Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Vincensini

Questions de géométrie liées au caractère invariant de certains réseaux par déformation arbitraire de leur surface support

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 197-226
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__197_0>

QUESTIONS DE GÉOMÉTRIE

LIÉES

AU CARACTÈRE INVARIANT DE CERTAINS RÉSEAUX

PAR

DÉFORMATION ARBITRAIRE DE LEUR SURFACE SUPPORT

PAR M. PAUL VINCENSINI.

Introduction.

L'étude de la déformation des congruences de sphères par déformation de leur déférente conduit à associer, à toute congruence de sphères (Σ) admettant pour déférente une surface donnée S, deux réseaux $(\mathcal{R})$ et $(\mathcal{R}')$ de S invariants au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.

La sphère $\Sigma(u, v)$ centrée au point $P(u, v)$ de S, touche son enveloppe en deux points M et M', symétriques par rapport au plan tangent en P à S, et conservant sur Σ des positions invariables lorsque S se déforme en entraînant les sphères (Σ). Les droites $D \equiv (MM')$ relatives aux différents points P de S forment une congruence (D) [congruence des cordes de contact] dont les différents rayons, et par suite les points I (milieux des segments MM') où ces rayons percent les plans tangents correspondants, sont invariablement liés aux éléments de contact correspondants de S. Les plans tangents à Σ en M et M' se coupent suivant une droite Δ située dans le plan tangent en P à S, et l'ensemble des droites Δ constitue une nouvelle congruence (Δ) [congruence des polaires des cordes de contact] dont les rayons, comme ceux de (D), restent invariablement liés aux plans tangents correspondants de S au cours d'une déformation arbitraire de S.

On sait (Ribaucour) que les courbes de S qui correspondent aux développables des deux congruences précédentes, ont leurs tangentes perpendiculaires aux plans tangents correspondants de ces développables, et forment sur S deux réseaux conjugués. Au cours d'une déformation quelconque de S les deux réseaux précédents varient sur S, mais M. J. Drach a montré (¹) que chacun d'eux ne cesse de partager harmoniquement un réseau invariant de S au cours d'une déformation arbitraire de cette surface. Ces deux derniers réseaux sont les réseaux invariants $(\mathcal{D})$ et $(\mathcal{D}')$ de S associés à la congruence de sphère (Σ) dont il a été question plus haut. Ils peuvent être, l'un et l'autre, caractérisés par une propriété géométrique remarquable.

Réseau $(\mathcal{D})$. — En cherchant les courbes sur lesquelles doit se déplacer P sur S, pour que le déplacement infinitésimal de P soit constamment orthogonal au déplacement infinitésimal du point I (projection de P sur D) correspondant, on trouve deux familles de telles courbes dont l'ensemble forme un réseau. Ces deux familles *restent les mêmes* (sur S) lorsque S se déforme arbitrairement, et le réseau qu'elles constituent est le réseau invariant $(\mathcal{D})$.

Réseau $(\mathcal{D}')$. — Désignons par I′ le point où la droite PI (perpendiculaire menée de P sur Δ coupe Δ). Faisons décrire à P une courbe C sur S, et soit T le point où la tangente en un point quelconque P de C coupe la droite Δ située dans le plan tangent en P à S. Il existe deux familles de courbes C sur S telles que, lorsque P se déplace sur l'une quelconque de ces courbes, le déplacement infinitésimal de T soit constamment orthogonal à la droite PI′ correspondante. Ces deux familles de courbes constituent le réseau invariant $(\mathcal{D}')$.

Dans un Mémoire des *Annales de l'École Normale* (²), j'ai étudié en détail les propriétés des réseaux $(\mathcal{D}')$: leur considération permet d'approfondir l'étude de la déformation d'une surface quelconque ou de types déterminés de surfaces particulières. Je me propose de faire ici une étude analogue pour les réseaux $(\mathcal{D})$.

J'introduis les réseaux $(\mathcal{D})$ comme cas particuliers de réseaux plus généraux [*réseaux* $(\mathcal{D})$ *généralisés* du n° 1] que j'ai signalés dans une Note récente des *Comptes rendus* (³). Comme on le verra, l'introduction de ces réseaux met en évidence un ensemble assez inattendu de liens, reliant entre elles la plupart des questions qui, à des titres divers, ont joué un rôle important dans le développement de la géométrie différentielle des surfaces.

(¹) J. DRACH, *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* [*C. R. Cong. Soc. Sav.*, 1925 (Sciences)],

(²) P. VINCENSINI, *Recherches sur la déformation des surfaces* [*Ann. Éc. Norm.* (3), LXIII, p. 255].

(³) P. VINCENSINI, *Sur une propriété relative à la déformation des surfaces* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 224, p. 520-522).

I. — Les réseaux (ϖ) généralisés.

Posons-nous, pour commencer, le problème suivant :

Soit S une surface quelconque. Dans le plan tangent en l'un quelconque P de ses points choisissons *arbitrairement* un point I, et supposons que les différents points I restent fixés dans les plans tangents correspondants lorsque ceux-ci sont entraînés dans une déformation arbitraire de S.

Quelles sont, dans ces conditions, les courbes que doit décrire P sur S, *pour que les déplacements infinitésimaux correspondants de* P *et du point* I *associé soient constamment orthogonaux et restent orthogonaux au cours d'une déformation arbitraire de* S ?

Si les points I sont les pieds des cordes de contact d'une enveloppe de sphères centrées sur S, il existe sur S deux familles de courbes répondant à la question : elles forment le réseau invariant (ϖ) défini dans l'Introduction.

Nous allons voir que le résultat *subsiste* pour un choix *arbitraire* du point I en démontrant que :

Quelle que soit la distribution des points I *dans les divers plans tangents de* S *il existe, à une exception remarquable près, deux familles de courbes sur* S *donnant lieu à la correspondance par éléments linéaires orthogonaux invariante indiquée.*

Supposons S rapportée à un système orthogonal (u, v) choisi de telle façon que le point I associé au point P soit sur la tangente en P à la courbe $v = \text{const.}$, et posons $\overline{\text{PI}} = a(u, v)$.

(X_1, Y_1, Z_1), (X_2, Y_2, Z_2), (X_3, Y_3, Z_3) étant respectivement les cosinus directeurs des tangentes aux courbes $v = \text{const.}$, $u = \text{const.}$, et de la normale en $P(u, v)$ à S, on a

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2. \tag{1}$$

$$\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial X_1}{\partial u} &= -\frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_2 + \frac{D}{\sqrt{E}}X_3, & \frac{\partial X_1}{\partial v} &= \frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_2 + \frac{D'}{\sqrt{E}}X_3,\\
\frac{\partial X_2}{\partial u} &= \frac{1}{\sqrt{G}}\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}X_1 + \frac{D'}{\sqrt{G}}X_3, & \frac{\partial X_2}{\partial v} &= -\frac{1}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}X_1 + \frac{D''}{\sqrt{G}}X_3,\\
\frac{\partial X_3}{\partial u} &= -\frac{D}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D'}{\sqrt{G}}X_2, & \frac{\partial X_3}{\partial v} &= -\frac{D'}{\sqrt{E}}X_1 - \frac{D''}{\sqrt{G}}X_2,
\end{aligned}\right. \tag{2}$$

D, D′, D″ étant les coefficients de la deuxième forme fondamentale de S.

Les coordonnées du point I sont

$$\xi = x + aX_1, \qquad \eta = y + aY_1, \qquad \zeta = z + aZ_1, \tag{3}$$

x, y, z étant les coordonnées de P.

Définissons un déplacement infinitésimal de P sur S par la relation

$$\frac{du}{A} = \frac{dv}{B}, \tag{4}$$

A et B étant deux fonctions des variables indépendantes u et v.

Les paramètres directeurs de la direction de ce déplacement infinitésimal sont

$$\left\{\begin{aligned} \lambda &= A\sqrt{E}\,X_1 + B\sqrt{G}\,X_2, \\ \mu &= A\sqrt{E}\,Y_1 + B\sqrt{G}\,Y_2, \\ \nu &= A\sqrt{E}\,Z_1 + B\sqrt{G}\,Z_2, \end{aligned}\right. \tag{5}$$

et la condition d'orthogonalité des déplacements infinitésimaux simultanés des points P et I est

$$\lambda\, d\xi + \mu\, d\eta + \nu\, d\zeta = 0. \tag{6}$$

(6) développée en tenant compte des relations (5), (3) et (2) s'écrit

$$\sqrt{E}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)A^2 + \left(\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)AB + \sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)B^2 = 0.$$

Pour une surface S donnée et pour un choix déterminé des points I (E, G, a fonctions connues de u et v), l'équation précédente, du second degré en $\varphi = \frac{B}{A}$, définit (le cas d'indétermination, qui sera étudié plus loin, étant excepté) un réseau d'équation quadratique

$$\sqrt{E}\left(\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u}\right)du^2 + \left(\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}\right)du\,dv + \sqrt{G}\left(\sqrt{G} + \frac{a}{\sqrt{E}}\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}\right)dv^2 = 0, \tag{7}$$

le long des courbes duquel les déplacements de P sont orthogonaux aux déplacements correspondants de I.

Les coefficients de (7) sont indépendants de D, D′, D″; il en résulte que :

Le réseau d'une surface quelconque S, *dont les deux familles de courbes portent les déplacements orthogonaux aux déplacements correspondants de* I, *reste invariant lorsqu'on soumet* S *à une déformation arbitraire.*

Il y a lieu de faire la remarque suivante :

S étant une surface quelconque, lions invariablement au plan tangent en l'un quelconque P de ses points un point I choisi d'après une loi arbitraire (I n'est donc plus nécessairement dans le plan tangent). Dans la correspondance établie par les points P et I entre la surface S et la surface $\overline{S}$ lieu des points I, il existe un couple de réseaux homologues se correspondant avec orthogonalité des éléments linéaires infinitésimaux. L'équation définissant ces réseaux est, comme on le constate aussitôt, l'équation (7), où a se rapporterait à la projection de I sur le plan tangent, et au premier membre de laquelle on ajouterait une quantité proportionnelle à la deuxième forme fondamentale de S $[-b(\mathrm{D}\,du^2 + 2\mathrm{D}'\,du\,dv + \mathrm{D}''\,dv^2)$, où b représente la distance de chaque point I au plan tangent correspondant de S].

