ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ROGER GODEMENT

Théorèmes taubériens et théorie spectrale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 64 (1947), p. 119-138
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1947_3_64__119_0>

THÉORÈMES TAUBÉRIENS

ET

THÉORIE SPECTRALE

PAR M. ROGER GODEMENT.

INTRODUCTION.

Le but de cet article est de donner un exposé aussi simple que possible, valable pour tout groupe abélien localement compact, des résultats les plus récents de l'analyse harmonique; à savoir, des théorèmes taubériens de N. Wiener et, en partie, du théorème spectral de A. Beurling. Nous avons ajouté à ces deux questions quelques considérations sur les spectres des groupes d'opérateurs dans les espaces de Banach; les résultats obtenus dans cet ordre d'idées sont encore très incomplets, mais ils nous semblent de nature à éclairer quelque peu les résultats déjà connus (essentiellement le classique théorème de Stone, relatif aux espaces de Hilbert, et qui est au cas général ce que les fonctions de type positif sont aux fonctions continues bornées quelconques).

Les méthodes utilisées sont de type « moderne » : espaces de Banach, anneaux normés, etc.; nous rappelons au début l'essentiel de ces méthodes. Par ailleurs, nous faisons usage systématiquement des résultats et des notations du Mémoire [1] (dont le présent constitue la suite) de H. Cartan et R. Godement, *Théorie de la Dualité* (cité *Dualité*).

Propriétés des espaces de Banach [2]. — Soient E un espace de Banach complexe (c'est-à-dire : vectoriel, normé, *complet*) et E′ son dual (c'est-à-dire : l'espace

[1] *Cf.* Le présent tome des *Ann. Éc. Norm. Sup.*

[2] *Cf.* J. DIEUDONNÉ, *La dualité dans les espaces vectoriels topologiques* [*Ann. Éc. Norm. Sup.* (3). 59, p. 107-139].

des fonctionnelles linéaires continues définies sur E). Si $f \in E$ et si $f' \in E'$, on notera (f, f') la valeur en f de la fonctionnelle f'. On dira qu'un f' variable de E' *converge faiblement* vers f'_0 si, pour tout $f \in E$, (f, f') converge vers $(f, f'_0.)$

Lemme *a*. — *Les $f' \in E'$ avec $\|f'\| \leqq 1$ constituent un ensemble compact pour la topologie faible de* E'.

(Cet ensemble est la « boule unité » de E').

Lemme *b*. — *Soit* V *un sous-espace vectoriel de* E; *pour qu'un f' de* E' *soit faiblement adhérent à* V', *il faut et il suffit qu'il le soit à l'intersection de* V' *et d'une boule convenable de* E'; *en particulier, pour que* V' *soit faiblement fermé, il faut et il suffit que son intersection avec la boule unité de* E' *soit faiblement fermée.*

Lemme *c*. — *Soit* V' *un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* E'; *soit* V *l'ensemble des $f \in E$ qui vérifient $(f, f') = 0$ pour tout $f' \in V'$. Alors pour qu'un $f' \in E'$ soit dans* V', *il faut et il suffit qu'il vérifie $(f, f') = 0$ pour tout $f \in V$.*

(V est la « variété orthogonale » à V').

Propriétés des anneaux normés (1). — Un système d'éléments $f, g \ldots$ constitue d'après Gelfand un anneau normé R si les conditions suivantes sont réalisées :

I. R est un anneau commutatif avec élément unité, et admet les nombres complexes comme opérateurs (2) (on notera $f \star g$ la multiplication dans R, et e l'unité).

II. R est muni d'une structure d'espace de Banach telle que la norme vérifie

$$\|f \star g\| \leqq \|f\| \cdot \|g\|.$$

Un sous-espace vectoriel I de R sera un *idéal* si, avec un $f \in R$, I contient les $f \star g$ (g arbitraire dans R). Si au surplus I est *fermé* dans R, on peut introduire de façon évidente une structure d'anneau normé dans l'espace quotient R/I. Un idéal sera *maximal* s'il n'est strictement contenu dans aucun autre idéal que R lui-même. Il est alors *fermé*, et on a le

Lemme *d*. — *Si* M *est un idéal maximal de* R, *alors l'anneau* R/M *est isomorphe au corps des nombres complexes et réciproquement.*

Si l'on note (f, M) l'image de f dans l'isomorphisme considéré, on voit que

$$(f + g, M) = (f, M) + (g, M); \tag{1}$$

$$(\lambda f, M) = \lambda (f, M); \tag{2}$$

$$(f \star g, M) = (f, M)(g, M); \tag{3}$$

$$|(f, M)| \leqq \|f\|. \tag{4}$$

(1) I. Gelfand, *Normierte Ringe* (*Mat. Sbornik*, 9, 1941, p. 1-21).

(2) Il serait donc plus correct de parler d'*Algèbre sur le corps complexe*.

En outre, le nombre complexe (f, M) est caractérisé par le fait que l'élément

$$f-(f, M)e$$

de R est dans M; en particulier, les $f \in M$ sont caractérisés par $(f, M) = 0$.

On a d'autre part le

LEMME *e*. — *Tout idéal de* R *autre que* R *est contenu dans au moins un idéal maximal.* Si alors un $f \in R$ vérifie $(f, M) \neq 0$ pour tout idéal maximal M, c'est que l'idéal engendré par f est tout R; par suite, f admet un inverse dans R, d'où le

LEMME *f*. — *Pour qu'un* $f \in R$ *possède un inverse dans* R, *il faut et il suffit que l'on ait* $(f, M) \neq 0$ *pour tout idéal maximal* M; *on a alors*

$$(f^{-1}, M) = \frac{1}{(f, M)}.$$

1. — Théorèmes taubériens dans L^1.

Soit G un groupe abélien localement compact d'éléments $x, y, \ldots$ (on note e l'élément unité de G). Si l'on considère l'espace L^1 des fonctions $f(x)$ sommables sur G pour la mesure de Haar dx, espace muni de la norme habituelle

$$\|f\|_1 = \int |f(x)|\, dx,$$

et de la structure d'anneau commutatif définie par le « produit de composition »

$$f \star g(x) = \int f(xy^{-1}) g(y)\, dy,$$

on obtient un système possédant toutes les propriétés des anneaux normés, à ceci près que L^1 ne possède pas en général d'élément unité (la condition pour qu'il en existe un est que G soit discret). On ne peut donc appliquer directement à cet anneau les procédés de Gelfand; mais on va voir que le lemme e est valable aussi dans ce cas (1) : ce qui nous conduira précisément au célèbre théorème taubérien de N. Wiener.

