Annales scientifiques de l'É.N.S.

Albert Châtelet

Algèbre des relations de congruence

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 339-368

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__339_0>

ALGÈBRE

DES

RELATIONS DE CONGRUENCE

PAR M. ALBERT CHÂTELET.

1. Dans un exposé récent [1] j'ai montré comment les théorèmes de Schreier et de Jordan-Holder, sur les suites de composition dans les groupes, sont vrais, d'une façon plus générale, pour des familles de congruences — ou de modes d'égalité — d'un ensemble E. J'avais indiqué qu'il est encore possible de les étendre au cas d'autocorrespondances de E dont chacune n'a le caractère de congruence que dans une certaine partie — ou sous-ensemble — de E. Cette extension qui s'applique notamment aux hypergroupes est l'objet du présent mémoire.

En me plaçant au point de vue de cette extension, je rappelle d'abord sommairement les définitions, notations et vocabulaire; mais seulement pour préciser dans quelles conditions les énoncés ou les formules des propriétés restent valables; je complète éventuellement les démonstrations.

I. — Les autocorrespondances et les congruences.

2. *Domaine d'une autocorrespondance.* — Dans un ensemble E, d'éléments $a, b, \ldots, x, y, \ldots$ j'appelle *autocorrespondance de mode* — ou d'opérateur — α une relation entre deux variables de E, qui est vraie pour certaines valeurs de ces variables; je la note :

$x.(\alpha).y$: (correspondance entre x sujet et y image).

---

(1) *Revue Scientifique*, 1947. Les renvois à cet exposé sont indiqués par les numéros des paragraphes, précédés de l'abréviation *R. S.* Les renvois au présent mémoire sont donnés seulement par des numéros.

Je signale à nouveau la très importante étude de P. Dubreil et M^me^ Dubreil-Jacotin sur l'algèbre des congruences qu'ils appellent *équivalences*.

Je considère éventuellement l'effet — ou la détermination — d'une autocorrespondance α dans une partie A, de E, appelée domaine de α, dans laquelle je conviens de prendre soit les sujets, soit les images, soit les deux; ce qui revient à utiliser l'une des conjonctions

$$(x \in \mathrm{A} \text{ et } x.(\alpha).y); \qquad (y \in \mathrm{A} \text{ et } x.(\alpha).y); \qquad (x, y \in \mathrm{A} \text{ et } x.(\alpha).y)$$

(avec la condition générale sous-entendue $x, y \in \mathrm{E}$).

Une autocorrespondance est *vide* — ou impossible — dans un domaine A, si elle n'y a aucun sujet, ni aucune image (les deux premières conditions et, *a fortiori*, la troisième étant impossibles). Elle est *totale* — ou pleine — dans A, si elle est vraie pour tout couple de valeurs (de A).

Je dis qu'une partie A (de E) est *domaine complet* d'une autocorrespondance α, si tout élément de A est sujet et image d'au moins un élément de E (1)

$$x \in \mathrm{A} \rightarrow (\text{Ex. } x', x'' \in \mathrm{E} \text{ et } x.(\alpha).x' \text{ et } x''.(\alpha).x)$$

[les ensembles (dans E) de sujets et d'images de chaque élément x de A ne sont pas vides].

Je dis que A est *domaine clos* de α (2) si toute image et tout sujet d'un élément de A est dans A

$$x.(\alpha).y \rightarrow (x \in \mathrm{A} \rightleftarrows y \in \mathrm{A}; \text{ tous } x, y).$$

Ces deux qualités sont évidemment indépendantes.

3. *Comparaison des autocorrespondances.* — Je définis l'*implication* de deux autocorrespondances (β conséquente de α, ou α antécédente de β) *dans un domaine* A (partie de E), pour tout sujet, *ou* toute image

$$(x \in \mathrm{A} \text{ ou } y \in \mathrm{A}) \rightarrow (x.(\alpha).y \rightarrow x.(\beta).y);$$

(chaque appartenance de la disjonction entraîne l'implication du second membre). Suivant une convention courante, je conviens qu'une autocorrespondance vide implique toute autre. L'implication est manifestement *transitive* pour des comparaisons dans un même domaine.

Si A est *domaine complet de l'antécédente* α, il l'est, *a fortiori*, de la conséquente β (une image *ou* un sujet existant, mode α, existe aussi mode β).

Si B est *domaine clos de la conséquente* β, il l'est, *a fortiori*, de l'antécédente α.

---

(1) « Ex. » abréviation de Existe ou Existent.

(2) Ces définitions déjà données (*R. S.*, 22) pourraient être envisagées d'une façon encore plus restrictive dans une partie E', de E, contenant A, c'est-à-dire complétées par la condition préalable $x, y \in \mathrm{E}'$.

L'*égalité* de deux autocorrespondances α et α', *dans un domaine* A, est définie par l'équivalence de leurs effets, ou encore par leur implication mutuelle, pour tout sujet, *ou* pour toute image

$$(x \in A \quad \text{ou} \quad y \in A) \rightarrow \big(x.(\alpha).y \rightleftharpoons x.(\alpha').y\big).$$

Si une relation d'implication ou d'égalité est vraie dans un domaine A, elle l'est, *a fortiori*, dans toute partie A', de A. Une autocorrespondance est *déterminée dans un domaine* A, si elle est définie, à une égalité près dans A; elle est, *a fortiori*, déterminée dans toute partie de A.

Quel que soit le domaine dans lequel elles sont comparées, pour deux (ou pour un système fini de) autocorrespondances, *la plus forte antécédente commune est leur conjonction* (que je note $[\alpha, \beta]$, par abréviation de $[\alpha$ et $\beta]$); *leur plus faible conséquente commune est leur disjonction* [que je note (α, β), par abréviation de $(\alpha$ ou $\beta)$]

$$\left.\begin{array}{l}(\lambda \rightarrow \alpha \quad \text{et} \quad \lambda \rightarrow \beta) \rightleftharpoons (\lambda \rightarrow [\alpha, \beta]) \\ \alpha \rightarrow \lambda \quad \text{et} \quad \beta \rightarrow \lambda) \rightleftharpoons \big((\alpha, \beta) \rightarrow \lambda)\big)\end{array}\right. \qquad (\text{dans A}).$$

Dans un domaine A (qui peut être E), la conjonction peut être *vide* (sans que les composantes le soient); elle est *totale* si et seulement si les composantes le sont toutes. La disjonction peut être *totale;* elle est *vide* si et seulement si les composantes le sont toutes.

Les *lois* (logiques), de *comparaison* (des composantes avec le résultat d'une opération), d'*absorption* et de *combinaison terme à terme* s'appliquent (corrélativement) à la conjonction et à la disjonction (dans tout domaine A, où sont déterminées et comparées les autocorrespondances)

$$[\alpha_1, \alpha_2] \rightarrow \alpha_i \rightarrow (\alpha_1, \alpha_2) \qquad (i = 1 \text{ ou } 2);$$

$$(\alpha \rightarrow \beta) \left\{\begin{array}{l} \rightleftharpoons (\alpha = [\alpha, \beta]); \\ \rightleftharpoons \big(\beta = (\alpha, \beta)\big); \end{array}\right.$$

$$(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \text{ et } \beta_1 \rightarrow \beta_2) \left\{\begin{array}{l} \rightarrow \big([\alpha_1, \beta_1] \rightarrow [\alpha_2, \beta_2]\big); \\ \rightarrow \big((\alpha_1, \beta_1) \rightarrow (\alpha_2, \beta_2)\big). \end{array}\right.$$

4. *Opérations entre les autocorrespondances.* — En plus des deux opérations ainsi définies j'utilise encore les deux suivantes (*R. S.*, 24).

1° *La disjonction* α_1 *d'un ensemble* (fini ou infini) $\mathfrak{A}$ d'autocorrespondances α_i, que je note

$$\alpha_1 = (\ldots \alpha_i \ldots); \qquad \text{ou} \qquad \alpha_1 = (\mathfrak{A});$$

est définie par la condition générale

$$x.(\alpha_1).y \rightleftharpoons \big(\text{Ex. } \alpha_i \in \mathfrak{A} \quad \text{et} \quad x.(\alpha_i).y\big)$$

(Pour un système fini de α_i, cette définition est équivalente à la précédente). Si chaque α_i est déterminé dans un domaine *complet* — ou *clos* — A_i, la disjonction α_I a pour domaine *complet* — ou *clos* — la *réunion* A (finie ou infinie) des A_i.

2° *La multiplication de deux* — ou d'un système fini de — autocorrespondances (désignée par le signe $\times$) est définie par l'élimination d'une variable

$$x.(\alpha\times\beta).y \rightleftharpoons \big(\text{Ex. } u:\ x.(\alpha).u \quad \text{et} \quad u.(\beta).y\big)$$

(il est sous entendu $u \in E$). La condition de possibilité d'un produit peut être aisément précisée; je signale seulement que : si une partie D (de E) est domaine *clos* pour deux congruences α et β, elle l'est aussi pour leurs produits $\alpha\times\beta$, $\beta\times\alpha$ (et pour tout « monome » en α, β) s'ils ne sont pas vides. Si elle est *en outre domaine complet*, elle l'est aussi pour les produits.

La multiplication est évidemment *associative*; elle vérifie aussi des lois de *comparaison*, de *combinaison terme à terme* et de *distributivité* (complète pour la disjonction; partielle pour la conjonction) (*R. S.*, 25); elle n'est pas nécessairement commutative.

a. Une autocorrespondance λ, de domaine clos A, y *implique son produit* par une autocorrespondance α, réflexive dans A

$$\begin{array}{l} \text{Si A domaine clos de } \lambda \\ \alpha \text{ réflexive dans A} \end{array} \qquad \lambda \left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \ \alpha\times\lambda; \\ \rightarrow \ \lambda\times\alpha; \end{array} \right. \qquad \text{dans A.}$$

Si le produit est commutatif (dans A), la condition de réflexivité est seule suffisante.

b. Deux implications peuvent être *multipliées terme à terme*, dans un domaine clos D, commun à leurs antécédentes, et, par suite aux produits de ces antécédentes

$$(\alpha_1 \rightarrow \alpha_2 \quad \text{et} \quad \beta_1 \rightarrow \beta_2) \ \rightarrow \ (\alpha_1\times\beta_1 \rightarrow \alpha_2\times\beta_2);$$

c. La multiplication est *distributive relativement à la disjonction* (finie ou infinie)

$$\lambda\times(\ldots\alpha_i\ldots) = (\ldots\lambda\times\alpha_i\ldots); \qquad (\ldots\alpha_i\ldots)\times\lambda = (\ldots\alpha_i\times\lambda\ldots).$$

L'égalité a lieu dans E et, *a fortiori*, dans toute partie de E.

d. La multiplication est *partiellement distributive relativement à la conjonction :* le produit d'une conjonction par un facteur implique la conjonction des produits

$$[\alpha, \beta]\times\lambda \rightarrow [\alpha\times\lambda, \beta\times\lambda]; \qquad \lambda\times[\alpha, \beta] \rightarrow [\lambda\times\alpha, \lambda\times\beta].$$

L'implication a lieu dans E et, *a fortiori* dans toute partie de E (toujours avec la convention qu'une autocorrespondance vide implique toute autre).

5. *Congruence*. — J'appelle *congruence* $\bar{\alpha}$ *dans un domaine* (clos) A, ou simplement « $\bar{\alpha}$ *dans* A » (indication d'nne autocorrespondance surlignée) une autocorrespondance α qui, dans A, a les qualités d'une égalité et qui admet A comme domaine clos. Cette définition est exprimée par les conditions

$$x.(\bar{\alpha}).y \rightarrow (x \in \mathrm{A} \rightleftharpoons y \in \mathrm{A});$$

$$x \in \mathrm{A} \rightarrow x.(\bar{\alpha}).x;$$

$$(x \text{ ou } y \in \mathrm{A}) \begin{cases} \rightarrow \big(x.(\bar{\alpha}).y \rightleftharpoons y.(\bar{\alpha}).x\big); \\ \rightarrow \Big(\big(x.(\bar{\alpha}).u \text{ et } u.(\bar{\alpha}).y\big) \rightarrow x.(\bar{\alpha}).y\Big). \end{cases}$$

En raison de la réflexivité, A et toute partie de A est *domaine complet* de $(\bar{\alpha})$.

La qualité de symétrie permet de ne plus distinguer entre sujet et image : il est commode de dire que x et y sont *congrus*, *mode* $(\bar{\alpha})$ (ou que chacun d'eux est congru à l'autre), ce qui peut être formulé

$$x \equiv y, \quad (\text{mode } \bar{\alpha}); \qquad \text{ou} \qquad x \equiv y, \quad (\bar{\alpha}).$$

Il est facile de vérifier les propriétés suivantes :

$\bar{\alpha}$, congruence dans A_1 et dans A_2, l'est dans leur *intersection* $[\mathrm{A}_1, \mathrm{A}_2]$ (qui est notamment domaine clos);

$\bar{\alpha}$, étant congruence dans un domaine A, a les qualités d'une égalité dans toute partie A' de A (mais ne l'admet pas nécessairement comme domaine clos). Elle est congruence dans le domaine $\mathrm{A}'.(\bar{\alpha})$, obtenu en prenant tous les éléments de A qui sont congrus à ceux de A', mode $\bar{\alpha}$

$$y \in \mathrm{A}'.(\bar{\alpha}) \rightleftharpoons \big(\text{Ex}.\, y' : \; y' \in \mathrm{A}' \text{ et } y \equiv y', \; (\bar{\alpha})\big).$$

Ce domaine, inclus dans A et peut-être égal à A, est la « plus petite partie » de A, contenant A', où α est congruence.