La forme de la nouvelle équation montre que, sauf si $b = 0$, c'est-à-dire si les différents points I de $\overline{\mathrm{S}}$ sont dans les plans tangents correspondants de S, la correspondance entre les deux réseaux associés cesse d'être par orthogonalité des éléments homologues si l'on soumet S à une déformation arbitraire.

Les *seuls* couples de réseaux associés donnant lieu à la permanence de l'orthogonalité des éléments linéaires homologues au cours d'une déformation arbitraire de S, sont donc *ceux pour lesquels chaque point* I *est dans le plan tangent au point correspondant* P *de* S *dont il a été question plus haut.*

II. — Réseaux ($\mathcal{O}$) généralisés spéciaux. Cas de réduction ou d'indétermination de l'équation (7).

La proposition qui fait l'objet du numéro précédent est susceptible d'applications variées. Nous allons ici en déduire quelques résultats suggérés par la forme même de l'équation (7) qui définit, sur une surface S quelconque, les réseaux (P) correspondant par orthogonalité des éléments linéaires à leurs associés (I).

En annulant le coefficient du terme en du^2 au premier membre de (7), on exprime que les points I relatifs aux différents points P d'une même courbe $v = \text{const.}$ sont situés sur une développante de cette courbe; l'orthogonalité des éléments linéaires correspondants sur les deux courbes est bien connue.

Annulons le coefficient du terme en dv^2. Nous obtenons ainsi les segments $\overline{\mathrm{PI}} = a$ qu'il faut porter sur les normales aux différentes courbes $u = \text{const.}$ de S pour que, lorsque P décrit l'une de ces courbes, le point I correspondant décrive une courbe correspondant à la précédente avec orthogonalité des éléments linéaires.

Les différents segments $\overline{\mathrm{PI}}$ sont définis par

$$\overline{\mathrm{PI}} = a = -\frac{\sqrt{\mathrm{EG}}}{\dfrac{\partial\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u}}.$$

L'expression de a est celle du rayon de courbure géodésique de la courbe $u = \text{const.}$ en P, et I est le centre de courbure géodésique correspondant. Nous sommes conduits à la propriété suivant laquelle *lorsqu'un point* P *décrit une courbe quelconque* C *d'une surface quelconque* S, *les directions des déplacements du point* P *et du centre de courbure géodésique correspondant* I *sont constamment orthogonales.*

On déduit aussitôt de là la propriété suivante [1] de la surface réglée (PI) engendrée par les normales PI à la courbe C tangentes à S :

Au centre de courbure géodésique I *relatif à un point quelconque* P *de* C, *le plan tangent à la surface réglée* (PI) *est normal au plan tangent en* P *à* S.

Le plan tangent en I à (PI) contient en effet, d'une part PI qui est orthogonale à la tangente en P à C, et d'autre part la direction du déplacement du point I qui est orthogonale à celle du déplacement du point P (donc à la tangente en P à C). La propriété énoncée résulte de cette double orthogonalité.

L'annulation du coefficient du terme en $du\,dv$ dans (7) fournit l'équation

$$\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v} - a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v} = 0,$$

qui donne

$$a = U\sqrt{E} \qquad (U = \text{fonction arbitraire de } u).$$

Les points I définis par $\overline{PI} = a = U\sqrt{E}$ ont une signification géométrique intéressante [2] : ce sont les pieds des perpendiculaires abaissées de P sur les rayons des congruences des polaires des cordes de contact des enveloppes de sphères centrées sur S, ou, ce qui revient au même, des congruences (de Ribaucour) dont les rayons sont situés dans les plans tangents à S et dont les couples de foyers associés sont situés sur deux tangentes conjuguées de S.

La forme qu'affecte l'équation (7) dans le cas particulier envisagé montre que les congruences de Ribaucour ci-dessus définies jouissent de la propriété suivante :

Si I est le pied de la perpendiculaire abaissée d'un point quelconque P d'une surface S sur le rayon d'une congruence quelconque de Ribaucour relative à S situé dans le plan tangent en P, et si l'on considère le réseau invariant de S dont les courbes portent les déplacements infinitésimaux orthogonaux aux déplacements correspondants de I, *ce réseau invariant est bissecté par la famille des courbes enveloppées sur* S *par les droites joignant les différents couples de points* P *et* I *associés* (*courbes* $v =$ const.).

Exigeons maintenant que les coefficients des termes en du^2 et en dv^2 dans (7) soient simultanément nuls. Nous cherchons donc les réseaux invariants $[P(u, v)]$ *orthogonaux,* tels que le point décrivant le réseau (I) associé par orthogonalité des éléments linéaires à (P) *soit constamment situé sur la tangente à l'une des courbes* ($v =$ const.) *du réseau* (P).

---

(1) Cette propriété est due à Darboux, qui en a déduit diverses conséquences (*voir* le tome III de la *Théorie des surfaces*, p. 117).

(2) P. VINCENSINI, *Recherches sur la déformation des surfaces* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), LXIII, p. 255].

Le réseau (I) associé au réseau (P) est alors constitué, d'après ce qui précède, par une famille de développantes des courbes $v =$ const. du réseau (P), et par les courbes décrites par le centre de courbure géodésique d'une courbe $u =$ const. quelconque lorsque P décrit cette courbe.

Les surfaces S portant des réseaux invariants du type actuel sont des surfaces particulières que nous allons caractériser géométriquement. Les réseaux orthogonaux (u, v) jouissant des propriétés indiquées sont définis par le système

$$\sqrt{E} + \frac{\partial a}{\partial u} = 0,$$

$$\sqrt{EG} + a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

d'où l'on déduit

$$\sqrt{E} = -\frac{\partial a}{\partial u},$$

puis, portant cette expression de $\sqrt{E}$ dans la dernière équation :

$$\sqrt{G}\frac{\partial a}{\partial u} - a\frac{\partial \sqrt{G}}{\partial u} = 0,$$

soit

$$\sqrt{G} = aV,$$

V étant une fonction arbitraire de v, que l'on peut réduire à l'unité moyennant un changement sur le paramètre v. On aura alors

$$E = \left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2, \qquad G = a^2,$$

et l'on voit que les surfaces S portant des réseaux invariants du genre qui nous occupe admettent l'élément linéaire *caractéristique*

$$(8) \qquad ds^2 = \left(\frac{\partial a}{\partial u}\right)^2 du^2 + a^2\, dv^2,$$

où a (rayon de courbure géodésique des courbes $u =$ const.) est une fonction arbitraire des deux variables u et v.

Ces surfaces sont susceptibles d'une définition géométrique intéressante. Imaginons, sur l'une d'elles, deux courbes $v =$ const. infiniment voisines quelconques. Elles définissent sur la surface une certaine zone infiniment étroite, dont la largeur, ε, en chaque point $P(u, v)$, est égale à l'élément de courbe $u =$ const., correspondant à la variation dv de v qui fait passer de l'une des courbes limitant la zone à l'autre ($\varepsilon = a\, dv$).

dv étant constant tout le long d'une zone, on voit que la largeur de la zone en l'un quelconque P de ses points est proportionnelle au rayon de courbure géodésique de la courbe $u =$ const. issue de P.

Les surfaces S envisagées jouissent donc de la propriété évidemment caractéristique [1] suivante :

On peut tracer sur elles un faisceau de courbes, telles que la largeur de toute zone infiniment étroite de la surface, définie par deux courbes infiniment voisines quelconques du faisceau, soit proportionnelle au rayon de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des courbes du faisceau au point où la largeur de la zone est considérée.

Si l'on remarque que la relation $\varepsilon = a\,dv$, différentiée par rapport à u, donne

$$d\varepsilon = \frac{\partial a}{\partial u} du\, dv = (ds)_u dv,$$

$(ds)_u$ désignant l'élément d'arc sur l'une dés courbes limitant l'une quelconque des zones infiniment déliées dont il vient d'être question, on voit qu'on peut définir les surfaces actuelles, par la possibilité de tracer sur elles un faisceau de courbes telles que, pour toute zone infiniment déliée limitée par deux courbes du faisceau, *les variations infinitésimales de la largeur soient proportionnelles aux déplacements infinitésimaux correspondants sur les frontières.*

Surfaces de Guichard. — Parmi les surfaces que l'on vient de caractériser figurent évidemment les *surfaces de Guichard*, nappes focales des congruences (de Guichard) dont les deux réseaux focaux sont formés de lignes de courbure.

Si, en effet, P est un point quelconque d'une surface de Guichard (G) [1re nappe focale d'une congruence de Guichard], et si I est le point correspondant de la deuxième nappe focale (G′) de la congruence, lorsque P décrit l'une ou l'autre des deux lignes de courbure de (G) qui s'y croisent, I se déplace normalement au déplacement de P en décrivant l'une ou l'autre des deux lignes de courbure correspondantes de (G′).

Ceci montre que, conformément d'ailleurs à un résultat connu, l'élément linéaire de toute surface de Guichard rapportée à ses lignes de courbure peut être mis sous la forme (8), la fonction a ayant une valeur convenablement choisie.

