φ_1. En d'autres termes, si Φ_1 est la projection de Φ à partir de A′, le cône tangent à Φ en A′ sera l'ensemble des cônes projetant de A′ les différentes courbes $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$. Le point A′ est donc multiple d'ordre

$$\tau_{11}+\tau_{12}+\ldots+\tau_{1\eta}+\tau_{k1}+\tau_{k2}+\ldots+\tau_{k\zeta}$$

pour la surface Φ.

Observons qu'aux courbes C_1 correspondent sur Φ des courbes Γ_1 passant par A′, par conséquent, aux courbes Γ_1 correspondent sur Φ_1 des courbes, que nous désignerons toujours par Γ_1, rencontrant l'une des courbes $\gamma_{k1}, \gamma_{k2}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, par exemple la première γ_{k1}. Les courbes C_1 passent donc par le point P_{k1}; cela signifie que les courbes C_1 passent par la suite des points infiniment voisins de A qui aboutit à P_{k1}. La somme des multiplicités de ces points et de celle du point A pour les courbes C'_0 doit donc être égale à p.

De même, aux courbes C_k correspondent sur Φ des courbes Γ_k rencontrant en un point l'une des courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{1\eta}$, par exemple la première γ_{11}. Les courbes C_k passent par la suite de points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes C'_0, qui aboutit au point P_{11}. La somme des multiplicités de A et des points de cette suite pour les courbes C'_0 est égale à p.

13. Aux courbes C''_0 correspondent sur la surface Φ des courbes que nous désignerons par Γ''_0. Sur la surface Φ_1, les courbes Γ''_0 sont découpées par les hyperplans passant par un point A'_1 de cette surface.

Rapportons projectivement les courbes C''_0 aux hyperplans d'un espace linéaire à r_0-2 dimensions; il correspond à la surface F une surface Φ_2, image de l'involution I_p, projectivement identique à la surface que l'on obtiendrait en projetant Φ_1 du point A'_1 sur un hyperplan de l'espace ambiant. Le point A'_1 peut appartenir à des courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$, mais, à priori, il peut être quelconque. Dans ce dernier cas, les courbes C''_0 passent par les points $P_{11}, \ldots, P_k$ avec les mêmes multiplicités que les courbes C'_0.

On peut recommencer, pour déterminer la multiplicité du point A'_1 pour la surface Φ_1, les mêmes raisonnements qui ont été faits plus haut; nous ne le ferons pas, cela n'étant pas nécessaire pour notre objet. Notons que le point A'_1 peut être simple pour la surface Φ_1.

Aux courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ correspondent sur la surface Φ_2 des courbes que nous continuerons à désigner par le même symbole. Observons que si la courbe γ_{11}, par exemple, est une droite et si le point A'_1 appartient à cette droite, sur la surface Φ_2, la courbe γ_{11} se réduira au domaine d'un point multiple de cette surface.

D'une manière générale, désignons par $\Gamma_0^{(i)}$ les courbes qui correspondent sur Φ aux courbes $C_0^{(i)}$. Nous pourrons construire une surface Φ_i, dont les sections hyperplanes sont les courbes $\Gamma_0^{(i)}$. Sur cette surface, les courbes $\Gamma_0^{(i+1)}$ seront découpées par les hyperplans passant par un point A'_i de la surface. Nous construisons ainsi une suite de surfaces

$$\Phi, \quad \Phi_1, \quad \Phi_2, \quad \ldots, \quad \Phi_\nu,$$

dont chacune est projectivement identique à la projection de la précédente à partir d'un point sur un hyperplan de l'espace ambiant.

En général, nous désignerons par le même symbole les courbes et les points qui se correspondent sur ces différentes surfaces. On pourra par exemple dire, dans ces conditions, que Φ_i est projectivement identique à la projection, à partir de points A', A'_1, ..., A'_{i-1}, de la surface Φ sur un espace linéaire à $r_0 - i$ dimensions ne passant pas par ces points.

Fixons l'attention sur la surface Φ_ν. Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ont en A un point multiple d'ordre p à tangentes variables, donc $|C_0^{(\nu)}|$ a le degré $pn - p^2$ et la surface Φ_ν a l'ordre $n - p$.

