ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI CARTAN
ROGER GODEMENT

Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 79-99
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__79_0>

THÉORIE DE LA DUALITÉ

ET

ANALYSE HARMONIQUE

DANS LES

GROUPES ABÉLIENS LOCALEMENT COMPACTS

PAR MM. HENRI CARTAN ET ROGER GODEMENT.

INTRODUCTION.

Le but du présent article est d'exposer, avec le maximum de généralité et le minimum d'artifices techniques, les principes essentiels de l'Analyse harmonique. Pour cela, et comme l'a vu André Weil [1], il faut poser le problème en termes de théorie des groupes. Mais nous nous séparons de Weil en ce que notre théorie ne nécessite, à aucun moment, d'hypothèse relative à la *structure* particulière des groupes envisagés; elle s'applique indistinctement à n'importe quel groupe abélien, et permet par exemple de traiter les classiques *séries* et *intégrales* de Fourier suivant des procédés rigoureusement identiques.

Notre exposé n'aurait sans doute pas vu le jour sans le travail fondamental de I. Gelfand et D. Raïkov [2]; à ces deux auteurs revient le mérite d'avoir mis en pleine lumière le rôle des fonctions de type positif en théorie des groupes; bien entendu, leurs résultats ont une portée qui va bien au delà du sujet du présent article; on pourra consulter, à ce propos, outre leur Mémoire cité plus haut, la Thèse de l'un d'entre nous [3]. Nous nous sommes bornés ici à appliquer aux groupes *abéliens* les méthodes de ces deux auteurs, et avons cherché à en tirer, sur ce terrain particulier, le parti maximum. Il semble d'autre part que ces deux mathématiciens, se basant sur la théorie des anneaux normés de Gelfand, aient obtenu dès 1941 une construction directe de la transformation de Fourier; mais l'impossibilité de consulter en France, actuellement, les travaux publiés à Moscou entre 1939 et 1942, nous interdit malheureusement d'en parler (cf. *Note* suivant la Bibliographie).

Notre exposé n'est pas « élémentaire »; il suppose connues du lecteur certaines notions fondamentales relatives aux espaces de Hilbert et de Banach, à la théorie de la mesure et au produit de composition dans les groupes. Mais l'expérience prouve que les exposés élémentaires de la transformation de Fourier sont souvent obscurs et, au sens propre du terme, mystérieux. Il nous semble au contraire que les notions de base que nous venons de nommer jouent dans cette question un rôle essentiel, bien que ce rôle n'ait été reconnu qu'une fois les principaux résultats obtenus. Enfin, c'est peut-être l'intervention simultanée de méthodes aussi diverses qui constitue précisément le caractère le plus passionnant de l'Analyse harmonique, et qui en fait une branche particulièrement instructive des Mathématiques. Nous espérons donc que le lecteur voudra bien fournir, s'il y a lieu, l'effort préliminaire que nous lui demandons; les instruments employés ici s'appliquent du reste à beaucoup d'autres branches des Mathématiques.

I. — Rappel de notions fondamentales.

Les quelques définitions et résultats que nous allons rappeler ont pour but d'orienter le lecteur désireux d'acquérir les notions de base indispensables. Pour plus de détails, le lecteur consultera les ouvrages cités dans la Bibliographie [1, 4, 5, 6].

Nous nous dispensons de parler ici des espaces hilbertiens (opérateurs hermitiens ou unitaires, décomposition spectrale de tels opérateurs); ces notions sont en effet assez répandues aujourd'hui (¹).

1. *Espaces de Banach.* — Un espace de Banach (complexe) est un espace vectoriel (sur le corps des nombres complexes), normé, complet. Le *dual* d'un tel espace E est l'espace E′ des formes linéaires *continues* sur E (fonctions linéaires continues à valeurs complexes), muni de la norme

$$\|f\| = \sup_{\|x\| \leqq 1} |f(x)|.$$

Un sous-ensemble de E′ sera *borné* s'il existe $M \geqq 0$ tel que $\|f\| \leqq M$ pour tout f de cet ensemble. La *topologie faible* est définie de la façon suivante, sur tout ensemble borné de E′ : une f variable converge faiblement vers une f_0 de E′ si $f(x)$ tend vers $f_0(x)$ pour tout $x \in E$; il suffit du reste (f restant de norme bornée) qu'il en soit ainsi pour les x d'un sous-ensemble partout dense de E.

(¹) On pourra consulter la monographie de B. von Sz. Nagy (*Ergebn. der Math.*, Bd. 5, H. 5, Berlin, 1942) ou le traité classique de M. H. Stone.

Tout sous-ensemble *borné* de E′, *fermé* pour la topologie faible de E′, est *compact* ([2]) pour cette topologie.

Pour qu'un sous-espace vectoriel *fermé* V de E soit $\neq E$, il faut et il suffit qu'il existe une $f \in E'$ telle que $f \not\equiv 0$ et $f(x) = 0$ pour tout $x \in V$.

2. *Mesures de Radon.* — Pour un espace *localement compact* G ([2]), on notera L^+ l'ensemble des fonctions numériques continues $\geqq 0$, nulles en dehors d'ensembles compacts. Une mesure de Radon *positive* est une fonctionnelle additive $\mu(f)$ définie pour $f \in L^+$, à valeurs réelles $\geqq 0$ et finies. Elle se prolonge d'une manière évidente en une fonctionnelle *linéaire* sur l'espace vectoriel complexe L des fonctions continues numériques *complexes*, nulles en dehors de compacts. Une mesure de Radon *complexe* est une fonctionnelle linéaire sur L, qui soit de la forme $\mu_1 - \mu_2 + i\mu_3 - i\mu_4$ (μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 désignant des mesures de Radon positives).

Pour chaque mesure de Radon *positive* μ, on définit les fonctions f (numériques complexes) *sommables* pour μ; leur intégrale, essentiellement *finie*, est notée $\int f(x)\, d\mu(x)$. L'ensemble des fonctions sommables constitue un espace de Banach L^1 où la norme est $\|f\|_1 = \int |f(x)|\, d\mu(x)$. Une fonction φ est *sommable sur tout compact* si $f\varphi$ est sommable quelle que soit $f \in L$. Les fonctions bornées et sommables sur tout compact constituent un second espace de Banach L^∞ où la norme est $\|f\|_\infty = \sup_{x \in G} |f(x)|$. Dans l'espace L^1 comme dans l'espace L^∞ on ne distingue pas entre deux fonctions dont la différence a une norme nulle, c'est-à-dire entre deux fonctions qui sont égales *presque partout* pour μ. Une mesure *positive* variable μ *converge vaguement* vers une mesure (positive) μ_0, si $\mu(f)$ tend vers $\mu_0(f)$ pour chaque $f \in L^+$ et par suite pour chaque $f \in L$.

Une mesure positive μ est de *masse totale finie* (ou encore *bornée*) si la constante *un* est sommable; son intégrale $\int d\mu$, qui est finie, est alors la *masse totale* de μ. Lorsque G est *compact*, toute μ est de masse totale finie, et la convergence vague s'identifie à la convergence *faible* dans le dual de L (considéré comme espace de Banach avec la norme

$$\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|).$$

Lorsque G n'est pas compact, soit G′ l'espace compact obtenu en adjoignant à G un « point à l'infini » (théorème d'Alexandroff) ([3]). Pour une f continue et bornée sur G, posons encore $\|f\| = \sup_{x \in G} |f(x)|$; pour cette *norme*, l'adhérence L_∞ de L se compose des f continues (sur G) telles que $f(x)$ tende vers zéro

([2]) La terminologie est celle du traité de Bourbaki [6].