En particulier si A' est réduit à un seul élément e, *choisi* — ou *distingué* — dans A, $\bar{\alpha}$ est *congruence totale* dans le domaine $e.(\bar{\alpha})$, que j'appelle *domaine de totalité* de $\bar{\alpha}$ et que je désigne par une surligne (avec éventuellement e en indice)

$$y \in \bar{\mathrm{A}} (\text{ou } \bar{\mathrm{A}}_e) \rightleftharpoons \big(y \equiv e, \; (\text{mode } \bar{\alpha})\big).$$

6. *Calcul des congruences*. — La *loi d'absorption* s'applique, dans un domaine A, à un produit dont l'un des termes est une *congruence*, $\bar{\alpha}$ dans A, et dont l'autre terme (absorbé) est une *autocorrespondance* λ, *de domaine complet* A (antécédente de $\bar{\alpha}$, dans A)

$$(\lambda \rightarrow \bar{\alpha}) \rightleftharpoons (\lambda \times \bar{\alpha} = \bar{\alpha} \times \lambda = \bar{\alpha}), \qquad \text{dans A}.$$

La démonstration donnée pour $A = E$ (*R. S.*, 27) reste valable en tenant compte de ce que A étant domaine clos pour $\bar{\alpha}$, l'est aussi pour l'antécédente λ (n° 3) et, par suite, pour les produits $\lambda \times \bar{\alpha}$ et $\alpha \times \lambda$.

La multiplication des congruences est tautologique

$$\bar{\alpha} \times \bar{\alpha} = \bar{\alpha}, \qquad \text{dans } A.$$

C'est un cas particulier de la loi précédente, puisque $\bar{\alpha}$ s'implique elle-même et que A en est domaine complet; c'est aussi une autre expression de la qualité de ransitivité de $\bar{\alpha}$ [combiné avec la loi de comparaison d'un produit d'auto-correspondances ($4 - a$)].

Pour une congruence, $\bar{\alpha}$ dans A, il existe une *loi de distributivité* plus précise que celle qui a été donnée pour une autocorrespondance, ($4 - d$), mais qui est encore *restreinte*, en ce sens qu'elle ne s'applique qu'au *produit d'une conjonction*, dont un terme est $\bar{\alpha}$, par une *autocorrespondance*, de domaine complet A, et *antécédente* de $\bar{\alpha}$, dans A

$$(\lambda \rightarrow \bar{\alpha}) \begin{cases} \rightarrow \quad [\bar{\alpha}, \beta] \times \lambda = [\bar{\alpha}, \beta \times \lambda]; & \text{ou} \quad [\bar{\alpha} \times \lambda, \beta \times \lambda], \\ \rightarrow \quad \lambda \times [\bar{\alpha}, \beta] = [\bar{\alpha}, \lambda \times \beta]; & \text{ou} \quad [\lambda \times \bar{\alpha}, \lambda \times \beta]. \end{cases}$$

La démonstration déjà donnée (*R. S.*, 27) reste valable. Si $\bar{\alpha}$, β, γ sont de domaine complet A (ou E), il n'en est pas nécessairement de même des deux membres de l'égalité, qui peuvent notamment être vides.

Cette condition est analogue à celle de Dedekind, qui caractérise un *treillis modulaire* (*R. S.*, 13).

7. *Comparaison de congruences.* — L'implication de congruences est définie par l'implication des autocorrespondances, dans E. Je ne comparerai, toutefois, que des congruences dont les domaines (clos) contiennent tous un même élément e, choisi — ou distingué — dans E.

Si une congruence $\bar{\alpha}$ implique (dans E) une congruence $\bar{\beta}$, tout domaine B (clos) de $\bar{\beta}$, et notamment son domaine de totalité $\bar{B}$ est domaine clos de $\bar{\alpha}$, dont il contient par suite le domaine de totalité $\bar{A}$

$$(\bar{\alpha} \rightarrow \bar{\beta}, \text{ dans } E) \rightarrow (\bar{A} \subset \bar{B} \subset B \subset E).$$

8. *Conjonction de congruences.* — Si $\bar{\alpha}$ *dans* A et $\bar{\beta}$ *dans* B *sont des congruences* (définies par les autocorrespondances α et β dans E);

la conjonction $\mu = [\alpha, \beta]$ *est congruence dans l'intersection* $M = [A, B]$ (qui en est notamment domaine clos).

Dans M, non vide puisqu'elle contient e, l'égalité — ou autocorrespondance identique — est une antécédente de la conjonction $\mu = [\alpha, \beta]$ qui, par suite, admet M pour domaine complet. Par ailleurs la relation qui définit μ dans M

$$(x, y \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad x.(\alpha).y) \quad \text{et} \quad (x, y \in \mathrm{B} \quad \text{et} \quad x.(\beta).y),$$

a manifestement les qualités d'une égalité (*R. S.*, 28). En outre en combinant membre à membre les implications qui expriment que A et B sont clos pour $\bar{\alpha}$ et $\bar{\beta}$ j'obtiens

$$\left(x.(\bar{\alpha}).y \quad \text{et} \quad x.(\bar{\beta}).y\right) \quad \rightarrow \quad ((x \in \mathrm{A} \quad \text{et} \quad x \in \mathrm{B}) \quad \rightleftharpoons \quad (y \in \mathrm{A} \text{ et } y \in \mathrm{B}));$$

ce qui exprime que M est alors aussi clos pour $\bar{\mu}$.

Le domaine de totalité de $\bar{\mu}$ (de représentant e) *est l'intersection* $\bar{\mathrm{M}} = [\bar{\mathrm{A}}, \bar{\mathrm{B}}]$, *des domaines de totalité* $\bar{\mathrm{A}}$ de $\bar{\alpha}$ et $\bar{\mathrm{B}}$ de $\bar{\beta}$ (pour le même représentant e). La vérification est immédiate.

Un *cas particulier*, utilisé ultérieurement, est celui où l'une des congruences, $\bar{\beta}$ par exemple, est considérée (ou déterminée) dans son domaine de totatilité $\bar{\mathrm{B}}$; dans ce cas

$$\bar{\mu} = \bar{\alpha}, \qquad \text{dans} \quad [\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}].$$

En effet, dans la conjonction

$$x.(\bar{\alpha}).y \quad \text{et} \quad x.(\bar{\beta}).y, \quad \text{dans} \quad [\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}];$$

la deuxième congruence étant totale (vérifiée pour tout couple x, y de $\bar{\mathrm{B}}$, donc de $[\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}]$) peut être supprimée. Il est toutefois à remarquer que $[\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}]$ est domaine clos pour la conjonction μ (des autocorrespondances α et β, mais ne l'est pas nécessairement pour la congruence $\bar{\alpha}$; l'égalité vraie dans ce domaine ne l'est plus nécessairement dans E.

Si je compare, dans E, diverses congruences, dont $\bar{\alpha}$ dans A, $\bar{\beta}$ dans B (et éventuellement des autocorrespondances), *la congruence* $\mu = [\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, *dans* $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ *est la plus forte antécédente commune de* $\bar{\alpha}$ *dans* A *et* $\bar{\beta}$ *dans* B.

C'est en effet la plus forte antécédente commune, dans E, des autocorrespondances α et β : elle le reste pour celles des antécédentes qui sont des congruences, puisqu'elle est elle même une congruence.

La construction de la conjonction des congruences dans l'intersection des domaines et son interprétation comme plus forte antécédente commune s'étendent à une famille quelconque (finie) de congruences (dans E).

9. *Multiplication de congruences permutables.* — Le raisonnement fait pour des congruences dans E (*R. S.*, 28) établit la propriété :

Si deux congruences $\bar{\alpha}$ *et* $\bar{\beta}$ *sont permutables dans un même domaine clos* H, *la valeur commune de leurs produits*

$$\delta = \bar{\alpha} \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \bar{\alpha} \qquad (\text{dans H});$$

est une congruence, dans H, et c'est *la plus faible conséquente commune de* $\overline{\alpha}$ *et* $\overline{\beta}$, dans H.

Il est possible et utile d'établir une propriété, plus générale, pour des congruences dans des domaines (clos) différents

Si une congruence $\overline{\beta}$, *dans* B, *y est permutable avec une autocorrespondance* α *et si* α *est elle-même congruence dans un domaine* A, *contenu dans* B, *la valeur commune des produits*

$$\delta = \alpha \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \alpha \qquad (\text{dans B}).$$

est congruence dans le domaine $\mathrm{D} = \mathrm{A}.(\overline{\beta})$, (formé des éléments congrus à ceux de A, mode $\overline{\beta}$ (n° 5)] *qui est clos* pour $\overline{\beta}$, mais aussi *pour* $\overline{\delta}$.

La congruence, $\overline{\delta}$ dans D, est la *plus faible conséquente commune de* $\overline{\alpha}$ *dans* A, *et* $\overline{\beta}$ *dans* D.

Cette propriété comprend comme cas particulier la précédente, en prenant $\mathrm{H} = \mathrm{B} = \mathrm{A} = \mathrm{D}$.

10. *Prolongement d'un produit.* — Pour démontrer la propriété, je vais d'abord étudier le produit d'une congruence par une autocorrespondance, en établissant le lemme suivant.

Je considère une *congruence* $\overline{\beta}$, *de domaine clos* B et une *autocorrespondance* α, *de domaine clos* A, *contenu dans* B; je suppose α et $\overline{\beta}$ *permutables dans* B :

$$(x \text{ ou } y \in \mathrm{B}) \rightarrow \big(x.(\alpha \times \overline{\beta}).y \rightleftarrows x.(\overline{\beta} \times \alpha).y\big),$$

ou seulement dans A (remplaçant alors B dans le premier membre); *je forme le domaine* $\mathrm{D} = \mathrm{A}.(\overline{\beta}) \subset \mathrm{B}$ et l'*autocorrespondance* δ, déterminée (dans D) par :

$$(1) \qquad x.(\delta).y \rightleftarrows \big(\text{Ex. } a, a' \in \mathrm{A}:\ x.(\overline{\beta}).a \text{ et } a.(\alpha).a' \text{ et } a'.(\overline{\beta}).y\big),$$

(*a*) le *domaine* D, clos (et complet) pour $\overline{\beta}$, *est* aussi *clos* (non nécessairement complet) *pour les produits* $\alpha \times \overline{\beta}$, $\overline{\beta} \times \alpha$ (même si la commutativité n'est vraie que dans A);

(*b*) *l'autocorrespondance* δ *est égale à ces produits*, dans D, (ou seulement dans A, si la commutativité n'a lieu que dans A).

La propriété (x) exprime les appartenances (à D) des sujets et des images des produits; les démonstrations de ces deux appartenances sont corrélatives, je ne donne que celle des images. Je choisis un élément x, dans D, qui ait une image y par le produit $\alpha \times \overline{\beta}$:

$$\big(x \in \mathrm{D} \text{ et } x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\big) \rightarrow \big(\text{Ex. } a \in \mathrm{A} \text{ et } a.(\overline{\beta}).x \text{ et } x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\big)$$
$$\rightarrow \big(\text{Ex. } a \in \mathrm{A} \text{ et } a.(\overline{\beta} \times \alpha \times \overline{\beta}).y\big).$$

Mais a étant dans A, je puis, dans cette expression, permuter α et $\overline{\beta}$, puis appliquer la tautologie, j'obtiens les conséquences :

$$a.(\alpha \times \overline{\beta}).y \rightarrow \big(\text{Ex. } u: \quad a.(\alpha).u \quad \text{et} \quad u.(\overline{\beta}).y\big);$$

A étant clos pour α, u est dans A et y est dans D. Je n'ai pas eu à supposer que D était complet pour le produit $\alpha \times \overline{\beta}$.

Pour établir la propriété (b), je vais d'abord, dans le cas de la commutativité dans D, montrer l'équivalence de la condition (I) avec :

$$\text{(II)} \qquad x \quad \text{et} \quad y \in \text{D} \quad \text{et} \quad x.(\alpha \times \overline{\beta}).y.$$

D'une part (I) entraîne (II), car d'après la construction de D :

$$\big(a,\, a' \in \text{A} \quad \text{et} \quad x.(\overline{\beta}).a \quad \text{et} \quad a'.(\overline{\beta}).y\big) \rightarrow (x \quad \text{et} \quad y \in \text{D});$$

en outre, x et y étant dans D :

$$\text{(I)} \rightarrow x.(\overline{\beta} \times \alpha \times \overline{\beta}).y \rightarrow x.(\alpha \times \overline{\beta} \times \overline{\beta}).y \rightarrow x.(\alpha \times \overline{\beta}).y.$$

Je cherche, d'autre part, une conséquence de (II) :

$$\begin{aligned}\big(x \in \text{D} \quad \text{et} \quad x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\big) &\rightarrow \big(\text{Ex. } a \in \text{A} \quad \text{et} \quad a.(\overline{\beta}).x \quad \text{et} \quad x.(\alpha \times \overline{\beta}).y\big) \\ &\rightarrow \big(\text{Ex. } a \in \text{A} \quad \text{et} \quad x.(\overline{\beta}).a \quad \text{et} \quad a.(\overline{\beta} \times \alpha \times \overline{\beta}).y\big);\end{aligned}$$

comme a est dans $\text{A} \subset \text{B}$, on peut permuter α et $\overline{\beta}$, et remplacer $\overline{\beta} \times \overline{\beta}$ par $\overline{\beta}$, de sorte que (II) entraîne :

$$\big(\text{Ex. } a, u: \quad a \in \text{A} \quad \text{et} \quad x.(\overline{\beta}).a \quad \text{et} \quad a.(\alpha).u \quad \text{et} \quad u\,(\overline{\beta}).y\big);$$

mais A étant domaine clos pour α, u est un élément a' de A, ce qui donne bien la condition (I).