Cas d'indétermination de l'équation (7). *Surfaces spirales.* — L'étude du cas où l'équation (7) est indéterminée, c'est-à-dire où le choix du point I peut être fait de façon que le réseau invariant correspondant de la surface S soit indéterminé, conduit à un autre type important de surfaces rentrant, comme les surfaces de Guichard, dans la famille générale précédemment caractérisée, à savoir les *surfaces spirales de Maurice Lévy et leurs déformées.*

---

[1] On voit aussitôt que tout ds^2 orthogonal ($ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + \mathrm{G}\,dv^2$), tel que le faisceau des courbes $v = \text{const.}$ jouisse de la propriété indiquée avec un coefficient de proportionnalité $\varphi(v)\,dv$ dépendant arbitrairement de v, est réductible à la forme (8) moyennant un simple changement du paramètre v.

L'indétermination de l'équation (7) s'exprime par le système

$$\sqrt{E}+\frac{\partial a}{\partial u}=0,$$

$$\sqrt{E}\frac{\partial a}{\partial v}-a\frac{\partial\sqrt{E}}{\partial v}=0,$$

$$\sqrt{EG}+a\frac{\partial\sqrt{G}}{\partial u}=0.$$

Si l'on tient compte de la première équation dans la troisième, les deux dernières équations donnent aussitôt

$$\frac{\sqrt{E}}{U}=\frac{\sqrt{G}}{V}=a,$$

où U et V sont deux fonctions des paramètres u et v respectivement, que l'on peut réduire à l'unité en changeant ces paramètres.

On a alors

$$\sqrt{E}=\sqrt{G}=a,$$

et la première équation du système, où $\sqrt{E}$ est remplacé par a, donne par intégration

$$a=\mathfrak{V}e^{-u} \qquad (\mathfrak{V}=\text{fonction arbitraire de } v).$$

L'élément linéaire de S a donc la forme

$$ds^2=\mathfrak{V}^2 e^{-2u}(du^2+dv^2),$$

caractéristique des *surfaces applicables sur les surfaces spirales de Maurice Lévy* rapportées aux déformées des spirales gauches ($v=$ const.) et à leurs trajectoires orthogonales ($u=$ const.).

Cette forme est visiblement un cas particulier de (8) avec $a=\mathfrak{V}e^{-u}$. On peut donc énoncer le résultat suivant :

Les surfaces possédant des réseaux invariants indéterminés sont les surfaces spirales et leurs déformées, et le point I, *dont l'association au point courant* P *d'une déformée quelconque de surface spirale donne lieu à l'indétermination du du réseau invariant, est le centre de courbure géodésique de la trajectoire orthogonale des spirales gauches déformées issue de* P $\left(\overline{\mathrm{PI}}=a=\mathfrak{V}e^{-u}\right)$.

Si donc l'on considère une déformée de surface spirale quelconque S, et la surface Σ lieu des centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées, la correspondance ponctuelle qu'un point quelconque P de S et le point correspondant I de Σ établissent entre les deux surfaces est une correspondance par éléments linéaires orthogonaux, et reste telle lorsqu'on déforme S arbitrairement.

J'ai été amené à signaler ce cas singulier de correspondance par éléments linéaires orthogonaux entre deux surfaces dans une étude antérieure ([1]), où j'avais en vue la recherche des congruences rectilignes admettant pour *enveloppée moyenne* ([2]), une surface S, ne cessant d'admettre S pour enveloppée moyenne lorsqu'on soumet la surface à une déformation arbitraire, au cours de laquelle elle entraîne les rayons de la congruence supposés invariablement liés à ses plans tangents.

Les congruences en question sont précisément les congruences des perpendiculaires élevées aux plans tangents d'une déformée quelconque S de surface spirale aux centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées.

III. — Forme invariante de l'équation des réseaux (ϖ).

Nous allons maintenant revenir aux réseaux (ϖ) invariants, définis dans l'Introduction, associés aux enveloppes de sphères centrées sur une surface quelconque. L'étude de ces réseaux est particulièrement riche en résultats géométriques. Il se trouve, comme on va le voir, que la plupart des particularisations classiques que l'on peut imposer à un réseau (ϖ) d'une surface, correspondent à des propriétés remarquables de la surface ou de la congruence de sphères associée au réseau envisagé. L'exposition qui va suivre gagnera en simplicité si l'on utilise, pour représenter les réseaux (ϖ) d'une surface donnée S, une forme invariante que j'ai donnée dans un Mémoire précédent ([3]) et que je vais tout d'abord rappeler.

Nous supposerons S rapportée à un système quelconque de coordonnées curvilignes (u, v), et nous désignerons par (E, F, G), (D, D', D'') les coefficients de ses deux premières formes fondamentales. Une congruence quelconque de sphères (Σ) admettant S pour déférente sera définie par l'expression $R(u, v)$ du rayon de la sphère centrée au point $P(u, v)$, ou encore, en posant $R^2 = 2\rho$ ([4]), par la fonction $\rho(u, v)$. Les coordonnées du point I où la corde de contact de la sphère Σ centrée en P perce le plan tangent en P à S sont (*voir* par exemple le *Mémoire cité*)

$$(1) \qquad \begin{cases} \xi = x - \Delta(x, \rho), \\ \eta = y - \Delta(y, \rho), \\ \zeta = z - \Delta(z, \rho), \end{cases}$$

([1]) P. Vincensini, *Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bull. de la Soc. math. de France*, 1931, t. 59, p. 211-228).

([2]) Enveloppe des plans médiateurs des segments focaux.

([3]) P. Vincensini, *Sur les congruences des cordes de contact des enveloppes de sphères* [*Ann. Éc. Normale*, (3), LXI, p. 119].

([4]) Dans le Mémoire cité on avait posé $R^2 = -2\rho$. Nous changeons légèrement la notation pour faciliter le rapprochement de certains résultats établis ici avec des résultats antérieurs.

où x, y, z sont les coordonnées cartésiennes de P, et où Δ représente le paramètre différentiel mixte de deux fonctions relativement au ds^2 de S.

La distance $\overline{\mathrm{PI}}$ de la corde de contact au point P est

$$\mathrm{PI} = \sqrt{\mathbf{S}(\xi - x)^2} = \sqrt{\mathbf{S}\,\overline{\Delta(x, \rho)}^2} = \sqrt{\Delta\rho},$$

$\Delta\rho$ étant le paramètre différentiel du premier ordre de ρ relatif au ds^2 de S.

Exprimons que, conformément à la propriété caractéristique du réseau $(\mathcal{O})$ de S attaché à la congruence de sphères (Σ), donnée dans l'Introduction, les déplacements infinitésimaux simultanés de P et I lorsque P décrit l'une des courbes de $(\mathcal{O})$ sont orthogonaux.

La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$\mathbf{S}\, dx\, d\xi \equiv \mathbf{S}\, dx[dx - \Delta(x, \rho)] = 0,$$

soit

$$\mathbf{S}\, dx^2 - \mathbf{S}\, dx\, \Delta(x, \rho) = 0. \tag{9}$$

Le premier terme du premier membre de (9) est le ds^2 de S. Pour expliciter le second terme il suffit de tenir compte des identités

$$\begin{aligned}
&\mathbf{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial\,\Delta(x, \rho)}{\partial u} = \rho_{11},\\
&\mathbf{S}\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial\,\Delta(x, \rho)}{\partial v} = \mathbf{S}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial\,\Delta(x, \rho)}{\partial u} = \rho_{12},\\
&\mathbf{S}\,\frac{\partial x}{\partial v}\,\frac{\partial\,\Delta(x, \rho)}{\partial v} = \rho_{22},
\end{aligned}$$

les ρ_{ij} étant les dérivées secondes covariantes de ρ. On obtient alors

$$\mathbf{S}\, dx\, \Delta(x, \rho) = \rho_{11}\, du^2 + 2\rho_{12}\, du\, dv + \rho_{22}\, dv^2,$$

de sorte que $\mathrm{S}\, dx\, \Delta(x, \rho)$ n'est autre chose que la différentielle seconde covariante de la fonction $\rho(u, v)$, différentielle que nous désignerons par δ_ρ^2.

L'équation (9) définissant le réseau $(\mathcal{O})$ de S associée à (Σ) peut donc se mettre sous la forme

$$ds^2 - \delta_\rho^2 = 0, \tag{10}$$

qui met bien en évidence l'invariance du réseau $(\mathcal{O})$ pour une déformation arbitraire de S.

Sous forme explicite (10) s'écrit

$$(\mathrm{E} - \rho_{11})\, du^2 + 2(\mathrm{F} - \rho_{12})\, du\, dv + (\mathrm{G} - \rho_{22})\, dv^2 = 0, \tag{11}$$

où les dérivées secondes covariantes ρ_{ij} ont les expressions bien connues

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned}
\rho_{11} &= \frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v},\\
\rho_{12} &= \frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v},\\
\rho_{22} &= \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix}\frac{\partial\rho}{\partial v},
\end{aligned}\right.$$

les $\begin{Bmatrix}ij\\k\end{Bmatrix}$ étant les symboles à trois indices de deuxième espèce de Christoffel relatifs au ds^2 de S

$$(12')\quad \left\{\begin{aligned}
\begin{Bmatrix}11\\1\end{Bmatrix} &= \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, &\quad \begin{Bmatrix}11\\2\end{Bmatrix} &= \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},\\
\begin{Bmatrix}12\\1\end{Bmatrix} &= \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, &\quad \begin{Bmatrix}12\\2\end{Bmatrix} &= \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)},\\
\begin{Bmatrix}22\\1\end{Bmatrix} &= \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)}, &\quad \begin{Bmatrix}22\\2\end{Bmatrix} &= \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2(EG-F^2)}.
\end{aligned}\right.$$

L'équation (11) montre qu'un réseau choisi arbitrairement sur une surface S n'est généralement pas un réseau (ϖ). Les réseaux (ϖ) de S sont des réseaux spéciaux dont on peut se donner arbitrairement l'une des deux familles de courbes; le réseau est alors défini par une équation aux dérivées partielles du deuxième ordre $\left[\text{l'équation (11) où } \frac{du}{dv} \text{ est une fonction déterminée des variables } u, v \text{ et où } \rho(u, v) \text{ est la fonction inconnue}\right]$. On peut donc se poser des questions telles que les suivantes : Parmi les réseaux (ϖ) d'une surface S, y en a-t-il qui jouissent de propriétés particulières données *invariantes par déformation de* S (orthogonaux, doubles, indéterminés, etc.); ou encore qui, par une déformation *convenable* de S se transforment en réseaux remarquables (conjugués, asymptotiques...). C'est dans cet ordre d'idées que nous allons poursuivre l'étude actuelle. En même temps que certains problèmes importants (tel par exemple celui de la recherche des asymptotiques virtuelles) se présenteront sous des aspects nouveaux, l'étude des congruences de sphères associées aux réseaux envisagés conduira à des propriétés géométriques variées et à des rapprochements avec diverses théories classiques. Autour des réseaux (ϖ) viendront ainsi se grouper, conformément à ce qui a été dit dans l'Introduction, de nombreux problèmes, parfois d'apparence assez éloignés, et cette possibilité de groupement confère aux réseaux (ϖ) un intérêt qui semble mériter d'être signalé.