([3]) *Voir* Bourbaki [6], Chap. I, § 10.

lorsque x « tend vers l'infini » [1]. Une mesure de masse totale finie définit une *forme linéaire continue* sur l'espace de Banach L_∞ (normé par $\|f\|$); la réciproque est évidente : tout élément du dual de L_∞ peut être identifié à une mesure de Radon sur G (en général *complexe*), combinaison linéaire de mesures positives et de *masses totales finies*. La convergence *vague* des mesures positives de masse totale $\leqq 1$ s'identifie à la convergence *faible* dans le dual de L_∞ : *l'ensemble des mesures positives de masse totale au plus égale à un est donc compact pour la topologie vague*. Enfin, une mesure positive de masse totale finie peut être considérée comme une mesure sur l'espace compact G', mesure pour laquelle le « point à l'infini » est de mesure nulle. On dira qu'une μ positive variable, de masse totale $\leqq 1$, converge *étroitement* vers une μ_0 de même nature, si la convergence a lieu au sens de la convergence *vague* des mesures *sur l'espace* G'. Pour cela, il faut et il suffit que :

a. μ converge vaguement vers μ_0 (au sens de G);

b. en outre, $\int d\mu$ tende vers $\int d\mu_0$.

Les μ positives de masse totale $\leqq 1$ ne forment pas un ensemble compact pour la topologie *étroite*, sauf bien entendu si G est compact.

3. *Mesure de Haar et produit de composition sur un groupe localement compact.* — Soit G un groupe *localement compact*; l'élément neutre sera noté e, la loi de composition sera notée multiplicativement. La *mesure de Haar* (à gauche) sur G est une mesure de Radon positive, notée dx, telle que

$$\int f(x)\,dx = \int f(s^{-1}x)\,dx \qquad \text{pour tout} \quad s \in G \quad \text{et toute} \quad f \in L.$$

Cette mesure est bien déterminée à un facteur constant (positif) près. De même, il existe une mesure de Haar *à droite*.

Le *produit de composition* $f \star g$ de deux fonctions définies sur G (et sommables sur tout compact pour dx, comme toutes les fonctions que l'on aura à envisager par la suite) est défini par la formule

$$f \star g(x) = \int f(y)\,g(y^{-1}x)\,dy$$

lorsque celle-ci a un sens; ce qui est le cas par exemple si $f \in L^1$ et $g \in L^\infty$ (dans ce cas $f \star g$ est une fonction *continue et bornée* sur G); ou si f et g sont *sommables* pour dx (dans ce cas $f \star g$ est aussi sommable, et l'on a

$$\|f \star g\|_1 \leqq \|f\|_1 \cdot \|g\|_1,$$

---

[1] On aura soin de ne pas confondre L_∞ et L^∞.

où la norme $\|f\|_1$ est relative à la mesure dx); enfin c'est encore le cas si f et g sont de *carré sommable* sur G pour dx (on désignera par L^2 l'espace des fonctions de carré sommable sur G pour dx; on sait que, si l'on y introduit la norme

$$\|f\|_2=\left\{\int |f(x)|^2 dx\right\}^{1/2}$$

et le *produit scalaire*

$$[f, g]=\int f(x)\overline{g(x)}\,dx,$$

on obtient un espace de Hilbert).

Notons encore le fait important suivant : le dual de l'espace de Banach L^1 peut être identifié à l'espace L^∞, la fonctionnelle linéaire continue sur L^1 associée à l'élément $\varphi \in L^\infty$ étant donnée par

$$(f, \varphi)=\int f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx.$$

Cette remarque permet de définir une *topologie faible* dans L^∞; sur toute partie bornée de L^∞, cette topologie n'est autre que celle définie par la convergence vague de la mesure $f(x)\,dx$ associée à $f\in L^\infty$.

Si G est *abélien*, les mesures de Haar à droite et à gauche coïncident, et l'on a $f\star g=g\star f$.

II. — Fonctions de type positif. Caractères d'un groupe abélien.

On considère un groupe G localement compact; G ne sera supposé abélien qu'à partir du n° 6.

4. *Fonctions de type positif.* — Une fonction φ, sommable sur tout compact, est de type positif si l'on a

$$\int \varphi(x^{-1}y)f(x)\,dx\,\overline{f(y)}\,dy \geqq 0 \qquad \text{pour toute} \quad f\in L.$$

Une telle φ de type positif définit un espace hilbertien $\mathcal{H}_\varphi$ de la manière suivante : pour f et $g\in L$, on définit le « produit scalaire »

$$(f, g)_\varphi=\int \varphi(x^{-1}y)f(x)\,dx\,\overline{g(y)}\,dy;$$

les $f\in L$ telles que $(f, f)_\varphi=0$ constituent un sous-espace L_φ de L; l'expression $\sqrt{(f, f)_\varphi}$, considérée sur l'espace quotient L/L_φ, constitue une véritable norme hilbertienne, et l'on obtient alors $\mathcal{H}_\varphi$ en complétant L/L_φ pour cette norme; il en résulte en outre une « représentation canonique » de L sur un sous-espace partout dense de $\mathcal{H}_\varphi$.

Pour toute fonction f, soit $f_s(x) = f(s^{-1}x)$; pour $f \in L$, l'opérateur linéaire $f \to f_s$ définit un opérateur *unitaire* U_s dans $\mathcal{H}_\varphi$. Alors $s \to U_s$ est une *représentation unitaire continue* de G dans $\mathcal{H}_\varphi$.

Toute φ de type positif et bornée (donc située dans le dual L^∞ de L^1) *est presque partout égale à une fonction continue* (de type positif) (Gelfand et Raïkov, [2]). En effet :

Soit une g variable de L^+, vérifiant $\int g(x)\,dx = 1$, et nulle en dehors d'un voisinage V de e, voisinage qui va être pris de plus en plus petit. Alors la mesure positive $g(x)\,dx$ converge étroitement vers la « masse 1 en e », et g, considéré comme élément de $\mathcal{H}_\varphi$, converge *faiblement* vers un élément ε de $\mathcal{H}_\varphi$; car $(g, g)_\varphi$ reste borné, et, pour toute $f \in L$, $(f, g)_\varphi$ tend, d'après la remarque précédente, vers la limite $\int \overline{\varphi(x)} f(x)\,dx$. Ainsi $(f, \varepsilon)_\varphi = \int \overline{\varphi(x)} f(x)\,dx$; plus généralement

$$(f, U_s\varepsilon)_\varphi = \lim_g (f, U_s g)_\varphi = \int \overline{\varphi(s^{-1}x)} f(x)\,dx.$$

On voit qu'on a

$$(f, g)_\varphi = \int (f, U_s\varepsilon)_\varphi g(s)\,ds \tag{1}$$

pour toute $f \in L$; et comme les deux membres sont fonctions continues de f (pour la topologie forte de $\mathcal{H}_\varphi$), la relation subsiste pour tout élément f de $\mathcal{H}_\varphi$. Elle prouve : si un $f \in \mathcal{H}_\varphi$ est orthogonal aux $U_s\varepsilon$, il est nul; autrement dit, $\mathcal{H}_\varphi$ est le plus petit sous-espace vectoriel fermé contenant les transformés de ε par le groupe G; nous dirons que les $U_s\varepsilon$ *engendrent* $\mathcal{H}_\varphi$.

Appliquons (1) pour $f = \varepsilon$:

$$(\varepsilon, g)_\varphi = \int (\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi \overline{g(s)}\,ds$$

pour toute $g \in L$; explicitons

$$\int \varphi(s)\overline{g(s)}\,ds = \int (\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi \overline{g(s)}\,ds,$$

et par suite

$$\varphi(s) = (\varepsilon, U_s\varepsilon)_\varphi$$

presque partout; or le second membre est une fonction *continue* de s.

C. Q. F. D.

Remarque. — On vient de prouver que toute $\varphi(x)$ continue, de type positif, a la forme $(X, U_x X)$, où (X, Y) désigne le produit scalaire dans un certain espace hilbertien $\mathcal{H}_\varphi$ et où $x \to U_x$ est une représentation unitaire continue de G dans $\mathcal{H}$. Réciproquement, toute fonction de la forme $(X, U_x X)$ est de type positif.