LEMME I. — *Soit* $\mu(f)$ *une fonctionnelle linéaire bornée non nulle définie sur* L^1 *et vérifiant*

$$\mu(f \star g) = \mu(f)\mu(g);$$

alors il existe un élément bien déterminé $\hat{x}_\mu$ *du dual* $\hat{G}$ *de* G *tel que*

$$\mu(f) = \hat{f}(\hat{x}_\mu).$$

Ce lemme établit la relation fondamentale entre les *caractères de* G et les *homomorphismes de* L^1 *dans le corps des nombres complexes*.

---

(1) A condition de se borner aux idéaux *fermés*.

Démonstration (¹). — Comme à toute fonctionnelle linéaire bornée sur L^1, on peut associer à μ une fonction $\varphi \in L^\infty$ (c'est-à-dire : mesurable et essentiellement bornée sur G) telle que

$$\mu(f) = \int f(x)\varphi(x)\,dx. \tag{1}$$

Il s'agit de montrer que φ est un *caractère* de G. Pour cela, posons d'une manière générale

$$f_s(x) = f(s^{-1}x),$$

et observons qu'on a l'identité

$$f_s \star g = f \star g_s = (f \star g)_s \qquad (f, g \in L^1), \tag{2}$$

d'où résulte

$$\mu(f_s)\mu(g) = \mu(f)\mu(g_s). \tag{3}$$

Comme il existe une g telle que $\mu(g) \neq 0$, on déduit de là d'abord que

$$\mu(f) = 0 \quad \text{entraîne} \quad \mu(f_s) = 0 \quad \text{pour tout} \quad s \in G;$$

d'autre part, si $\mu(f)$ et $\mu(g)$ sont $\neq 0$, (3) s'écrit

$$\frac{\mu(f_s)}{\mu(f)} = \frac{\mu(g_s)}{\mu(g)} = \chi(s), \tag{4}$$

où $\chi(s)$ est une fonction bien déterminée; comme, d'après une propriété bien connue, l'application $s \to f_s$ de G dans L^1 est, pour chaque $f \in L^1$, continue, (4) montre que la fonction $\chi(s)$ est *continue* sur G; elle est en outre *bornée* d'après

$$\|f_s\|_1 = \|f\|_1;$$

enfin, on a

$$\chi(st) = \frac{\mu(f_{st})}{\mu(f)} = \frac{\mu(f_{st} \star f)}{\mu(f \star f)} = \frac{\mu(f_s \star f_t)}{\mu(f \star f)} = \chi(s)\chi(t),$$

χ est donc un *caractère* de G.

(4) s'écrit

$$\mu(f_s) = \chi(s)\mu(f), \tag{5}$$

et sous cette forme est valable pour *toute* f, puisque $\mu(f) = 0$ entraîne $\mu(f_s) = 0$. En comparant (5) et (1) on voit que

$$\int f(x)\,[\varphi(sx) - \chi(s)\varphi(x)]\,dx = 0 \qquad \text{quels que soient } f \in L^1,\ s \in G;$$

cela signifie que les translatées de φ forment, dans L^∞, un sous-espace vectoriel V_φ de dimension un sur le corps complexe et que, de façon précise, on a, pour chaque $s \in G$,

$$\varphi(sx) = \chi(s)\varphi(x) \qquad \text{presque partout en } x. \tag{6}$$

(¹) I. Gelfand et D. Raïkov, *On the theory of characters of commutative topological groups*, (*C. R. U. R. S. S.*, 28, 1940, p. 195-198) ont déjà donné le principe de cette démonstration.

V_φ étant de dimension finie est faiblement fermé dans L^∞; d'où résulte que, pour toute $f \in L^1$, on a

$$f \star \in V_\varphi;$$

mais alors la fonction *uniformément continue* $f \star \varphi$ est proportionnelle à φ (puisque V_φ est de dimension 1) : φ peut donc elle-même être supposée uniformément continue sur G, auquel cas (6) vaut *partout* et montre que

$$\varphi(s) \equiv \chi(s)\varphi(e);$$

on voit immédiatement que $\varphi(e) = 1$ au moyen de $\mu(f \star g) = \mu(f)\,\mu(g)$.

C. Q. F. D.

LEMME II [1]. — *Soient* $\hat{K}$ *une partie compacte de* $\hat{G}$, *et* $\hat{U}$ *un voisinage compact de* $\hat{K}$; *alors il existe une* $f \in L^1$ *vérifiant*

$$\hat{f}(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{K}, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{G} - \hat{U}. \end{cases}$$

Démonstration (due à H. Cartan). — Soit $\hat{V} = \hat{V}^{-1}$ un voisinage de $\hat{e}$ pris assez petit pour que la réunion des

$$\hat{V}\hat{V}\hat{x} \qquad (\text{où } \hat{x} \text{ décrit } \hat{K})$$

soit contenue dans $\hat{U}$. Soient $\hat{K}'$ la réunion des $\hat{V}\hat{x}\,(\hat{x} \in \hat{K})$, $\hat{g}$ et $\hat{h}$ les fonctions caractéristiques des sous-ensembles

$$\hat{K}' \quad \text{et} \quad \hat{V} \quad \text{de} \quad \hat{G}.$$

On a alors

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = \int \hat{g}(\hat{x}\hat{y}^{-1})\,\hat{h}(\hat{y})\,d\hat{y} = \int_{\hat{V}} \hat{g}(\hat{x}\hat{y})\,d\hat{y}.$$

Si $\hat{x} \in \hat{K}$, les $\hat{x}\hat{y}$ où $\hat{y}$ décrit $\hat{V}$ restent dans K′; donc on a alors

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = \text{mesure de } \hat{x}\,\hat{V} = \text{mesure de } \hat{V} = \text{const.}$$

Si par contre $\hat{x} \in \hat{G} - \hat{U}$, $\hat{x}\hat{V}$ ne rencontre pas $\hat{K}'$ et on a

$$\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}) = 0.$$

En posant

$$\hat{f}(\hat{x}) = \frac{1}{m(\hat{V})}\,\hat{g} \star \hat{h}(\hat{x}),$$

et en remarquant que $\hat{f}$, étant sommable sur $\hat{G}$ pour $d\hat{x}$ et combinaison linéaire de fonctions de type positif, est la transformée de Fourier d'une $f \in L^1$ (cf. *Dualité*, formule d'inversion de Fourier), on a la fonction cherchée.

---

[1] Ce lemme exprime que L^1 est une algèbre normée *régulière* au sens de G. Šilov [*On regular normed rings* (*Travaux Inst. Stekloff*, XXI, 1947)].

