ÁKOS CSÁSZÁR

Les fonctions à variation bornée d'ordre supérieur

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 275-284

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__275_0>

SUR

LES FONCTIONS A VARIATION BORNÉE D'ORDRE SUPÉRIEUR

PAR M. ÁKOS CSÁSZÁR.

Dans un Mémoire antérieur [1] j'ai donné une extension, aux dérivées approximatives d'ordre supérieur, du théorème de Denjoy-Khintchine concernant la dérivabilité approximative des fonctions à variation bornée généralisée. J'établirai dans l'article présent une généralisation analogue du théorème de Denjoy-Lusin d'après lequel toute fonction à variation bornée généralisée au sens restreint (¹) sur un ensemble E y est presque partout dérivable. En même temps je donnerai une extension d'un théorème de M. Denjoy concernant une condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction d'une variable réelle soit dérivable presque partout sur un ensemble E.

$x_0, \ldots, x_n$ étant des points différents et $f(x)$ une fonction définie en ces points, désignons par

$$Q_n(x_0, \ldots, x_n) \qquad \text{ou} \qquad Q_n(x_0, \ldots, x_n; f),$$

le produit par $n!$ du coefficient de x^n dans le polynome de degré n au plus qui coïncide avec $f(x)$ pour $x = x_0, \ldots, x_n$. On sait que les formules suivantes

(¹) La fonction $f(x)$ est à variation bornée généralisée au sens restreint [(VBG*)] sur l'ensemble E, si l'on peut poser $E = \sum_{k=1}^{\infty} E_k$ de telle sorte que, pour tout entier k, les sommes

$$\sum_{\nu=1}^{N} \omega(I_\nu)$$

restent bornées, $I_1, \ldots, I_N$ désignant des intervalles n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à E_k et $\omega(I_\nu)$ désignant l'oscillation de $f(x)$ dans l'intervalle I_ν [2].

sont valables :

$$Q_0(x_0; f) = f(x_0),$$

$$Q_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) = (n+1)\frac{Q_n(x_0, \ldots, x_n) - Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1})}{x_0 - x_{n+1}}.$$

Nous aurons aussi à nous servir des symboles suivants :

$$\begin{aligned}\Delta_n(x_0, \ldots, x_n; f) &= \frac{1}{n}\,|\,Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)|\,\delta(x_0, \ldots, x_n)\\ &= |\,Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n+1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)|\,\frac{\delta(x_0, \ldots, x_n)}{|x_0 - x_n|}\end{aligned}$$

et

$$\Omega_n(a, b; f) = \limsup_{a \leqq x_i \leqq b} \Delta_n(x_0, \ldots, x_n; f),$$

$\delta(x_0, \ldots, x_n)$ désignant le diamètre de l'ensemble $\{x_0, \ldots, x_n\}$.

Nous appellerons dérivée forte d'ordre n de la fonction $f(x)$ au point a la limite

$$f^{[n]}(a) = \lim_{x_i \to a} Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)$$

lorsqu'elle existe et est finie, tandis que la dérivée faible d'ordre n sera définie par

$$f^n(a) = \lim_{\substack{x_i \to a \\ \min x_i \leqq a \leqq \max x_i}} Q_n(x_0, \ldots, x_n; f).$$

Nous emploierons souvent les théorèmes A, B, C, D., dus, sous une forme légèrement différente, à M. E. Hopf [4] :

A. Pour l'existence de $f^{[1]}(a)$, il faut et il suffit que $f(x)$ soit continu au voisinage de a et que $\overline{f}^+(x)$ (1) soit continu en ce point même.

B. Pour l'existence de $f^{[n]}(a)$ il faut et il suffit que $\varphi(x) = f^{(n-1)}(x)$ existe au voisinage de a et que $\varphi^{[1]}(a)$ existe.