Si la commutativité n'a lieu que dans A, j'établis seulement l'équivalence :

$$\text{(I)} \rightleftarrows x.(\alpha \times \overline{\beta}).y;$$

en supposant l'appartenance (x ou $y \in \text{A}$). La démonstration de l'implication gauche-droite reste valable. L'implication droite-gauche résulte, plus simplement, des implications corrélatives :

$$x \in \text{A} \rightarrow \Big(x.(\alpha \times \overline{\beta}).y \rightarrow \big(\text{Ex. } a' \in \text{A};\ x.(\overline{\beta}).x \quad \text{et} \quad x.(\alpha).a' \quad \text{et} \quad a'.(\overline{\beta}).y\big)\Big),$$

$$y \in \text{A} \rightarrow \Big(x.(\overline{\beta} \times \alpha).y \rightarrow \big(\text{Ex. } a \in \text{A};\ x.(\overline{\beta}).a \quad \text{et} \quad a.(\alpha).y \quad \text{et} \quad y.(\overline{\beta})y\big)\Big).$$

La condition (I) construit $\overline{\delta}$ dans D, en n'utilisant que la seule détermination de $\overline{\alpha}$ dans A; elle réalise, en quelque sorte le *prolongement* dans D de l'auto-correspondance (ou congruence) déterminée dans A par les produits égaux. Mais, si α admet B pour domaine complet, en y étant permutable avec $\overline{\beta}$, la valeur commune des produits :

$$\delta = \alpha \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \alpha \qquad \text{(dans B)},$$

est une autocorrespondance ayant B pour domaine complet et qui est égale à l'autocorrespondance δ dans D.

11. *Qualités du produit (prolongé).* — Pour établir la propriété énoncée, il n'y a plus qu'à compléter les conclusions du lemme, dans le cas où α est congruence, ce qui donne l'énoncé complémentaire :

(c) *Si α est congruence dans* A, *l'autocorrespondance* δ, déterminée par la condition (I), ou par son égalité aux produits dans D, *est une congruence dans* D.

Il suffit de vérifier que δ a bien les qualités d'une égalité. Elle est *réflexive* :

$$x \in \mathrm{D} \rightarrow \big(\mathrm{Ex.}\ a \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).a \ \text{ et } \ a.(\alpha).a \ \text{ et } \ a.(\bar\beta).x\big) \rightleftharpoons x.(\delta).x;$$

elle est *symétrique* :

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{Ex.}\ a, a' \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).a \ \text{ et } \ a.(\bar\alpha).a' \ \text{ et } \ a'.(\bar\beta).y\big) \\ \rightleftharpoons\ &\big(\mathrm{Ex.}\ a', a \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ y.(\beta).a' \ \text{ et } \ a'.(\bar\alpha).a \ \text{ et } \ a.(\bar\beta).x\big), \end{aligned}$$

elle est *transitive* :

$$\begin{aligned} &\big(\mathrm{Ex.}\ a_1, a'_1, a_2, a'_2 \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).a_1 \ \text{ et } \ a_1.(\bar\alpha).a'_1 \ \text{ et } \ a'_1.(\bar\beta).y \\ &\qquad \text{ et } \ y.(\bar\beta).a_2 \ \text{ et } \ a_2.(\bar\alpha).a'_2 \ \text{ et } \ a'_2.(\bar\beta).z\big) \\ \rightarrow\ &\big(x.(\bar\beta).a_1 \ \text{ et } \ a_1.(\bar\alpha \times \bar\beta \times \bar\beta \times \bar\alpha).a'_2 \ \text{ et } \ a'_2.(\bar\beta).z\big) \\ \rightarrow\ &\big(x.(\bar\beta).a_1 \ \text{ et } \ a_1.(\bar\alpha).a'' \ \text{ et } \ a''.(\bar\beta).a'_2 \ \text{ et } \ a'_2.(\bar\beta).z\big) \\ \rightarrow\ &\big(x.(\bar\beta).a_1 \ \text{ et } \ a_1.(\bar\alpha).a'' \ \text{ et } \ a''.(\bar\beta).z\big). \end{aligned}$$

Le *domaine de totalité* de la congruence $\bar\delta$ est $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{A}}.(\bar\beta) \subset \mathrm{D}$, construit en prenant les éléments congrus, mode $\bar\beta$, aux éléments du domaine de totalité $\overline{\mathrm{A}}$ de $\bar\alpha$; il contient les domaines de totalité $\overline{\mathrm{A}}$ de $\bar\alpha$ et $\overline{\mathrm{B}}$ de $\bar\beta$. Même si la commutativité n'est vraie que dans A, comme e est dans A, il en résulte la suite d'équivalences :

$$e.(\bar\delta).y \rightleftharpoons e.(\bar\beta \times \bar\alpha).y \rightleftharpoons e.(\bar\alpha \times \bar\beta).y \rightleftharpoons y \in \overline{\mathrm{A}}.(\bar\beta).$$

En outre tout élément congru à e, mode $\bar\alpha$, ou mode $\bar\beta$, est aussi congru mode $\bar\alpha \times \bar\beta$ (n° 4. *a*). Si la commutativité a lieu dans D, le domaine de totalité est encore égal à $\overline{\mathrm{D}} = \overline{\mathrm{B}}.(\alpha)$, obtenu en prenant indifféremment les sujets ou les images des éléments de $\overline{\mathrm{B}}$, suivant l'autocorrespondance α.

Reste à montrer que $\bar\delta$ est la plus faible conséquente commune, dans D (la commutativité étant vraie dans B). D'une part α et $\bar\beta$ impliquent $\bar\delta = \alpha \times \bar\beta = \bar\beta \times \alpha$, dans D, car (*voir* aussi n° 4. *a*)

$$\begin{aligned} \big(x \in \mathrm{D} \ \text{ et } \ x.(\alpha).y\big) &\rightarrow \big(x.(\alpha).y \ \text{ et } \ y.(\bar\beta).y\big) \rightarrow x.(\bar\delta).y \\ \big(x \in \mathrm{D} \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).y\big) &\rightarrow \big(\mathrm{Ex.}\ a \in \mathrm{A} \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).a \ \text{ et } \ x.(\bar\beta).y\big) \\ &\rightarrow \big(x.(\bar\beta).a \ \text{ et } \ a.(\bar\alpha).a \ \text{ et } \ a.(\bar\beta).y\big) \rightarrow x.(\bar\delta).y. \end{aligned}$$

D'autre part toute congruence $\bar{\lambda}$, dans D, impliquée par les autocorrespondances α et β est impliquée par leur produit, car :

$$(\alpha \to \bar{\lambda} \quad \text{et} \quad \beta \to \bar{\lambda}) \to (\alpha \times \beta \to \bar{\lambda} \times \bar{\lambda} = \bar{\lambda}).$$

Le même raisonnement montre que $\bar{\delta}$, *déterminée dans son domaine de totalité* $\bar{D} = \bar{A}.(\bar{\beta}) = \bar{B}.(\alpha)$, *y est la plus faible conséquente commune* de $\bar{\alpha}$ *dans* (son domaine de totalité) $\bar{A}$ *et de* $\bar{\beta}$ *dans* (son domaine de totalité) $\bar{B}$.

12. *Correspondance de quotients.* — En précisant une notion déjà donnée (*R. S.*, 3, 12, 30), je dis que $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 est un *quotient de congruences*, si $\bar{\alpha}_1$ est congruence dans A_1 et si $\bar{\alpha}_0$ *est congruence et implique* $\bar{\alpha}_1$, dans A_1 (qui est par suite aussi domaine clos de $\bar{\alpha}_0$).

Les conditions de congruence et d'implication de $\bar{\alpha}_0$ sont vérifiées *a fortiori*, dans toute partie de A_1, notamment dans le domaine de totalité $\bar{A}_1$ de $\bar{\alpha}_1$. Si $\bar{\alpha}_1$ est seulement considérée dans ce domaine de totalité, les conditions d'implication de $\bar{\alpha}_0$ sont équivalentes à la seule condition que $\bar{\alpha}_0$ soit congruence dans $\bar{A}_1$ domaine clos. L'implication en résulte évidemment.

A un quotient de congruences, $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 (peut être égal à $\bar{A}_1$); j'associe un *ensemble quotient* (*R. S.*, 30) $\bar{A}_1 | \bar{\alpha}_0$ obtenu en répartissant en *classes* suivant la congruence $\bar{\alpha}_0$, le domaine de totalité $\bar{A}_1$, de $\bar{\alpha}_1$. Cet ensemble quotient contient notamment comme classe le domaine de totalité $\bar{A}'_0$ de $\bar{\alpha}^0$.

Je dis que *deux quotients de congruences :* $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1, et $\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_0$ dans B_1, *sont correspondants, lorsque :*

$$[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1];$$

$$\left.\begin{array}{l} \bar{\alpha}_1 \times \bar{\beta}_0 = \bar{\alpha}_0 \times \bar{\beta}_1 \\ \bar{\beta}_1 \times \bar{\alpha}_0 = \bar{\beta}_0 \times \bar{\alpha}_1 \end{array}\right\} \quad \text{dans} \quad M_1 = [A_1, B_1].$$

[Ces conditions ont déjà été données pour des congruences définies dans E (*R. S.*, 31); je remplace seulement ici le domaine E par l'intersection M_1 des domaines clos]. Dans la première égalité les deux membres, qui ne sont pas vides, sont des congruences, dans M_1; il en est de même des conjonctions $[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_1]$, $[\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0]$, et il en résulte :

$$[\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_1, \bar{\alpha}_1, \bar{\beta}_0] = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}_0].$$

Mais les deux égalités des produits ne sont plus nécessairement équivalentes.

La correspondance entraîne encore une équipotence (*R. S.*, 12 et 31).

Si deux quotients de congruences, $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans A_1 et $\bar{\beta}_1 | \bar{\beta}_0$ dans B_1, *sont correspondants, les ensembles quotients associés* $\bar{A}_1 | (\bar{\alpha}_0)$ et $\bar{B}_1 | (\bar{\beta}_0)$ *sont équipotents.*

13. *Démonstration de l'équipotence.* — La méthode de démonstration déjà donnée (*R. S.*, 32) pour des congruences dans E, reste valable sauf quelques précisions complémentaires. Elle consiste à établir l'équipotence de chacun des deux ensembles quotients avec l'ensemble quotient :

$$\overline{\mathrm{M}}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0); \qquad \overline{\mathrm{M}}_1 = [\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{B}}_1]; \qquad \overline{\mu}_1 = [\overline{\alpha}_1, \overline{\beta}_1]; \qquad \overline{\mu}_0 = [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0].$$

$\overline{\mu}_1$ et $\overline{\mu}_0$ sont congruences dans $\mathrm{M}_1 = [\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{B}}_1]$ et $\overline{\mathrm{M}}_1$ est domaine de totalité de $\overline{\mu}_1$ (n° 8). Les équipotences sont réalisées respectivement par les congruences $\overline{\alpha}_0$, dans $\overline{\mathrm{A}}_1$ et $\overline{\beta}_0$ dans $\overline{\mathrm{B}}_1$; il suffit d'en démontrer une (en raison de la symétrie des notations), ce que je fais pour la première.

(*a*) *Le domaine de totalité* $\overline{\mathrm{A}}_1$, de $\overline{\alpha}_1$, *est égal à* $\overline{\mathrm{M}}_1.(\alpha_0)$:

$$x \in \overline{\mathrm{A}}_1 \quad \rightleftharpoons \quad u \in \overline{\mathrm{M}}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x.$$

L'implication droite-gauche résulte de l'implication de $\overline{\alpha}_1$ par $\overline{\alpha}_0$ dans A_1, qui est domaine clos pour les deux :

$$\big(u \in \overline{\mathrm{M}}_1 \subset \mathrm{A}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x\big) \;\to\; \big(u \in \overline{\mathrm{M}}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_1).x\big) \;\to\; x \in \overline{\mathrm{A}}_1.$$

L'implication gauche-droite résulte de l'égalité des produits dans M :

$$\begin{aligned} x \in \overline{\mathrm{A}}_1 \;&\to\; \big(e.(\overline{\beta}_0).e \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\big) \;\to\; \big(e.(\overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_1).x \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\big) \\ &\rightleftharpoons\; \big(e.(\overline{\beta}_1 \times \overline{\alpha}_0).x \quad \text{et} \quad e.(\overline{\alpha}_1).x\big) \;\rightleftharpoons\; e.[\overline{\beta}_1 \times \overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1].x \\ &\rightleftharpoons\; e.([\overline{\beta}_1, \overline{\alpha}_1] \times \overline{\alpha}_0).x \;\rightleftharpoons\; \big(u \in \overline{\mathrm{M}}_1 \quad \text{et} \quad u.(\overline{\alpha}_0).x\big). \end{aligned}$$

L'autre égalité démontrerait que tout élément de A est sujet, mode $\overline{\alpha}_0$, d'un élément de $\overline{\mathrm{M}}_1$, ce qui est un résultat équivalent. En réalité je n'ai pas utilisé l'égalité des produits dans $\overline{\mathrm{M}}_1$, mais un résultat plus restreint : l'égalité des produits pour le sujet *e* et pour une image appartenant à $\overline{\mathrm{A}}_1$.

(*b*) *A toute classe de* $\overline{\mathrm{M}}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0)$, définie par un représentant *u*, *correspond la classe* de $\overline{\mathrm{A}}_1 \,|\, (\overline{\alpha}_0)$, définie par le même représentant *u* et la contenant.

(*c*) Réciproquement, *à toute classe* C de $\overline{\mathrm{A}}_1 \,|\, (\overline{\alpha}_0)$ *correspond une et une seule classe de* $\overline{\mathrm{M}}_1 \,|\, (\overline{\mu}_0)$, constituée par tous ceuxde ses éléments qui sont dans $\overline{\mathrm{M}}_1$.