IV. — Réseaux (ϖ) orthogonaux.

Pour que le réseau (ϖ) défini sur une surface S par l'équation (11) [où ρ est une fonction donnée de u et de v] soit orthogonal, il faut et il suffit qu'il partage harmoniquement le réseau des lignes de longueur nulle de S[$E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2 = 0$]. La condition pour qu'il en soit ainsi est

$$G(E-\rho_{11}) - 2F(F-\rho_{12}) + E(G-\rho_{22}) = 0,$$

soit

$$\frac{G\rho_{11} - 2F\rho_{12} + E\rho_{22}}{EG - F^2} = 2, \tag{13}$$

ou, en remarquant que le premier membre de (13) n'est autre chose que le paramètre différentiel $\Delta_2\rho$ relatif au ds^2 de S,

$$\Delta_2\rho = 2. \tag{13'}$$

En (13) ou (13') on a l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre définissant ρ, c'est-à-dire les congruences de sphères de déférente S pour lesquelles le réseau (ϖ) est orthogonal.

(13) développée est de la forme

$$G\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2F\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + E\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} + \alpha\frac{\partial\rho}{\partial u} + \beta\frac{\partial\rho}{\partial v} + \gamma = 0.$$

L'équation des lignes de longueur nulle de S est l'équation des caractéristiques de l'équation précédente. Si la détermination des lignes de longueur nulle de S est possible, l'intégration de (13) pourra se faire par quadratures. Cette circonstance bien connue est d'une vérification géométrique immédiate. Si l'on rapporte S à ses lignes de longueur nulle ($E = G = 0$) l'équation (13) s'écrira

$$\rho_{12} = F,$$

soit en tenant compte des formules (12) et (12')

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} = F,$$

d'où l'on déduit

$$\rho = \int dv \int F\,du + U + V.$$

Envisageons à titre d'exemple le cas où S est à courbure totale constante K positive. Supposons $K = +1$ et S appliquée sur la sphère de rayon 1. Nous avons donc à déterminer les réseaux (ϖ) orthogonaux de la sphère unitaire S.

Ce dernier problème admet une transformation remarquable qui le ramène à un problème classique de la théorie des surfaces.

Supposons la sphère S centrée à l'origine O des coordonnées d'un système rectangulaire. Soient X, Y, Z les coordonnées de l'un quelconque $P(u, v)$ de ses points ($ds^2 = S\,dX^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$). $\rho(u, v)$ étant une solution quelconque de l'équation (13′) relative au ds^2 de S, portons sur OP le vecteur $\overrightarrow{OH} = \rho\,\overrightarrow{OP}$ et menons le plan (Π) perpendiculaire en H à OP, plan qui a pour équation

$$(\Pi) \qquad Xx + Yy + Zz = \rho.$$

Lorsque P décrit S, (Π) enveloppe une certaine surface (σ), qu'il touche en un point M dont les coordonnées (ξ, η, ζ) peuvent être mises sous la forme (formules de représentation sphérique de Weingarten)

$$(M) \qquad \begin{cases} \xi = \Delta(\rho, X) + \rho X, \\ \eta = \Delta(\rho, Y) + \rho Y, \\ \zeta = \Delta(\rho, Z) + \rho Z, \end{cases}$$

$\Delta(\rho, X)$, $\Delta(\rho, Y)$, $\Delta(\rho, Z)$ étant les coordonnées de la projection orthogonale du point O sur la normale δ en M à (σ).

D'autre part, les abscisses $f_1 = \overline{IF_1}$ et $f_2 = \overline{IF_2}$ des foyers F_1, F_2 du rayon δ de la congruence des normales à (σ) sont données par l'équation du second degré [1]

$$f^2 + \Delta_2\rho\, f + \Delta_{22}\rho = 0.$$

Si ω est le milieu du segment focal (F_1F_2) de δ on a

$$\overline{I\omega} = -\frac{\Delta_2\rho}{2},$$

et l'équation (13′) montre que

$$\overline{I\omega} = -1.$$

Il résulte de là que le plan moyen de la congruence (δ) relatif à l'un quelconque δ de ses rayons (plan médiateur de F_1F_2) est tangent à la sphère S, et que par suite la surface (σ) est une surface à *développée moyenne* (enveloppe des plans moyens de la congruence de ses normales) *sphérique* (sphère S).

Le problème de la recherche des réseaux ($\mathcal{O}$) orthogonaux d'une sphère *revient donc à celui de la détermination des surfaces à développée moyenne sphérique.* A chaque surface (σ) admettant pour développée moyenne la sphère S, correspond une congruence de sphères (Σ) centrées sur S pour laquelle le réseau ($\mathcal{O}$) associé est un réseau orthogonal de S. D'après ce qui précède on obtient la congruence (Σ) en abaissant, du centre O de S, la perpendiculaire OH

---

(1) *Voir* P. Vincensini, *Sur certaines congruences de normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante et leurs transformations* [*Ann. Éc. Norm.* (3), XLVIII, 1931, p. 399].

sur un plan tangent quelconque (Π) de (σ), et en centrant au point P où cette perpendiculaire perce S une sphère de rayon $R = \sqrt{2\rho} = \sqrt{2\,\mathrm{OH}}$.

Les surfaces (σ) à développée moyenne sphérique sont, comme il est bien connu, celles que la méthode que Weingarten a proposée pour l'étude du problème de la déformation des surfaces, associe à la déformation du paraboloïde de révolution. Le problème de la recherche des réseaux ($\mathcal{O}$) orthogonaux sur les surfaces à courbure totale constante positive est donc, au fond, équivalent à celui de la déformation du paraboloïde de révolution.

Des résultats établis dans un Mémoire antérieur [1], auxquels nous aurons à nous reporter dans la suite de ce travail et que nous allons brièvement rappeler, vont nous permettre un nouveau rapprochement intéressant.

Dans le Mémoire cité nous nous sommes proposé la recherche des congruences de sphères, telles que les points de contact de la sphère génératrice avec les deux nappes de l'enveloppe déterminent, sur ces deux nappes, une correspondance qui soit une *équivalence superficielle* (conserve les aires) ou une *applicabilité*. En ce qui concerne l'équivalence il y a lieu de distinguer les deux cas où, sur les contours déterminés sur les deux nappes de l'enveloppe par un pinceau infiniment délié de la congruence des cordes de contact, les points de contact homologues tournent dans le même sens ou dans des sens contraires autour d'un rayon intérieur du pinceau; l'équivalence est dite *directe* ou *inverse* suivant que l'on est dans le premier cas ou dans le second.

Les deux cas se distinguent par une propriété géométrique remarquable. Dans le deuxième cas l'équivalence (inverse) entre les deux nappes *persiste* lorsqu'on déforme la congruence de sphères envisagée en déformant arbitrairement la surface lieu des centres (la déférente), les sphères centrées en ses différents points étant entraînées dans la déformation. Dans le premier cas (équivalence directe), l'équivalence, supposée réalisée pour une congruence donnée, *cesse d'avoir lieu* si l'on déforme la déférente.

Les notations étant celles du n° III, les congruences de sphères solutions du problème de l'équivalence sont définies, pour une déférente donnée (E, F, G, D, D′, D″ connus), par les équations suivantes déterminant la loi de variation du rayon $\left(R = \sqrt{2\rho}\right)$ de la sphère (Σ) génératrice

$$\frac{D\rho_{22} - 2D'\rho_{12} + D''\rho_{11}}{EG - F^2} + \mathcal{H} = 0 \qquad \text{(équivalence directe)}, \tag{14}$$

$$\Delta_{22}\rho - \Delta_2\rho - K(\Delta\rho - 2\rho) + 1 = 0 \qquad \text{(équivalence inverse)}. \tag{15}$$

Dans (14) et (15), $\mathcal{H}$ et K sont respectivement la courbure moyenne $\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$ et la courbure totale de la déférente.

[1] P. Vincensini, *Étude des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe se correspondent avec équivalence ou applicabilité et problèmes de déformation associés* [*Ann. Éc. Norm.*, (3), LIII, p. 41-82].