C. Pour l'existence de $f^2(a)$ il faut et il suffit que $f(x)$ soit continu au voisinage de a et que $\overline{f}^+(x)$ soit dérivable au point a. On a

$$f^2(a) = \left(\frac{d}{dx}\overline{f}^+(x)\right)_{x=a}.$$

D. Pour l'existence de $f^n(a)$ il faut et il suffit que $\varphi(x) = f^{(n-2)}(x)$ existe au voisinage de a et que $\varphi^2(a)$ existe. On a $f^n(a) = \varphi^2(a)$.

On voit que l'existence de $f^{[n]}(a)$ entraîne celle de $f^{(n)}(a)$ et que celle de $f^{(n)}(a)$ entraîne celle de $f^n(a)$; de plus on a

$$f^{[n]}(a) = f^{(n)}(a) = f^n(a).$$

---

(1) $\overline{f}^+(x)$ désigne ici le nombre dérivé supérieur droit de $f(x)$.

Enfin, par définition, $f(x)$ appartient à la classe $(\mathrm{R}_n^\star)$ sur l'ensemble E, s'il existe un M tel que, pour toute suite finie (a_ν, b_ν) d'intervalles n'empiétant pas et tels que $a_\nu \varepsilon \mathrm{E}$, $b_\nu \varepsilon \mathrm{E}$, on ait toujours

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f) < \mathrm{M}.$$

De même, $f(x)$ appartient à la classe $(\mathrm{S}_n^\star)$ sur l'ensemble E si, pour tout ε positif, l'ensemble E peut être couvert par une suite finie $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ d'intervalles tels que

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f)(b_\nu - a_\nu) < \varepsilon.$$

Enfin, $f(x)$ appartient à la classe $(\mathrm{R}_n\mathrm{G}^\star)$ resp. $(\mathrm{S}_n\mathrm{G}^\star)$ sur E, si $\mathrm{E} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathrm{E}_k$, $f(x)$ étant $(\mathrm{R}_n^\star)$ resp. $(\mathrm{S}_n^\star)$ sur chaque ensemble E_k.

On voit immédiatement que les fonctions $(\mathrm{R}_1\mathrm{G}^\star)$ sont identiques aux fonctions (VBG*).

Nous démontrerons les deux théorèmes suivants :

THÉORÈME I. — *Pour que $f^n(x)$ existe presque partout sur l'ensemble* E, *il faut et il suffit que* E *soit la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est* $\mathrm{R}_n\mathrm{G}^\star$).

THÉORÈME II. — *Pour que $f^{(n)}(x)$ existe presque partout sur* E, *il faut et il suffit que* E *soit la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est* $(\mathrm{S}_{n+1}\mathrm{G}^\star)$.

La démonstration se compose d'une série de lemmes. Nous désignerons par I le plus petit intervalle contenant E.

LEMME 1. — *$f(x)$ étant $(\mathrm{R}_n^\star)$ sur* E, *les nombres* $|\mathrm{Q}_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})|$, $(x_i \varepsilon \mathrm{I})$ *sont bornés.*

Démonstration. — On a, par hypothèse, pour tout a, $b \varepsilon \mathrm{E}$ et M suffisamment grand,

$$\Omega_n(a, b) < \mathrm{M}.$$

$\xi_0, \ldots, \xi_{n-1}$ étant n points fixes de I, on a pour $x_i \varepsilon \mathrm{I}$

$$\begin{aligned}
&|\mathrm{Q}_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - \mathrm{Q}_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})|\\
&\leq |\mathrm{Q}_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - \mathrm{Q}_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_0)|\\
&\quad + |\mathrm{Q}_{n-1}(x_1, \ldots, x_{n-1}, \xi_0) - \mathrm{Q}_{n-1}(x_2, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \xi_1)| + \ldots\\
&\quad + |\mathrm{Q}_{n-1}(x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_{n-2}) - \mathrm{Q}_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})|\\
&= \frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} |\mathrm{Q}_n(x_i, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_i)|\,|x_i - \xi_i|\\
&\leq \sum_{i=0}^{n-1} \Delta_n(x_i, \ldots, x_{n-1}, \xi_0, \ldots, \xi_i) \leq n\mathrm{M},
\end{aligned}$$

puisqu'on peut trouver deux points de E, a et b tels que l'intervalle $\langle a, b\rangle$ contienne les points x_i, ξ_i. On a donc

$$|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1})| \leqq |Q_{n-1}(\xi_0, \ldots, \xi_{n-1})| + nM \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 2. — *Si pour tout $x_i \varepsilon I$, on a*

$$|Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_n; f)| < M,$$

$f^{[n-2]}(x)$ existe sur I et y est continu.