Pour le montrer il suffit de vérifier : d'une part que l'intersection $[\overline{\mathrm{M}}_1, \mathrm{C}]$ n'est pas vide, ce qui résulte de (*a*); un élément *u* (quelconque) de A_1, définissant la classe C, est congru, mode $\overline{\alpha}_0$, au moins à un élément de $\overline{\mathrm{M}}_1$; d'autre part que deux éléments de cette intersection sont congrus, mode $\overline{\mu}_0 = [\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0]$; c'est ce qui résulte de l'égalité des conjonctions dans M_1 et, *a fortiori* dans $\overline{\mathrm{M}}_1$:

$$\begin{aligned} &\big(u.(\overline{\alpha}_0).u' \ \text{et} \ u.[\overline{\alpha}_1, \overline{\beta}_1].u'\big) \\ &\quad \rightleftharpoons\; u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\alpha}_1, \overline{\beta}_1].u' \;\rightleftharpoons\; u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_1].u' \;\rightleftharpoons\; u.[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}_0].u'. \end{aligned}$$

II. — Les suites de composition locales.

14. *Demi-treillis d'autocorrespondances.* — Ainsi que je l'ai déjà fait (*R. S.*, 37), je considère, dans un ensemble E, où je distingue un élément e, une famille $\mathcal{E}$, d'autocorrespondances, de domaine complet E, que j'appelle un *demi-treillis* et qui vérifie les deux conditions d'appartenance suivantes :

1° *$\mathcal{E}$ contient la disjonction* de toute partie de $\mathcal{E}$ (finie ou infinie); ce qui est la plus faible conséquente commune de cette partie (n^{os} 3 et 4-1);

2° *$\mathcal{E}$ contient le produit* (n° 4-2) de tout couple, et, par suite, de tout système fini de ses éléments.

15. *Congruences permises.* — Je considère, dans $\mathcal{E}$ une *famille $\mathcal{F}$ de congruences*, que j'appelle *permises*, ou, plus précisément, une famille d'autocorrespondances, dont chacune α est congruence dans un domaine clos A, contenant e. Je suppose que cette famille vérifie les trois conditions suivantes, dont deux d'appartenance; elles seront justifiées, d'une part par leurs conséquences, d'autre part par l'application aux hypergroupes (§ III).

3° Pour tout couple (¹) de congruences de $\mathcal{F}$: $\bar{\alpha}$ dans A et $\bar{\beta}$ dans B, *la conjonction* $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$, *déterminée dans* $[\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}]$, où elle est égale à la congruence $\bar{\alpha}$, *appartient à $\mathcal{F}$* (par symétrie des notations il en est de même de $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ dans $[\bar{\mathrm{A}}, \mathrm{B}]$, où elle est égale à $\bar{\beta}$.

4° Pour tout couple de congruences de $\mathcal{F}$, $\bar{\alpha}$ dans $\mathrm{A} \subset \mathrm{B}$ et $\bar{\beta}$ dans B, définies par des autocorrespondances α et $\bar{\beta}$, permutables dans B, *le produit* $\bar{\delta} = \alpha \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha$, *qui est une congruence, dans* $\mathrm{A}.(\bar{\beta}) = \mathrm{D}$ (n° 9), *appartient* à $\mathcal{F}$.

La cinquième condition est analogue à celle qui a été énoncée pour les congruences dans E (*R. S.*, 37), mais avec précision des domaines :

5° Si $\bar{\beta}$ est une congruence de domaine clos B et α une autocorrespondance telle que $\alpha \times \bar{\beta}$ (ou $\bar{\beta} \times \alpha$) ait un domaine clos D inclus dans B, *le produit* $\delta_{\mathrm{I}} \times \bar{\beta}$ (ou $\bar{\beta} \times \delta_{\mathrm{J}}$), *où* δ_{I} (ou δ_{J}) *est une antécédente du produit* $\alpha \times \bar{\beta}$ (ou $\bar{\beta} \times \alpha$) *est égal* (dans D) *à un produit* $\alpha_{\mathrm{I}} \times \bar{\beta}$ (ou $\beta \times \alpha_{\mathrm{J}}$); α_{I} (ou α_{J}) *étant une antécédente de* α :

$$(\delta_{\mathrm{I}} \to \alpha \times \bar{\beta}) \to (\mathrm{Ex.}\ \alpha_{\mathrm{I}} : \alpha_{\mathrm{I}} \to \alpha \quad \text{et} \quad \delta_{\mathrm{I}} \times \bar{\beta} = \alpha_{\mathrm{I}} \times \bar{\beta}),$$
$$(\delta_{\mathrm{J}} \to \bar{\beta} \times \alpha) \to (\mathrm{Ex.}\ \alpha_{\mathrm{J}} : \alpha_{\mathrm{J}} \to \alpha \quad \text{et} \quad \bar{\beta} \times \delta_{\mathrm{J}} = \bar{\beta} \times \alpha_{\mathrm{J}}).$$

(¹) On pourrait adopter la convention plus restrictive que la conjonction $[\bar{\alpha}, \bar{\beta}]$ déterminée dans l'intersection $[\mathrm{A}, \mathrm{B}]$ (contenant les intersections $[\mathrm{A}, \bar{\mathrm{B}}]$ et $[\bar{\mathrm{A}}, \mathrm{B}]$) appartient à $\mathcal{F}$. Mais cette condition ne serait pas vérifiée par l'application aux hypergroupes.

16. *Invariance.* — La définition de l'invariance (*R. S.*, 38) reste aussi valable, sauf précision du domaine.

Je dis qu'*une congruence* (de $\mathcal{F}$), $\bar{\beta}$ dans B, *est invariante* — ou distinguée — *relativement à une congruence* $\bar{\alpha}$ (de $\mathcal{F}$), *lorsqu'elle est permutable, dans* B, *avec toute antécédente* α_i de $\bar{\alpha}$ (α_i dans $\mathcal{E}$) :

$$(\alpha_i \in \mathcal{E} \text{ et } \alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}, \text{ et } x \text{ ou } y \in \mathrm{B}) \rightarrow \left(x.(\alpha_i \times \bar{\beta}).y \rightleftharpoons x.(\bar{\beta} \times \alpha_i).y\right),$$

$\bar{\beta}$ est notamment permutable avec $\bar{\alpha}$. Si $\bar{\beta}$ est invariante relativement à $\bar{\alpha}$, elle l'est, *a fortiori*, relativement à toute antécédente $\bar{\alpha}'$ de $\bar{\alpha}$.

Je considère un *quotient de congruences* $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$, *dans* A_1 [$\bar{\alpha}_0$ impliquant $\bar{\alpha}_1$, (n° 12) dans son domaine (clos) A_1] la conséquence $\bar{\alpha}_1$ est invariante relativement à l'antécédente $\bar{\alpha}_0$, en raison de la loi d'absorption (n° 7) : A_1 étant clos pour $\bar{\alpha}_1$ et complet pour toute autocorrespondance de $\mathcal{E}$:

$$(\alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_0 \rightarrow \bar{\alpha}_1) \rightarrow (\alpha_i \times \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 = \bar{\alpha}_1 \times \alpha_i); \qquad \text{dans } \mathrm{A}_1.$$

Je dis que *ce quotient est normal* — ou que $\bar{\alpha}_0$ est invariante dans $\bar{\alpha}_1$ — *si*, inversement, *la congruence* $\bar{\alpha}_0$ *est invariante relativement à* $\bar{\alpha}_1$, considérée comme autocorrespondance *dans* A_1 (domaine clos commun de $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_0$) :

$$(\alpha_i \rightarrow \bar{\alpha}_1) \rightarrow (\alpha_i \times \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0 \times \alpha_i), \qquad \text{dans } \mathrm{A}_1.$$

D'après la remarque précédente un quotient unité est normal. J'utiliserai, plus spécialement, des quotients normaux $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$ dans le domaine de totalité $\bar{\mathrm{A}}_1$ (de la conséquente).

17. *Quotient de conjonctions.* — Les théorèmes sur la formation d'un quotient normal par conjonctions (*R. S.*, 39) ou par produits (*R. S.*, 40) restent valables dans des domaines convenables.

Si un quotient de congruences (de $\mathcal{F}$) : $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$, *dans* A_1 *est normal, les conjonctions de ses termes avec une congruence* $\bar{\beta}$, *dans son domaine de totalité* $\bar{\mathrm{B}}$:

$$\bar{\mu}_1 = [\bar{\alpha}_1, \bar{\beta}] \quad \text{et} \quad \bar{\mu}_0 = [\bar{\alpha}_0, \bar{\beta}], \qquad \text{dans } \mathrm{M}_1 = [\mathrm{A}_1, \bar{\mathrm{B}}],$$

qui sont encore des congruences (n° 8) de $\mathcal{F}$ (condition 3), *forment un quotient* $\bar{\mu}_1 | \bar{\mu}_0$, *dans* M_1, *qui est normal.*

La propriété est évidente, puisque, dans M_1, les conjonctions $\bar{\mu}_1$ et $\bar{\mu}_0$ sont respectivement égales à $\bar{\alpha}_1$ et $\bar{\alpha}_0$ (n° 8). La propriété reste encore vraie si $\bar{\beta}$ est déterminée dans un domaine (clos) B quelconque et les conjonctions dans l'intersection [A_1, B], mais ce ne sont plus alors nécessairement des congruences de $\mathcal{F}$. La démonstration résulte de la distributivité restreinte (*R. S.*, 39).

18. *Quotient de produits.* — *Si un quotient de congruences* (de $\mathcal{F}$) $\bar{\alpha}_1 | \bar{\alpha}_0$, dans A_1, *est normal, et si* $\bar{\beta}$ *est une congruence dans* A, contenant A_1, *invariante relativement à* $\bar{\alpha}_1$ (et, *a fortiori*, relativement à $\bar{\alpha}_0$) *les produits* :

$$\bar{\delta}_i = \alpha_1 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_1, \qquad \bar{\delta}_0 = \alpha_0 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_0, \qquad \text{dans} \quad D_1 = A_1.(\bar{\beta}),$$

qui sont encore des congruences (n° 9), de $\mathcal{F}$ (condition 4), *forment un quotient* $\bar{\delta}_1 | \bar{\delta}_0$, dans D_1, *qui est normal.*

La commutativité de $\bar{\beta}$ avec α_1 et α_0, dans B, résulte de son invariance; l'implication des produits (dans B) résulte de la loi de combinaison terme à terme (par produit). Reste à préciser la démonstration (déjà donnée *R. S.*, 40) de la normalité.

Je montre que $\bar{\beta}$ est encore invariante, dans D_1, relativement à $\bar{\delta}_1$; j'applique la *condition* 5 à une antécédente δ_i de $\bar{\delta}_1 = \alpha_1 \times \bar{\beta} = \bar{\beta} \times \alpha_1$, dans D_1; il existe des antécédentes α_i et α'_i de α_1, telles que :

$$\delta_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta}; \qquad \bar{\beta} \times \delta_i = \bar{\beta} \times \alpha'_i, \qquad \text{dans} \quad D_1.$$

Mais d'après la loi d'implication du produit (n° 4, *a*), dans $D_1 \subset B$, qui est domaine clos de $\bar{\delta}_1$, donc de δ_i et où $\bar{\beta}$ est réflexive :

$$\delta_i \quad \rightarrow \quad \delta_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta};$$

d'où, en tenant compte de l'invariance de $\bar{\beta}$, relativement à α_1 :

$$\bar{\beta} \times \delta_i \quad \rightarrow \quad \bar{\beta} \times \alpha_i \times \bar{\beta} = \alpha_i \times \bar{\beta} = \delta_i \times \bar{\beta}, \qquad \text{dans} \quad D_1.$$

J'obtiendrais l'implication converse en utilisant α'_i, d'où l'égalité $\bar{\beta} \times \delta_i = \delta_i \times \bar{\beta}$; ce qui permet de prendre $\alpha'_i = \alpha_i$.

J'exprime par ailleurs l'invariance de $\bar{\alpha}_0$ relativement à $\bar{\alpha}_1$:

$$(\alpha_i \quad \rightarrow \quad \bar{\alpha}_1) \quad \rightarrow \quad \alpha_i \times \bar{\alpha}_0 = \bar{\alpha}_0 \times \alpha_i, \qquad \text{dans} \quad A_1.$$

Ces produits, ainsi que $\bar{\alpha}_0$ et tout α_i, admettent A_1 comme domaine clos et impliquent $\bar{\alpha}_1$, ils sont donc permutables avec $\bar{\beta}$, dans $D_1 \subset B$; en outre d'après le raisonnement du n° 10, dans tout produit avec $\bar{\beta}$ (déterminé dans D_1), ils peuvent être remplacés par des autocorrespondances qui leur sont égales dans A_1. Il en résulte la suite d'égalités dans D_1 :

$$\begin{aligned}\delta_i \times \bar{\delta}_0 = \delta_i \times \bar{\beta} \times \alpha_0 = \alpha_i \times \bar{\beta} \times \alpha_0 = \bar{\beta} \times (\alpha_i \times \alpha_0) = \bar{\beta} \times (\alpha_0 \times \alpha_i) \\ = \alpha_0 \times \bar{\beta} \times \alpha_i = \alpha_0 \times \bar{\beta} \times \delta_i = \bar{\delta}_0 \times \delta_i.\end{aligned}$$

19. *Suite de composition normale.* — Je précise la définition donnée pour des congruences de domaine E (*R. S.*, 42). Dans le demi-treillis $\mathcal{E}$ d'autocorrespondances, contenant la famille $\mathcal{F}$ de *congruences permises*, j'appelle *suite de composition normale*, un système, ordonné et numéroté, de congruences permises,

telle que deux congruences consécutives constituent *un quotient normal, dans le domaine de totalité de la conséquente :*

$$\begin{array}{ll} \overline{\alpha}_{i+1} & \text{congruence de domaine de totalité } \overline{\mathrm{A}}_{i+1}\,; \\ \overline{\alpha}_{i} \left\{ \begin{array}{l} \text{congruence de domaine clos } \overline{\mathrm{A}}_{i+1} \supset \overline{\mathrm{A}}_{i} \\ \text{invariante relativement à } \overline{\alpha}_{i+1} \end{array} \right. & (i \text{ de o à } n-1). \end{array}$$

Dans le cas présent ce n'est plus seulement l'invariance qui a un caractère local (*R. S.*, 42), mais encore la qualité de congruence; α_i est, *a priori*, une autocorrespondance dans E; elle est seulement congruence dans le domaine clos $\overline{\mathrm{A}}_{i+1}$, contenant son domaine de totalité $\overline{\mathrm{A}}_i$.