5. *Fonctions élémentaires.* — Soit $\mathcal{P}_0$ l'ensemble des φ continues, de type positif, telles que $\varphi(e) \leqq 1$; ou encore le sous-ensemble des $\varphi \in L^\infty$, telles que $\|\varphi\|_\infty \leqq 1$ et que φ soit de type positif. La définition des fonctions de type positif montre immédiatement que $\mathcal{P}_0$ est *fermé* pour la topologie *faible* de L^∞ (dual de L^1). En outre, $\mathcal{P}_0$ est un *ensemble convexe*, et, bien entendu, est une partie *bornée* de L^∞. Un théorème de Krein et Milman ([5]) permet alors d'affirmer que : tout sous-ensemble *convexe* et *faiblement fermé* de $\mathcal{P}_0$, qui contient les « points extrémaux » de $\mathcal{P}_0$, est identique à $\mathcal{P}_0$ tout entier.

Rappelons qu'un point x d'un ensemble convexe K est dit *extrémal* pour K si tout segment de droite contenu dans K et contenant x admet nécessairement x comme extrémité. Appliquons cette notion à $\mathcal{P}_0$; on voit facilement que les points extrémaux de $\mathcal{P}_0$ se composent :

1° de la fonction zéro (identiquement nulle);

2° des φ (continues de type positif) telles que $\varphi(e) = 1$, et jouissant de la propriété suivante : pour toute décomposition $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_0)$ on a nécessairement $\varphi_1 \equiv \lambda_1 \varphi$, $\varphi_2 \equiv \lambda_2 \varphi$ (λ_1 et λ_2 constantes réelles $\geqq 0$ telles que $\lambda_1 + \lambda_2 = 1$).

Les fonctions φ de la catégorie 2° s'appellent *fonctions élémentaires.*

THÉORÈME A. — *Pour qu'une φ continue, de type positif, telle que $\varphi(e) = 1$, soit élémentaire, il faut et il suffit que la représentation unitaire de* G *dans $\mathcal{H}_\varphi$ soit irréductible; autrement dit, que $\{0\}$ et $\mathcal{H}_\varphi$ soient les seuls sous-espaces vectoriels fermés de $\mathcal{H}_\varphi$ invariants par les opérateurs* U_s.

Démonstration. — 1° Si φ est élémentaire, tout opérateur de projection orthogonale A, s'il est permutable aux U_s, est nécessairement E (identité) ou zéro, car

$$\varphi(x) = (\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi = (A\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi + (\varepsilon - A\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi = (A\varepsilon, U_x A\varepsilon)_\varphi + (\varepsilon - A\varepsilon, U_x(\varepsilon - A\varepsilon))_\varphi$$

et le dernier membre est somme de deux fonctions de $\mathcal{P}_0$; d'où

$$(A\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi = \lambda(\varepsilon, U_x\varepsilon)_\varphi \qquad \text{pour tout} \quad x \in G,$$

et par suite $A = \lambda E$, ce qui exige (puisque $A^2 = A$) $\lambda = 0$ ou $\lambda = 1$.

2° Inversement, supposons irréductible la représentation $s \to U_s$ de G dans $\mathcal{H}_\varphi$, et soit $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2 (\varphi_1, \varphi_2 \in \mathcal{P}_0)$. Pour $f \in L$, on aura $(f, f)_{\varphi_1} \leqq (f, f)_\varphi$, donc $(f, f)_{\varphi_1}$ définit une forme hermitienne dans $\mathcal{H}_\varphi$, et par suite un opérateur hermitien A tel que

$$(Af, f)_\varphi = (f, f)_{\varphi_1} \qquad \text{pour toute} \quad f \in L.$$

([5]) KREIN et MILMAN, *On extremal points of regularly convex sets* (*Studia Math.*, 1940). On trouvera une démonstration de ce théorème dans [3] (Chap. II, B).

On aura donc

$$(A\varepsilon,\ U_x\varepsilon)_\varphi = (\varepsilon,\ U_x\varepsilon)_{\varphi_1} = \varphi_1(x).$$

Comme A permute évidemment aux U_s, on a nécessairement $A = \lambda E$, et par suite $\varphi_1(x) \equiv \lambda\varphi(x)$; donc φ est élémentaire.

Remarque. — Le contenu des numéros 4 et 5 est dû essentiellement à Gelfand et Raïkov [2].

6. *Cas d'un groupe abélien.*

THÉORÈME B. — *Si* G *est abélien, les fonctions élémentaires ne sont autres que les caractères continus du groupe* G.

Rappelons qu'une fonction $\chi(x)$ est un *caractère* de G si l'on a

$$\chi(x.y) = \chi(x)\,\chi(y), \qquad |\chi(x)| = 1.$$

Un tel caractère, s'il est continu, est évidemment une fonction de type positif telle que $\chi(e) = 1$. Reste à montrer que, pour une φ continue de type positif telle que $\varphi(e) = 1$, les deux conditions suivantes sont équivalentes :

α. la représentation de G dans $\mathcal{H}_\varphi$ est irréductible;
β. φ est un caractère.

Montrons que (α) entraîne (β). Les sous-espaces de la décomposition spectrale d'un opérateur U_s sont invariants par G, puisque U_s permute à tous les $U_{s'}$; donc, si la représentation de G dans $\mathcal{H}_\varphi$ est irréductible, chaque U_s a la forme λE, où λ est un nombre complexe de valeur absolue égale à 1 (U_s est *unitaire*), et qui dépend continûment de s; la fonction $\lambda(s)$ est évidemment un caractère. L'espace $\mathcal{H}_\varphi$ est engendré par les $U_s\varepsilon = \lambda(s).\varepsilon$, donc est à *une* dimension, et

$$\varphi(s) = (\varepsilon,\ U_s\varepsilon) = \overline{\lambda(s)}$$

est un caractère continu.

Réciproquement, l'espace $\mathcal{H}_\chi$ associé à un caractère continu est de dimension *un*, donc donne lieu à une représentation irréductible, en sorte que tout caractère continu de G est une fonction élémentaire.

En tenant compte du théorème de Krein et Milman, on aboutit donc au

THÉORÈME C. — *Soit* G *un groupe abélien localement compact; désignons par* $\mathfrak{T}_0$ *l'ensemble des fonctions continues* φ, *de type positif, telles que* $\varphi(e) \leqq 1$. *Alors tout ensemble convexe, fermé* (pour la topologie faible de L^∞), *contenant la constante zéro et les caractères de* G *contient* $\mathfrak{T}_0$.

III. — Transformation de Fourier. Théorèmes de Lebesgue et de Bochner.

7. *Dual d'un groupe abélien.* — G est désormais supposé *abélien*. Les caractères continus de G et la constante zéro forment un sous-ensemble G′ de $\mathfrak{L}_0$; les caractères seuls, un sous-ensemble $\hat{G}$. On va montrer que :

1° G′ est *faiblement fermé* dans $\mathfrak{L}_0$ (donc *compact* pour la topologie faible de L^∞), et par suite $\hat{G}$ est *localement compact*;

2° Sur $\hat{G}$, la topologie faible de L^∞ est aussi celle de la *convergence uniforme sur tout compact de* G (rappelons que les éléments de $\hat{G}$ sont des fonctions définies sur G).

Les deux propositions se montrent d'un seul coup en prouvant que, si un caractère variable λ converge *faiblement* vers une fonction φ de $\mathfrak{L}_0$, *autre que la constante zéro*, alors la convergence a lieu *uniformément sur tout compact de* G, en sorte que φ est lui-même un caractère de G.