Ceci étant, on va démontrer le

THÉORÈME (1) A. — *Soient* $\hat{K}$ *un sous-ensemble compact de* $\hat{G}$, *et* f *une fonction de* L^1 *dont la transformée de Fourier ne s'annule en aucun point de* $\hat{K}$; *alors il existe une* $g \in L^1$ *vérifiant*

$$\hat{g}(\hat{x}) = \frac{1}{\hat{f}(\hat{x})} \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{K}.$$

Démonstration. — Soit $I_{\hat{K}}$ l'ensemble des $h \in L^1$ tels que $\hat{h}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \in \hat{K}$; c'est un *idéal fermé* de L^1, et l'on peut considérer l'anneau quotient $R_{\hat{K}} = L^1/I_{\hat{K}}$; on désignera par $\dot{h}$ l'image d'un $h \in L^1$ dans l'application canonique de L^1 sur $R_{\hat{K}}$.

Si une $u_{\hat{K}}$ de L^1 vérifie

$$\hat{u}_{\hat{K}}(\hat{x}) = 1 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{K},$$

on a

$$u_{\hat{K}} \star h - h \in I_{\hat{K}} \qquad \text{pour toute } h \in L^1,$$

par suite, $R_{\hat{K}}$ possède un élément unité (2) qui n'est autre que $\dot{u}_{\hat{K}}$. On peut donc appliquer à $R_{\hat{K}}$ le lemme f.

Soit alors M un idéal maximal de $R_{\hat{K}}$; l'expression

$$\mu_M(h) = (\dot{h}, M)$$

est une fonctionnelle linéaire bornée et multiplicative sur L^1; d'après le lemme I, il existe donc un $\hat{x}_M \in \hat{G}$ tel que

$$\mu_M(h) = \hat{h}(\hat{x}_M),$$

et l'on aura

$$\mu_M(u_{\hat{K}}) = 1;$$

comme on peut s'arranger pour que $\hat{u}_{\hat{K}}$ soit nulle en dehors d'un voisinage arbitraire de $\hat{K}$ (lemme II), on a nécessairement $\hat{x} \in \hat{K}$. Le lemme f conduit alors immédiatement au résultat cherché.

COROLLAIRE 1 DU THÉORÈME A (3). — *Soient* $\hat{K}$ *un compact et* $\hat{f}$ *une combinaison linéaire de fonctions de type positif, telle que* $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$ *pour tout* $\hat{x} \in \hat{K}$; *alors la fonction continue* $\frac{1}{\hat{f}}$ *coïncide sur* $\hat{K}$ *avec une combinaison linéaire de fonctions de type positif.*

---

(1) Ce résultat est classique dans la théorie de l'intégrale de Fourier, et tient essentiellement à la *régularité* de l'algèbre L^1.

(2) Autrement dit, l'idéal $I_{\hat{K}}$ *régulier* est au sens de I. E. Segal (*cf.* Appendice 2).

(3) Ce résultat est bien connu dans le cas des séries de Fourier (le fait que f soit combinaison linéaire de fonctions de type positif signifie que sa série de Fourier est absolument convergente).

COROLLAIRE 2 DU THÉORÈME A. — *Soient f, $g \in L^1$ et supposons que les zéros de g soient tous intérieurs à l'ensemble des zéros de $\hat{f}$. Alors, et si $\hat{f}$ est nulle en dehors d'un compact, on peut résoudre dans L^1 l'équation*

$$f = g \star h \qquad (h \in L^1).$$

Soient en effet $\hat{K}$ un *compact* tel que

$$\begin{aligned} \hat{g}(\hat{x}) &\neq 0 \qquad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{K}; \\ \hat{f}(\hat{x}) &= 0 \qquad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{G} - \hat{K}. \end{aligned}$$

D'après le théorème A, il existe $g_1 \in L^1$ avec

$$\hat{g}(\hat{x})\,\hat{g}_1(\hat{x}) = 1 \qquad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{K}.$$

Si alors on pose $h = f \star g$, on a

$$\hat{g}(\hat{x})\,\hat{h}(\hat{x}) = \hat{g}(\hat{x})\,\hat{g}_1(\hat{x})\,\hat{f}(x) = \begin{cases} \hat{f}(\hat{x}) & \text{si} \quad \hat{x} \in \hat{K}, \\ 0 & \text{si} \quad \hat{x} \in \hat{G} - \hat{K} \quad (\text{car } \hat{f}(\hat{x}) = 0) \end{cases}$$

et donc $\hat{g}\hat{h} = \hat{f}$, d'où $f = g \star h$ ce qui démontre la proposition. On va maintenant démontrer le

THÉORÈME TAUBÉRIEN. — *Soit* I *un idéal fermé de* L^1; *pour que* $I = L^1$, *il faut et il suffit que pour chaque* $\hat{x} \in \hat{G}$ *existe une* $\hat{f} \in I$ *avec* $\hat{f}(\hat{x}) \neq 0$.

Démonstration. — La nécessité de la condition est évidente; pour montrer qu'elle est suffisante, on va d'abord prouver que, si un idéal fermé I la vérifie, il contient toute $f \in L^1$ dont la transformée de Fourier est nulle en dehors d'un compact $\hat{K}$. Pour cela, et d'après le corollaire 2 du théorème A, il suffit de prouver l'existence d'une $g \in I$ telle que $\hat{g}(\hat{x}) \neq 0$ en tous les points d'un *voisinage* $\hat{U}$ de $\hat{K}$.

Or, si $\hat{U}$ est un tel voisinage, qu'on peut supposer compact, pour tout $\hat{x}_0 \in \hat{U}$ existe par hypothèse une $g \in I$ vérifiant

$$|\hat{g}(\hat{x}_0)| > 1$$

$\hat{g}$ étant *continue*, on aura encore $|\hat{g}(\hat{x})| > 1$ pour les $\hat{x}$ d'un voisinage $\hat{V}_0$ de $\hat{x}_0$. $\hat{U}$ étant *compact*, on peut alors le recouvrir au moyen d'un nombre fini de tels voisinages; d'où $\hat{x}_1, \ldots, \hat{x}_n \in \hat{U}$; $\hat{V}_1, \ldots, \hat{V}_n$; et $g_1, \ldots, g_n \in I$ tels que

$$|\hat{g}_i(\hat{x})| > 1 \qquad \text{pour} \quad \hat{x} \in \hat{V}_i \qquad (i = 1, \ldots, n) \qquad \text{et} \qquad U \subset \hat{V}_1 \cup \ldots \cup \hat{V}_n.$$

Alors si l'on pose

$$f = g_1 \star \tilde{g}_1 + \ldots + g_n \star \tilde{g}_n,$$

on a

$$f \in I$$

et

$$\hat{f}(\hat{x}) = \sum |\hat{g}_i(\hat{x})|^2 > 1 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \hat{U}.$$

Le théorème taubérien sera alors prouvé si l'on démontre le

Lemme III. — *Les $f \in L^1$ telles que $\hat{f}$ soit nulle en dehors d'un compact (variable) de $\hat{G}$ sont partout denses dans L^1.*

Or, soit f_α un filtre (1) sur L^1 tel que :

a. $\hat{f}_\alpha$ est nulle en dehors d'un compact « de plus en plus grand » de $\hat{G}$;
b. pour tout $\hat{x} \in \hat{G}$, $\hat{f}_\alpha(\hat{x})$ converge vers 1 suivant le filtre considéré;
c. on a $f_\alpha(x) \geqq 0$ pour tout $x \in G$.
d. $\int f_\alpha(x)\,dx = 1$.