Les définitions des suites propre et maximale sont sans changement : une suite est *propre* si aucun quotient n'est unité ($\overline{\alpha}_i \neq \alpha_{i+1}$, ou $\overline{\alpha}_i$ congruence non totale, dans $\overline{\mathrm{A}}_{i+1}$); une suite est *maximale* si elle est propre et s'il est impossible d'y intercaler de congruences de $\mathcal{F}$, de façon à former une nouvelle suite de composition qui soit encore propre (*R. S.*, 19).

20. *Théorèmes de Schreier et de Jordan-Holder.* — Je rappelle les énoncés (*R. S.*, 43), en précisant les domaines.

Si deux suites de composition normales, de congruences permises (de la famille $\mathcal{F}$), **ont les mêmes termes extrêmes,** dans les mêmes domaines de totalité (pour le représentant e) :

$$\overline{\alpha}_0 = \overline{\beta}_0, \qquad \text{dans} \quad \overline{\mathrm{A}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0\,; \qquad \overline{\alpha}_p = \overline{\beta}_q, \qquad \text{dans} \quad \overline{\mathrm{A}}_p = \overline{\mathrm{B}}_q\,;$$

on peut intercaler des congruences permises (éléments de $\mathcal{F}$)

$$\begin{array}{lll} \overline{\alpha}'_{i,j} \text{ de domaine de totalité } \overline{\mathrm{A}}'_{i,j}\,; & (j \text{ de o à } q), & \text{entre } \overline{\alpha}_i \text{ et } \overline{\alpha}_{i+1}\,; \\ \overline{\beta}'_{j,i} \text{ de domaine de totalité } \overline{\mathrm{B}}'_{j,i}\,; & (i \text{ de o à } p), & \text{entre } \overline{\beta}_j \text{ et } \overline{\beta}_{j+1}. \end{array}$$

tels que les nouvelles suites contiennent les termes des anciennes :

$$\overline{\alpha}'_{i,0} = \overline{\alpha}'_{i-1,q} = \overline{\alpha}_i; \qquad \overline{\beta}'_{j,0} = \overline{\beta}'_{j-1,p} = \overline{\beta}_j\,;$$

soient encore des suites de composition normales et qu'en outre les quotients des congruences successives, convenablement appariés,

$$\overline{\alpha}'_{i,j+1} \,|\, \overline{\alpha}'_{i,j} \qquad \text{avec} \qquad \overline{\beta}'_{j,i+1} \,|\, \overline{\beta}'_{j,i},$$

soient correspondants (n° 12), ce qui entraîne **l'équipotence des ensembles quotients associés.**

De cet énoncé résulte le théorème de Jordan-Holder pour les suites maximales, où tout terme intercalaire ne peut qu'être égal à un terme déjà existant (*R. S.*, 19, 34, 42).

Si deux suites de composition normales maximales ont les mêmes termes extrêmes, elles ont même longueur (même nombre d'intervalles) **et les quotients**, de leurs termes successifs, **sont deux à deux correspondants.**

21. *Construction des intercalaires.* — Je détermine encore les intercalaires par les formules de H. Zassenhauss, qui peuvent se mettre sous deux formes, par application de la loi de distributivité restreinte

$$\bar{\alpha}'_{i,j} = \bar{\alpha}_i \times [\bar{\alpha}_{i+1}, \bar{\beta}_j] = [\bar{\alpha}_{i+1}, \bar{\alpha}_i \times \bar{\beta}_j], \qquad \text{dans} \quad e.(\bar{\alpha}'_{i,j+1}) = \bar{A}'_{i,j+1} \subset A_{i+1},$$
$$\bar{\beta}'_{j,i} = \bar{\beta}_j \times [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_i] = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\beta}_j \times \bar{\alpha}_i], \qquad \text{dans} \quad e.(\bar{\beta}'_{j,i+1}) = \bar{B}'_{j,i+1} \subset B_{j+1}.$$

J'établis les propriétés de ces intercalaires, en raisonnant sur la dcuxième suite, ce qui suffit, en raison de la symétrie des notations. Les conjonctions de congruences :

$$\mu_{j+1,i} = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_i]; \qquad \mu_{j+1,i+1} = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_{i+1}];$$

sont des congruences dans l'intersection $[\bar{B}_{j+1}, \bar{A}_{i+1}]$, du domaine de totalité $\bar{B}_{j+1}$, de $\bar{\beta}_{j+1}$ avec le domaine $\bar{A}_{i+1}$, clos pour $\bar{\alpha}_i$ et total pour $\bar{\alpha}_{i+1}$; elles y sont d'ailleurs égales respectivement à $\bar{\alpha}_i$ et à $\bar{\alpha}_{i+1}$. Elles appartiennent à $\mathcal{F}$ (condition 3) et forment un quotient normal (n° **17**).

Mais $\bar{\beta}_j$ est une congruence invariante relativement à $\bar{\beta}_{j+1}$, dans $\bar{B}_{j+1}$, donc permutable avec les antécédentes $\bar{\mu}_{j+1,i}$ et $\bar{\mu}_{j+1,i+1}$, dont le domaine clos $[\bar{B}_{j+1}, \bar{A}_{i+1}]$ est contenu dans $\bar{B}_{j+1}$. Les produits (commutatifs) :

$$\bar{\beta}'_{j,i} = \bar{\mu}_{j+1,i} \times \bar{\beta}_j; \qquad \bar{\beta}'_{j,i+1} = \bar{\mu}_{j+1,i+1} \times \bar{\beta}_j,$$

sont (n° **9**) des congruences dans le domaine clos :

$$[\bar{B}_{j+1}, \bar{A}_{i+1}].(\bar{\beta}_j) = e.([\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_{i+1}] \times \bar{\beta}_j) = e.(\bar{\beta}'_{j,i+1}) = \bar{B}'_{j,i+1} \subset \bar{B}_{j+1};$$

elles appartiennent à $\mathcal{F}$ (condition 4) et y forment un quotient normal (n° **18**). La suite des intercalaires, dans tout intervalle $\bar{\beta}'_{j,0}$, $\bar{\beta}'_{j,p}$ est donc normale.

Je vérifie que les termes extrêmes dans chacun de ces intervalles sont bien égaux aux termes de l'ancienne suite.

La condition $\bar{\alpha}_0 = \bar{\beta}_0$, dans $e.(\bar{\alpha}_0) = e.(\bar{\beta}_0) = \bar{A}_0 = \bar{B}_0$ entraîne

$$\bar{\beta}'_{j,0} = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_0] \times \bar{\beta}_j = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\beta}_0] \times \bar{\beta}_j = \bar{\beta}_0 \times \bar{\beta}_j = \bar{\beta}_j,$$

dans

$$[\bar{B}_{j+1}, \bar{A}_0].(\bar{\beta}_j) = [\bar{B}_{j+1}, \bar{B}_0].(\bar{\beta}_j) = \bar{B}_0.(\bar{\beta}_j) = e.(\bar{\beta}_j \times \bar{\beta}_0) = e.(\bar{\beta}_j) = \bar{B}_j.$$

En dehors de cette égalité (qui a lieu dans $\bar{B}_j$), $\bar{\beta}'_{j,0}$ est congruence dans $\bar{B}'_{j,1} = e.(\bar{\beta}'_{j,1})$.

La condition $\bar{\alpha}_p = \bar{\beta}_q$, dans $e.(\bar{\alpha}_p) = e.(\bar{\beta}_q) = \bar{A}_p = \bar{B}_q$ entraine :

$$\bar{\beta}'_{j,p} = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\alpha}_p] \times \bar{\beta}_j = [\bar{\beta}_{j+1}, \bar{\beta}_q] \times \bar{\beta}_j = \bar{\beta}_{j+1} \times \bar{\beta}_j = \bar{\beta}_{j+1};$$

dans

$$[\bar{B}_{j+1}, \bar{A}_p].(\bar{\beta}_j) = [\bar{B}_{j+1}, \bar{B}_q].(\bar{\beta}_j) = \bar{B}_{j+1}.(\bar{\beta}_j) = e.(\bar{\beta}_{j+1} \times \bar{\beta}_j) = e.(\bar{\beta}_{j+1}) = \bar{B}_{j+1};$$

cette fois c'est la congruence $\bar{\beta}'_{j+1,0}$ égale à $\bar{\beta}'_{j,p}$ dans $\bar{B}_{j+1}$, qui est congruence dans $\bar{B}'_{j+1,1}$.

Il reste à vérifier la correspondance des quotients appariés, dans l'intersection de leurs domaines clos $[\overline{A}'_{i,j+1}, \overline{B}'_{j,i+1}]$, que je vais remplacer par le domaine $[\overline{A}_{i+1}, \overline{B}_{j+1}]$, qui la contient. Je calcule à cet effet les premiers membres des égalités, en utilisant la forme convenable des intercalaires :

$$[\overline{\alpha}'_{i,j+1}, \overline{\beta}'_{j,i}] = [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\alpha}_i \times \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\beta}_j \times \overline{\alpha}_i] = [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}, \overline{\alpha}_i \times \overline{\beta}_j],$$

$$\overline{\alpha}'_{i,j+1} \times \overline{\beta}'_{j,i} = \overline{\alpha}_i \times [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}] \times \overline{\beta}_j \times [\overline{\beta}_{j+1}, \overline{\alpha}_i] = \overline{\alpha}_{i+1} \times \overline{\beta}_{j+1} \times [\overline{\alpha}_{i+1}, \overline{\beta}_{j+1}].$$

La symétrie en i, j des résultats montre que j'obtiendrais les mêmes en calculant les deuxièmes membres des égalités. (Dans l'expression du produit j'ai utilisé la commutativité de $\overline{\beta}_j$ avec une antécédente de $\overline{\beta}_{j+1}$; dans les deux cas j'ai utilisé la loi d'absorption, pour supprimer une conséquente dans la conjonction et une antécédente dans le produit.

III. — Application aux hypergroupes.

22. *Opération multiforme.* — Pour construire des autocorrespondances et des congruences dans un ensemble E, j'avais utilisé une opération *interne*, dans E, définissant ainsi un groupe (*R. S.*, 46). Cette construction peut être généralisée en utilisant dans E une opération multiforme, dont le résultat est un complexe — ou partie non vide — de E. Cette conception [1] étant relativement récente, le vocabulaire et les notations en sont encore assez diverses. Je précise d'abord sommairement ceux que j'adopte ici, en insistant sur leurs relations avec les autocorrespondances et les congruences.

Dans l'ensemble E, d'éléments $a, b, \ldots, x, y, \ldots$, appelés *scalaires*, je considère une *opération* — ou loi de composition — externe, qui, à tout couple ordonné de scalaires, (a puis b), fait correspondre un *complexe* que je note $(a.b)$ [élément non vide de l'ensemble $\Sigma(E)$ des parties de E]. Il en résulte la composition de deux complexes A, B qui est cette fois une *opération interne* dans $\Sigma(E)$. Le résultat, que je note A.B, et que j'appelle *produit*, est le complexe constitué par la réunion des résultats des opérations de tout scalaire de A avec tout scalaire de B, (compte tenu de l'ordre) :

$$(x \in A.B) \rightleftharpoons \big(\text{Ex. } a_i \in A \quad \text{et} \quad b_j \in B \quad \text{et} \quad x \in (a_i.b_j)\big).$$

Cette composition comprend comme cas particuliers : la composition d'un scalaire avec un complexe et de deux scalaires entre eux [il suffit de remplacer un scalaire c par le complexe (c) qui l'a pour seul élément] :

$$c.A = (c).A; \qquad A.c = A.(c); \qquad (a.b) = (a).(b).$$

---

[1] On sait qu'elle est due à un jeune mathématicien de haute valeur, F. Marty (1934), disparu en 1940 dans une mission aérienne. Elle a fait très rapidement l'objet de nombreux travaux : Drescher et Ore (1938), Griffith; Wall (1937-38), Krasner (1937-40-47); Kuntzmann (1937-40-46), etc. J'ai surtout utilisé le vocabulaire du mémoire de Krasner (*Duke Math. Journ.*, 1940) auquel je renvoie pour les précisions bibliographiques.

Cette opération entre complexes est supposée *associative*; il peut y avoir intérêt à supposer en outre l'existence dans E, d'un scalaire e_0 *neutre* (des deux côtés) :

$$X = X.e_0 = e_0.X; \qquad \text{(tout complexe X de E)}.$$

Il suffit que ces deux propriétés soient vraies pour les complexes réduits à un seul élément scalaire :

$$(x.y).z = x.(y.z); \qquad (x) = (x.e_0) = (e_0.x); \qquad (x, y, z \in \mathrm{E});$$

elles le sont alors pour tous les complexes de E.

23. *Autocorrespondances associées aux complexes.* — Par analogie avec ce qui a été fait pour les groupes (*R. S.*, 46), à un complexe A, de E, *j'associe deux autocorrespondances corrélatives :* α à droite et α' à gauche définies par les conditions d'appartenances (au lieu d'égalités) :

$$x.(\alpha).y \rightleftharpoons y \in x.\mathrm{A}; \qquad x.(\alpha').y \rightleftharpoons y \in \mathrm{A}.x; \qquad (x, y \in \mathrm{E}).$$

Les définitions et les propriétés des deux autocorrespondances (à droite et à gauche) sont manifestement *corrélatives*; je les exposerai seulement pour les premières α. Éventuellement, je préciserai lorsqu'il y aura lieu de les considérer simultanément. Il est à remarquer que la construction des sujets, à partir d'une image n'est plus cette fois de même nature (comme cela avait lieu pour les groupes) que la construction des images, à partir d'un sujet.