Or, si $\varphi \not\equiv 0$, il existe une $f \in L$ telle que $\int \overline{\varphi(y)} f(y)\,dy \not\equiv 0$. La fonction composée

$$\lambda \star f(x) = \int \lambda(y) f(y^{-1}x)\,dy = \int \lambda(xy^{-1}) f(y)\,dy$$

converge, uniformément sur tout compact, vers $\varphi \star f(x)$; mais on a

$$\lambda \star f(x) = \lambda(x) \int \overline{\lambda(y)} f(y)\,dy,$$

et $\int \overline{\lambda(y)} f(y)\,dy$ tend vers $\int \overline{\varphi(y)} f(y)\,dy \not\equiv 0$. En faisant le quotient, on voit que $\lambda(x)$ converge uniformément sur tout compact; sa limite est $\varphi(x)$, puisque φ est déjà limite faible de λ. C. Q. F. D.

Notation. — Les éléments de G′ seront désignés par des lettres $\hat{x}, \hat{y}, \ldots$; $(x, \hat{x})$ désignera la valeur, au point $x \in G$, du caractère $\hat{x}$ (si $\hat{x} \in \hat{G}$) et zéro si $\hat{x}$ est la fonction zéro.

8. *Transformée de Fourier d'une fonction de* L^1. — A chaque f, sommable pour la mesure de Haar, associons « sa transformée de Fourier »

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\,dx,$$

fonction définie sur G′, et en particulier sur $\hat{G}$. C'est une fonction *continue* sur G′, d'après la définition de la topologie faible de L^∞, dual de L^1. Cette fonction $\hat{f}$ est nulle pour $\hat{x}=0$. En identifiant l'élément zéro de G' au « point à l'infini » dont l'adjonction à $\hat{G}$ le rend compact (théorème d'Alexandroff), on voit que $\hat{f}(\hat{x})$ tend vers zéro quand le caractère $\hat{x}$ « s'éloigne à l'infini » : c'est le *théorème de Lebesgue*.

Si $h=f\star g\,(f\in L^1, g\in L^1)$, il est clair que $h\in L^1$ et que $\hat{h}=\hat{f}.\hat{g}$. Donc les transformées de Fourier des $f\in L^1$ constituent un *anneau* $\mathfrak{A}$ de fonctions, à valeurs numériques complexes, jouissant des propriétés suivantes :

1° Ces fonctions sont définies et continues sur l'espace compact G';

2° Si une fonction $\hat{f}$ appartient à $\mathfrak{A}$, la fonction imaginaire conjuguée appartient aussi à $\mathfrak{A}$ (car c'est la transformée de Fourier de la fonction

$$\tilde{f}(x)=\overline{f(x^{-1})}$$

de L^1);

3° Toutes les fonctions de $\mathfrak{A}$ s'annulent pour $\hat{x}=0$; si $\hat{x}\neq\hat{y}$, il existe une $\hat{f}\in\mathfrak{A}$ telle que $\hat{f}(\hat{x})\neq\hat{f}(\hat{y})$ (sinon, $\hat{x}$ et $\hat{y}$ désigneraient le même élément de L^∞, donc de G').

Un théorème classique de *Stone* [6] permet de conclure :

Toute fonction complexe, continue sur G', et nulle pour $\hat{x}=0$, est limite *uniforme sur* G' de fonctions de $\mathfrak{A}$. En d'autres termes : *toute mesure complexe* $\hat{\mu}$, *portée par* $\hat{G}$, *de masse totale finie, et telle que l'on ait* $\int\hat{f}\,d\hat{\mu}=0$ *pour toute* $f\in L^1$, *est identiquement nulle*.

La conclusion subsiste si l'on suppose que $\int\hat{f}d\hat{\mu}=0$ a lieu pour les f d'un sous-espace partout dense de L^1.

9. *Transformée de Fourier d'une mesure de* $\hat{G}$. — Soit $\hat{\mu}$, de masse totale finie sur l'espace $\hat{G}$. Posons

$$\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(x)=\int(x,\hat{x})\,d\hat{\mu}(\hat{x});$$

c'est une fonction *bornée* et *continue* de x. Si en outre $f\in L^1$, on a la relation évidente

$$\int\overline{\hat{f}(\hat{x})}\,d\hat{\mu}(\hat{x})=\int\overline{f(x)}\,\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(x)\,dx. \tag{2}$$

Théorème 1. — *Si* $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(x)=0$ *pour tout* $x\in G$, *on a* $\hat{\mu}=0$ (unicité de la détermination d'une mesure $\hat{\mu}$ par la connaissance de sa transformée de Fourier).

En effet, on a alors $\int\overline{\hat{f}}\,d\hat{\mu}=0$ pour toute $f\in L^1$.

---

(6) M. H. Stone, *Applications of the theory of Boolean rings to general topology* (*Trans. Am. Math. Soc.*, 41, 1937, pp. 375-481; cf. en particulier pp. 466-469).

THÉORÈME 2 (Bochner). — *Les fonctions de $\mathcal{P}_0$ ne sont autres que les transformées de Fourier des mesures positives et de masse totale $\leqq 1$ portées par $\hat{G}$.*

Démonstration. — Soit $\hat{\mathcal{M}}_0$ l'ensemble des $\hat{\mu}$ positives portées par $\hat{G}$ et de masse totale $\leqq 1$. A chaque $\hat{\mu} \in \hat{\mathcal{M}}_0$, associons la fonction $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(x)$. Si $\hat{\mu}$ est une masse ponctuelle $+1$ placée en un point $\hat{y}$, $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(x) = (x, \hat{y})$ est un *caractère*. D'autre part, si une $\hat{\mu}_0$ est limite *vague* d'une $\hat{\mu}$ variable de $\hat{\mathcal{M}}_0$, on a $\int d\hat{\mu}_0 \leqq 1$, et $\int \bar{\hat{f}}\, d\hat{\mu}_0 = \lim \int \bar{\hat{f}}\, d\hat{\mu}$ pour toute $f \in L^1$ (puisque $\hat{f} \in \hat{L}_\infty$), c'est-à-dire

$$\int \bar{f}\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}\, dx = \lim \int \bar{f}\mathcal{C}_{\hat{\mu}}\, dx;$$

donc $\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}$ est *limite faible* de $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$. En particulier, comme toute $\hat{\mu}$ de $\hat{\mathcal{M}}_0$ est limite vague de mesures formées d'un nombre fini de masses ponctuelles positives dont la somme est $\leqq 1$, on voit que les $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ (pour $\hat{\mu} \in \hat{\mathcal{M}}_0$) sont limites faibles de combinaisons linéaires de caractères, à coefficients positifs, et par suite appartiennent à $\mathcal{P}_0$. L'application $\hat{\mu} \to \mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ de $\hat{\mathcal{M}}_0$ dans $\mathcal{P}_0$ étant *continue* (pour la topologie vague de $\hat{\mathcal{M}}_0$ et la topologie faible de $\mathcal{P}_0$), et $\hat{\mathcal{M}}_0$ étant *compact*, il s'ensuit que les $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ forment un sous-ensemble faiblement compact (donc *faiblement fermé*) de $\mathcal{P}_0$; ce sous-ensemble est en outre *convexe*, et contient les caractères de G; c'est donc (th. C) $\mathcal{P}_0$ tout entier.

C. Q. F. D.

Remarque. — L'application biunivoque de $\hat{\mathcal{M}}_0$ sur $\mathcal{P}_0$ qui vient d'être définie est *bicontinue* (lorsque $\hat{\mathcal{M}}_0$ est muni de la topologie vague et $\mathcal{P}_0$ de la topologie faible). Mais elle est aussi bicontinue lorsqu'on considère sur $\hat{\mathcal{M}}_0$ la convergence *étroite*, et sur $\mathcal{P}_0$ la *convergence uniforme sur tout compact*; en effet, la convergence étroite de $\hat{\mu}$ variable vers $\hat{\mu}_0$ entraîne la convergence uniforme sur tout compact de $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ vers $\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}$; réciproquement, si $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ converge *faiblement* vers $\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}$, et si en outre $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}(e) = \int d\hat{\mu}$ converge vers $\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}(e) = \int d\hat{\mu}_0$, alors $\hat{\mu}$ converge étroitement vers $\hat{\mu}_0$, et par suite la convergence de $\mathcal{C}_{\hat{\mu}}$ vers $\mathcal{C}_{\hat{\mu}_0}$ est uniforme sur tout compact.