Les p points d'une courbe $C_0^{(\nu)}$ infiniment voisins de A forment un groupe de I_p. A ces groupes de I_p correspondent, sur Φ_ν, les points d'une droite γ_0. Dans la correspondance $(1, p)$ existent entre deux courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ et $C_0^{(\nu)}$ homologues, il n'existe pas de diramation; par conséquent, d'après la formule de Zeuthen, les courbes $\Gamma_0^{(\nu)}$ ont le genre $\pi - \frac{1}{2}(p-1)$.

Les courbes $C_0^{(\nu)}$ ne passent pas par les points $P_{11}, \ldots, P_{k\zeta}$, ni d'une manière générale, par les points unis parfaits de I_p qui terminent les suites de points fixes infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes C''_0, C'''_0, ..., $C_0^{(\nu-1)}$. Il en résulte que sur la surface Φ_ν, les courbes $\gamma_{11}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$ doivent se réduire à des domaines de points isolés (en général multiples pour la surface). Ceci n'est possible que si les points A'_1, A'_2, ..., $A'_{\nu-1}$ appartiennent aux courbes $\gamma_{11}, \gamma_{12}, \ldots, \gamma_{k\zeta}$.

Les ordres des surfaces Φ, Φ_1, ..., Φ_ν vont en diminuant de n à $n-p$. On pourrait en déduire une limitation de la multiplicité du point A' pour Φ et des nombres η, ζ; nous ne le ferons pas, cela n'étant pas nécessaire pour notre objet.

14. Pour poursuivre la détermination de la structure du point uni A, il faut déterminer la multiplicité du point A pour les courbes C'_0, C''_0, ..., $C_0^{(\nu-1)}$.

Commençons par considérer le système linéaire complet $|hC|$, où h est un entier positif. Il est transformé en lui-même par T et contient p systèmes partiels $|(hC)_0|$, $|(hC)_1|$, ..., $|(hC)_{p-1}|$. A ces systèmes, nous attacherons respectivement les nombres $1, \varepsilon, \dots, \varepsilon^{p-1}$.

Le système $|(hC)_0|$ contient les courbes hC_0 et d'une manière générale, les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_{p-1} C_{p-1},$$

où l'on a

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{p-1} = h,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (p-1)\lambda_{p-1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

Le système $|(hC)_i|$ contient les courbes $(h-1)C_0 + C_i$ et d'une manière générale, les courbes

$$\lambda_0 C_0 + \lambda_1 C_1 + \dots + \lambda_{p-1} C_{p-1},$$

où

$$\lambda_0 + \lambda_1 + \dots + \lambda_{p-1} = h,$$
$$\lambda_1 + 2\lambda_2 + \dots + (p-1)\lambda_{p-1} \equiv i \pmod{p}.$$

On voit que le système $|(hC)|$ se comporte, vis-à-vis du point A, comme le système $|C|$.

Formons maintenant une suite de systèmes

$$|(hC)'_0|, \quad |(hC_0)''|, \quad \dots, \quad |(hC)_0^{(\nu)}|,$$

comme nous avons formé la suite

$$|C'_0|, \quad |C''_0|, \quad \dots, \quad |C_0^{(\nu)}|.$$

Le système $|(hC)_0^{(i)}|$ contient les courbes $(h-1)C_0 + C_0^{(i)}$ et par conséquent se comporte au point A comme le système $|C_0^{(i)}|$.

Considérons les courbes

$$\lambda C_1 + \mu C_k,$$

où λ, μ sont des entiers positifs tels que

$$\lambda + \mu < p, \qquad \lambda + k\mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

Posons $h = \lambda + \mu$. Les courbes considérées appartiennent au système linéaire $|(hC)_0|$ et ont en A la multiplicité $h < p$. Elles appartiennent donc à l'un des systèmes

$$|(hC)'_0|, \quad |(hC)''_0|, \quad \dots, \quad |(hC)_0^{(\nu-1)}|.$$

15. Supposons que les courbes C'_0 aient en A la multiplicité $\lambda + \mu$, λ tangentes à ces courbes en A étant confondues avec a_k et μ avec a_1.

Considérons les courbes

$$K = \lambda C_1 + \mu C_k, \qquad H = (\lambda + \mu - 1)C_0 + C'_0;$$

nous allons démontrer qu'elles appartiennent à un même système linéaire appartenant à l'involution I_p et précisément au système $|(hC)'_0|$, où $h = \lambda + \mu$.