(L'existence d'un tel filtre revient à la propriété suivante : sur tout groupe abélien, on peut approcher la constante 1 par des fonctions de type positif *nulles en dehors de compacts;* propriété démontrée dans l'article cité *Dualité*, § 18.)

Les hypothèses ci-dessus entraînent que la mesure $f_\alpha(x)\,dx$ converge « étroitement vers la masse un en e »; c'est-à-dire que, pour toute fonction continue et bornée $F(x)$ sur G, on a

$$\lim_\alpha \int F(x) f_\alpha(x)\,dx = F(e);$$

soit alors $g(x)$ une fonction quelconque de L^1; on aura

$$\begin{aligned}
\|g \star f_\alpha - g\|_1 &= \int dx \left| \int g(xy^{-1}) f_\alpha(y)\,dy - g(x) \right| \\
&= \int dx \left| \int [g(xy^{-1}) - g(x)] f_\alpha(y)\,dy \right| \\
&\leqq \int f_\alpha(y)\,dy \int |g(xy^{-1}) - g(x)|\,dx \\
&= \int F(y) f_\alpha(y)\,dy,
\end{aligned}$$

où F est donnée par

$$F(y) = \int |g(xy^{-1}) - g(x)\,dx = \|g_y - g\|_1;$$

(1) N. Bourbaki, *Topologie générale* (Chap. I. Paris, 1940). Bien qu'un filtre ne puisse être correctement désigné par la notation « f_α », nous avons adopté cette dernière parce qu'elle évoque l'idée de « suite », plus généralement répandue.

d'après une propriété bien connue des fonctions sommables, F est continue, bornée et prend, pour $x = e$, la valeur zéro; il en résulte

$$\lim_{\alpha} \| g \star f_{\alpha} - g \|_1 = 0,$$

en sorte que g est limite, dans L^1, des fonctions $g \star f_{\alpha}$ dont les transformées de Fourier sont, comme celles des f_{α}, nulles en dehors de parties compactes de $\hat{G}$: ce qui démontre le lemme.

Remarque a. — Le théorème taubérien n'est autre que l'extension à l'anneau normé L^1, *dépourvu en général d'élément unité*, du lemme e valable *a priori* pour les seuls anneaux de Gelfand.

Remarque b. — Dans L^1, où l'on peut définir les « translations » par

$$f_s(x) = f(s^{-1}x),$$

il y a identité entre les notions d'*idéal fermé* et de *sous-espace vectoriel fermé invariant par translation* [1].

Soit V un tel sous-espace invariant; si $f \in V$, et si g est un élément arbitraire de L^1, $f \star g \in V$; en effet, rappelons que le dual de L^1 est isomorphe à l'espace L^∞, dont les éléments sont les fonctions $\varphi(x)$ « mesurables et essentiellement bornées » sur G, la dualité entre L^1 et L^∞ étant réalisée en posant

$$(f, \varphi) = \int f(x) \overline{\varphi(x)} \, dx;$$

soit alors φ un élément de L^∞ orthogonal à V; d'où en particulier

$$\int f(xy^{-1}) \overline{\varphi(x)} \, dx = 0 \qquad \text{pour tout } y \in G$$

et donc

$$\begin{aligned} &\int g(y) \, dy \int f(xy^{-1}) \overline{\varphi(x)} \, dx \\ &= \int \overline{\varphi(x)} \, dx \int f(xy^{-1}) g(y) \, dy = \int \overline{\varphi(x)} f \star g(x) = 0; \end{aligned}$$

tout élément de L^∞ orthogonal à V l'est donc à $f \star g$: comme V est fermé, il en résulte que $f \star g \in V$, et donc que V est un idéal comme annoncé. On verrait de même que tout idéal fermé est invariant par translation.

---

[1] On peut donc, comme le fait N. Wiener, parler de sous-espaces invariants par translations au lieu d'idéaux.

2. — Le spectre d'une fonction bornée et mesurable.

La combinaison des propriétés générales des espaces de Banach et du théorème taubérien va nous permettre maintenant de définir et d'étudier le « spectre » d'une fonction quelconque de L^∞. On va d'abord prouver le

Théorème B. — *Dans* L^∞, *toute variété linéaire* (¹) *faiblement fermée* V', *non réduite à zéro et invariante par translation, contient au moins un caractère de* G.

Démonstration. — Soit V le sous-espace vectoriel de L^1 orthogonal à V'; il est fermé, et de plus *invariant par translation*, car $f \in V$ équivaut à

$$(f, \varphi) \equiv \int f(x)\overline{\varphi(x)}\,dx = 0 \qquad \text{pour tout } \varphi \in V';$$

V' étant invariant par translation, il en résulte

$$\int f(x)\overline{\varphi(sx)}\,dx \equiv \int f(s^{-1}x)\overline{\varphi(x)}\,dx \equiv (f_s, \varphi) = 0,$$

et par suite $f_s \in V$.

V est donc un *idéal fermé* de L^1, idéal qui, si V' n'est pas réduit à zéro, est distinct de L^1; d'après le théorème taubérien, les transformées de Fourier des $f \in V$ ont au moins un zéro commun $\hat{x}_0$, ce qui s'écrit

$$\int f(x)\overline{(x, \hat{x}_0)}\,dx \equiv (f, \chi_0) = 0 \qquad \text{pour toute } f \in V,$$

où

$$\chi_0(x) = (x, \hat{x}_0);$$

il en résulte que l'élément χ_0 de L^∞ est orthogonal à V, et, d'après le lemme *c*, est contenu dans V' : d'où le théorème B.