Démonstration. — Soient x_i et y_i des points distincts de I. On a par hypothèse

$$\begin{aligned}&|Q_{n-2}(x_0, \ldots, x_{n-2}) - Q_{n-2}(y_0, \ldots, y_{n-2})| \\ &\leqq \frac{1}{n-1}\sum_{i=0}^{n-2}|Q_{n-1}(x_i, \ldots, x_{n-2}, y_0, \ldots, y_i)|\,|x_i - y_i| \leqq M\,\delta(x_0, \ldots, y_{n-2}).\end{aligned}$$

Une évaluation analogue étant valable dans le cas où l'un des points x_i vient coïncider avec l'un des y_i, l'existence de $f^{[n-2]}(x)$ est établie.

La même inégalité entraîne que

$$|f^{[n-2]}(x) - f^{[n-2]}(y)| \leqq M|x - y|$$

ce qui montre la continuité de $f^{[n-2]}(x)$.

Lemme 3. — *$f(x)$ étant (R_n^*) sur E, $f^{[n-2]}(x)$ existe sur I et est (R_2^*) sur E.*

Démonstration. — D'après les lemmes 1 et 2, $f^{[n-2]}(x)$ existe sur I. Pour montrer que $f^{[n-2]}(x)$ est (R_2^*) sur E, soit M′ tel que pour toute suite finie d'intervalles (a_ν, b_ν) n'empiétant pas et dont les extrémités sont situées sur E, on ait

$$\sum_\nu \Omega_n(a_\nu, b_\nu; f) < M'.$$

Nous devons établir l'existence d'un nombre m tel que, pour tout système d'intervalles du même type, on ait

$$\sum_\nu \Omega_2(a_\nu, b_\nu; f^{[n-2]}) \leqq m,$$

ce qui équivaut à l'inégalité

$$\sum_\nu \Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{[n-2]}) \leqq m,$$

où x^ν, y^ν, z^ν sont des points arbitraires de $\langle a_\nu, b_\nu\rangle$.

On a évidemment

$$\Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{[n-2]}) = \left| \frac{f^{[n-2]}(x^\nu) - f^{[n-2]}(y^\nu)}{x^\nu - y^\nu} - \frac{f^{[n-2]}(y^\nu) - f^{[n-2]}(z^\nu)}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$= \lim_{\substack{\xi_i^\nu \to x^\nu \\ \eta_i^\nu \to y^\nu \\ \zeta_i^\nu \to z^\nu}} \left| \frac{Q_{n-2}(\xi_0^\nu, \ldots, \xi_{n-2}^\nu; f) - Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu; f)}{x^\nu - y^\nu} \right.$$

$$\left. - \frac{Q_{n-2}(\eta_0^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu; f) - Q_{n-2}(\zeta_0^\nu, \ldots, \zeta_{n-2}^\nu; f)}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$= \lim \frac{1}{n-1} \left| \sum_{i=0}^{n-2} Q_{n-2}(\xi_i^\nu, \ldots, \xi_{n-2}^\nu, \eta_0^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right.$$

$$\left. - \sum_{i=0}^{n-2} Q_{n-2}(\eta_i^\nu, \ldots, \eta_{n-2}^\nu, \zeta_0^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|,$$