Aux courbes K et H correspondent sur $\Phi, \Phi_1, \ldots$ des courbes K' et H'. Les premières rencontrent les courbes γ_{11}, γ_{k1} respectivement en μ et λ points; les secondes rencontrent ces courbes en τ_{11} et τ_{k1} points.

Nous allons considérer une courbe K et une courbe H irréductibles, déterminées. Elles déterminent un faisceau Σ de courbes du système complet $|hC|$. Le faisceau Σ est transformé en lui-même par T, puisque K et H le sont. Pour notre objet, il suffira de démontrer que chaque courbe de Σ est transformée en elle-même par T.

La base de Σ se compose du point A compté un certain nombre de fois et d'un certain nombre de groupes de l'involution I_p.

Supposons tout d'abord que l'on ait $\eta = 1$. Alors, les points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes C'_0, C_k ont tous la même multiplicité μ et l'on a $\tau_{11} = \mu$. Considérons une courbe D quelconque de Σ et soit D' la courbe de Σ que T lui fait correspondre. Les μ points de D, infiniment voisins de P_{11}, sont unis pour T, donc ils appartiennent à D'. Mais alors D et D' ont en commun μ points en dehors de la base de Σ; elles coïncident donc et les courbes K appartiennent au système $|H|$.

Supposons maintenant $\eta > 1$ et par suite $\tau_{11} < \mu$. On peut supposer $\zeta > 1$, car si ζ était égal à l'unité, le raisonnement précédent pourrait être repris.

La courbe K' coupe γ_{11} en $\tau_{11} < \mu$ points. Comme on peut supposer r et r_0 aussi grands qu'on le veut, il existe des courbes K' contenant la courbe γ_{11} comme partie. La courbe γ_{11} est rationnelle et isolée sur les surfaces $\Phi, \Phi_1, \ldots$, par conséquent son degré est négatif. Il en résulte que les courbes $K' - \gamma_{11}$ rencontrent la courbe γ_{11} en plus de τ_{11} points. Si ce nombre est inférieur à μ, nous considérerons les courbes $K' - 2\gamma_{11}$ et ainsi de suite. Nous parviendrons finalement à des courbes rencontrant γ_{11} en $\mu_1 \geqq \mu$ points. Soit K_1 la courbe qui correspond sur F à une des courbes ainsi obtenues. Nous définirons le faisceau Σ par une courbe H quelconque et la courbe K_1. Les courbes du faisceau Σ ont en P_{11} la multiplicité μ. Si $\mu_1 = \mu$, le raisonnement fait plus haut peut être repris et les courbes de Σ sont transformées en elles-mêmes par T. On ne peut d'ailleurs avoir $\mu_1 > \mu$, car les points infiniment voisins successifs de A communs aux courbes H, K, ont en plus la multiplicité μ.

Nous voyons donc que les courbes $K = \lambda C_1 + \mu C_k$ considérées appartiennent au système $|(hC)'_0|$, donc on a

$$\lambda + k\mu \equiv 0 \pmod{p}.$$

16. Le raisonnement qui vient d'être fait peut également s'appliquer aux courbes $C''_0, C'''_0, \ldots, C_0^{(\nu-1)}$. Il se peut que certaines de ces courbes ne rencontrent pas les courbes γ_{11}, γ_{k1}; on devra alors considérer les courbes du système

$|(\lambda+\mu-1)C_0+C_0^{(i)}|$ contenant par exemple la courbe γ_{11} un certain nombre de fois.

Pour étudier la structure du point uni A, nous devrons donc commencer par rechercher les entiers positifs λ, μ satisfaisant à la congruence

$$\lambda+k\mu\equiv 0 \pmod{p},$$

telle que $\lambda+\mu<p$. On rangera les solutions dans l'ordre des $\lambda+\mu$ croissants. On obtiendra ainsi les multiplicités du point A pour les courbes C_0', C_0'', ... et le nombre des tangentes à ces courbes en A confondues avec a_1 et avec a_k.

Dans la recherche des suites de points unis pour I_p, infiniment voisins successifs de A, communs aux courbes $C_0^{(i)}$, on devra tenir compte du fait que $|C_0^{(i)}|$ appartenant à l'involution I_p, son degré effectif est multiple de p et que, par conséquent, le nombre des points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$ absorbés en A est multiple de p.

De même, le nombre de points d'intersection de deux courbes $C_0^{(i)}$, $C_0^{(j)}$ absorbés en A doit être multiple de p. Si $i<j$, ce nombre est en général égal à celui relatif à deux courbes $C_0^{(i)}$, car les courbes $C_0^{(j)}$ sont des courbes $C_0^{(i)}$ particulières.