V' étant comme plus haut un sous-espace vectoriel faiblement fermé et invariant par translation, on appellera *spectre de* V' l'ensemble $\sigma_{V'}$ des $\hat{x} \in \hat{G}$ tels que le caractère correspondant de G soit contenu dans V'; comme la topologie de $\hat{G}$ est précisément définie par la topologie faible de L^∞, et que V' est fermé pour cette topologie, on voit que *le spectre de* V' *est un sous-ensemble fermé de* $\hat{G}$; on peut encore le définir comme suit :

Considérons les $f \in L^1$ qui vérifient

$$f \star \varphi(x) = \int f(xy^{-1})\,\varphi(y)\,dy = 0 \qquad \text{pour toute } \varphi \in V';$$

(¹) Dans cet article, nous employons cette expression dans le sens de *sous-espace vectoriel* (cette dernière terminologie serait du reste plus correcte).

en posant

$$\tilde{f}(x) = \overline{f(x^{-1})}$$

l'équation précédente équivaut à

$$(\tilde{f}, \varphi_s) = 0, \qquad \text{c'est-à-dire à} \qquad \tilde{f} \in V;$$

si donc $\hat{x}$ est dans le spectre de V′, on a

$$\hat{\tilde{f}}(\hat{x}) = \int \tilde{f}(x)\overline{(x, \hat{x})}\, dx = \overline{\hat{f}(\hat{x})} = 0,$$

et réciproquement.

En d'autres termes, $\hat{x}$ *est dans le spectre de* V′ *si et seulement si*

$$f \star \varphi(x) = 0 \qquad \textit{pour toute } \varphi \in V' \qquad \textit{entraîne} \qquad \hat{f}(\hat{x}) = 0.$$

Au théorème B, *théorème d'existence*, est associé un *théorème d'approximation*, qu'on obtiendra de la façon suivante :

σ étant un sous-ensemble *fermé* de $\hat{G}$, on notera V'_σ le plus petit sous-espace vectoriel faiblement fermé de L^∞ contenant les caractères de G définis par les éléments de σ; il est clair que V'_σ est l'ensemble des fonctions de L^∞ qui sont de la forme

$$a_1(x, \hat{x}_1) + a_2(x, \hat{x}_2) + \ldots + a_n(x, \hat{x}_n), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_1, \hat{x}_2, \ldots, \hat{x}_n \in \sigma$$

ou qui sont approchables faiblement par de tels « polynomes trigonométriques ». On notera aussi V_σ la variété orthogonale à V'_σ : c'est d'après le *lemme c*, l'ensemble des $f \in L^1$ qui vérifient

$$\int f(x)\overline{(x, \hat{x})}\, dx = 0 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \sigma,$$

c'est-à-dire des $f \in L^1$ dont la transformée de Fourier s'annule sur σ. Il est clair aussi que V'_σ et V_σ sont invariantes par translation.

Ceci étant, on va démontrer le

THÉORÈME C. — *Soit* V′ *un sous-espace vectoriel faiblement fermé de* L^∞, *invariant par translation; pour tout voisinage fermé* $\sigma \subset \hat{G}$ *du spectre de* V′, *on a*

$$V' \subset V'_\sigma.$$

Démonstration. — D'après le lemme *c*, il faut prouver que toute $\varphi \in V'$ est orthogonale à la variété V_σ de L^1; ou, d'après une remarque faite plus haut, que si $f \in L^1$ vérifie $\hat{f}(\hat{x}) = 0$ pour tout $\hat{x} \in \sigma$, on a $f \star \varphi = 0$ pour toute $\varphi \in V'$.

Or la fonction $\psi = f \star \varphi$ est dans V′ (en raison de l'invariance de V′); son spectre (c'est-à-dire celui de la plus petite variété faiblement fermée contenant les ψ_s) est donc contenu dans celui de V′, et est par suite *intérieur* à σ : soit alors $\hat{x}_0$ un point du spectre de ψ; on peut trouver une $g \in L^1$ avec $\hat{g}(\hat{x}_0) \neq 0$ et $\hat{g}(\hat{x}) = 0$ en dehors d'un voisinage de $\hat{x}_0$ contenu dans σ; on a alors $f \star g = 0$, donc $g \star \psi = 0$, contrairement au fait que $\hat{g}$ n'est pas nulle au point $\hat{x}_0$ du spectre de ψ — à moins que l'on ait $\psi = 0$, ce qui démontre le théorème C.

Le théorème précédent conduit au problème suivant, que nous n'avons pu résoudre :

Problème I. — Soit V′ une variété linéaire faiblement fermée de L^∞, invariante par translation; V′ est-elle l'enveloppe linéaire faiblement fermée de son spectre ?

Il est clair que ce problème est équivalent au suivant :

Problème II. — Dans L^1, tout idéal fermé est-il l'intersection des idéaux maximaux qui le contiennent ?

Spectre d'une fonction de L^∞. — On a déjà introduit cette notion au cours de la démonstration précédente : le spectre de $\varphi(x)$ est celui de la plus petite variété linéaire invariante faiblement fermée qui contient $\varphi(x)$. Cette variété étant l'adhérence faible de l'ensemble des fonctions de la forme

$$\sum \alpha_i \varphi(s_i^{-1} x)$$

on peut poser la

Définition I. — *Un point $\hat{x} \in \hat{G}$ est dans le spectre de la fonction $\varphi(x)$ de L^∞, si toute fonction $f(x)$ de L^1 vérifiant $f \star \varphi(x) = 0$ vérifie $\hat{f}(\hat{x}) = 0$.*

Cas des fonctions continues. — Si la fonction $\varphi(x)$ est continue (et naturellement bornée), on peut remplacer la topologie faible par une autre.

Définition II. — *Une fonction continue bornée variable $\varphi(x)$ converge presque étroitement vers la fonction continue bornée $\varphi_0(x)$ si :*

a — $\varphi(x)$ converge vers $\varphi_0(x)$ uniformément sur toute partie compacte de G;

b — $\|\varphi\|_\infty$ reste inférieur à un nombre fixe $< +\infty$.

Observons que :

I. Si une φ variable de L^∞ converge *faiblement* vers une φ_0 tout en restant dans une boule fixe de L^∞, alors pour toute f de L^1, $f \star \varphi(x)$ converge vers $f \star \varphi_0(x)$ *uniformément sur toute partie compacte de* G, et reste uniformément bornée sur G.

II. Si $f \in L^1$ et si la fonction φ de L^∞ est continue, alors $f \star \varphi(x)$ est limite presque étroite de combinaisons linéaires de translatées de φ.