ξ_i^ν, η_i^ν, ζ_i^ν étant des points différents de $\langle a_\nu, b_\nu \rangle$ qui tendent vers x^ν, y^ν, z^ν respectivement. Or nous avons :

$$\left| Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|$$

$$\leq |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right|$$

$$+ |Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right|,$$

ce qui donne

$$\Delta_2(x^\nu, y^\nu, z^\nu; f^{[n-2]}) \leq \limsup_{\substack{\xi_i^\nu \to x^\nu \\ \eta_i^\nu \to y^\nu \\ \zeta_i^\nu \to z^\nu}} \left\{ \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) \right.$$

$$- Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} \right|$$

$$\left. + \frac{1}{n-1} \sum_{i=0}^{n-2} |Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)| \left| \frac{\xi_i^\nu - \eta_i^\nu}{x^\nu - y^\nu} - \frac{\eta_i^\nu - \zeta_i^\nu}{y^\nu - z^\nu} \right| \right\}.$$

Comme on a

$$|Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)|$$

$$\leq |Q_{n-1}(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) - Q_{n-1}(\xi_{i+1}^\nu, \ldots, \eta_i^\nu, \eta_{i+1}^\nu) + \ldots$$

$$+ |Q_{n-1}(\eta_{i-1}^\nu, \ldots, \zeta_{i-1}^\nu) - Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu))$$

$$\leq \Delta_n(\xi_i^\nu, \ldots, \eta_i^\nu) + \ldots + \Delta_n(\eta_{i-1}^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu) \leq (n-1)\,\Omega_n(a_\nu, b_\nu),$$

et comme $|Q_{n-1}(\eta_i^\nu, \ldots, \zeta_i^\nu)|$ est borné (lemme 1), on a enfin

$$\Delta_2(x^\nu, y^n, z^\nu; f^{[n-2]}) \leq (n-1)\,\Omega_n(a_\nu, b_\nu; f),$$

ce qui prouve l'existence du nombre m cherché avec

$$m = (n-1)\,M'.$$

Lemme 4. — *$f(x)$ étant (R_2^*) sur E, $f^2(x)$ existe presque partout sur* E.

Démonstration. — E′ désignant l'ensemble des points qui sont points d'accumulation bilatéraux de l'ensemble E, $\bar{f}^+(x)$ est (R_1^*) sur E′. D'abord, $\bar{f}^+(x)$ est fini sur I, car les nombres $\dfrac{f(x)-f(y)}{x-y}$ sont bornés d'après le lemme 1. Soit m' un nombre tel que pour toute suite finie d'intervalles (a_ν, b_ν), ayant leurs extrémités situées sur E et n'empiétant pas, on ait

$$\sum_\nu \Omega_2(a_\nu, b_\nu; f) \leqq m'.$$

Nous établirons l'existence d'un nombre m'' tel que pour toute suite finie (α_ν, β_ν) d'intervalles n'empiétant pas et dont les extrémités appartiennent à E′ et pour $\alpha_\nu \leqq \xi^\nu < \eta^\nu \leqq \beta_\nu$, on ait

$$\sum_\nu |\bar{f}^+(\xi^\nu) - \bar{f}^+(\eta^\nu)| \leqq m''.$$

Pour cela, considérons des points $a_\nu \varepsilon$ E situés à gauche de α_ν et des points $b_\nu \varepsilon$ E situés à droite de β_ν et tels que ni les intervalles (a_ν, b_ν) de rang pair, ni ceux de rang impair n'empiètent les uns sur les autres. Considérons encore des points x^ν, y^ν tels que

$$a_\nu < \alpha_\nu \leqq \xi^\nu < x^\nu < \eta^\nu < y^\nu < b_\nu.$$

Si x^ν tend vers ξ^ν et y^ν vers η^ν de façon convenable, alors

$$\frac{f(x^\nu)-f(\xi^\nu)}{x^\nu-\xi^\nu} \to \bar{f}^+(\xi^\nu), \qquad \frac{f(y^\nu-f(\eta^\nu)}{y^\nu-\eta^\nu} \to \bar{f}^+(\eta^\nu),$$