IV. — LA FORMULE D'INVERSION DE FOURIER.

10. *Groupe dual.* — Le produit de deux caractères (au sens du produit de deux fonctions sur G) étant un caractère, et l'inverse d'un caractère étant un caractère, la multiplication des caractères définit sur $\hat{G}$ une *structure de groupe abélien*, compatible avec la topologie introduite sur $\hat{G}$ (nº 7). Le groupe topolo-

gique $\hat{G}$ est le *groupe dual* de G. Avec la notation $(x, \hat{x})$ (*cf.* n° 7), on aura les formules

$$(xy^{-1}, \hat{x}) = (x, \hat{x}).\overline{(y, \hat{x})}; \qquad (x, \hat{x}\hat{y}^{-1}) = (x, \hat{x}).\overline{(x, \hat{y})}.$$

Sur le groupe dual $\hat{G}$ on a une mesure de Haar, définie à un facteur près que l'on déterminera tout à l'heure (théorème d'inversion de Fourier).

11. *Le théorème d'inversion.* — $\mathcal{V}$ désignera désormais l'ensemble des combinaisons linéaires (à coefficients complexes) de fonctions continues de type positif sur le groupe G. On posera $\mathcal{V}^1 = \mathcal{V} \cap L^1$; $\mathcal{V}^2 = \mathcal{V} \cap L^2$. Puisque toute fonction de $\mathcal{V}$ est bornée, on a $\mathcal{V}^1 \subset \mathcal{V}^2$. D'autre part, toute fonction de la forme $f \star \tilde{f}$, où $f \in L$, est de type positif [7] et appartient à L, donc est dans $\mathcal{V}^1$; $\mathcal{V}^1$ contient donc tous les produits de composition $f \star g$ (où f et g sont dans L), qui forment un ensemble dense dans L^1. Ainsi $\mathcal{V}^1$ est dense dans L^1; de même, $\mathcal{V}^2$ est dense dans L^2.

Dans le groupe dual $\hat{G}$, on emploiera les notations $\hat{L}$, $\hat{L}^1$, $\hat{L}^2$, $\hat{\mathcal{V}}$, $\hat{\mathcal{V}}^1 = \hat{\mathcal{V}} \cap \hat{L}^1$, $\hat{\mathcal{V}}^2 = \hat{\mathcal{V}} \cap \hat{L}^2$.

D'après les théorèmes 1 et 2, toute f de $\mathcal{V}$ détermine univoquement une mesure complexe $\hat{\mu}_f$ sur $\hat{G}$, de masse totale finie, et telle que f soit la transformée de $\hat{\mu}_f$:

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}).$$

Nous nous proposons de démontrer le

THÉORÈME 3. — *On peut choisir le facteur arbitraire de la mesure de Haar $d\hat{x}$ sur $\hat{G}$ de manière que, pour toute $f \in \mathcal{V}^1$, on ait l'égalité des mesures*

$$d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{3}$$

En d'autres termes : *si $f \in \mathcal{V} \cap L^1$, la transformée*

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})}\, f(x)\, dx$$

est sommable pour $d\hat{x}$, et l'on a réciproquement

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \qquad \text{(Formule d'inversion de Fourier).}$$

---

[7] La formule $f \star \tilde{f}(x) = \int f(y)\overline{f(x^{-1}y)}\, dy$ met en évidence le fait que $f \star \tilde{f}$ est de type positif (*cf.* la *Remarque* finale du n° 4).

12. *Démonstration du théorème d'inversion.*

LEMME 1. — *Si f et φ appartiennent à $\mathcal{V}^1$, on a l'égalité des mesures*

$$\hat{\varphi}(\hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{\mu}_\varphi(\hat{x}). \tag{4}$$

En effet, d'après le théorème 1, il suffit de prouver l'identité des transformées de Fourier de ces deux mesures : or ces transformées ne sont autres que $\varphi \star f$ et $f \star \varphi$.

On voit que la transformée $\hat{\varphi}$ d'une φ de $\mathcal{V}^1$ fait partie de la famille $\hat{\mathcal{F}}$ des $\Phi(\hat{x})$ *continues, bornées,* et qui jouissent de la propriété suivante : il existe, sur $\hat{G}$, une mesure complexe $\hat{\nu}_\Phi$ de *masse totale finie* telle que

$$\Phi(\hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute} \quad f \in \mathcal{V}^1. \tag{4'}$$

Étudions de plus près cette famille $\hat{\mathcal{F}}$.

1° Si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$, la mesure $\hat{\nu}_\Phi$ associée est *unique*. En effet, il existe sur $\mathcal{V}^1$ un filtre Λ suivant lequel $\hat{f}$ converge vers la constante 1 uniformément sur tout compact [8]. La mesure $d\hat{\nu}_\Phi$ est alors limite vague de la mesure $\hat{f}\, d\hat{\nu}_\Phi$ [laquelle est univoquement déterminée d'après (4')], et par suite $\hat{\nu}_\Phi$ est univoquement déterminée par Φ.

2° Si la fonction Φ de $\hat{\mathcal{F}}$ est *positive*, la mesure associée est aussi *positive*. En effet, si $f = g \star \tilde{g}$ ($g \in L$), la mesure $\hat{\mu}_f$ est positive (car f est de type positif), donc la mesure $\hat{f}\, d\hat{\nu}_\Phi$ est positive d'après (4'); quand f varie suivant le filtre Λ, $\hat{\nu}_\Phi$ est limite vague de mesures positives, donc est elle-même positive.

3° Si Φ est la transformée d'une φ de $\mathcal{V}^1$, alors Φ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\mu}_\Phi$ d'après (4).

4° Si Φ_1 et Φ_2 appartiennent à $\hat{\mathcal{F}}$, il en est de même de $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, et $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\nu}_{\Phi_1} + \hat{\nu}_{\Phi_2}$. En outre, si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$ et si $A(\hat{x})$ est une fonction *continue bornée* quelconque sur $\hat{G}$, la fonction $\Psi = A\Phi$ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et l'on a

$$d\hat{\nu}_\Psi(\hat{x}) = A(\hat{x})\, d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}),$$

comme on le voit en multipliant les deux membres de (4') par $A(\hat{x})$.

5° Si $\Phi \in \hat{\mathcal{F}}$, toute translatée Ψ de Φ appartient à $\hat{\mathcal{F}}$, et pour obtenir $\hat{\nu}_\Psi$ on effectue sur $\hat{\nu}_\Phi$ la même translation. Cela résulte de ce que, si l'on multiplie f par un caractère de G, $\hat{f}$ et $\hat{\mu}_f$ subissent une même translation.

---

[8] *Cf.* n° 18.