Ceci étant, et si le caractère $\chi(x)$ est dans le spectre de la fonction *continue* φ, on voit, en prenant une $f \in L^1$ telle que $f \star \chi(x) = \chi(x)$, que χ est limite presque étroite de fonctions $f \star \psi(x)$ (où ψ est une combinaison linéaire de translatéesde φ) et donc limite presque étroite de combinaisons linéaires de translatées de φ.

De même, si φ est limite *faible* de polynomes trigonométriques uniformément bornés, comme φ est limite presque étroite de fonctions de la forme $f \star \varphi(x)$, on voit que φ peut être approchée presque étroitement par des polynomes trigonométriques fabriqués avec les mêmes caractères que les précédents. D'où le

THÉORÈME D. — *Soit φ une fonction continue et bornée sur* G; *parmi les fonctions qui sont limites presque étroites de combinaisons linéaires de translatées de φ, il existe au moins un caractère de* G; *l'ensemble des caractères ainsi obtenus (spectre de φ) est un sous-ensemble fermé de* $\hat{G}$; *si l'on se donne arbitrairement un voisinage de ce spectre dans* $\hat{G}$, *alors on peut approcher φ, au sens de la convergence presque étroite, par des polynomes trigonométriques constitués au moyen des caractères de* G *situés dans ce voisinage.*

Remarque. — Les raisonnements utilisés pour démontrer le théorème D reposent sur la proposition suivante : tout élément du spectre de φ est limite de combinaisons linéaires de translatées de φ, *qui restent uniformément bornées.* Cette propriété est une conséquence du lemme *b*.

Fonctions dont le spectre est compact. — Une conséquence intéressante du théorème C est le

THÉORÈME E. — *Toute fonction mesurable et bornée dont le spectre est une partie compacte de* $\hat{G}$ *est presque partout égale à une fonction* UNIFORMÉMENT CONTINUE.

Démonstration. — Soient φ une fonction de L^∞ dont le spectre est un compact $\hat{K}$ de $\hat{G}$, et soit $\hat{U}$ un voisinage compact de $\hat{K}$; φ est limite faible de polynomes trigonométriques [1] de la forme

$$\psi(x) = a_0(x, \hat{x}_0) + \ldots + a_n(x, \hat{x}_n), \qquad \text{où } \hat{x}_0, \ldots, \hat{x} \in \hat{U};$$

soit alors $f(x)$ une fonction de L^1 dont la transformée de Fourier est égale à 1 sur $\hat{U}$; on aura $f \star \psi(x) = \psi(x)$ et par suite $\psi(x)$ converge *uniformément sur tout compact* vers une fonction nécessairement égale presque partout à $\varphi(x)$, qui vérifie donc aussi $f \star \varphi(x) = \varphi(x)$: d'où la continuité uniforme de $\varphi(x)$.

Un cas particulier de ce théorème est le fait suivant, qui est à la base de la transformation de Fourier : tout caractère mesurable de G est presque partout

---

[1] Uniformément bornés d'après le lemme *b*.

égal à un caractère continu (car son spectre est réduit à un seul point). On démontre d'ailleurs cette propriété de la même façon que le théorème E.

On a vu que le spectre de φ possédait la propriété suivante : on peut approcher φ au moyen de polynomes trigonométriques construits avec des caractères de G aussi voisins qu'on le désire du spectre. On va voir que cette propriété est caractéristique du spectre; d'une manière précise, on a le

THÉORÈME F. — *Le spectre d'une fonction φ de L^∞ est le plus petit ensemble fermé de $\hat{G}$ possédant la propriété suivante : étant donné un voisinage arbitraire de ce fermé, φ est limite faible de polynomes trigonométriques formés au moyen d'éléments de ce voisinage.*

Démonstration. — Soit tout d'abord σ un fermé tel que φ soit limite de polynomes de la forme

$$\sum a_i(x, \hat{x}_i), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_i \in \sigma;$$

avec les notations du théorème C, on a donc $\varphi \in V'_\sigma$; V'_σ étant invariante, le spectre de φ est donc contenu dans V'_σ, c'est-à-dire dans le spectre de V'_σ; mais celui-ci est précisément σ; car si $\hat{x}_0$ n'est pas dans le *fermé* σ, il lui est *extérieur*, en sorte que l'on peut trouver une $f \in L^1$ avec

$$(a) \qquad \hat{f}(\hat{x}_0) \neq 0;$$

$$(b) \qquad \hat{f}(\hat{x}) = 0 \qquad \text{pour tout } \hat{x} \in \sigma,$$

donc f est orthogonale à V'_σ sans l'être à $(x, \hat{x})$, qui n'est donc pas contenu dans V'_σ.

Ceci étant, soit σ un fermé tel que φ soit limite de polynomes formés au moyen des éléments d'un voisinage arbitraire de σ; ce qui précède prouve que tout voisinage fermé de σ contient le spectre de φ : donc σ lui-même contient le spectre de φ, d'où le théorème.

Addition des spectres. — Soient φ et ψ deux fonctions de L^∞, dont les spectres sont σ_φ et σ_ψ; que peut-on dire du spectre de la fonction $\varphi + \psi$?

Tout d'abord, si $\hat{U}$ et $\hat{V}$ sont des voisinages de σ_φ et σ_ψ, φ et ψ sont limites respectivement de

$$\sum a_i(x, \hat{x}_i), \qquad \text{où} \quad \hat{x}_i \in \hat{U} \qquad \text{et} \qquad \sum b_j(x, \hat{y}_j), \qquad \text{où} \quad \hat{y}_j \in \hat{V},$$

en sorte que $\varphi + \psi$ est limite de

$$\sum c_k(x, \hat{z}_k), \qquad \text{où} \quad \hat{z}_k \in \hat{U} \cup \hat{V};$$

le théorème F montre alors que le spectre de $\varphi + \psi$ est contenu dans la réunion de ceux de φ et ψ.