L'association des autocorrespondances α et α' au complexe A est seulement univoque : α et α' sont déterminées par A, mais il peut se faire que des complexes inégaux définissent un même couple d'autocorrespondances. Il y a cependant biunivocité, s'il existe un scalaire neutre e_0, car :

$$\big(e_0.(\alpha).x \rightleftharpoons e_0.(\beta).x\big) \rightleftharpoons (e_0.\mathrm{A} = e_0.\mathrm{B}) \rightleftharpoons (\mathrm{A} = \mathrm{B}).$$

L'inclusion des complexes entraîne l'implication des autocorrespondances associées (d'un même côté) :

$$(\mathrm{A}_0 \subset \mathrm{A}_1) \rightarrow (x.\mathrm{A}_0 \subset x.\mathrm{A}_1) \rightarrow \big(x.(\alpha_0).y \rightarrow x.(\alpha_1).y\big);$$

il n'y a pas nécessairement réciprocité.

Au produit de deux complexes est associé le produit des autocorrespondances associées, et réciproquement, car, en raison de l'associativité :

$$\begin{aligned} y \in x.(\mathrm{A}.\mathrm{B}) &\rightleftharpoons (\text{Ex. } u:\ u \in x.\mathrm{A} \text{ et } y \in u.\mathrm{B}) \\ &\rightleftharpoons \big(\text{Ex. } u:\ x.(\alpha).u \text{ et } u.(\beta).y\big) \rightleftharpoons x.(\alpha \times \beta).y. \end{aligned}$$

L'ordre est renversé pour les autocorrespondances à gauche (tenant compte des conventions d'écriture) : à $\mathrm{A} \times \mathrm{B}$ est associée $\beta' \times \alpha'$.

24. *Hypergroupes.* — Pour qu'un ensemble E soit *un domaine pour les autocorrespondances*, γ et γ', *corrélatives associées* à tout *complexe* C (de E), *il faut et il suffit que* E *soit neutre dans la composition* (des deux côtés) *avec chacun de ses éléments :*

$$(1) \qquad (c \in \mathrm{E}) \;\rightarrow\; (\mathrm{E}.c = c.\mathrm{E} = \mathrm{E});$$

il est alors naturellement domaine clos (pour toutes γ, γ').

Cette condition entraîne naturellement une même neutralité pour la composition de E avec tout complexe C :

$$(1\ bis) \qquad (\mathrm{C} \subset \mathrm{E}) \;\rightarrow\; (\mathrm{E}.\mathrm{C} = \mathrm{C}.\mathrm{E} = \mathrm{E}).$$

D'après la convention de la loi de composition dans E, les ensembles $x.\mathrm{C}$ et $\mathrm{C}.x$ ne sont pas vides et sont nécessairement contenus dans E, ce qui est équivalent aux inclusions :

$$\mathrm{E}.\mathrm{C} \subset \mathrm{E}; \qquad \mathrm{C}.\mathrm{E} \subset \mathrm{E}.$$

Tout élément x (de E) a nécessairement des images dans les autocorrespondances associées (des deux côtés) à tout complexe C.

Inversement pour qu'un élément y (de E) ait des sujets dans les autocorrespondances γ et γ' associées au complexe C, il faut et il suffit que :

$$(y \in \mathrm{E}) \;\rightarrow\; (\mathrm{Ex}.\ x,\ x' \in \mathrm{E},\ y \in x.\mathrm{C} \quad \text{et} \quad y \in \mathrm{C}.x');$$

ce qui est équivalent aux inclusions :

$$\mathrm{E} \subset \mathrm{E}.\mathrm{C}; \qquad \mathrm{E} \subset \mathrm{C}.\mathrm{E};$$

qui jointes aux précédentes donnent les égalités de l'énoncé.

Un ensemble E, où est définie *une opération multiforme associative et qui vérifie la condition* (1) [et par suite (1 *bis*)] *est* appelé par la plupart des auteurs *un hypergroupe* (de préférence au terme multigroupe adopté d'abord par F. Marty); je le désigne en principe par la lettre H.

Ce nom peut être justifié en remarquant que les conditions de définition expriment que d'une part les résultats de la composition (associative) d'éléments de H sont dans H; d'autre part les *opérations inverses* (de la composition) *sont possibles* dans H. En ce sens un groupe est un cas particulier d'hypergroupe.

Les autocorrespondances ω, ω' associées à H lui-même (définies par la disjonction de toutes les autocorrespondances associées aux éléments de H) sont *congruences totales* dans H (n° 5).

En effet deux éléments quelconques x, y de H vérifient les conditions

$$y \in x.\mathrm{H}, \qquad x \in y.\mathrm{H};$$

chacun d'eux est image et sujet de l'autre, mode ω (et par corrélation mode ω').

25. *Sous-hypergroupes.* — *Pour qu'un complexe* A, *d'un hypergroupe* H, *soit lui-même un hypergroupe, pour la loi de composition* de H, c'est-à-dire qu'il contienne les résultats de l'opération sur tout couple de ses éléments et que les opérations inverses y soient possibles, *il faut et il suffit qu'il reste neutre* dans la composition avec chacun de ses éléments

$$(1') \qquad (a \in A) \rightarrow (A.a = a.A = A).$$

Suivant le vocabulaire des groupes, un tel complexe peut être appelé, *sous-hypergroupe* (ou partie *stable* suivant le vocabulaire de R. Bourbaki).

Un *sous-hypergroupe* A (d'un hypergroupe H) est un *domaine complet* pour les autocorrespondances γ et γ' associées à tout complexe C.

Tout élément x de A a une image, mode γ (ou γ'), contenue dans A; et toute image est même contenue dans A

$$\big(x \in A \quad \text{et} \quad x.(\gamma).x'\big) \rightarrow (\text{Ex. } c \in A \quad \text{et} \quad x' \in x.c \subset A.c = A).$$

En outre x est image d'au moins un élément x'' de A

$$(A = A.C \quad \text{et} \quad x \in A) \rightarrow (\text{Ex. } x'' \in A \quad \text{et} \quad x \in x''.C) \rightarrow x''.(\gamma).x.$$

Mais A n'est que partiellement clos pour γ (ou γ') : les images d'un élément x de A sont toutes dans A, mais il peut se faire qu'un élément x de A, qui a toujours au moins un sujet (mode γ), dans A, en ait d'autres (dans H), extérieures à A. En particulier les autocorrespondances associées à A, peuvent ne pas l'admettre pour domaine de totalité. Pour ces raisons, il est intéressant de considérer des sous-hypergroupes, plus spéciaux, obtenus en complétant (1') par une condition restrictive.

26. *Sous-hypergroupes clos.* — Pour qu'un complexe A, d'un hypergroupe H, soit *domaine complet et clos* (dans H), *des autocorrespondances*, *associées à tous ses complexes* (et notamment à tous ses éléments a), *il faut et il suffit qu'il soit sous-hypergroupe et vérifie*, en outre, *la condition*

$$(2) \qquad x \in H \begin{cases} \text{et} \quad [x.A,\ A] \text{ non vide} \rightarrow x \in A, \\ \text{et} \quad [A.x,\ A] \text{ non vide} \rightarrow x \in A. \end{cases}$$

Cette condition peut être remplacée par sa contraposée : *la composition de* A *avec un élément*, de H, *extérieur à* A, *donne un ensemble sans élément commun avec* A. Si cette condition est vérifiée dans H, elle l'est, *a fortiori*, dans tout sous-ensemble de H.

J'exprime que A est domaine complet et clos (dans H) pour l'autocorrespondance associée (à droite) à l'élément a (de A) (nº **2**)

$$(x \in A) \rightarrow (\text{Ex. } x', x'' \in A \quad \text{et} \quad x' \in x.a \quad \text{et} \quad x \in x''.a),$$
$$(x, y \in H \quad \text{et} \quad y \in x.a) \rightarrow (x \in A \rightleftarrows y \in A).$$

Tenant compte de ce que la composition de deux éléments de H est un complexe (non vide), il est aisé de montrer que ces conditions sont équivalentes à

$$(a \in \mathrm{A} \;\rightarrow\; \mathrm{A}.a) \quad \text{et} \quad \big((x \in \mathrm{H} \quad \text{et} \quad [x, \mathrm{A}, \mathrm{A}] \text{ non vide}) \;\rightarrow\; x \in \mathrm{A}\big).$$

En complétant par le raisonnement corrélatif pour l'autocorrespondance à gauche, j'obtiens bien l'équivalence énoncée. (Il est à remarquer que la neutralité dans la composition à droite avec a (dans (1')) est associée à la composition à gauche avec x (dans (2).)

Un sous-hypergroupe vérifiant la condition (2) *est appelé sous-hypergroupe clos*, je le représente par une lettre surlignée $\overline{\mathrm{A}}$ et je le désigne par l'abréviation *s. h. c.* Éventuellement tout *s. h. c.* contient le scalaire neutre e_0 (s'il existe), puisque $e_0 . \mathrm{A} = \mathrm{A} . e_0 = \mathrm{A}$ a tous ses éléments communs avec A.

La notion de *s. h. c.* peut encore être justifiée par la propriété caractéristique suivante :

la condition nécessaire et suffisante pour qu'un complexe A, d'un hypergroupe H, *soit domaine de totalité* (pour un de ses éléments e) *des deux autocorrespondances associées* α et α', *est qu'il soit sous-hypergroupe clos.*

Si A est domaine de totalité pour α et α', il est clos pour toute antécédente, et, notamment, pour les autocorrespondances associées à un de ses éléments, il est, en même temps, complet, puisque H l'est. Réciproquement, si $\overline{\mathrm{A}}$ est domaine clos et complet pour α et α', c'est l'ensemble des sujets, aussi bien que des images, d'un (quelconque) de ses éléments e, car pour α par exemple

$$e.(\alpha).x' \;\rightleftharpoons\; x' \in e\mathrm{A} = \mathrm{A};$$
$$x''.(\alpha).e \;\rightleftharpoons\; (e \in x''.\mathrm{A} \quad \text{et} \quad e \in \mathrm{A}) \;\rightarrow\; x'' \in \mathrm{A} = x''.\mathrm{A}.$$

Il en résulte qu'il n'y a qu'un complexe auquel sont associés α et α'; *l'association s. h. c. et congruences totales corrélatives est biunivoque.*

Pour qu'*une autocorrespondance* γ, associée à un complexe C, *implique une autocorrespondance* α, *associée à un s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}$ (du même côté), *il faut et il suffit que* C *soit inclus dans* $\overline{\mathrm{A}}$

$$(\gamma \;\rightarrow\; \alpha) \;\rightleftharpoons\; (\mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{A}}).$$

La condition suffisante (implication droite gauche) a déjà été établie (n° 25) pour un complexe A quelconque. Je démontre la nécessaire, pour des autocorrespondances associées à droite,

$$\big(x.(\gamma).y \;\rightarrow\; x.(\alpha)\big) \;\rightleftharpoons\; (x.\mathrm{C} \subset x.\overline{\mathrm{A}});$$

ceci entraîne notamment :

$$(c \in \mathrm{C} \quad \text{et} \quad a \in \overline{\mathrm{A}}) \;\rightarrow\; a.c \subset a.\mathrm{C} \subset a.\overline{\mathrm{A}} = \overline{\mathrm{A}} \qquad \text{et} \quad \overline{\mathrm{A}}.e \subset \overline{\mathrm{A}}$$

d'où, puisque $\overline{\mathrm{A}}$ est clos,

$$c \in \mathrm{C} \;\rightarrow\; (\overline{\mathrm{A}}.c \subset \overline{\mathrm{A}}) \;\rightarrow\; e \in \overline{\mathrm{A}} \quad \text{et} \quad \mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{A}}.$$

La qualité de sous-hypergroupe clos peut être définie *relativement*, pour un complexe A_0 dans un *s. h. c.* $\overline{A}_1$; il est facile de vérifier que c'est une relation *transitive* :

si $\overline{A}_0$ est *s. h. c.* dans $\overline{A}_1$ et si $\overline{A}_1$ est *s. h. c.* dans H, il en résulte que $\overline{A}_1$ est *s. h. c.* dans H.

Dans le cas où H est un groupe G, tout sous-groupe de G est sous-hypergroupe clos.

27. *Congruence (non totale).* — Dans le cas d'un groupe G, l'autocorrespondance associée à un sous-groupe A (qui est *s. h. c.*) est congruence totale dans A, mais aussi congruence dans G. Il n'en est plus de même dans un hypergroupe.

L'autocorrespondance α_0, associée (d'un côté) à un *s. h. c.* $\overline{A}_0$ (de H) est congruence totale dans $\overline{A}_0$ et peut être exceptionnellement congruence dans un domaine clos $\overline{A}_1$, qui est alors nécessairement un *s. h. c.* contenant $\overline{A}_0$; elle y implique la congruence totale $\overline{\alpha}_1$. associée à $\overline{A}_1$. Il peut être utile d'exprimer la qualité de congruence dans $\overline{A}_1$ par une condition équivalente de répartition en un ensemble quotient.

Pour que, dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$, contenant le *s. h. c.* $\overline{A}_0$, *l'autocorrespondance* $\overline{\alpha}_0$, associée à droite (ou à gauche) à $\overline{A}_0$, *soit encore une congruence, il faut et il suffit que les ensembles* $a.\overline{A}_0$ (ou $\overline{A}_0.a$), d'images des éléments a de A_1, *constituent*, dans $\overline{A}_1$, *des classes disjointes*, formant un *ensemble quotient.*

Je rappelle que les conditions de disjonction sont : que la réunion des classes soit égale à $\overline{A}_1$ et que deux classes soient ou bien égales, ou bien sans élément commun (intersection vide).

La condition est manifestement *nécessaire* : une classe $a.\overline{A}_0$ est l'ensemble des images de a; si elle a un élément commun avec une autre classe $a'.\overline{A}_0$, les éléments a et a' ayant une image commune sont congrus entre eux et doivent avoir les mêmes images, ce qui exige l'égalité des classes $a.\overline{A}_0$ et $a'.\overline{A}_0$. Par ailleurs tout élément de $\overline{A}_1$ étant image d'au moins un autre élément, appartient au moins à une classe.