D'autre part, la formule de Zeuthen permettra de calculer les genres des courbes Γ_0', Γ_0'', ..., $\Gamma_0^{(\nu-1)}$; ces nombres vont en décroissant et sont inférieurs à π. Ils sont au moins égaux à $\pi-\frac{1}{2}(p-1)$.

III. — Étude d'un exemple.

17. Nous allons appliquer ce qui précède à un exemple, de manière à montrer le maniement de la méthode.

Nous supposerons $k=5$ et que le nombre premier p est de la forme $10\eta+3$. Cela exclut évidemment certaines valeurs de η telles que $\eta=3, 6, \ldots$.

La congruence

$$\lambda+5\mu\equiv 0 \pmod{p}$$

admet les solutions suivantes :

1°	$\lambda=5i+3,$	$\mu=2\eta-i,$	$(i=0, 1, \ldots, 2\eta-1);$
2°	$\lambda=5i+1,$	$\mu=4\eta+1-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots);$
3°	$\lambda=5i+4,$	$\mu=6\eta+1-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots);$
4°	$\lambda=5i+2,$	$\mu=8\eta+2-i$	$(i=0, 1, 2, \ldots).$

La solution donnant la valeur minimum pour $\lambda+\mu$ est obtenue dans le premier cas par $i=0$; on a $\lambda=3$, $\mu=2\eta$.

18. Les courbes C_0' ont en A la multiplicité $2\eta+3$, 2η tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et trois avec a_5 Ces courbes ont en commun quatre points infiniment voisins successifs A_1, A_2, A_3, A_4 de A, le premier étant sur a_1.

Ces points sont multiples d'ordre 2η pour les courbes et appartiennent aux courbes C_5. Les courbes C'_0 ont en outre en commun une suite $6\eta+1$ points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ infiniment voisins successifs de A, le premier B_1 étant situé sur a_5. Les $\eta-1$ premiers de ces points sont triples pour les courbes C'_0, le point B_η est double et les $5\eta+1$ points $B_{\eta+1}, \ldots, B_{6\eta+1}$ sont simples. Au point B_η est infiniment voisin un point $B_{\eta,1}$, simple pour toutes les courbes C'_0. Les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ appartiennent aux courbes C_1.

Les points $A_4, B_{6\eta+1}, B_{\eta 1}$ sont unis parfaits pour I_p. Sur la surface Φ_1, il correspond à ces points respectivement une courbe rationnelle $\alpha_{2\eta}$, d'ordre 2η, une droite β_1 et une droite β'_1. Le point A' est multiple d'ordre $2\eta+2$ pour la surface Φ, le cône tangent en ce point à cette surface étant formé d'un cône d'ordre 2η et de deux plans.

La surface Φ_1 est d'ordre $n-2(\eta+1)$ et ses sections hyperplanes Γ''_0 sont de genre $\pi-(2\eta+1)$.

19. Étudions maintenant les courbes C''_0. Si $\eta>2$, comme nous le supposerons d'abord, nous aurons $\lambda=8$, $\mu=2\eta-1$. Le point A est multiple d'ordre $2\eta+7$ pour les courbes C''_0, huit tangentes étant confondues avec a_5 et $2\eta-1$ avec a_1.

Les courbes C''_0 passent $2\eta-1$ fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4 et par conséquent, sur la surface Φ_1 le point A'_1 appartient à la courbe $\alpha_{2\eta}$.

Nous supposerons que le point A'_1 n'appartient pas à la courbe β_1, c'est-à-dire que les courbes C''_0 passent par le point $B_{6\eta+1}$. Supposons alors que les x_8 premiers des points $B_1, B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$ soient multiples d'ordre 8 pour les courbes C''_0, le suivant multiple d'ordre i et les x_1 derniers simples. On a

$$x_8+x_1=6\eta.$$

D'autre part, en exprimant que les courbes C_1 rencontrent les courbes C''_0 en p points confondus en A, on a

$$8x_8+i+x_1=8\mu-4.$$

On en déduit

$$7x_0=2\eta-(4+i).$$

Nous allons faire différentes hypothèses :

1° $\eta=7\xi$. — Nous avons $i=3$, $x_8=2\xi-1$.