On ne peut rien dire de plus précis sans hypothèses supplémentaires (par exemple si $\varphi = -\psi$, le spectre de $\varphi + \psi$ est vide). Mais dans le cas où les spectres de φ et ψ sont *disjoints*, on a $\sigma_{\varphi+\psi} = \sigma_\varphi \cup \sigma_\psi$. En effet, soit une $f \in L^1$ telle que

$$f \star (\varphi + \psi) = 0, \qquad \text{d'où} \qquad f \star \varphi = -f \star \psi = \theta;$$

la fonction θ est à la fois dans V'_φ et dans V'_ψ; son spectre est donc à la fois dans σ_φ et σ_ψ : par suite il est vide, et l'on a $f \star \varphi = f \star \psi = 0$; de là résulte que toute fonction de L^1 orthogonale à $V'_{\varphi+\psi}$ l'est à V'_φ et à V'_ψ : on a donc

$$V'_\varphi \subset V'_{\varphi+\psi} \qquad \text{et} \qquad V'_\psi \subset V'_{\psi+\varphi}, \qquad \text{d'où} \quad \sigma_\varphi \cap \sigma_\psi \subset \sigma_{\varphi+\psi},$$

et finalement $\sigma_{\varphi+\psi} = \sigma_\varphi \cup \sigma_\psi$ comme annoncé. D'où le

THÉORÈME G. — *Le spectre de la somme de deux fonctions de* L^∞ *est contenu dans la réunion des spectres de ces deux fonctions; si en outre les spectres de celles-ci sont disjoints, alors le spectre de la somme est exactement la réunion des deux premiers.*

Spectre d'une limite faible. — Soit φ un élément variable de L^∞, qui converge faiblement vers une limite φ_0; supposons en outre que le spectre de φ reste contenu dans un fermé fixe σ. Alors il est clair que le spectre de φ_0 est lui-même contenu dans σ : c'est une conséquence immédiate du théorème F. On se servira plus loin de cette propriété.

Spectre d'un produit de composition. — Étant donné une $f \in L^1$, on notera σ_f le plus petit sous-ensemble *fermé* de $\hat{G}$ à l'extérieur duquel on a $\hat{f}(\hat{x}) = 0$. Il est clair que si, en outre, $f \in L^\infty$, σ_f n'est autre que le spectre de f au sens de la définition I.

Si $f \in L^1$ et $\varphi \in L^\infty$, il est alors immédiat de constater que

$$\sigma_{f\star\varphi} \subset \sigma_f \cap \sigma_\varphi;$$

de plus, tout point de σ_φ qui est *intérieur* à σ_f est dans $\sigma_{f\star\varphi}$. On observera qu'on n'a pas toujours $\sigma_{f\star\varphi} = \sigma_f \cap \sigma_\varphi$ [contre-exemple : $\varphi(x) = (x, \hat{x}_0)$ où $\hat{x}_0$ est un point *frontière* de σ_f; on a alors $\sigma_f \cap \sigma_\varphi = \{\hat{x}_0\}$, et $f \star \varphi = 0$ en sorte que $\sigma_{f\star\varphi}$ est vide].

3. — VARIÉTÉS SPECTRALES DES REPRÉSENTATIONS LINÉAIRES DE G. (1)

Représentations linéaires bornées de G. — Soit E un espace de Banach arbitraire [on notera X, Y, ... ses éléments, $\|X\|$ la norme, (X, X') la fonction

(1) Dans le cas où G est le groupe additif des nombres réels, on a des résultats beaucoup plus précis : toute représentation bornée U_t est engendrée par une transformation infinitésimale, suivant $U_t = e^{tA}$ (résultat dû à I. Gelfand dans le cas d'un espace de Banach quelconque).

réalisant la dualité entre E et son dual E′]. Une famille d'opérateurs linéaires bornés $U_x (x \in G)$ définis dans E sera une représentation linéaire bornée de G dans F si

a. $U_{xy} = U_x U_y$, $U_{x^{-1}} = U_x^{-1}$;
b. pour chaque $X \in E$, on a $\| U_x X \| = \| X \|$;
c. quels que soient $X \in E$ et $X' \in E'$, la fonction $(U_x X, X')$ est continue sur G.

DÉFINITION III. — *Étant donné un sous-ensemble fermé* σ *de* $\hat{G}$, *on appelle variété spectrale de* E *associée à* σ *l'ensemble* M_σ *des* $X \in E$ *qui possèdent la propriété suivante : pour tout* $X' \in E'$, *le spectre de la fonction* $(U_x X, X')$ *est contenu dans* σ.

Remarque. — D'après les hypothèses (*b*) et (*c*), les fonctions $(U_x X, X')$ sont bornées et continues.

THÉORÈME H. — *Pour tout ensemble fermé* $\sigma \subset \hat{G}$, M_σ *est un sous-espace vectoriel fermé de* E, *invariant par les opérateurs* U_x.

Démonstration. — Que M_σ soit un sous-espace vectoriel de E résulte immédiatement du théorème G; M_σ est fermé pour la raison suivante : si un X variable converge au sens de la norme de E vers un X_0, pour chaque X′ de E′, la fonction $(U_x X, X')$ converge, d'après l'hypothèse (*b*), *uniformément sur* G (donc *a fortiori* faiblement dans L^∞) vers $(U_x X_0, X')$; si alors X reste dans M_σ, on a aussi $X_0 \in M_\sigma$ (d'après la remarque terminant le paragraphe 2). Enfin, on a, si $\varphi(x) = (U_x X, X')$,

$$(U_x U_s X, X') = (U_{sx} X, X') = \varphi(sx),$$

en sorte que M_σ est invariante par les U_s.

Les propriétés algébriques des spectres, bien connues dans le cas classique où G = N (groupe additif des entiers) et où E est l'espace de Hilbert, cas qui correspond à la décomposition spectrale des opérateurs unitaires, s'étendent en partie au cas général :

THÉORÈME I*a*. — *La variété spectrale de* E *associée à l'intersection d'une famille quelconque de fermés est l'intersection des variétés spectrales associées à ces fermés.*

Il est superflu d'insister sur la démonstration, évidente de ce théorème.

THÉORÈME I*b*. — *La variété spectrale associée à la réunion d'un nombre fini de compacts disjoints est la somme directe des variétés associées à ces compacts.*

Démonstration. — On peut se borner à examiner le cas de *deux* compacts σ_1 et σ_2 sans point commun. Tout d'abord, les variétés M_{σ_2} et M_{σ_1} n'ont en commun que zéro; car si X est dans ces deux variétés, pour tout $X' \in E'$ le spectre de la fonction $(U_x X, X')$ est à la fois dans σ_1 et σ_2 : il est donc vide, d'où $(U_x X, X') = 0$ et $X = 0$.

Soient $\hat{U}_1$ et $\hat{U}_2$ des voisinages compacts disjoints de σ_1 et σ_2. On peut trouver une f_1 et une f_2 de L^1 vérifiant

$$\hat{f}_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_1, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_2; \end{cases}$$

$$\hat{f}_2(\hat{x}) = \begin{cases} 1 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_2, \\ 0 & \text{si } \hat{x} \in \hat{U}_1. \end{cases}$$

Considérons dans E les opérateurs définis symboliquement par

$$T_1 = \int U_x f_1(x)\, dx, \qquad T_2 = \int U_x f_2(x)\, dx,$$

et soit X un point de $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$; alors, on a immédiatement,

$$T_1 X \in M_{\sigma_1}, \qquad T_2 X \in M_{\sigma_2}$$

et

$$X = T_1 X + T_2 X,$$

d'où résulte que

$$M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \subset M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2};$$

inversement, si $X_1 \in M_{\sigma_1}$ et si $X_2 \in M_{\sigma_2}$, pour tout $X' \in E'$ le spectre de la fonction

$$(U_x X, X') = (U_x X_1, X') + (U_x X_2, X') \qquad (X = X_1 + X_2)$$

est contenu dans $\sigma_1 \cup \sigma_2$ (th. G), d'où

$$X_1 + X_2 \in M_{\sigma_1 \cup \sigma_2}$$

et l'on a finalement $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} = M_{\sigma_1} \oplus M_{\sigma_2}$ comme annoncé.