Cela étant, revenons au problème de la détermination des réseaux (ϖ) orthogonaux d'une sphère S (de rayon 1). Ils sont définis par l'équation (13). Or, pour une déférente sphérique de rayon 1 on a

$$D = -E, \qquad D' = -F, \qquad D'' = -G, \qquad \mathcal{H} = 2;$$

l'équation (14) est identique à l'équation (13), et l'on peut énoncer le résultat suivant :

Les réseaux (ϖ) orthogonaux d'une sphère S *sont les réseaux associés aux congruences de sphères, centrées sur* S, *déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance directe conservant les aires.*

Il résulte de ce qu'on dit plus haut que, lorsqu'on passe, par déformation, de la sphère S à une surface à courbure totale constante positive quelconque, *seule la permanence du réseau (ϖ) subsiste :* l'équivalence directe des aires sur les deux nappes de l'enveloppe disparaît.

V. — Réseaux (ϖ) dont les deux familles de courbes sont confondues.

Les deux familles de courbes du réseau (ϖ) d'une surface S défini par l'équation (11) sont confondues si l'on a

$$(E-\rho_{11})(G-\rho_{22})-(F-\rho_{12})^2=0,$$

soit

$$\frac{\rho_{11}\rho_{22}-\rho_{12}^2}{EG-F^2}-\frac{E\rho_{22}-2F\rho_{12}+G\rho_{11}}{EG-F^2}+1=0, \tag{16}$$

ou encore, en observant que les deux premiers termes du premier membre ne sont autre chose que les deux paramètres différentiels $\Delta_{22}\rho$ et $\Delta_2\rho$ relatifs au ds^2 de S

$$\Delta_{22}\rho-\Delta_2\rho+1=0. \tag{17}$$

(17) est une équation du type de Monge-Ampère qui, lorsque S est développable, est identique à la deuxième équation de l'applicabilité des surfaces.

La deuxième équation de l'applicabilité pour une surface quelconque S est en effet

$$\Delta_{22}\rho-\Delta_2\rho+1=K(2\rho-\Delta\rho), \tag{18}$$

K étant la courbure totale et 2ρ le carré de la distance d'un point fixe de l'espace au point courant de la surface, et cette équation se réduit à (17) lorsque $K=0$.

Le problème de la recherche des réseaux (ϖ) d'une surface développable S dont les deux familles de courbes sont confondues, et des congruences de sphères centrées sur S associées, revient donc à celui de la déformation de S, et peut par suite être résolu complètement.

Si l'on prend l'élément linéaire de S sous la forme

$$ds^2 = du^2 + dv^2,$$

l'équation (17), compte tenu des relations (12), (12') s'écrit

$$(19)\qquad \left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}\right)\left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial v^2}\right) - \left(\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = 0,$$

et il suffit de poser

$$(20)\qquad \rho = \lambda + \frac{1}{2}(u^2 + v^2)$$

pour lui donner la forme

$$(21)\qquad \frac{\partial^2 \lambda}{\partial u^2}\frac{\partial^2 \lambda}{\partial v^2} - \left(\frac{\partial^2 \lambda}{\partial u\, \partial v}\right)^2 = 0,$$

qui définit λ, en fonction de u et v, comme la cote d'un point décrivant une surface développable arbitraire (Δ) rapportée à un système d'axes de coordonnées rectangulaires auxiliaire [Ou, Ov, $O\lambda$].

De là résulte la construction géométrique suivante des congruences de sphères, centrées sur une développable S, et pour lesquelles le réseau invariant ($\mathcal{O}$) associé est formé de deux familles de courbes confondues :

Appliquons S sur le plan (Ouv) d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires $O(u, v, \lambda)$. Donnons-nous, par rapport au trièdre $O(u, v, \lambda)$, une développable auxiliaire quelconque (Δ), et projetons son point courant M en p sur le plan (Ouv). Si l'on pose $\lambda = \overline{pM}$, l'expression (20) définit le rayon $R = \sqrt{2\rho}$ de la sphère Σ qu'il faut centrer au point P, homologue de p dans l'application du plan (Ouv) sur S, pour obtenir la congruence de sphères la plus générale de déférente S pour laquelle le réseau ($\mathcal{O}$) est formé de deux familles de courbes confondues.

Quant aux courbes du réseau ($\mathcal{O}$) elle-mêmes, elles sont définies, d'après l'équation (11) où il est tenu compte de $E = G = 1$, $F = 0$, par l'équation

$$\left(1 - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u^2}\right) du - \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v}\, dv = 0,$$

et (19) montre aussitôt qu'elles constituent une famille à un paramètre de *lignes géodésiques* de S.

Toute famille de ∞^1 géodésiques d'une surface développable peut d'ailleurs être considérée comme un réseau ($\mathcal{O}$) de la surface dont les deux familles de courbes sont confondues. Nous verrons plus loin (n° IX), que la véritable raison géométrique du fait que les familles de ∞^1 géodésiques d'une développable quelconque sont des réseaux ($\mathcal{O}$), tient à ce que tout ensemble de ∞^1 géodésiques d'une développable S peut être regardé comme un *système d'asymptotiques* (*doubles*) *virtuelles* de S, c'est-à-dire un système de courbes susceptible de se transformer en la famille des asymptotiques doubles rectilignes d'une déformée convenable de S.

La deuxième équation de l'applicabilité (18) pour une surface quelconque S définit, comme l'on sait, les congruences de sphères (Σ) centrées sur S [le rayon de la sphère centrée au point (u, v) étant $R = \sqrt{2\rho}$], telles qu'il existe une déformation de S après laquelle les différentes sphères (Σ) passent par un point fixe de l'espace. En introduisant la notion de *courbure d'une congruence de sphères* due à A. Demoulin [1], ces congruences sont, comme ce géomètre l'a montré, les congruences de courbure $+1$. On peut donc dire :

Les congruences à déférente développable S *dont les réseaux* (ϖ) *sont formés de deux familles de courbes confondues sont les congruences de déférente* S *de courbure* $+1$, *et les réseaux* (ϖ) *correspondants sont constitués par les différentes familles de* ∞^1 *géodésiques de* S.

Cet énoncé sera généralisé plus loin (n° X).

VI. — Réseaux (ϖ) indéterminés.

Le réseau (11) est indéterminé sur S si l'on a

$$\rho_{11} = E, \qquad \rho_{12} = F, \qquad \rho_{22} = G. \tag{22}$$

Supposons S rapportée à un système orthogonal tel, que le long d'une courbe $u = \text{const.}$ quelconque, le rayon de la sphère génératrice de la congruence (Σ) associée au réseau soit constant. On aura alors

$$ds^2 = E\,du^2 + G\,dv^2,$$

et le rayon R de Σ $\left(\text{et par suite } \rho = \frac{R^2}{2}\right)$ ne dépendra que de u.

Le système (22) s'écrira dans ces conditions [*voir* les formules (12) et (12')]

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} - E = 0,\\ &\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial\rho}{\partial u} = 0,\\ &\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u}\frac{\partial\rho}{\partial u} - G = 0.\end{aligned}\right. \tag{23}$$

ρ ne pouvant évidemment être constant, la deuxième équation (23) montre que E est une fonction de u seul, que l'on peut réduire à l'unité en changeant

---

[1] La courbure d'une congruence de sphères est celle de la forme quadratique $d\varphi^2 = \dfrac{ds^2 - dR^2}{R^2}$ [*voir* A. Demoulin, *Bull. Ac. roy. de Belgique*, 5e série, 19, 1933, p. 877].

le paramètre u. On a alors

$$ds^2 = du^2 + G\,dv^2,$$

et (23) devient

$$(24)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} = 1, \\ \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\dfrac{\partial \rho}{\partial u} = 1, \end{cases}$$

d'où, en disposant du paramètre v et en ajoutant une constante à u,

$$(25)\qquad \begin{cases} G = u^2, \\ 2\rho = R^2 = u^2 + a \qquad (a = \text{const.}). \end{cases}$$

Le ds^2 de S $[ds^2 = du^2 + u^2 dv^2]$ est celui d'un plan (Π) rapporté à des coordonnées polaires. S est donc une surface développable, et l'expression de R^2 prouve que, lorsqu'on applique S sur (Π), les sphères de la congruence (Σ) viennent former un réseau de sphères passant par deux points fixes symétriques par rapport au plan (Π), et à la distance $\sqrt{a}$ de ce dernier.

Ainsi, seules les développables possèdent des réseaux ($\mathcal{O}$) indéterminés. D'après ce qui précède, S étant une développable quelconque, on obtient la congruence de sphères (Σ) la plus générale donnant lieu à l'indétermination du réseau ($\mathcal{O}$) associé, *en déformant le plan* (Π) *des centres d'un réseau de sphères passant par deux points fixes* M *et* M′ *symétriques par rapport à* (Π), *de façon à à venir appliquer ce plan sur* S.

Les deux nappes de l'enveloppe de (Σ) après l'application de (Π) sur S se réduisent à deux courbes Γ, Γ′, à savoir les courbes décrites respectivement par M et M′ (invariablement liés à Π), lorsqu'on fait rouler sans glisser (Π) sur S, de façon que la courbe du plan (Π) correspondant à l'arête de rebroussement de S roule sans glisser sur cette arête de rebroussement.

Les congruences de sphères à réseaux associés ($\mathcal{O}$) indéterminés que l'on vient d'obtenir ont été étudiées à un autre point de vue dans un Mémoire déjà cité ([1]). Ce sont les seules congruences de sphères pour lesquelles les couples de foyers associés sur les différents rayons de la congruence des cordes de contact sont symétriques par rapport aux plans tangents correspondants de la déférente et restent symétriques par rapport à ces plans tangents lorsqu'on déforme la déférente arbitrairement. Elles jouissent d'ailleurs de la propriété, également caractéristique, que leurs nappes focales se réduisent à deux courbes (Γ, Γ′) sur lesquelles les couples de points de contact associés (M, M′) se correspondent *avec égalité des arcs homologues*, l'égalité des arcs subsistant lorsque la déférente est arbitrairement déformée ([2]).

([1]) *Ann. Éc. Norm.*, (3), LIII, p. 41-82.