de sorte que

$$\begin{aligned} |\bar{f}^+(\xi^\nu) - \bar{f}^+(\eta^\nu)| &\leqq \lim_{\substack{x^\nu \to \xi^\nu \\ y^\nu \to \eta^\nu}} \left| \frac{f(x^\nu)-f(\xi^\nu)}{x^\nu-\xi^\nu} - \frac{f(y^\nu)-f(\eta^\nu)}{y^\nu-\eta^\nu} \right| \\ &\leqq \lim\sup[\Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu)], \end{aligned}$$

et, en sommant par rapport à ν,

$$\begin{aligned} &\sum_\nu |\bar{f}^+(\xi^\nu) - \bar{f}^+(\eta^\nu)| \\ &\leqq \sum_{\nu \text{ pair}} \Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \sum_{\nu \text{ impair}} \Delta_2(x^\nu, \xi^\nu, y^\nu) + \sum_{\nu \text{ pair}} \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu) \\ &\qquad + \sum_{\nu \text{ impair}} \Delta_2(\xi^\nu, y^\nu, \eta^\nu) \leqq 4m' = m''. \end{aligned}$$

D'après le théorème de Denjoy-Lusin, $\bar{f}^+(x)$ est dérivable presque partout sur E′, ce qui entraîne, en vertu de C., que $f^2(x)$ existe presque partout sur E′. Comme (E — E′) est dénombrable, il en résulte que $f^2(x)$ existe presque partout sur E. C. Q. F. D.

Lemme 5. — *Si $f^{n}(x)$ existe presque partout sur* E, *on a* $E = E' + E''$, *où* E' *est de mesure nulle et* E'' *tel que* $f(x)$ *soit* $(R_n G^\star)$ *sur* E''.

Démonstration. — Désignons par E_k le sous-ensemble de E contenant les points x pour lesquels

$$x < x_1 < \ldots < x_n \leqq x + \frac{1}{k} \qquad \text{entraîne} \quad |Q_n(x, x_1, \ldots, x_n)| < k.$$

Évidemment

$$E = E' + \sum_{k=1}^{\infty} E_k, \qquad |E'| = 0.$$

Soit E_k^i la partie commune à E_k et à l'intervalle $\left\langle \frac{i}{k}, \frac{i+1}{k} \right\rangle$. Il suffit de montrer que $f(x)$ est $(R_n^\star)$ sur E_k^i.

Soit $a < b$, $a \varepsilon E_k^i$, $b \varepsilon E_k^i$. Pour

$$a < x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqq b,$$

on a

$$\begin{aligned}
\Delta_n(x_0, \ldots, x_n) &= |Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)| \\
&\leqq |Q_{n-1}(x_0, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(a, x_1, \ldots, x_{n-1})| \\
&\quad + |Q_{n-1}(a, x_1, \ldots, x_{n-1}) - Q_{n-1}(x_1, \ldots, x_n)| \\
&= |Q_n(a, x_0, \ldots, x_{n-1})|\,|a - x_0| + |Q_n(a, x_1, \ldots, x_n)|\,|a - x_n| \\
&\leqq 2k(b-a),
\end{aligned}$$

ce qui reste valable aussi pour

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqq b.$$

Ceci donne

$$\Omega_n(a, b) \leqq 2k(b-a),$$

ce qui prouve l'énoncé.

Les lemmes 1-5 suffisent pour *la démonstration du théorème* I.

La nécessité de la condition énoncée résulte du lemme 5. Pour établir qu'elle est suffisante, il suffit de montrer que, si $f(x)$ est $(R_n^\star)$ sur E, $f^{n}(x)$ existe presque partout sur E.

Soit donc $f(x)$ $(R_n^\star)$ sur E. En vertu du lemme 3, $\varphi(x) = f^{[n-2]}(x) = f^{(n-2)}(x)$ est $(R_2^\star)$ sur E, donc $\varphi^2(x)$ existe presque partout sur E, d'après le lemme 4. D'après D., $f^{n}(x)$ existe aux mêmes points, ce qu'il fallait démontrer.

Les lemmes 6 et 7 nous serviront à démontrer le théorème II.