Le point $B_{2\xi}$ étant triple pour les courbes C''_0 et le point $B_{2\xi-1}$ étant multiple d'ordre 8, les courbes C''_0 doivent avoir deux points doubles $B_{2\xi,1}$, $B_{2\xi,2}$ et un point simple $B_{2\xi,3}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi}$. Le point $B_{2\xi,2}$ étant double et $B_{2\xi,3}$ simple, les courbes C''_0 doivent avoir un point simple $B_{2\xi,3,1}$, infiniment voisin de $B_{2\xi,3}$. Ce point $B_{2\xi,3,1}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

2° $\eta = 7\xi + 1$. — On a $i = 5$, $x_8 = 2\xi - 1$.

Le point $B_{2\xi}$ est quintuple pour les courbes C''_0 et celles-ci ont un point triple $B_{2\xi,1}$, infiniment voisin; elles ont en outre un point simple $B_{2\xi,1,1}$ infiniment voisin du précédent et deux points simples $B_{2\xi,1,1,1}$, $B_{2\xi,1,1,2}$, infiniment voisins successifs de $B_{2\xi,1,1}$. Le point $B_{2\xi,1,1,2}$ est uni parfait pour I_p.

3° $\mu = 7\xi + 2$. — On a $i = 7$, $x_8 = 2\xi - 1$.

Les courbes C''_0 ont en commun un point simple $B_{2\xi,1}$ infiniment voisin de $B_{2\xi}$ et cinq points simples, dont le dernier est uni parfait pour I_p, infiniment voisins successifs de $B_{2\xi,1}$.

4° $\eta = 7\xi + 3$. — On a $i = 2$, $x_8 = 2\xi$.

Les courbes C''_0 ont en commun une suite de six points simples infiniment voisins de $B_{2\xi+1}$, dont le dernier est uni parfait pour I_p.

5° $\eta = 7 + 4$. — On a $i = 4$, $x_8 = 2\xi$..

Les courbes C''_0 ont en commun un point triple $C_{2\xi+1,1}$ et un point simple $B_{2\xi+1,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1}$. Elles ont en outre en commun deux points simples $B_{2\xi+1,2,1}$, $B_{2\xi+1,2,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1,2}$. Le point $B_{2\xi+1,2,2}$ est uni parfait pour I_p.

6° $\eta = 7\xi + 5$. — On a $i = 6$, $x_8 = 2\xi$.

Les courbes C''_0 ont en commun un point double $B_{2\xi+1,1}$ infiniment voisin de $B_{2\xi+1}$, un point double $B_{2\xi+1,1,1}$ et un point simple $B_{2\xi+1,1,2}$ infiniment voisins successifs de $B_{2\xi+1,1}$; enfin un point simple $B_{2\xi+1,1,2,1}$, uni parfait pour I_p, infiniment voisin du point précédent.

L'hypothèse $\eta = 7\xi + 6$ ne doit pas être envisagée, car alors $p = 70\xi + 63$ n'est pas premier.

Dans les différentes hypothèses envisagées, le degré du système $|\Gamma''_0|$ est égal à $n - (2\eta + 3)$ et son genre à $\pi - (2\eta + 1)$. Le point $B_{\eta 1}$ n'appartient pas aux courbes C''_0, donc le point A'_1, sur Φ_1, appartient à la droite β'_1. Nous avons déjà vu qu'il appartenait à la courbe $\alpha_{2\eta}$.

La surface Φ_2 est d'ordre $n - (2\eta + 3)$. Sur cette surface la courbe $\alpha_{2\eta}$ est d'ordre $2\eta - 1$, la droite β_1 est une droite, mais la courbe β'_1 se réduit au domaine d'un point multiple, appartenant à la courbe $\alpha_{2\eta}$.

Nous avons supposé que les courbes C''_0 passaient par le point $B_{6\eta+1}$; nous verrons dans un instant que cette hypothèse est justifiée et nous n'examinerons pas les autres.

20. La valeur la plus petite de $\lambda + \mu$ donnée par les solutions du second type (n° 17) est $4\eta + 2$ ($\lambda = 1$, $\mu = 4\eta + 1$). Les solutions du premier type

donnent les valeurs de $\lambda + \mu$ allant en croissant lorsque i croît. Cherchons la plus petite valeur de i pour laquelle on a

$$2\eta + 4i + 3 > 4\eta + 2,$$

c'est-à-dire

$$4i > 2\eta - 1.$$

Si $\eta = 2\theta$, on a $i = \theta$; si $\eta = 2\theta + 1$, on a $i = \theta + 1$.