([2]) L'égalité des arcs en question résulte aussitôt de ce que, pendant le roulement de (Π) sur S, le milieu I, de MM′ décrit une courbe (trajectoire orthogonale des plans tangents à S) à laquelle le segment MM′ reste constamment tangent.

Il est à noter que le résultat de ce numéro rentre dans le cas général d'indétermination étudié au n° II : la surface *spirale* sur laquelle s'applique la déférente est ici un *plan*.

VII. — Réseaux (ϖ) minima.

Pour que le réseau (11) d'une surface S soit minima (formé des lignes de longueur nulle de S), il faut et il suffit que la fonction ρ vérifie le système d'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\rho_{11}}{E} = \frac{\rho_{12}}{F} = \frac{\rho_{22}}{G}. \tag{26}$$

Le système (26) se traite directement sans difficultés, mais on peut donner au problème de la recherche des réseaux (ϖ) minima l'interprétation suivante.

Il est clair que sur toute surface le réseau des lignes de longueur nulle est un réseau (ϖ), correspondant à la solution évidente $\rho = \text{const.}$ du système (26). Les congruences de sphères fournissant ce réseau sont les congruences de rayon constant centrées sur la surface; nous les écarterons dans la suite. Envisageons alors les familles de systèmes triples orthogonaux de surfaces dont S fait partie. La portion de normale infiniment petite comprise entre S et une surface infiniment voisine du même système dans l'une quelconque de ces familles, a une expression de la forme $\varepsilon\rho$, où ε est une constante infinitésimale, et où ρ est une fonction de u et v vérifiant l'équation (de Cayley)

$$\begin{vmatrix} \rho_{11} & \rho_{12} & \rho_{22} \\ E & F & G \\ D & D' & D'' \end{vmatrix} = 0. \tag{27}$$

Le premier membre de l'équation (27) développée est une expression linéaire et homogène en D, D′, D″, et l'on obtient le système (26) en annulant les coefficients de D, D′, D″.

(26) fournit donc, si elles existent, les solutions de l'équation (27) de Cayley (regardée comme attachée à la surface S) qui *persistent* lorsqu'on déforme S arbitrairement (c'est-à-dire ne cessent d'être solutions de de l'équation de Cayley lorsque cette équation varie du fait de la déformation de S). Le problème de la recherche des réseaux (ϖ) minima est donc ramené à celui *de la recherche des surfaces* S *dont les équations de Cayley correspondantes admettent des solutions persistantes (par déformation de* S).

Or ce dernier problème est connu. Ses solutions sont fournies par les surfaces applicables sur les surfaces de révolution. Si S est une telle surface, et si son ds^2 est mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2, \tag{28}$$

les solutions persistantes de l'équation de Cayley correspondante sont

$$(29) \qquad \rho = \lambda \int_{u_0}^{u} \mathrm{U}\,du \qquad (\lambda,\ u_0 = \text{const.}).$$

Dans un travail déjà cité ([1]) j'ai montré que si l'on centre, en chaque point (u, v) d'une surface applicable sur une surface de révolution d'élément linéaire (28), une sphère de rayon $\mathrm{R} = \sqrt{2\rho}$, ρ ayant l'expression (29), on obtient une congruence de sphères (Σ) à congruence des cordes de contact normale *restant normale* pour une déformation arbitraire de la surface lieu des centres. Ces congruences (Σ) sont d'ailleurs, les congruences de sphères égales centrées sur une surface quelconque ayant été écartées, les plus générales à congruences des cordes de contact normales restant normales par déformation arbitraire de la déférente. On peut donc dire :

Les réseaux $(\mathcal{O})$ minima sont les réseaux $(\mathcal{O})$ associés aux congruences de sphères à congruences des cordes de contact normales restant normales au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.

Ce dernier résultat peut d'ailleurs être établi de façon purement géométrique si l'on a égard à la propriété des réseaux invariants $(\mathcal{O})$, signalée dans l'Introduction, suivant laquelle, un réseau $(\mathcal{O})$ d'une surface S, relatif à une congruence de sphères (Σ) centrées sur S, partage harmoniquement le réseau conjugué qui correspond, sur S, aux développables de la congruence des cordes de contact de (Σ).

Le réseau $(\mathcal{O})$ étant minima, il en résulte que le réseau conjugué de S qu'il partage harmoniquement est orthogonal; or les tangentes de ce dernier réseau sont, comme on l'a rappelé dans l'Introduction, perpendiculaires aux plans focaux de la congruence des cordes de contact; cette congruence est donc *normale*, et, en vertu de l'invariance du réseau $(\mathcal{O})$, *reste normale au cours d'une déformation arbitraire de* S.

VIII. — **Réseaux $(\mathcal{O})$ conjugués.**

Toutes les conditions imposées aux réseaux $(\mathcal{O})$ considérés jusqu'à présent avaient le caractère invariant (par déformation de la surface support). Nous allons maintenant envisager des conditions ne possédant pas ce caractère d'invariance. Demandons-nous par exemple si un réseau $(\mathcal{O})$ peut être *conjugué* (au sens de Dupin) sur la surface qui le porte.

([1]) *Ann. Éc. Norm.*, (3), LXI, p. 119.

Envisageons, sur une surface donnée quelconque S, un réseau $(\mathcal{D})$ quelconque défini par l'équation générale (11) du n° III,

$$(11) \qquad (E - \rho_{11})\,du^2 + 2(F - \rho_{12})\,du\,dv + (G - \rho_{22})\,dv^2 = 0,$$

où ρ est une fonction arbitraire des deux variables u et v.

Le réseau (11) sera conjugué si l'on a

$$D''(E - \rho_{11}) - 2D'(F - \rho_{12}) + D(G - \rho_{22}) = 0,$$

soit en introduisant la courbure moyenne $\left(\mathcal{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = -\frac{GD - 2FD' + ED''}{EG - F^2}\right)$ de S :

$$(30) \qquad \frac{D''\rho_{11} - 2D'\rho_{12} + D\rho_{22}}{EG - F^2} + \mathcal{H} = 0.$$

(30), où l'on remplace les ρ_{ij} par leurs expressions (12) est une équation linéaire du second ordre en ρ, dont l'intégration fera connaître les congruences de sphères centrées sur S pour lesquelles les réseaux $(\mathcal{D})$ associés [définis sur S par l'équation (11)] sont conjugués.

L'équation définissant les caractéristiques de (30) est celle des lignes asymptotiques de S, et, en rapportant S à ses lignes asymptotiques, on peut ramener (30) à la forme

$$(31) \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + \alpha\frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta\frac{\partial \rho}{\partial v} + \gamma = 0,$$

équation qui, dans le cas particulier où S est minima ($\mathcal{H} = 0$), se simplifie et s'écrit

$$(31') \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial u\,\partial v} + \alpha\frac{\partial \rho}{\partial u} + \beta\frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

L'équation (30) est susceptible d'une interprétation géometrique intéressante. Si nous nous reportons à ce que nous avons dit au n° IV, au sujet des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de leur enveloppe une correspondance avec équivalence des aires homologues, nous voyons que (30) n'est autre chose que l'équation (14) définissant les congruences pour lesquelles la correspondance en question est une *équivalence directe*. Nous pouvons donc énoncer ce résultat :

Sur toute surface S *il existe une infinité de réseaux* $(\mathcal{D})$ *conjugués* (*dépendant de deux fonctions arbitraires d'un argument*), *et ces réseaux sont les réseaux associés aux congruences de sphères, centrées sur* S, *déterminant une équivalence superficielle directe sur les deux nappes de leurs enveloppes.*

Nous avons signalé au n° IV une différence essentielle entre les deux espèces (*inverses* ou *directes*) de correspondances par aires équivalentes entre les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères à deux paramètres. Les premières persistent au cours d'une déformation arbitraire de la surface S des centres, alors qu'il n'en est pas de même pour les deuxièmes. Le numéro actuel explique géométriquement la non-permanence des équivalences directes. Les familles de sphères donnant lieu à l'équivalence directe sont précisément celles pour lesquelles le réseau permanent (ϖ) associé de la surface S des centres est un réseau *conjugué*, et ce réseau *ne peut se maintenir conjugué* au cours d'une déformation *arbitraire* de S.

Nous laissons ici de côté l'étude de l'intégration de l'équation (30) [ou (31)]. Nous rappellerons seulement (*voir* le Mémoire du t. 53 des *Annales de l'École Normale* cité n° IV) que cette intégration peut être effectuée complètement lorsque S est à courbure totale constante, et que, dans le cas où S est minima, l'équation de Laplace (31') peut toujours être ramenée à avoir ses invariants égaux, et s'intègre complètement dans le cas de l'hélicoïde minima réglée.

IX. — Réseaux (ϖ) asymptotiques. Caractérisation géométrique des asymptotiques virtuelles d'une surface.

Les lignes asymptotiques d'une surface quelconque jouissent d'une propriété géométrique remarquable :

Sur toute surface, le réseau qu'elles forment est un réseau (ϖ).

Pour établir ce résultat, et pour obtenir en même temps les congruences de sphères admettant pour réseau (ϖ) le réseau asymptotique d'une surface quelconque S, nous supposerons S rapportée à ses lignes asymptotiques. Pour que celles-ci forment un réseau (ϖ), il faut et il suffit que l'on puisse déterminer la fonction $\rho(u, v)$, de façon que l'équation (11) définissant les différents réseaux (ϖ) de S se réduise à

$$du\,dv = 0.$$

Cela exige que ρ vérifie le système des deux équations aux dérivées partielles

$$(32)\qquad \rho_{11} - E = 0, \qquad \rho_{22} - G = 0,$$

soit, en remplaçant ρ_{11} et ρ_{22} par leurs expressions

$$(32')\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 11 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial v} - E = 0, \\[2ex] \dfrac{\partial^2 \rho}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 1 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 22 \\ 2 \end{Bmatrix} \dfrac{\partial \rho}{\partial v} - G = 0. \end{cases}$$

Le système (32') n'est évidemment pas en involution; son intégrale générale, si elle existe, dépend au plus de *quatre* constantes arbitraires. Nous allons montrer qu'il existe effectivement une intégrale du système précédent admettant ce degré maximum de généralité : la complète intégrabilité du système en résultera, ainsi que le caractère (ϖ) de tout réseau asymptotique.