Lemme 6. — *Si $f(x)$ est $(S_{n+1}^\star)$ sur* E, E *peut être recouvert par une suite finie d'intervalles* I_k *tels que $f^{[n-1]}(x)$ existe et soit continu sur les* I_k *et* $(S_2^\star)$ *sur les ensembles* EI_k.

Démonstration. — Par hypothèse, E peut être recouvert par une suite finie d'intervalles $I_k = \langle a_k, b_k \rangle$ tels que $\Omega_{n+1}(a_k, b_k)$ soit fini. Le raisonnement conduisant au lemme 1 montre que les nombres $|Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)|$ $(x_i \varepsilon I_k)$

sont bornés, ce qui entraîne d'après le lemme 2 l'existence et la continuité de $f^{[n-1]}(x)$ sur I_k. La démonstration du lemme 3 montre que pour tout sous-intervalle $\langle \alpha, \beta \rangle$ de I_k on a

$$\Omega_2(\alpha, \beta; f^{[n-1]}) \leqq n\,\Omega_{n+1}(\alpha, \beta; f).$$

Couvrons l'ensemble EI_k par une suite finie d'intervalles tels que

$$\sum_\nu \Omega_{n+1}(\alpha_\nu, \beta_\nu; f)(\beta_\nu - \alpha_\nu) < \frac{\varepsilon}{n};$$

ces intervalles peuvent être choisis de façon qu'ils soient des sous-intervalles des I_k. On a alors

$$\sum_\nu \Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu; f^{[n-1]})(\beta_\nu - \alpha_\nu) < \varepsilon, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Lemme 7. — *Si $f(x)$ est $(S_2^\star)$ sur E, $\overline{f}^+(x)$ est continu en presque tout point de* E.

Démonstration. — Il suffit de montrer que, pour tout $\varepsilon > 0$, les points de E en lesquels l'oscillation de $\overline{f}^+(x)$ est $\geqq \varepsilon$ forment un ensemble E_ε de mesure nulle. Couvrons E par un système fini d'intervalles; l'oscillation de $\overline{f}^+(x)$ est $\geqq \varepsilon$ dans tous les intervalles du système qui contiennent un point de E_ε dans leur intérieur. On voit aisément que dans ces intervalles (α_ν, β_ν) on a

$$\Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu; f) \geqq \frac{\varepsilon}{2}.$$

Comme la longueur totale de ces intervalles vaut au moins $|E_\varepsilon|$, on a pour tout système fini d'intervalles couvrant E

$$\sum_\nu \Omega_2(\alpha_\nu, \beta_\nu)(\beta_\nu - \alpha_\nu) \geqq |E_\varepsilon| \frac{\varepsilon}{2}.$$

Le premier membre étant arbitrairement petit, on a

$$|E_\varepsilon| = 0, \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Démonstration du théorème II. *La condition est suffisante.* — Il suffit évidemment de montrer que, $f(x)$ étant $(S_{n+1}^\star)$ sur E, $f^{[n]}(x)$ existe presque partout sur E.

Supposons que $f(x)$ soit $(S_{n+1}^\star)$ sur E. D'après le lemme 6, E peut être recouvert par un système d'intervalles I_k tels que $\varphi(x) = f^{[n-1]}(x) = f^{(n-1)}(x)$ existe sur I_k et soit $(S_2^\star)$ sur EI_k. D'après le lemme 7, $\overline{\varphi}^+(x)$ est continu en presque tout point de EI_k. De plus, $\varphi(x)$ est continu sur I_k; il en résulte, en vertu de A., que $\varphi^{[1]}(x)$ existe presque partout sur EI_k, ce qui équivaut, d'après B., à l'existence de $f^{[n]}(x)$ aux mêmes points.

La condition est nécessaire. — Supposons maintenant que $f^{[n]}(x)$ existe presque partout sur E. Presque tout point de E est contenu dans un intervalle dans lequel

$$|Q_n(x_0, \ldots, x_n; f)|$$

est borné. Un sous-système dénombrable $I_1, I_2, \ldots$ de ces intervalles recouvre E à un ensemble de mesure nulle près. Il suffit de montrer que chaque ensemble EI_k est la somme d'un ensemble de mesure nulle et d'un ensemble sur lequel $f(x)$ est $(S_{n+1}G^\star)$.