La démonstration du théorème 3 va maintenant se faire en trois étapes :

a. Toute fonction Ψ *de* $\hat{L}$ *appartient à* $\hat{\mathcal{F}}$. — En effet, il existe une $f \in \mathcal{V}^1$ dont la transformée est très voisine de 1 (donc $\neq 0$) sur le compact en dehors duquel Ψ est identiquement nulle. On a donc $\Psi = A.\hat{f}$, où A est continue et bornée; or $\hat{f}$ est dans $\hat{\mathcal{F}}$, donc aussi Ψ (propriété 4°).

b. Choix de la mesure de Haar. — Associons à toute Ψ de $\hat{L}$ le nombre $\int d\hat{\nu}_\Psi$. On a ainsi une fonctionnelle *additive* (propriété 4°), *positive* (propriété 2°) et enfin *invariante par translation* (propriété 5°) : c'est donc la mesure de Haar $d\hat{x}$ sur $\hat{G}$, mesure dont le facteur arbitraire se trouve ainsi fixé sans ambiguïté; à condition toutefois que l'on prouve que cette mesure n'est pas identiquement nulle. Or si f appartient à $\mathcal{V}^1$ et n'est pas identiquement nulle, la mesure $\hat{\mu}_f$ n'est pas identiquement nulle, donc il existe une A de $\hat{L}$ telle que la mesure $A\,d\hat{\mu}_f$ ne soit pas non plus identiquement nulle; si alors on prend $\Psi = A.\hat{f}$, on a $d\hat{\nu}_\Phi = A\,d\hat{\mu}_f$ (d'après 3° et 4°), donc $\hat{\nu}_\Psi$ n'est pas nulle.

Cela étant, le choix que l'on vient de faire de la mesure de Haar $d\hat{x}$ permet d'écrire

$$(5) \qquad \int \Psi(\hat{x})\,d\hat{x} = \int d\hat{\nu}_\Psi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute} \quad \Psi \in \hat{L}.$$

c. Démonstration de la formule (3). — Soit Φ une fonction quelconque de $\hat{\mathcal{F}}$. Pour toute A de $\hat{L}$, la fonction $\Psi = A.\Phi$ appartient à $\hat{L}$, et, d'après 4°, on a $d\hat{\nu}_\Psi = A\,d\hat{\nu}_\Phi$. La formule (5) donne alors

$$\int A(\hat{x})\Phi(\hat{x})\,d\hat{x} = \int A(\hat{x})\,d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}) \qquad \text{pour toute} \quad A \in \hat{L},$$

d'où l'égalité annoncée des mesures

$$(6) \qquad \Phi(\hat{x})\,d\hat{x} = d\hat{\nu}_\Phi(\hat{x}).$$

Ceci étant, soit $f \in \mathcal{V}^1$; prenons pour Φ la fonction $\hat{f}$, d'où (d'après 2°) $\hat{\nu}_\Phi = \hat{\mu}_f$; la formule (6) donne la relation (3) cherchée, ce qui démontre le théorème 3.

13. *Corollaires du théorème d'inversion.*

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME 3. — *Si f continue de type positif est sommable pour dx, sa transformée de Fourier $\hat{f}$ est positive* (en effet, d'après le théorème 3, $\hat{f}$ est sommable, et f est transformée de Fourier de la mesure $\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}$ qui, d'après les théorèmes 1 et 2, est positive).

En particulier, on a $\hat{f}(\hat{e}) \geqq 0$, d'où

$$\int f(x)\,dx \geqq 0$$

pour toute f sommable, continue, de type positif. En fait, ce résultat vaut encore si l'on abandonne l'hypothèse de la continuité, comme on le voit en « régularisant » (9).

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME 3. — *Soit* $F(\hat{x})$ *une fonction sommable pour* $d\hat{x}$*; si sa transformée*

$$f(x)=\int (x, \hat{x})\,F(\hat{x})\,d\hat{x}$$

est sommable pour dx*, on a presque partout*

$$F(\hat{x})=\int \overline{(x, \hat{x})}\,f(x)\,dx.$$

Plus généralement, si une mesure $\hat{\mu}$ de masse totale finie sur $\hat{G}$ est telle que sa transformée de Fourier

$$f(x)=\int (x, \hat{x})\,d\hat{\mu}(\hat{x}) \tag{7}$$

soit sommable pour dx, alors on a $d\hat{\mu}(\hat{x})=\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}$.

En effet, d'après (7), on a $f\in\mathcal{V}$; si en outre $f\in L^1$, d'après le théorème 3, f est transformée de Fourier de la mesure $\hat{f}(\hat{x})\,d\hat{x}$, et aussi de $d\hat{\mu}(\hat{x})$; d'où l'égalité de ces deux mesures.

Remarque. — Si $f\in\mathcal{V}^1$, alors $\hat{f}$ appartient à $\hat{\mathcal{V}}$, comme on le voit en décomposant f en $f_1-f_2+i(f_3-f_4)$, où les f_i sont positives et sommables (alors les $\hat{f}_i$ sont de type positif sur $\hat{G}$ comme on le vérifie immédiatement). Le théorème 3 affirme donc que *la transformée de Fourier d'une fonction de* $\mathcal{V}^1$ *appartient à* $\hat{\mathcal{V}}^1$. (Quand on aura identifié, plus loin, le groupe G au dual de $\hat{G}$, on pourra affirmer que $f\to\hat{f}$ est une *application biunivoque de* $\mathcal{V}^1$ *sur* $\hat{\mathcal{V}}^1$).

V. — LE THÉORÈME DE PLANCHEREL.

14. Rappelons que $\mathcal{V}^1\subset\mathcal{V}^2\subset L^2$; de même, $\hat{\mathcal{V}}^1\subset\hat{\mathcal{V}}^2\subset\hat{L}^2$. On peut donc considérer la transformation de Fourier comme définie entre parties de L^2 et $\hat{L}^2$. On va voir qu'en fait cette transformation est prolongeable en un *isomorphisme de* L^2 *sur* $\hat{L}^2$.

Soit une $f\in\mathcal{V}^1$; montrons que *la norme* $\|f\|_2$ *de* f *dans* L^2 *est égale à la norme* $\|\hat{f}\|_2$ *de* $\hat{f}$ *dans* $\hat{L}^2$. Plus généralement, *si* $f\in L^1\cap L^2$, *sa transformée appartient à* $\hat{L}^2$ *et donc à* $\hat{\mathcal{V}}^2$. En effet, la fonction $g=f\star\tilde{f}$ est dans $\mathcal{V}^1$, donc sa transformée $\hat{g}=|\hat{f}|^2$ est dans $\hat{\mathcal{V}}^1$; par suite, $\hat{f}$ est de carré sommable pour $d\hat{x}$.

(9) *Voir* [4], § 2; et [3], Introduction, § 4.

De plus, la formule d'inversion de Fourier appliquée à g donne $g(e)=\int \hat{g}(\hat{x})d\hat{x}$, c'est-à-dire en explicitant

$$\int |f(x)|^2 dx = \int |\hat{f}(\hat{x})|^2 d\hat{x}. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

De là résulte que l'application $f \to \hat{f}$, qui est déjà définie dans $L^1 \cap L^2$ (partout dense dans L^2) peut être prolongée en une application de L^2 *dans* $\hat{L}^2$, avec toujours $\|f\|_2 = \|\hat{f}\|_2$.

Inversement, partons d'une $F \in \hat{L}^1 \cap \hat{L}^2$, et soit

$$\mathcal{C}_F(x) = \int (x, \hat{x})\, F(\hat{x})\, d\hat{x}$$

la transformée de la mesure $F(\hat{x})d\hat{x}$. Je dis que $\mathcal{C}_F$ *appartient à* L^2; en effet, la relation (2) (§ III) montre que, pour toute $f \in L^1 \cap L^2$, on a

$$\int \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, F(\hat{x})\, d\hat{x} = \int \overline{f(x)}\, \mathcal{C}_F(x)\, dx; \tag{8}$$

le second membre est donc en module inférieur ou égal à

$$\|\hat{f}\|_2 . \|F\|_2 = \|f\|_2 . \|F\|_2 .$$

Il en résulte bien que $\mathcal{C}_F \in L^2$, et que $\|\mathcal{C}_F\|_2 \leqq \|F\|_2$. Bien entendu, la relation (8) s'étend au cas où f est une fonction quelconque de L^2, et $\hat{f}$ sa transformée de Fourier définie par prolongement.