Il en résulte que si $\eta = 2\theta$, les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont la multiplicité $4\eta + 2$ au point A, $4\eta + 1$ tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et une avec a_5. Si $\eta = 2\theta + 1$, ce sont les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ qui présentent ces particularités. Nous sommes donc conduit à traiter séparément les deux hypothèses.

21. Supposons tout d'abord $\eta = 2\theta$, donc $p = 20\theta + 3$.

Les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont la multiplicité $4\eta + 2 = 8\theta + 2$ en A, $8\theta + 1$ tangentes étant confondues avec a_1 et une avec a_5. Il en résulte que le point B_1 est simple pour les courbes en question et comme celles-ci doivent rencontrer les courbes C_1 en p points confondus avec les courbes C_1, elles passent simplement par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{6n+1}$.

Les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ passent $3\theta + 1$ fois par le point A_1 et 3θ fois par les points A_2, A_3, A_4. Elles ont en outre en commun 5θ points simples $A_{1,1}, A_{1,2}, \ldots, A_{1,5}$ infiniment voisins successifs de A_1. Le point $A_{1,5}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

La surface $\Phi_{\theta+1}$ a l'ordre $n - (5\theta + 2)$ et les courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ ont le genre $\pi - (4\theta + 1) = \pi - (2\eta + 1)$. On en conclut que sur la surface Φ_1, les points $A'_1, A'_2, \ldots, A'_\theta$ sont simples, le premier étant le point de rencontre des courbes $\alpha_{2\eta}$ et β'_1. Les points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\theta$ appartiennent également à la courbe α_{2n}, car sur $\Phi_{\theta+1}$, cette courbe a l'ordre 3θ. Les points $A'_2, A'_3, \ldots, A'_\theta$ sont d'ailleurs infiniment voisins successifs de A'_1.

Au domaine du point $B_{6\eta+1}$ correspond sur $\Phi_{\theta+1}$ une droite β_1; c'est pour cette raison que nous avons supposé plus haut que les courbes C''_0 passaient par le point $B_{6\eta+1}$; cette hypothèse est justifiée ici.

22. Toujours dans l'hypothèse $\eta = 2\theta$, les courbes $C_0^{(\theta+1)}$ ont en A la multplicité $8\theta + 3$, 3θ tangentes étant confondues avec a_1 et $5\theta + 3$ avec a_5.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent 3θ fois par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4 et l'on en conclut que, sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point $A'_{\theta+1}$ n'appartient pas à la courbe α_{2n}.

Les courbes C_1 doivent rencontrer les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ en p points confondus en A. Si les dernières courbes passent même simplement par les points B_1, $B_2, \ldots, B_{6\eta+1}$, les courbes C_1 les rencontrent en $p + 1$ points, donc les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ne passent pas par $B_{6\eta+1}$ et sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point $A'_{\theta+1}$ appartient à la droite β_1.

Une discussion assez longue, mais sans difficulté, montre que les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent neuf fois par le point B_1, six fois par les points $B_2, B_3, \ldots, B_{2\theta-1}$ et trois fois par le point $B_{2\theta}$, c'est-à-dire par le point B_η. Elles passent en outre par certains points infiniment voisins de B_1 et trois fois par le point $B_{\eta,1}$.

Le nombre θ peut prendre l'une des formes $3\varphi+1$, $3\varphi+2$, puisque p est premier.

Si $\theta=3\varphi+1$, les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun $5\varphi-1$ points triples B_{11}, B_{12}, $\ldots$, $B_{1,5\varphi-1}$ et un point double $B_{1,5\eta}$ infiniment voisins successifs de B_1, un point simple $B_{1,5\varphi,1}$ infiniment voisin de $B_{1,5\varphi}$ et un point simple $B_{1,5\varphi,1,1}$, uni parfait pour I_p, infiniment voisin de $B_{1,5\varphi,1}$.