La condition est *suffisante. Toute classe contient l'élément qui la définit :* par application de la tautologie et de l'hypothèse de la disjonction, je déduis en effet

$$\begin{aligned} y \in x.\overline{A}_0 \ &\rightarrow\ y.\overline{A}_0 \subset x.\overline{A}_0 \ \rightarrow\ [x.\overline{A}_0,\, y.\overline{A}_0]\ \text{non vide} \\ &\rightarrow\ (x.\overline{A}_0 = y.\overline{A}_0) \ \rightarrow\ y \in y.\overline{A}_0 \end{aligned}$$

(pour tout élément y de $\overline{A}_1$).

Il en résulte la *réflexivité* et la *symétrie*

$$(x \in y.\overline{A}_0 = x.\overline{A}_0) \ \rightarrow\ x.(\alpha_0).x \qquad (\text{tout } x \text{ de } A_1);$$

$$x.(\alpha_0).y \ \rightleftharpoons\ y \in x.\overline{A}_0 = y.\overline{A}_0 \ \rightleftharpoons\ y \in y.\overline{A}_0 = x.\overline{A}_0 \ \rightleftharpoons\ y.(\alpha_0).x.$$

la *transitivité* est évidente : le produit $\alpha_0 \times \alpha_0$, associé au produit $\overline{A}_0 \times \overline{A}_0 = \overline{A}_0$, est égal à α_0

Lorsque, dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$, le *s. h. c.* $\overline{A}_0$ *définit, des deux côtés, des classes disjointes* (ce qui est équivalent à dire que $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$ sont toutes deux congruences dans $\overline{A}_0$), MM. Drescher et Ore disent que $\overline{A}_0$ est *un sous-hypergroupe réversible de* $\overline{A}_1$ (il l'est alors manifestement dans tout *s. h. c.* inclus dans $\overline{A}_1$ et contenant $\overline{A}_0$).

Dans le vocabulaire employé ci-dessus (n° 12), les congruences $\overline{\alpha}_1$, $\overline{\alpha}'_1$, associées à $\overline{A}_1$ et les congruences $\overline{\alpha}_0$, $\overline{\alpha}'_0$, associées à $\overline{A}_0$, forment des quotients (corrélatifs) de congruences $\overline{\alpha}_1|\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0|\overline{\alpha}'_0$: je dirai, par une extension évidente, que $\overline{A}_1|\overline{A}_0$ est un *quotient de s. h. c.*; cette notation peut aussi, sans ambiguïté, désigner l'*ensemble quotient* $\overline{A}_1|(\overline{\alpha}_0)$.

28. *Intersection de sous-hypergroupes clos.* — L'association (biunivoque) de deux congruences corrélatives à un *s. h. c.* (de H) permet d'appliquer immédiatement aux *s. h. c.* des propriétés établies pour les congruences (n^{os} 8 à 11).

L'intersection de deux sous-hypergroupes clos (de H), si elle n'est pas vide, *est un sous-hypergroupe clos*, auquel est associée la conjonction des congruences associées (de chaque côté) aux deux *s. h. c.*

Les congruences $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$; $\overline{\beta}$ et $\overline{\beta}'$, associées (des deux côtés) respectivement aux *s. h. c.* $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont totales dans ces domaines. Leurs conjonctions $\overline{\mu}=[\overline{\alpha}, \overline{\beta}]$; $\overline{\mu}'=[\overline{\alpha}', \overline{\beta}']$ sont congruences dans l'intersection $\overline{M}=[\overline{A}, \overline{B}]$ et l'admettent pour domaine de totalité (n° 8). L'intersection M est donc un *s. h. c.* auquel $\overline{\mu}$ et $\overline{\mu}'$ sont associées (n° 26). Il est bien entendu possible de vérifier « directement » cette propriété [1], sans passer par l'intermédiaire des congruences; il suffit de rapprocher les raisonnements.

Si les *s. h. c.* de H sont comparés par *inclusion*, *l'intersection* $\overline{M}=[\overline{A}, \overline{B}]$ *est le plus grand sous-hypergroupe clos commun de* $\overline{A}$ et $\overline{B}$: l'ensemble des *s. h. c.* contenus dans $\overline{A}$ et dans $\overline{B}$ est égal à l'ensemble des *s. h. c.* contenus dans $\overline{M}$.

Cet énoncé est équivalent aux propriétés corrélatives $\overline{\mu}$ et $\overline{\mu}'$ d'être les plus fortes antécédentes communes de $\overline{\alpha}$ dans $\overline{A}$, $\overline{\beta}$ dans $\overline{B}$, et de $\overline{\alpha}'$, $\overline{\beta}'$. Comme pour les conjonctions de congruences, ces propriétés s'étendent à l'intersection $\overline{M}$ d'une famille (finie ou infinie) de *s. h. c.* $\overline{A}_i$; c'est encore un *s. h. c.* qui est le plus grand *s. h. c.* commun des $\overline{A}_i$.

Si $\overline{A}_1|\overline{A}_0$ *est un quotient de s. h. c.* ($\overline{A}_0$ *s. h. c.* réversible dans le *s. h. c.* $\overline{A}_1$), *il en est de même de leurs intersections* $[\overline{A}_1, \overline{B}]|[\overline{A}_0, \overline{B}]$ *avec un même s. h. c.* $\overline{B}$: $[\overline{A}_0, \overline{B}]$ répartit $[\overline{A}_1, \overline{B}]$ en classes disjointes.

---

(1) C'est naturellement un tel raisonnement direct qu'ont donné MM. Drescher et Ore, M. Krasner a démontré une propriété, en apparence plus générale : l'intersection d'un *s. h. c.* $\overline{A}$ (dans H), avec un sous-hypergroupe B (non nécessairement clos) est un *s. h. c. de* B.

Cette propriété de répartition est évidente directement, elle résulte aussi manifestement des propriétés des congruences : les autocorrespondances $\overline{\alpha}_0$, $\overline{\alpha}'_0$ associées à $\overline{A}_0$ sont congruences (non totales) dans $\overline{A}_1$; les conjonctions $\overline{\mu}=[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}]$ et $\overline{\mu}'=[\overline{\alpha}'_0, \overline{\beta}']$ sont congruences dans $[\overline{A}_1, \overline{B}]$, où elles sont égales à α_0 et $\overline{\alpha}'_0$ (nº **8**). C'est une partie de l'énoncé du nº **17** sur le quotient de conjonctions.

Il est à remarquer que cette propriété ne s'étend plus comme celle des congruences. Si $\overline{A}_0$ et $\overline{B}_0$ sont *s. h. c.* réversibles respectivement dans $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_1$, il n'en est plus nécessairement de même de l'intersection $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$ dans $[\overline{A}_1, \overline{B}_1]$. La conjonction $[\alpha_0, \beta_0]$ est bien congruence dans $[\overline{A}_1, \overline{B}_1]$, mais elle n'est plus nécessairement égale à l'autocorrespondance associée à $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$, dont elle est seulement une conséquente

$$(y\in x.[\overline{A}_0, \overline{B}_0]) \rightarrow (y\in x.\overline{A}_0 \quad \text{et} \quad y\in x.\overline{B}_0) \rightleftharpoons x.[\alpha_0, \beta_0].y.$$

29. *Produit de sous-hypergroupes clos (permutables). — Si*, dans un hypergroupe $\overline{B}_1$ (qui peut être *s. h. c.* de H), *deux sous-hypergroupes clos* $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$, à intersection I non vide, *sont permutables et si* $\overline{B}_0$ *est réversible dans* $\overline{B}_1$, *la valeur commune des produits*

$$D_1 = \overline{A}_1.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.\overline{A}_1$$

est un sous-hypergroupe clos, dans D_1, auquel sont associés (de chaque côté) les produits (commutatifs) $\overline{\alpha}_1\times\overline{\beta}_0=\overline{\beta}_0\times\overline{\alpha}_1$ et $\overline{\alpha}'_1\times\overline{\beta}'_0=\overline{\beta}'_0\times\overline{\alpha}'_1$ des congruences associées, de chaque côté, à $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$.

L'autocorrespondance $\overline{\beta}_0$, associée (à droite) à $\overline{B}_0$, est congruence dans $\overline{B}_1$ et elle y est permutable avec $\overline{\alpha}_1$, associée (à droite) à $\overline{A}_1$ (donc congruence totale dans le domaine clos $\overline{A}_1$). La valeur commune des produits

$$\overline{\delta}_1 = \overline{\alpha}_1\times\overline{\beta}_0 = \overline{\beta}_0\times\overline{\alpha}_1$$

est congruence (totale pour un élément e, de I) dans le domaine

$$\overline{A}_1.(\overline{\beta}_0) = \overline{A}_1.\overline{B}_0 = \overline{B}_0.\overline{A}_1 = \overline{D}_1$$

(c'est une conséquence des propriétés des nºˢ **9** et **11**, en tenant compte de l'existence de l'intersection I de $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$), Il en est de même du produit $\overline{\delta}'_1=\overline{\alpha}'_1\times\overline{\beta}'_0=\overline{\beta}'_0\times\overline{\alpha}'_1$, des congruences (associées à gauche) et $\overline{D}_1$ est bien un *s. h. c.* Il est, bien entendu, toujours possible de donner de ce résultat une démonstration « directe ».

Si les *s. h. c.* sont comparés, dans $\overline{B}_1$, par *inclusion*, $\overline{D}_1$ est *le plus petit sur hypergroupe commun de* $\overline{A}_1$ *et* $\overline{B}_0$: l'ensemble des *s. h. c.* qui contiennent A_1 et $\overline{B}_0$ est égal à l'ensemble des *s. h. c.* qui contiennent $\overline{D}_0$.

C'est une conséquence de la propriété de $\overline{\delta}_1$ et $\overline{\delta}'_1$ d'être les plus faibles conséquences communes de $\overline{\alpha}_1$ dans $\overline{A}_1$, $\overline{\beta}_0$ dans $\overline{D}_1$ et de $\overline{\alpha}'_1$, $\overline{\beta}'_0$. C'est aussi évident directement : tout *s. h. c.* qui contient $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_0$ contient nécessairement les produits de leurs éléments, donc $\overline{D}_1$.

S'il existe un *s. h. c.* $\overline{A}_0$, réversible dans $\overline{A}_1$, et également permutable avec $\overline{B}_0$, la valeur commune des produits

$$\overline{D}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_0$$

est encore un *s. h. c.*, inclus dans $\overline{D}_1$ où il est réversible.

En effet les autocorrespondances $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées (de chaque côté) à $\overline{A}_0$, sont congruences dans $\overline{A}_1$; elles y sont permutables avec $\overline{\beta}_0$, de sorte que les produits

$$\overline{\delta}_0 = \overline{\alpha}_0 \times \overline{\beta}_0 = \overline{\beta}_0 \times \overline{\alpha}_0, \qquad \overline{\delta}'_0 = \overline{\alpha}'_0 \times \overline{\beta}'_0 = \overline{\beta}'_0 \times \overline{\alpha}'_0,$$

associés à $\overline{D}_0$ sont congruences dans $\overline{D}_1$, ce qui est équivalent à la réversibilité de $\overline{D}_0$ dans $\overline{D}_1$.

30. *Quotients correspondants.* — La notion de correspondance (n° 12) s'étend à des quotients de *s. h. c.* :

Deux quotients de s. h. c. $\overline{A}_1 | \overline{A}_0$ et $\overline{B}_1 | \overline{B}_0$ ($\overline{A}_0$ et $\overline{B}_0$ réversibles dans $\overline{A}_1$ et $\overline{B}_1$) *sont correspondants si*

$$[\overline{A}_1, \overline{B}_0] = [\overline{A}_0, \overline{B}_1]$$

et

$$\overline{A}_1 . \overline{B}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_1, \qquad \overline{B}_0 . \overline{A}_1 = \overline{B}_1 . \overline{A}_0.$$

Dans la première égalité, la valeur commune des deux membres est un *s. h. c.*, égal d'ailleurs à $[\overline{A}_0, \overline{B}_0]$. Dans les deux autres égalités, les termes ne sont, *a priori*, que des complexes. Cette correspondance est équivalente à celle des quotients de congruences corrélatives associées. D'après la démonstration du n° 13, les ensembles quotients associés

$$\overline{A}_1 | (\overline{\alpha}_0) \quad \text{et} \quad \overline{B}_1 | (\overline{\beta}_0) \quad \text{ou} \quad \overline{A}_1 | \overline{A}_1 \quad \text{et} \quad \overline{B}_1 | \overline{B}_0$$

sont équipotents.

31. *Demi-treillis des complexes.* — Je désigne par *$\mathcal{E}$ l'ensemble des complexes* A (parties non vides) *de l'hypergroupe* H et, par $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_{\alpha'}$ l'ensemble des autocorrespondances corrélatives α et α' associées (à droite et à gauche) univoquement aux complexes A. Les familles $\mathcal{E}_\alpha$, $\mathcal{E}_{\alpha'}$ sont des demi-treillis, au sens du n° 14, ainsi que la famille $\mathcal{E}$ (pour laquelle, il faut toutefois remplacer disjonction par réunion); elles vérifient en effet simultanément des conditions d'appartenance 1° et 2° :

1. *$\mathcal{E}$ contient la réunion* A_I des complexes A_i d'une famille $\mathcal{A}$ quelconque de $\mathcal{E}$; les familles $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_{\alpha'}$ contiennent simultanément les disjonctions α_I et α'_I, des autocorrespondances α_i et α'_i, associées respectivement aux complexes A_i de la famille $\mathcal{A}$ et qui constituent les parties correspondantes $\mathcal{A}_\alpha$ et $\mathcal{A}_{\alpha'}$ (de $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_{\alpha'}$). Ces disjonctions sont les plus faibles conséquentes communes de ces parties.

2. $\mathcal{E}$ *contient le produit* $A_1 . A_2$ de tout couple, et, par suite, de tout système fini de complexes (de H). Simultanément $\mathcal{E}_\alpha$ et $\mathcal{E}_{\alpha'}$ contiennent les produits $\alpha_1 \times \alpha_2$ et $\alpha'_1 \times \alpha'_2$ des autocorrespondances associées (n° 23). Ces produits, comme leurs facteurs, admettent l'hypergroupe H comme domaine clos et complet (n° 24).