Supposons en effet la surface S rapportée à un système d'axes rectangulaires dont l'origine O occupe, par rapport à S, une position *arbitraire* (le choix de cette origine mettant par suite en jeu *trois* constantes arbitraires). On sait [1] que si $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ sont les coordonnées d'un point quelconque P de S relatives au système d'axes choisi, si W représente la distance de l'origine O au plan tangent en P à S, et si l'on pose

$$r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2),$$

on a les trois relations

$$(33) \qquad \begin{cases} r_{11} = E + DW, \\ r_{12} = F + D'W, \\ r_{22} = G + D''W, \end{cases}$$

les r_{ij} désignant toujours les dérivées secondes covariantes de r relativement au ds^2 de S.

Or, dans le cas actuel où S est rapportée à ses lignes asymptotiques, on a

$$D = D'' = 0,$$

et les équations (33) donnent

$$r_{11} - E = 0, \qquad r_{22} - G = 0;$$

r est donc une solution du système (32) [ou (32′)], qui admet par suite la solution $\rho = r = \frac{1}{2}(x^2 + y^2 + z^2)$.

La solution ρ ainsi obtenue dépend des trois paramètres qui fixent l'origine O par rapport à S; en lui ajoutant une constante arbitraire on obtient une solution $(\rho + c)$ du système (32′), dépendant de *quatre* constantes arbitraires, et fournissant par suite l'intégrale générale du système envisagé.

Ainsi, comme on l'avait annoncé, le réseau asymptotique d'une surface quelconque S est un réseau $(\mathcal{O})$. En outre, l'expression du rayon de la sphère génératrice de l'une quelconque des congruences de déférente S admettant pour réseau $(\mathcal{O})$ associé le réseau des asymptotiques de S, donnée par

$$R^2 = 2\rho + \text{const.} = x^2 + y^2 + z^2 + \text{const.},$$

montre qu'*on obtient ces différentes congruences, en se donnant dans l'espace une sphère fixe quelconque* Ω, *et en centrant aux différents points de* S *les sphères orthogonales à* Ω.

Si on laisse fixe le centre de la sphère Ω et si l'on fait varier son rayon, les ∞^1 congruences de sphères (Σ) centrées sur S et orthogonales respective-

---

[1] *Voir par exemple*, L. BIANCHI, *Lezioni*, t. I, p. 220.

ment aux diverses sphères concentriques Ω obtenues, ont toutes la même congruence des cordes de contact (car on passe d'une congruence à une autre en ajoutant une constante aux carrés des rayons des sphères). Eu égard au réseau (I) décrit par le point I où la corde de contact d'une sphère Σ centrée en P perce le plan tangent en P à S lorsque P décrit le réseau asymptotique de S, réseau dont les courbes correspondent par orthogonalité des éléments aux asymptotiques de S conformément à la définition des réseaux ($\mathcal{O}$), on peut dire qu'*il ne dépend que de la position du centre de la sphère* Ω et non de la congruence particulière (Σ) que l'on envisage. Le centre de Ω variant, on obtient ∞^2 réseaux (I) associés par orthogonalité des éléments linéaires au réseau des asymptotiques de S, de sorte que tout réseau asymptotique peut en réalité être regardé comme un réseau ($\mathcal{O}$) de ∞^3 façons différentes.

Dans chacune de ces façons de regarder le réseau asymptotique d'une surface S comme un réseau ($\mathcal{O}$), la congruence des cordes de contact se réduit à une gerbe ayant pour sommet un point arbitraire de l'espace (le centre O de la sphère fixe Ω correspondante); les points I associés aux différents points P de S sont les projections orthogonales de O sur les différents plans tangents à S, et l'on voit que l'on peut définir ainsi les différentes lignes asymptotiques de S :

Associons à S l'une quelconque de ses podaires $\mathfrak{T}$ (lieu des projections orthogonales I d'un point fixe O de l'espace sur les plans tangents à S), et envisageons la correspondance ponctuelle établie entre S et $\mathfrak{T}$ en associant à chaque point P de S le point correspondant I de $\mathfrak{T}$. Les lignes asymptotiques de S *sont les courbes de* S *correspondant par orthogonalité des éléments linéaires aux courbes homologues de* $\mathfrak{T}$.

Le résultat précédent est une conséquence géométrique immédiate de l'orthogonalité des éléments linéaires homologues des lignes asymptotiques d'une surface et de leur représentation sphérique; à ce titre son intérêt peut paraître assez limité. Mais le fait que, lorsqu'on déforme la surface S, le réseau (I) de l'une quelconque de ses podaires $\mathfrak{T}$, considéré comme constitué par l'ensemble des points I distribués sur les courbes de $\mathfrak{T}$ correspondant aux asymptotiques de S, ne cesse, si l'on suppose chaque point I invariablement lié au plan tangent de S qui le contient, de correspondre avec orthogonalité des éléments linéaires homologues au déformé du réseau asymptotique initial, conduit à une caractérisation géométrique remarquable des *asymptotiques virtuelles* d'une surface.

Tout d'abord, le caractère ($\mathcal{O}$) d'un réseau de courbes d'une surface quelconque S étant un invariant de déformation pour S, les réseaux obtenus à partir des asymptotiques d'une surface par déformation arbitraire de celle-ci (réseaux d'asymptotiques virtuelles des déformées) sont des réseaux ($\mathcal{O}$). Et comme tout réseau d'asymptotiques virtuelles d'une surface quelconque peut, par définition, être transformé en un réseau asymptotique par une déformation convenable de sa surface support, on voit que :

Sur toute surface S, *non seulement le système des asymptotiques actuelles, mais aussi tous les systèmes d'asymptotiques virtuelles, sont des réseaux* ($\mathcal{O}$).

Caractérisons maintenant les congruences de sphères (Σ) centrées sur S, associées aux différents réseaux ($\mathcal{O}$) formés par les asymptotiques tant actuelles que virtuelles.

Pour les asymptotiques actuelles on a vu que les congruences (Σ) [en disposant de la constante que l'on peut ajouter aux carrés des rayons des différentes sphères] sont constituées par les sphères centrées sur S et passant par un point fixe arbitraire de l'espace.

Considérons ensuite un réseau quelconque (A) d'asymptotiques virtuelles de S. Il existe une déformée $\overline{S}$ de S sur laquelle le réseau ($\overline{A}$) déformé de A est asymptotique. Toute famille de sphères (Σ) associée au réseau (A) de S se transforme donc (après addition d'une constante convenable aux carrés des rayons), lorsqu'on applique S sur $\overline{S}$, en une famille de sphères passant par un point fixe de l'espace. Les familles (Σ) constituent par suite (*voir* le n° V) des congruences de sphères de courbure $+1$. De là résulte la définition géométrique suivante des différents réseaux d'asymptotiques virtuelles d'une surface quelconque S :

Ce sont les réseaux ($\mathcal{O}$) *associés aux différentes congruences de sphères de courbure* $+1$ *centrées sur* S.

Le problème de la recherche des asymptotiques virtuelles d'une surface S a été ramené par G. Darboux à l'intégration d'un système de deux équations aux dérivées partielles du deuxième ordre du type hyperbolique ([1]).

Nous venons ici de le ramener à sa véritable origine géométrique : intégration de la deuxième équation aux dérivées partielles de la déformation de S, suivie de l'intégration de l'équation différentielle (11) [qui revient en somme à la détermination des asymptotiques de l'une des surfaces déformées de S].

X. — Sur un théorème d'O. Bonnet, et sur les congruences paraboliques de sphères de courbures $+1$.

Au deuxième aspect du problème de la recherche des asymptotiques virtuelles d'une surface, envisagé à la fin du numéro précédent, on peut aisément rattacher certaines propositions classiques de la théorie des surfaces.

([1]) G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 285.

Considérons par exemple la proposition d'O. Bonnet suivant laquelle *sur deux surfaces applicables les asymptotiques ne peuvent se correspondre que si les surfaces sont égales ou symétriques.*

Soient S, S′ deux surfaces applicables avec correspondance des réseaux asymptotiques. Envisageons une surface quelconque S″ applicable sur S et S′, et désignons par (A) le réseau (d'asymptotiques virtuelles) de S″ correspondant aux réseaux asymptotiques de S et S′. (Σ) étant une congruence de sphères *de courbure* $+1$ admettant (A) pour réseau ($\mathcal{O}$) associé (définie par une certaine solution ρ de la deuxième équation de l'applicabilité), nous savons que les applications de S″ sur S ou S′, qui transforment les asymptotiques virtuelles (A) en asymptotiques effectives de S ou S′ amènent, dans chacun des deux cas, les sphères (Σ) à passer par un point fixe de l'espace. Or il est bien connu que la solution ρ de la deuxième équation de l'applicabilité de S″ *individualise* (à une symétrie près) une déformation de S″ après laquelle les sphères (Σ) viennent passer par un point fixe; les deux surfaces S et S′ *sont donc égales* (ou symétriques).

La proposition précédente d'O. Bonnet peut, comme l'on sait [1], être complétée par la suivante :

A une exception près (visant deux surfaces réglées applicables avec correspondance des génératrices rectilignes), *deux surfaces* S, S′, *applicables avec correspondance d'*une *famille d'asymptotiques de l'une et d'*une *famille d'asymptotiques de l'autre, sont égales* (*ou symétriques*).