Si $\theta=3\varphi+2$, les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun une suite de $5\varphi+1$ points triples suivie d'un point simple, infiniment voisins successifs de B_1, le dernier point étant suivi de deux points simples dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Dans les deux cas, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ a le degré $n-(5\theta+6)$ et le genre $\pi-4(\theta+1)=\pi-2(\eta+2)$.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passant trois fois par le point $B_{\eta,1}$, les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ rencontrent en trois points la courbe β'_1. Plaçons-nous sur la surface Φ_1. Sur celle-ci les courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ sont découpées par les hyperplans ayant un contact d'ordre $\theta-1$ avec la courbe $\alpha_{2\eta}$ au point A'_1. Ces courbes ne rencontrent pas la droite β'_1. Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$, qui sont des courbes $\Gamma_0^{(\theta+1)}$ particulières, devant rencontrer la droite β'_1, sont découpées sur Φ_1 par les hyperplans précédents contenant en outre la droite β'_1.

Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ ne rencontrant pas la droite β_1, celle-ci doit rencontrer la droite β'_1 en un point distinct de A'_1.

23. Nous allons maintenant nous occuper de l'hypothèse $\eta=2\theta+1$.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en A la multiplicité $8\theta+6$, $8\theta+5$ des tangentes en ce point étant confondues avec a_1 et la dernière étant a_3.

Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ passent simplement par les points B_1, B_2, $\ldots$, $B_{6\eta+1}$, $3\theta+4$ fois par le point A_1 et $3\theta+1$ fois par chacun des points A_2, A_3, A_4. Elles ont en outre en commun un certain nombre de points infiniment voisins de A_1. Pour déterminer ces points, remarquons que p étant premier, θ ne peut être de la forme $3\varphi+1$.

Supposons $\theta=3\varphi$. Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun une suite de $5\varphi+1$ points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $\ldots$, $A_{1,5\varphi}$, $A_{1,5\varphi+1}$ dont les 5φ premiers sont triples et le dernier simple. A ce dernier point sont infiniment voisins deux points simples $A_{1,5\varphi+1,1}$, $A_{1,5\varphi+1,2}$, dont le dernier est uni parfait pour l'involution I_p.

Supposons maintenant $\theta=3\varphi+2$. Les courbes $C_0^{(\theta+2)}$ ont en commun $5\varphi+4$ points $A_{1,1}$, $A_{1,2}$, $\ldots$, $A_{1,5\varphi+3}$, $A_{1,5\varphi+4}$ dont les $5\varphi+3$ premiers sont triples et le dernier double. Elles ont en outre en commun un point simple $A_{1,5\varphi+4,1}$ infiniment voisin de $A_{1,5\varphi+4}$ et un point simple, uni parfait pour I_p, $A_{1,5\varphi+4,1,1}$, infiniment voisin de $A_{1,5\varphi+4,1}$.

Dans les deux cas, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ a le degré $n-5(\theta+1)$ et le genre

$\pi - 4\theta - 3 = \pi - (2\eta + 1)$. Sur la surface $\Phi_{\theta+1}$, le point $A'_{\theta+1}$ est simple. Comme dans le cas précédent (n° 21), sur la surface Φ_1, les points A'_1, A'_2, ..., $A'_{\theta+1}$ sont simples. Le point A'_1 appartient aux courbes $\alpha_{2\eta}$, β'_1 et les points A'_2, ..., $A'_{\theta+2}$ sont infiniment voisins successifs de A'_1 sur la courbe $\alpha_{2\eta}$.

Actuellement encore, au point $B_{6\eta+1}$ correspond sur $\Phi_{\theta+2}$ une droite β_1, ce qui justifie l'hypothèse faite plus haut que les courbes C''_0 passent par le point $B_{6\eta+1}$.

Sur la surface $\Phi_{\theta+2}$, au domaine du point $A_{1,5\varphi+1,2}$ ou du point $A_{1,5\eta+4,1,1}$, selon la valeur de θ correspond une droite qui, représentant le point $A'_{\theta+1}$ de $\Phi_{\theta+1}$, est exceptionnelle.

24. Les courbes $C_0^{(\theta+3)}$ ont en A la multiplicité $8\theta + 9$ et $3\theta + 1$ de leurs tangentes en ce point coïncident avec a_1, les $5\theta + 8$ autres avec a_5. Ces courbes passent $3\theta + 1$ fois par chacun des points A_1, A_2, A_3, A_4. Elles passent en outre sept fois par le point B_1, six fois par les $2\theta - 1$ points $B_2, B_3, \ldots, B_{2\theta}$, trois fois par le point $B_{2\theta+1} = B_\eta$ et par le point $B_{\eta,1}$, enfin une fois par $5\theta + 1$ points $B_{11}, B_{12}, \ldots, B_{1,5\theta+1}$, infiniment voisins successifs de B_1. Le point $B_{1,5\theta+1}$ est uni parfait pour l'involution I_p.