Si l'intersection de deux complexes [A, B] n'cst pas vide, il lui est associé les conjonctions (corrélatives) des autocorrespondances associées (des deux côtés $[\alpha, \beta]$, $[\alpha', \beta']$. Les demi-treillis $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_\alpha$ $\mathcal{E}_{\alpha'}$ contiennent en plus de la plus faible conséquente commune (de toute famille), la plus forte antécédente commune de deux de leurs éléments, si toutefois elle existe.

32. *Famille de sous-hypergroupes clos permis.* — Dans $\mathcal{E}$, je considère une famille $\mathcal{F}$ de *s. h. c.*, que j'appelle *permis*, contenant tous, au moins un même élément e (qui sera notamment le scalaire neutre e_0, s'il existe, n° 26) et qui vérifie les deux conditions d'appartenance (analogues à celles du n° 15) :

3. *La famille* $\mathcal{F}$ *contient l'intersection* $[\overline{A}, \overline{B}]$ (non vide d'après l'hypothèse) de deux quelconques de ses éléments;

4. $\mathcal{F}$ *contient le produit de deux de ses éléments*, lorsqu'ils sont contenus dans un même sous-hypergroupe clos, qu'ils y sont *permutables*, et que l'un d'eux y est *réversible*; dans ce cas ce produit est *s. h. c.* (n° 29).

Une telle famille $\mathcal{F}$ est notamment constituée par l'ensemble de tous les *s. h. c.* de H.

Comme dans le cas des groupes (R. S., 49), il peut être constitué une famille $\mathcal{F}$ en ne retenant que les *s. h. c.* invariants pour un ensemble « d'endomorphismes » de H; chaque endomorphisme respectant : la qualité de *s. h. c.*, les intersections, les produits et la qualité de réversibilité.

Au lieu des conditions 3 et 4 on pourrait imposer une seule condition plus restrictive :

3' et 4'. $\mathcal{F}$ contient l'intersection M (non vide) de toute sous-famille $\overline{\mathcal{A}}$ (finie ou infinie). Cette intersection est le plus grand *s. h. c.* commun des *s. h. c.* de la famille $\overline{\mathcal{A}}$ (n° 28).

Dans ce cas $\mathcal{F}$ est un treillis : il contient en effet le plus petit surhypergroupe commun de tout couple $\overline{A}$, $\overline{B}$, de ses éléments : c'est l'intersection de tous les *s. h. c.* qui contiennent à la fois $\overline{A}$ et $\overline{B}$, et dont l'ensemble n'est pas vide, puisqu'il contient au moins H. (Les produits définis par la condition 4, appartiennent bien à $\mathcal{F}$, puisqu'ils sont des plus petits *s. h. c.* communs.)

33. *Famille des congruences associées.* — Les familles $\mathcal{F}_\alpha$ et $\mathcal{F}_{\alpha'}$ des congruences (corrélatives), associées *biunivoquement* (n° 28) aux *s. h. c.* de la famille $\mathcal{F}$ remplissent « simultanément » les conditions 3, 4 et 5 du n° 15.

3. Si $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées au *s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}_0$ (de $\mathcal{F}$), sont congruences (non totales) dans le *s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}_1$ (de $\mathcal{F}$) et si $\overline{\beta}$, $\overline{\beta}'$ sont associées au *s. h. c.* $\overline{\mathrm{B}}$ (de $\mathcal{F}$), les intersections $[\overline{\mathrm{A}}_0, \overline{\mathrm{B}}]$ et $[\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{B}}]$ sont dans $\mathcal{F}$; les *conjonctions* $[\overline{\alpha}_0, \overline{\beta}]$ *et* $[\overline{\alpha}'_0, \overline{\beta}']$, associées à $[\overline{\mathrm{A}}_0, \overline{\mathrm{B}}]$ et congruences dans $[\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{B}}]$ *appartiennent bien à* $\mathcal{F}_\alpha$ *et* $\mathcal{F}_{\alpha'}$.

4. Si $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$, associées à $\overline{\mathrm{A}}_0$ et congruences dans $\overline{\mathrm{A}}_1$ d'une part, $\overline{\beta}_0$ et $\overline{\beta}'_0$, associées à $\overline{\mathrm{B}}_0$ et congruences dans $\overline{\mathrm{B}}_1$, qui contient $\overline{\mathrm{B}}_0$ et $\overline{\mathrm{A}}_1$, d'autre part, sont permutables dans $\overline{\mathrm{B}}_1$, leur commutativité est équivalente à celle de $\overline{\mathrm{A}}_0$ et $\overline{\mathrm{B}}_0$; *leurs produits* $\overline{\delta}$ et $\overline{\delta}'$ sont associées à $\overline{\mathrm{A}}_0$, $\overline{\mathrm{B}}_0$ et sont congruences dans $\overline{\mathrm{A}}_1$, B_0 (qui est dans $\mathcal{F}$); ils *appartiennent donc à* $\mathcal{F}_\alpha$ *et* $\mathcal{F}_{\alpha'}$.

5. La dernière condition peut être établie par un raisonnement légèrement différent de celui des groupes (*R. S.*, 49). Je considère une congruence $\overline{\beta}_0$, dans un *s. h. c.* $\overline{\mathrm{B}}_1$, associée (à droite) au *s, h. c.* $\overline{\mathrm{B}}_0$ (inclus dans $\overline{\mathrm{B}}_1$) et une autocorrespondance α, associée à un complexe A de $\overline{\mathrm{B}}_1$. Tout domaine clos D de $\alpha \times \overline{\mathrm{B}}_0$ contient $\mathrm{A}.\overline{\mathrm{B}}_0$, qui est donc inclus dans $\overline{\mathrm{B}}_1$. Or $\overline{\mathrm{B}}_1$ et, par suite $\mathrm{A}.\overline{\mathrm{B}}_0$ est réparti (par $\overline{\beta}_0$) en classes disjointes de la forme $d_i.\overline{\mathrm{B}}_0$ (où d_i est un élément de $\mathrm{A}.\overline{\mathrm{B}}_0$). Mais une classe de $\mathrm{A}.\mathrm{B}_0$ contient au moins un élément d'un complexe $a_i.\mathrm{B}_0$; c'est aussi une classe, qui, en raison de la disjonction, est alors égale à la précédente. Il en résulte qu'à tout élément d_i de $\mathrm{A}.\overline{\mathrm{B}}_0$ correspond au moins un élément a_i de A, tel que

$$d_i.\overline{\mathrm{B}}_0 = a_i.\overline{\mathrm{B}}_0, \qquad \text{et} \qquad \delta_i \times \overline{\beta}_0 = \alpha_i \times \overline{\beta}_0;$$

δ_i et α_i étant les autocorrespondances associées aux éléments d_i et a_i. L'égalité s'étend à une antécédente $\overline{\delta}_i$, quelconque de $\mathrm{A}.\overline{\mathrm{B}}_0$ (associée à un complexe d'éléments d_i) et à l'autocorrespondance α_i associée aux éléments a_i, correspondant aux d_i, et formant un complexe de A, de sorte que α_i est antécédente de α.

34. *Invariance.* — Je dis qu'*un s. h. c.* $\overline{\mathrm{B}}_0$, réversible dans $\overline{\mathrm{B}}_1$, *est invariant*, ou distingué, *relativement à un s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}$, lorsque les congruences $\overline{\beta}$ et $\overline{\beta}'$, associées à $\overline{\mathrm{B}}_0$, sont respectivement invariantes relativement aux congruences $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$, associées à $\overline{\mathrm{A}}$

$$(1) \qquad (\gamma \rightarrow \overline{\alpha}) \;\rightarrow\; (\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \text{ et } \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma').$$

Cette condition est équivalente à la *commutativité de* $\overline{\mathrm{B}}_0$ *avec tout élément de* $\overline{\mathrm{A}}$, et par suite avec tout complexe de A

$$(2) \qquad c \in \overline{\mathrm{A}} \;\rightarrow\; c.\overline{\mathrm{B}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0.c \qquad \text{ou} \qquad (\mathrm{C} \subset \overline{\mathrm{A}} \;\rightarrow\; \mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C}).$$

La condition (2) entraîne (1), car $\overline{\mathrm{A}}$ étant *s. h. c.*, tout couple γ, γ' d'antécédentes corrélatives de $\overline{\alpha}$ et $\overline{\alpha}'$ est associé à un complexe C de $\overline{\mathrm{A}}$ et

$$\mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C} \quad \rightarrow \quad (\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \quad \text{et} \quad \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma').$$

Réciproquement les égalités

$$\gamma \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma \quad \text{et} \quad \gamma' \times \overline{\beta} = \overline{\beta} \times \gamma'$$

entraînent

$$x.(\mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0) = x.(\overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C}) \quad \text{et} \quad (\mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0).x = (\overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C}).x \quad (\text{tout } x \in \overline{\mathrm{B}}_1).$$

Ceci a lieu en particulier pour tout élément x de $\overline{\mathrm{B}}_0$, de sorte que

$$\overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C} \quad \text{et} \quad \mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0 = \overline{\mathrm{B}}_0.\mathrm{C}.\overline{\mathrm{B}}_0;$$

d'où résulte l'égalité (2).

En utilisant toujours le vocabulaire des congruences (n° 16), je dis qu'un *quotient de s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}_1 \mid \overline{\mathrm{A}}_0$ est *normal,* lorsque $\overline{\mathrm{A}}_0$ est invariant relativement à $\overline{\mathrm{A}}_1$; ce qui est équivalent à la normalité des quotients des congruences corrélatives associées $\overline{\alpha}_1 \mid \overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0 \mid \overline{\alpha}'_0$.

Il est équivalent de dire que *les classes de répartition de* $\overline{\mathrm{A}}_1$ *par* $\overline{\mathrm{A}}_0$, *à droite et à gauche* (ou par $\overline{\alpha}_0$ et $\overline{\alpha}'_0$) *sont les mêmes*

$$a \in \overline{\mathrm{A}}_1 \quad \rightarrow \quad a.\overline{\mathrm{A}}_0 = \overline{\mathrm{A}}_0.a$$

[ce n'est qu'une expression de la condition (2)]. L'analogie avec la condition d'invariance d'un sous-groupe est évidente.

L'ensemble quotient $\overline{\mathrm{A}}_1 \mid \overline{\mathrm{A}}_0$ est lui-même un *hypergroupe quotient,* la composition de deux classes étant définie par la composition de deux de leurs éléments quelconques, puisque, en raison de la propriété précédente

$$(a_i.\overline{\mathrm{A}}_0).(a_j.\overline{\mathrm{A}}'_0) = (a_i.a_j).\overline{\mathrm{A}}_0 \qquad (a_i.a_j \in \overline{\mathrm{A}}_1)$$

(le produit de deux classes est un complexe de classes). Cet ensemble de classes vérifie bien en outre la propriété de neutralité des hypergroupes (condition 1 du n° 24), car $a_i.\overline{\mathrm{A}}_0$ n'étant qu'un complexe particulier de $\overline{\mathrm{A}}_1$

$$(a_i.\overline{\mathrm{A}}_0).\overline{\mathrm{A}}_1 = \overline{\mathrm{A}}_1.(a_i.\overline{\mathrm{A}}_0) = \overline{\mathrm{A}}_1.$$

35. *Quotient de congruences et de produits.* — La normalité d'un quotient de deux *s. h. c.* étant équivalente à celle des quotients de congruences corrélatives, les propriétés établies pour les congruences (n^{os} 17 et 18) sont encore vraies; je me contente de les énoncer :

1. *Si un quotient de s. h. c.* $\overline{\mathrm{A}}_1 \mid \overline{\mathrm{A}}_0$ *est normal, il en est de même du quotient de leurs intersections* (supposées non vides) *avec un même s. h. c.* $\overline{\mathrm{B}}$: $[\overline{\mathrm{A}}_1, \overline{\mathrm{B}}] \mid [\overline{\mathrm{A}}_0, \overline{\mathrm{B}}]$.

2. *Si un quotient de s. h. c.* $\overline{A}_1 | \overline{A}_0$ *est normal et si* $\overline{B}_0$ *est un s. h. c., réversible dans un s. h. c.* $\overline{B}_1$ *et invariant relativement à* $\overline{A}_1$ (et par suite à $\overline{A}_0$), *les produits*

$$\overline{D}_1 = \overline{A}_1 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_1, \qquad \overline{D}_0 = \overline{A}_0 . \overline{B}_0 = \overline{B}_0 . \overline{A}_0$$

constituent un quotient de s. h. c. (n° 29) *qui est encore normal.*

36. *Théorèmes de Schreier et de Jordan-Hölder.* — J'énonce de même, dans le vocabulaire de la théorie des hypergroupes, les théorèmes démontrés ci-dessus (nos 20 et 21), pour des familles de congruences permises. Je les complète en remarquant que l'équipotence étant faite entre les ensembles quotients par une communauté de certains représentants, elle conserve l'opération de l'hypergroupe, de sorte que l'équipotence de ces ensembles est un isomorphisme des hypergroupes quotients.

Dans un hypergroupe H, où existe une famille $\mathcal{F}$ (n° 32) de sous-hypergroupes clos permis, j'appelle *suite de composition normale*, un système, ordonné et numéroté, de *s. h. c.* de $\mathcal{F}$, *dont chaque terme* $\overline{A}_i$ *est réversible et invariant dans le terme suivant* $\overline{A}_{i+1}$ (deux termes successifs forment un *quotient normal*). Les qualificatifs « *propre* » et « *maximale* » ont la même signification.

Si deux suites de composition normales ont les mêmes termes extrêmes, on peut leur intercaler des termes, de façon à former deux nouvelles suites normales (de s. h. c. de $\mathcal{F}$), dont les hypergroupes quotients sont isomorphes deux à deux.

Si deux suites de composition normales, de mêmes termes extrêmes sont maximales, elles ont même longueur, et leurs hypergrouges quotients sont isomorphes deux à deux.