On peut rattacher cette deuxième proposition à un résultat relatif aux réseaux ($\mathcal{O}$) dont *l'une des deux familles de courbes est formée de lignes asymptotiques de la surface support* S.

Envisageons un tel réseau ($\mathcal{O}$), et soient (u) ses asymptotiques et (v) les courbes de la seconde famille. Considérons une famille de sphères (Σ) associée au réseau. Les courbes (α) et (β) de S correspondant aux développables de la congruence des cordes de contact de (Σ) forment un réseau qui est, d'une part (*voir* l'Introduction) conjugué au sens de Dupin sur S [et divise donc harmoniquement le réseau asymptotique (A) de S], d'autre part conjugué harmonique par rapport au réseau (u, v) [propriété générale des réseaux ($\mathcal{O}$)]. Les réseaux (A) et (u, v) ayant en commun la famille de courbes (u), l'existence du réseau [(α), (β)] conjugué harmonique commun aux deux précédents amène à considérer les deux cas suivants :

1° les deux familles de courbes du réseau [(α), (β)] sont *distinctes :* les réseaux (u, v) et (A) sont alors *identiques*, et par suite la deuxième famille de courbes (v) du réseau ($\mathcal{O}$) envisagé est formée elle aussi d'asymptotiques; *le réseau* (u, v) *est le réseau asymptotique de* S.

---

[1] G. Darboux, *Théorie des surfaces*, t. III, p. 287.

2° les deux familles (α) et (β) *sont confondues avec la famille des asymptotiques* (u) *de* S : la congruence de sphères (Σ) associée au réseau (ϖ) est alors telle que la congruence de ses cordes de contact a ses deux familles de développables *confondues* (congruence parabolique). Toute congruence de sphères à congruence des cordes de contact parabolique (qui dans la suite sera dite elle-même parabolique) donne d'ailleurs un réseau (ϖ) associé de type actuel, celle des deux familles de courbes du réseau qui est formée d'asymptotiques correspondant à l'unique famille de développables de la congruence des cordes de contact.

On peut donc énoncer la proposition suivante :

Si l'une des deux familles de courbes d'un réseau (ϖ) *d'une surface* S *est l'une des deux familles d'asymptotiques de* S, *ou bien* (ϖ) *est le réseau des asymptotiques de* S, *ou bien il est associé à une congruence de sphères parabolique.*

On pressent le lien entre la proposition précédente et le théorème généralisé d'O. Bonnet dont il a été question plus haut. Soient, conformément à l'énoncé de ce théorème, S et S′ deux surfaces applicables avec correspondance des asymptotiques d'une famille que nous désignerons par (u) sur les deux surfaces. Désignons par (v) les asymptotiques de la seconde famille sur S, et (v') les courbes de S′ que l'application de S sur S′ fait correspondre aux courbes (v) de S. Imaginons une congruence (de courbure $+1$) de sphères (Σ) centrées sur S et admettant le réseau asymptotique (u, v) pour réseau (ϖ) associé. L'application de S sur S′ conservant le caractère (ϖ) du réseau (u, v) [en même temps que la courbure de la congruence (Σ)], le réseau (u, v') de S′ est un réseau (ϖ) dont l'une des deux familles de courbes [les courbes (u)] est formée d'asymptotiques. La proposition précédemment établie s'applique donc, et le réseau (u, v') de S′ est, ou bien asymptotique, ou bien un réseau (ϖ) associé à une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Nous pourrions maintenant invoquer le théorème d'O. Bonnet pour en conclure que *les congruences de sphères paraboliques de courbure* $+1$ *sont à déférentes réglées*. Il sera plus instructif de démontrer directement le résultat : d'une part la démonstration complète du théorème d'O. Bonnet se trouvera présentée sous forme entièrement géométrique, et d'autre part nous serons conduits à une construction remarquablement simple des congruences de sphères paraboliques de courbure $+1$.

Soit donc S′ la déférente d'une congruence parabolique de sphères (Σ) de courbure $+1$. Désignons par P′ un point quelconque de S′ et par D′ la corde de contact de la sphère Σ centrée en P′. La congruence des cordes (D′) est par hypothèse parabolique; chaque rayon D′ porte un seul foyer (double) F′ décrivant, lorsque D′ décrit une développable de la congruence (D′), une asymptotique de l'unique nappe focale (Γ) de (D′); en outre les développables de (D′)

correspondent, comme l'on sait, à une famille d'asymptotiques (u) de S', et (*voir* l'Introduction) la tangente à l'une des asymptotiques (u) en l'un quelconque P' de ses points est perpendiculaire au plan tangent correspondant de la développable décrite par D' lorsque P' décrit (u).

Cela étant, la courbure de la congruence de sphères (Σ) étant égale à $+1$, il existe une déformée S de S' telle que l'application de S' sur S amène toutes les droites de la congruence (D') [invariablement liées aux plans tangents correspondants de S'] à passer par un point fixe O de l'espace. Cette application amène le point P' de S' en un certain point P de S, et le rayon D' (perpendiculaire en I' au plan tangent en P' à S') dans une certaine position D, passant par O, et perpendiculaire au plan tangent en P à S au point I homologue de I'.

Il est bien connu que lorsque les rayons d'une congruence sont perpendiculaires aux plans tangents d'une surface et invariablement liés à ces plans tangents, une déformation arbitraire de la surface laisse invariant le produit des distances de deux foyers associés quelconques au plan tangent correspondant. Il résulte de là que $\overline{I'F'}^2 = \overline{IO}^2$; les points O et F' sont à la même distance des plans tangents respectifs aux surfaces S et S'. La déformation qui amène S sur S', et par suite I en I', superpose le point O au point F'. Cette déformation ne modifie donc pas les positions que les différents segments (PO) occupent par rapport aux plans tangents correspondants : elle amène les différents segments (PO), supposés invariablement liés aux plans tangents correspondants de S, en coïncidence avec les segments correspondants (P'F'). Dans la déformation les segments (PO) [normaux à la sphère point O] ne cessent (Beltrami) d'être normaux à la surface lieu de leurs deuxièmes extrémités. On en conclut que les différents segments (P'F') sont normaux à la surface Γ, lieu des points F' et nappe focale de la congruence (D') des droites (I'F').

Si Γ n'est pas réduite à une courbe, la dernière circonstance indiquée exige que P'F' soit perpendiculaire à I'F', donc que F' soit en I', et par suite (d'après IO = I'F') que la distance du point fixe O au plan tangent en un point quelconque P de S soit nulle. S est alors un cône de sommet O, et S', applicable sur S avec correspondance des asymptotiques, est aussi *un cône,* la surface Γ étant réduite à son sommet.

Ce cas particulier écarté, Γ est nécessairement une courbe; la congruence parabolique (D') est donc *singulière,* et ses rayons sont, comme il est bien connu, répartis suivant ∞^1 faisceaux dont les sommets sont les différents points de Γ et dont les plans sont des plans tangents à Γ.

Considérons alors la développable de (D') correspondant à une asymptotique (u) de S'; les déplacements suivant (u) sont, comme nous l'avons dit, normaux à ses différents plans tangents; or la développable est *plane* (son plan étant comme on l'a vu un plan tangent à la courbe Γ); les déplacements suivant (u) ont donc une *direction fixe,* et (u) est par suite *une droite* perpendiculaire à un certain plan tangent à Γ.

Il résulte de là, comme on l'avait annoncé, que *les congruences paraboliques de sphères de courbure* $+1$ *sont à déférentes réglées*, toute surface réglée pouvant d'ailleurs être regardée (évidemment d'une infinité de façons) comme la déférente d'une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Revenons maintenant au théorème d'O. Bonnet. Nous avons établi plus haut que si S et S′ sont deux surfaces applicables avec correspondance d'une famille (u) de lignes asymptotiques, ou bien les deux familles d'asymptotiques se correspondent sur les deux surfaces (qui sont alors égales ou symétriques), ou bien le réseau de l'une quelconque des deux surfaces correspondant aux asymptotiques de l'autre [qui est un réseau $(\mathcal{O})$ puisque formé d'asymptotiques virtuelles] est associé à une congruence parabolique de sphères de courbure $+1$.

Dans ce dernier cas, conformément à la proposition d'O. Bonnet, S et S′ sont comme nous venons de le voir, deux surfaces réglées admettant les asymptotiques (u) comme génératrices rectilignes. La proposition d'O. Bonnet se trouve ainsi complètement démontrée par la géométrie, et le raisonnement employé met en évidence la construction suivante des congruences paraboliques de sphères de courbure $+1$.

(Σ) étant une telle congruence de déférente S′, on a vu que les développables de la congruence des cordes de contact de (Σ) correspondant aux asymptotiques rectilignes (u), sont des faisceaux plans dont les sommets, F′, sont distribués sur une courbe gauche Γ, à laquelle les différents segments $(P'F')$ restent orthogonaux lorsque P′ décrit la génératrice (u). Les sphères de la congruence (Σ) centrées aux différents points P′ d'une même génératrice rectiligne (u) de S′ passent toutes par le sommet F′ du faisceau correspondant, et forment par suite un faisceau, admettant pour cercle de base, le cercle C′ ayant pour axe la génératrice (u) et passant par F′. En outre, puisque les segments $(P'F')$ sont normaux à la courbe Γ lieu de F′, le cercle C′ est tangent en F′ à Γ. De là résulte l'énoncé suivant, que le calcul confirme sans difficulté :

La congruence parabolique de sphères de courbure $+1$ *la plus générale est constituée par l'ensemble des sphères de* ∞^1 *faisceaux, dont les cercles de base forment une suite continue et sont placés tangentiellement à une courbe gauche arbitraire.*