Voici en passant une application de (8) : *la transformée $\hat{f}$ d'une f de $\mathcal{V}^2$ est sommable pour $d\hat{x}$* (le théorème 3 affirmait seulement que $\hat{f}$ est sommable lorsque $f \in \mathcal{V}^1$). En effet, appliquons (8) à une F transformée de Fourier d'une φ de $\mathcal{V}^1$; on a donc $F = \hat{\varphi}$, $\mathcal{C}_F = \varphi$ (th. 3), d'où

$$\int \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, \hat{\varphi}(\hat{x})\, d\hat{x} = \int \overline{f(x)}\, \varphi(x)\, dx. \tag{9}$$

Puisque $f \in \mathcal{V}$, il existe une mesure $\hat{\mu}_f$ de masse totale finie, et une seule, telle que $f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x})$. En remplaçant $f(x)$ par cette valeur dans (9), il vient

$$\int \hat{\varphi}(\hat{x}) \overline{\hat{f}(\hat{x})}\, d\hat{x} = \int \hat{\varphi}(\hat{x})\, \overline{d\hat{\mu}_f(\hat{x})} \qquad \text{pour toute } \varphi \text{ de } \mathcal{V}^1;$$

or $\mathcal{V}^1$ est partout dense dans L^1, ce qui exige (n° 8) l'égalité des mesures $\hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}$ et $d\hat{\mu}_f(\hat{x})$: donc $\hat{f}$ est sommable.

15. THÉORÈME 4. — *L'application $f \to \hat{f}$ de L^2 dans $\hat{L}^2$, définie plus haut, est un isomorphisme de L^2 sur $\hat{L}^2$.*

Il suffit de montrer que *les transformées $\hat{f}$ des $f \in \mathcal{V}^1$ sont partout denses dans* $\hat{L}^2$. Pour cela, il suffit de prouver le

LEMME 2. — *Toute fonction* $F \star G$ (*où* F *et* $G \in \hat{L}$) *est transformée de Fourier d'une fonction de* $\mathcal{V}^1$.

En effet, de $H = F \star G$ résulte $\mathcal{G}_H = \mathcal{G}_F . \mathcal{G}_G$, donc $\mathcal{G}_H$, produit de deux fonctions de L^2 (n° 14), est sommable, et par suite appartient à $\mathcal{V}^1$. Il en résulte (corollaire 2 du théorème 3) que H est transformée de Fourier de $\mathcal{G}_H$.

C. Q. F. D.

VI. — THÉORIE DE LA DUALITÉ.

16. A chaque x de G associons la fonction $\overline{(x, \hat{x})}$ de la variable $\hat{x} \in \hat{G}$. C'est un caractère continu de $\hat{G}$, donc un élément du dual $\hat{\hat{G}}$ de $\hat{G}$, élément que nous noterons $\alpha(x)$.

THÉORÈME 5. — *La représentation* $x \to \alpha(x)$ *de* G *dans* $\hat{\hat{G}}$ *est un isomorphisme du groupe topologique* G *sur le groupe topologique* $\hat{\hat{G}}$.

Montrons d'abord que c'est un isomorphisme du groupe topologique G sur un sous-groupe $\alpha(G)$ de $\hat{\hat{G}}$. Autrement dit : pour que $y = \lim x$ dans G, il faut et il suffit que $\alpha(x) = \lim \alpha(x)$ dans $\hat{\hat{G}}$. Or $y = \lim x$ signifie évidemment que $f(y) = \lim f(x)$ pour toute f de $\mathcal{V}^1$, ce qui s'écrit

$$\int (y, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} = \lim \int (x, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}. \tag{10}$$

Lorsque f parcourt $\mathcal{V}^1$, les $\hat{f}$ parcourent un sous-ensemble partout dense de $\hat{L}^1$ (d'après le lemme du n° 15), donc (10) exprime que la fonction $(x, \hat{x})$ (fonction de $\hat{x}$) converge faiblement, dans $\hat{L}^\infty$, vers la fonction $(y, \hat{x})$; autrement dit, que le caractère $\alpha(x)$ converge vers le caractère $\alpha(y)$ au sens de la topologie de $\hat{\hat{G}}$.

Cela étant, le sous-groupe $\alpha(G)$ de $\hat{\hat{G}}$ est localement compact (puisque isomorphe à G), donc il est *fermé* dans G (*cf.* BOURBAKI, *Top. gén.*, Chap. III, § 2, exercice 6). Pour achever de démontrer le théorème, il ne reste plus qu'à prouver que tout ensemble ouvert non vide de $\hat{\hat{G}}$ rencontre $\alpha(G)$. D'après le lemme 2, il revient au même de prouver : si une fonction F, sur $\hat{\hat{G}}$, est transformée d'une fonction $\hat{f}$ de $\hat{\mathcal{V}}^1$ et s'annule identiquement sur $\alpha(G)$, elle est identiquement nulle. Or soit

$$F(\hat{\hat{x}}) = \int \overline{(\hat{x}, \hat{\hat{x}})} \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x}.$$

On a par hypothèse

$$f(x) = \int (x, \hat{x}) \hat{f}(\hat{x})\, d\hat{x} = 0$$

pour tout $x \in G$, ce qui exige (th. 1) $\hat{f} \equiv 0$, donc $F \equiv 0$. C. Q. F. D.

17. *Sous-groupes et groupes quotients.*

THÉORÈME 6. — *Soit* Γ *un sous-groupe fermé de* G, *et soit* Γ' *le sous-groupe de* $\hat{G}$ *orthogonal à* Γ (c'est-à-dire le sous-groupe des $\hat{x}$ tels que $(x, \hat{x}) = 1$ pour tout $x \in \Gamma$). *Alors tout élément* $x \in G$ *qui est orthogonal à* Γ' *appartient à* Γ.

(On observera que la démonstration que nous allons donner de cette propriété aurait pu se placer dès la fin du paragraphe II.)

LEMME 3. — *Pour qu'une fonction* f *de* $\mathcal{V}$ *soit invariante par* Γ, *il faut et il suffit que la mesure* $\hat{\mu}_f$ *dont elle est la transformée soit portée par le sous-groupe* Γ' *orthogonal à* Γ.

En effet, la condition est évidemment suffisante. Réciproquement, supposons $f(sx) = f(x)$ pour tout $s \in \Gamma$ et tout $x \in G$; on a donc, pour $s \in \Gamma$,

$$\int (x, \hat{x})\,(s, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) \qquad \text{quel que soit } x \in G,$$

d'où (th. 1)

$$(s, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x}) = d\hat{\mu}_f(\hat{x}) \qquad \text{pour tout } s \in \Gamma.$$

Ainsi l'ensemble (ouvert) des points $\hat{x}$ où $(s, \hat{x}) \neq 1$ est de mesure nulle pour $\hat{\mu}_f$; sur le noyau fermé de $\hat{\mu}_f$, on a donc $(s, \hat{x}) = 1$ pour tout $s \in \Gamma$, ce qui signifie précisément que ce noyau est contenu dans Γ'.

Ce lemme étant établi, la formule

$$f(x) = \int (x, \hat{x})\, d\hat{\mu}_f(\hat{x})$$

montre que si $f \in \mathcal{V}$ est invariante par Γ, f est aussi invariante par le sous-groupe de G orthogonal à Γ'. Le théorème 6 sera prouvé si nous montrons : pour chaque $s \notin \Gamma$ (rappelons que Γ est supposé *fermé* dans G), il existe une $f \in \mathcal{V}$ invariante par Γ, et telle que $f(s) \neq f(e)$. Or la f cherchée va provenir d'une fonction φ sur le groupe quotient G/Γ; sur ce groupe, il existe en effet une fonction continue, nulle en dehors d'un ensemble compact, qui soit combinaison linéaire de fonctions de type positif, et qui prenne en un point s différent de l'élément neutre une valeur autre qu'en ce dernier point : il suffit de prendre un produit de composition convenable sur le groupe G/Γ.