D'après le lemme 2, $\varphi(x)=f^{[n-1]}(x)$ existe et est continu sur I_k. Montrons d'abord qu'il est $(S_2G^\star)$ sur un ensemble qui contient presque tous les points de EI_k. Désignons par $H\subset I_k$ l'ensemble des points où $\overline{\varphi}^+(x)$ est continu. Comme H est mesurable, on a

$$H=H_0+\sum_{l=1}^{\infty}F_l,$$

où $|H_0|=0$ et F_l est fermé. $|EI_k-H|$ étant nul, il suffit d'établir que $\varphi(x)$ est $(S_2^\star)$ sur chaque ensemble F_l.

Soit $\varepsilon>0$. Tout point de F_l est contenu dans un intervalle $I\subset I_k$ sur lequel l'oscillation de $\overline{\varphi}^+(x)$ est $\leqq\varepsilon$. Le théorème bien connu de Dini [3] assure que

$$\Delta_2(x, y, z; \varphi)\leqq\varepsilon,$$

pour tous $x, y, z\,\varepsilon\, I$, c'est-à-dire que

$$\Omega_2(I; \varphi)\leqq\varepsilon.$$

Un système fini de ces intervalles recouvre l'ensemble F_l, puisqu'il est fermé. On peut les modifier de façon qu'ils n'empiètent pas et qu'ainsi leur longueur totale devienne $\leqq|I_k|$. Cela prouve que $\varphi(x)$ est $(S_2^\star)$ sur F_l.

Pour terminer la démonstration, nous n'avons qu'à montrer que $f(x)$ est $(S_{n+1}^\star)$ sur chaque ensemble F_l. Ceci résulte de ce que nous venons d'établir, en vertu de l'inégalité suivante qui est valable pour tout sous-intervalle (a, b) de I_k

$$\Omega_{n+1}(a, b; f)\leqq 2\,\Omega_2(a, b; f^{[n-1]}).$$

Pour établir cette dernière inégalité, considérons des points x_i tels que

$$a\leqq x_0<x_1<\ldots<x_{n+1}\leqq b.$$

On a

$$\Delta_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}; f)=|Q_n(x_0, \ldots, x_n)-Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1})|.$$

D'après un théorème de M. E. Hopf [4], il existe des points ξ_i et η_i tels que

$$\begin{gathered}Q_n(x_0, \ldots, x_n; f) = Q_1(\xi_0, \xi_1; f^{[n-1]}),\\ Q_n(x_1, \ldots, x_{n+1}; f)=Q_1(\eta_0, \eta_1; f^{[n-1]}),\\ x_0<\xi_0<\xi_1<x_n, \qquad x_1<\eta_0<\eta_1<x_{n+1},\end{gathered}$$

de sorte que

$$\Delta_{n+1}(x_0, \ldots, x_{n+1}; f) = |\,Q_1(\xi_0, \xi_1; f^{[n-1]}) - Q_1(\eta_0, \eta_1; f^{[n-1]})\,|$$
$$\leqq \Delta_2(\xi_0, \xi_1\, \eta_0) + \Delta_2(\xi_1, \eta_0, \eta_1) \leqq 2\Omega_2(a, b; f^{[n-1]}),$$

ce qu'il fallait démontrer.

Bibliographie.

[1] A. Császár, *Sur les dérivées approximatives d'ordre supérieur*. A paraître dans les *Commentarii Mathematici Helvetici*.

[2] S. Saks, *Théorie de l'intégrale*, 1933, Chap. VIII et IX.

[3] *Voir* par exemple S. Saks, *loc. cit.*, p. 138.

[4] E. Hopf, *Über die Zusammenhänge zwischen gewissen höheren Differenzenquotienten reeller Funktionen einer reellen Variablen und deren Differenzierbarkeitseigenschaften*, 1926.