Le système $|\Gamma_0^{(\theta+3)}|$ a le degré $n - (5\theta + 9)$ et le genre $\pi - 4\theta - 5 = \pi - 2(\eta + 2)$.

Sur la surface Φ_1, le système $|\Gamma_0^{(\theta+2)}|$ est découpé par les hyperplans ayant en A'_1, avec la courbe $\alpha_{2\eta}$, un contact d'ordre θ; ces courbes ne rencontrent pas la droite β'_1 (en dehors du point fixe A'_1). Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ sont des courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ rencontrant la droite β'_1 en trois points variables; elles sont donc découpées sur Φ_1 par les hyperplans précédents passant par la droite β'_1.

Les courbes $C_0^{(\theta+3)}$ ne passent pas par le point $B_{6\eta+1}$, donc les courbes $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ ne rencontrent pas la droite β_1 et celle-ci s'appuie donc en un point sur β'_1.

25. Nous n'étudierons pas le comportement en A des autres courbes des systèmes $|C_0^{(i)}|$; les cas considérés montrent comment la méthode doit être appliquée. Observons d'ailleurs que la structure du point de diramation A' est complètement déterminée.

Au point A', la surface Φ a un point multiple d'ordre $3\eta + 2$, le cône tangent se composant d'un cône $\varphi_{2\eta}$ d'ordre 2η et de deux plans φ_1, φ'_1. Le plan φ'_1 rencontre le cône $\varphi_{2\eta}$ et le plan φ_1 chacun suivant une droite.

Sur la surface Φ_1, nous avons la relation fonctionnelle

$$\Gamma_0 \equiv \Gamma'_0 + \alpha_{2\eta} + \beta'_1 + \beta_1.$$

En considérant les intersections des deux membres successivement avec les courbes $\alpha_{2\eta}$, β'_1, β_1, on trouve que ces courbes ont respectivement pour degrés virtuels $-(2\eta + 1)$, -3, -2.

Les courbes $\Gamma_0^{(\theta+2)}$ si $\eta = 2\theta$ et $\Gamma_0^{(\theta+3)}$ si $\eta = 2\theta + 1$, appartiennent au système linéaire

$$|\Gamma| = |\Gamma'_0 - \beta'_1| = |\Gamma_0 - \alpha_{2\eta} - 2\beta'_1 - \beta_1|.$$

Elles sont précisément déduites du système en imposant aux courbes un contact d'ordre θ ou d'ordre $\theta+1$ suivant que $\eta=2\theta$ ou $\eta=2\theta+1$, avec la courbe $\alpha_{2\eta}$ au point A'_1.

Les courbes Γ rencontrent la droite β'_1 en quatre points, la courbe $\alpha_{2\eta}$ en $2\eta-1$ points, mais ne rencontrent pas la droite β_1. Sur la surface F, il correspond aux courbes Γ des courbes passant $2\eta-1$ fois par les points A_1, A_2, A_3, A_4, quatre fois par les points B_η, $B_{\eta+1}$, huit fois par les points $B_1, B_2, \ldots, B_{\eta-1}$, $2\eta+7$ fois par le point A. Ce sont évidemment des courbes C''_0 particulières, puisque les courbes Γ sont des courbes Γ''_0 particulières.

26. Dans ce qui précède, nous avons supposé $\eta>2$ (n° 19). Pour $\eta=1$, nous avons $p=13$ et pour $\eta=2$, $p=23$. Dans ces cas, le système $|C''_0|$ a au point A un comportement différent de celui que nous avons étudié.

Dans l'hypothèse $p=13$, $\eta=1$, le système $|C''_0|$ coïncide avec le système $|C_0^{(\theta+2)}|$ que nous avons étudié (n° 23) lorsque $\eta=2\theta+1$; il suffit de supposer $\theta=0$.

Dans l'hypothèse $p=23$, $\eta=2$, le système $|C''_0|$ coïncide avec le système $|C_0^{(\theta+1)}|$ étudié lorsque $\eta=2\theta$ (n° 21). Il suffira de poser $\theta=1$.

Dans les deux cas, la singularité du point de diramation A' pour la surface Φ se déduit du cas général en posant $\eta=1$ ou $\eta=2$.