Le théorème 6 étant démontré, on en déduit aisément les résultats de Weil ([1], p. 108-109), et notamment celui-ci : *si* Γ *est un sous-groupe fermé de* G, *le groupe dual de* Γ *est isomorphe au groupe quotient* $\hat{G}/\Gamma'$ (Γ' *désignant le sous-groupe fermé de* $\hat{G}$ *orthogonal à* Γ).

VII. — Compléments.

18. *Approximation d'une fonction quelconque par des produits de composition.*

Lemme α [relatif à la Note (8) du n° 12]. — *Il existe sur* $\mathfrak{V}^1$ *un filtre* Λ *suivant lequel* $\hat{f}$ *converge vers la constante un uniformément sur toute partie compacte de* $\hat{G}$.

Démonstration. — K désignant un voisinage compact de e, désignons par A_K l'ensemble des $g \in L^+$ qui sont nulles en dehors de K, et vérifient en outre $\int g(x)\,dx = 1$. Soit B_K l'ensemble des $f = g \star \tilde{g}$ où g décrit A_K. Ces f sont à la fois *positives* (au sens ordinaire), *de type positif* et *nulles en dehors de voisinages compacts de e* (qui convergent vers e avec K); de plus

$$\int f(x)\,dx = \left(\int g(x)\,dx\right)^2 = 1.$$

Il est clair alors que les B_K constituent sur $\mathfrak{L}^1$, une *base de filtre* Λ, et que la mesure $f(x)dx$ converge étroitement, suivant Λ, vers la masse $+1$ en e. Alors

$$\hat{f}(\hat{x}) = \int \overline{(x, \hat{x})} f(x)\,dx$$

converge, uniformément sur tout compact de $\hat{G}$, vers la constante *un*.

C. Q. F. D.

Conséquences du lemme α. — Comme $f \in L^+$, on a $\hat{f} \in \hat{\mathfrak{L}}^1$. Donc : *sur tout groupe abélien localement compact* G, *on peut approcher la constante un, uniformément sur tout compact, par des fonctions continues, sommables et de type positif sur* G.

(Si G = R, groupe additif des nombres réels, on peut prendre par exemple la suite

$$f_n(x) = e^{-\frac{x^2}{n}};$$

ce qui explique l'intervention de ces fonctions dans certains exposés classiques.)

Plus généralement, *toute fonction continue* φ *de type positif* sur G est limite, uniforme sur tout compact, de fonctions de $\mathfrak{P}^1$. Car si $f \in \mathfrak{P}^1$ tend vers 1, $f\varphi \in \mathfrak{P}^1$ tend vers φ.

Lemme β. — *Toute* $f \in \mathfrak{P}^1$ *est de la forme*

$$f(x) = g \star \tilde{g}(x) = \int g(y)\, \overline{g(x^{-1}y)}\, dy,$$

où $g \in L^2$.

Il suffit de prendre pour g la transformée de Fourier de $\sqrt{\hat{f}(\hat{x})}$ (cette dernière fonction est dans $\hat{L}^2$, puisque $\hat{f}$ est *positive* et *sommable*).

C. Q. F. D.

Comme g est limite *forte* dans L^2 de fonctions $h \in L$, il en résulte que f est limite, *uniforme sur* G, de fonctions $h \star \tilde{h} \in \mathfrak{P} \cap L$. Finalement, on a le

Théorème 7. — *Toute fonction continue et de type positif sur* G *est limite, uniformément sur tout compact, de fonctions de la forme* $h \star \tilde{h}$, *où* $h \in L$.

19. *Cas particulier des groupes compacts et des groupes discrets.*

Si G *est discret*, $\hat{G}$ *est compact.* — Il suffit de montrer que le point $0 \in G'$ (notations du n° 7) est *isolé* dans G'. Or, considérons la fonction $\varepsilon(x)$ égale à 1 si $x = e$, à 0 si $x \neq e$; on a $\varepsilon \in L^1$, et si l'on choisit la mesure de Haar dx de manière que chaque point de G porte une masse 1, la transformée de Fourier de ε est la fonction $\hat{\varepsilon}(\hat{x})$ égale à 0 si $\hat{x} = 0$, à 1 si $\hat{x} \in \hat{G}$. Comme $\hat{\varepsilon}$ est *continue* sur G', la proposition est démontrée. En outre, la formule d'inversion, pour la fonction ε, donne, pour $x = e$, $\int d\hat{x} = 1$.

Si G *est compact*, $\hat{G}$ *est discret.* — En effet, prenons sur G la mesure de Haar dont la masse totale est égale à 1, et cherchons la transformée de Fourier $\hat{\varepsilon}$ de la fonction $\varepsilon(x)$ égale à 1 pour tout $x \in G$. On a évidemment $\hat{\varepsilon}(\hat{e}) = 1$; si nous montrons que $\hat{\varepsilon}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \neq \hat{e}$, nous aurons prouvé ($\hat{\varepsilon}$ étant continue sur $\hat{G}$) que $\hat{G}$ est discret. Or la fonction $(y, \hat{x})\hat{\varepsilon}(\hat{x})$ est identique à $\hat{\varepsilon}(\hat{x})$, et cela pour tout $y \in G$; donc si un $\hat{x}$ est tel que $\hat{\varepsilon}(\hat{x}) \neq 0$, on a $(y, \hat{x}) = 1$ pour tout y, d'où $\hat{x} = \hat{e}$. C'est ce que nous voulions démontrer. En outre, la mesure de Haar $d\hat{x}$ que la formule d'inversion attache à $\hat{G}$ porte une masse 1 en chaque point de $\hat{G}$.

Si G n'est ni compact ni discret, il en est de même de $\hat{G}$, puisque G est isomorphe au dual de $\hat{G}$.

BIBLIOGRAPHIE.

[1]. A. Weil, *L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications* (*Actual. Scient. et Ind.*, n° **869**, Paris, 1940).

[2]. I. Gelfand et D. Raïkov, *Irreducible unitary representations of arbitrary locally bicompact groups* (*Recueil Math. Moscou,* **13**, 1943, p. 316).

[3]. R. Godement, *Les fonctions de type positif et la théorie des groupes* (*Thèse*, Paris, juillet 1946).

[4]. H. Cartan, *Sur les fondements de la théorie du potentiel* (*Bull. Soc. Math. de France*, **69**, 1941, p. 71).

[5]. J. Dieudonné, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* (*Ann. Éc. Norm. Sup.*, (3), t. **59**, 1942, p. 107-139).

[6]. N. Bourbaki, *Topologie générale*, Chap. I (*Actual. Scient. et Ind.*, n° **858**, Paris, 1940).

[7]. S. Bochner, *Vorlesungen über Fouriersche Integrale* (Leipzig, 1932).

[8]. S. Bochner, *Monotone Funktionen, Stieltjessche Integrale und harmonische Analyse* (*Math. Ann.*, **108**, 1933, p. 378).

[9]. N. Wiener, *The Fourier integral and certain of its applications* (Cambridge U. P., 1933).

[10]. E. C. Titchmarsh, *Introduction to the theory of Fourier integrals* (Oxford, 1937).

[11]. T. Carleman, *L'intégrale de Fourier et questions qui s'y rattachent* (Uppsala, 1944).

Note. — Nous avons pris connaissance en novembre 1946 d'un Mémoire de D. A. Raïkov [*Harmonic Analysis on commutative groups with the Haar measure and the theory of characters* (*Travaux de l'Inst. Math. Stekloff*, **14**, 1945, p. 5-86)]. Ce Mémoire constitue un exposé, au moyen de la théorie des anneaux normés, des questions traitées dans le présent article.