Remarque. — On a utilisé les « opérateurs de composition »

$$T_f = \int U_x f(x)\, dx \qquad (f \in L^1);$$

plus généralement, on peut définir

$$T_\mu = \int U_x d\mu(x)$$

de la façon suivante, pour toute mesure μ *bornée*.

Supposons d'abord μ portée par un *compact* K de G, et de plus *positive* et de *masse totale égale à un* : l'ensemble de ces mesures constitue (avec la topologie « vague ») un espace *compact* Ω_K; d'autre part, pour un $X \in E$, désignons par E(X, K) l'ensemble des $U_x X$ où x décrit K, et par C(X, K) l'*enveloppe fermée convexe* de E(X, K) dans E.

L'application $x \rightarrow U_x X$ de K dans E muni de la topologie *faible* étant, d'après la condition (c) sur les U_x, *continue*, on voit que E(X, K) et par suite C(X, K) sont *faiblement compacts* et donc *faiblement complets*.

D'autre part, associons à toute mesure *discrète* $\mu \in \Omega_K$, formée des masses ponctuelles $a_i (a_i \geqq 0,\ a_0 + \ldots + a_n = 1)$ placées aux points $x_i \in K$, le point

$$X_\mu = a_0 U_{x_0} X + \ldots + a_n U_{x_n} X \qquad \text{de} \quad C(X, K);$$

pour tout $X' \in E'$, on a trivialement

$$(X_\mu, X') = \int (U_x X, X')\, d\mu(x),$$

en sorte que, si μ converge vaguement vers μ_0, le premier membre tend vers une limite : donc X_μ converge faiblement vers un élément bien déterminé X_{μ_0} de C(X, K) qui, par définition, représente $\int U_x X\, d\mu_0(x)$.

T_μ étant défini dans le cas où μ vérifie les conditions précédentes, il n'y a évidemment aucune difficulté à passer au cas général.

Remarque b. — Il est probable qu'il existe une proposition plus générale que le théorème Ib, ce n'est toutefois pas évident; en particulier, peut-on affirmer que la variété associée à la somme de deux fermés quelconques soit la somme des variétés correspondantes ? (c'est-à-dire soit la plus petite variété linéaire fermée contenant les deux variétés en question). On peut en tout cas affirmer que l'on a $M_{\sigma_1 \cup \sigma_2} \supset M_{\sigma_1} + M_{\sigma_2}$ (mais c'est trivial).

Nous n'insisterons pas plus longtemps sur ce point, d'autant plus que, jusqu'ici, l'*existence de variétés spectrales non triviales* n'est pas prouvée.

Hypothèse A. — Toute fonction de L^∞ dont le spectre est réduit à un seul point $\hat{x}_0$ est de la forme $k(x, \hat{x}_0)$.

Théorème J. — *Si l'hypothèse* A *est vraie, ou bien il existe des variétés spectrales distinctes de zéro et de* E, *ou bien* U_x *a la forme triviale*

$$U_x X = (x, \hat{x}_0)\, X,$$

où $\hat{x}_0$ *est un élément de* $\hat{G}$.

Démonstration. — Supposons que M_σ soit constamment réduit à zéro ou à E, et soit σ_0 le plus petit fermé pour lequel on ait $M_{\sigma_0} = E$ (définition justifiée par le théorème Ia). Je dis que σ_0 se réduit à un seul point. En effet, σ_0 n'est pas vide, sinon on aurait $(U_x X, X') = 0$ et donc $U_x X = 0$ pour tout $X \in E$. Si d'autre part σ_0 contenait deux points distincts $\hat{x}_0$ et $\hat{x}_1$, pour toute $f \in L^1$, on pourrait faire $f = f_0 + f_1$ où $\hat{f}_0$ est nulle dans un *voisinage* de $\hat{x}_1$ et où $\hat{f}_1$ est nulle dans un *voisinage* de $\hat{x}_0$; $T_{f_0} X$ appartient donc à une M_σ où σ ne contient pas $\hat{x}_1$, donc ne contient pas σ_0 : par suite $T_{f_0}X = 0$; de même, $T_{f_1}X = 0$ et en définitive $T_f X = 0$ pour toute $f \in L^1$ et tout $X \in E$, ce qui ramène au cas $U_x = 0$.

Le fermé σ_0 se réduit donc à un seul point $\hat{x}_0$; de l'hypothèse A on déduit alors que

$$(U_x X, X') = (x, \hat{x}_0)(X, X'),$$

d'où le théorème J.

L'hypothèse A est un cas particulier du problème I énoncé au paragraphe précédent; on peut y répondre par l'affirmative dans le cas où $G = R^n$ (prouvé par Beurling pour $n = 1$, cas d'où l'on déduit facilement le cas général) et aussi dans le cas où G est compact (cela résulte alors de la théorie des fonctions presque périodiques).

Appendice 1. — Afin de préciser les rapports existants entre les résultats de A. Beurling [1] et ceux du paragraphe 2, rappelons que cet auteur parvient aux résultats suivants : disons qu'une fonction continue et bornée variable $\varphi \in L^\infty$ converge *étroitement* vers une fonction φ_0 (continue et bornée) si $\varphi(x)$ converge vers $\varphi_0(x)$ uniformément sur tout compact et si, en outre, $\|\varphi\|_\infty$ converge vers $\|\varphi_0\|_\infty$ (condition plus forte que la condition : $\sup\|\varphi\|_\infty < +\infty$); ceci étant, A. Beurling a prouvé les deux propriétés suivantes (pour $G = R^1$) :

1° Si une $\varphi \in L^\infty$ est *uniformément continue* sur G, il existe, parmi les limites *étroites* de combinaisons linéaires de translatées de φ, au moins un caractère de G;

2° En outre, si le spectre de φ contient *un seul* caractère $\hat{x}_0$, φ est proportionnelle à ce caractère (*cf.* l'Hypothèse A du § 3).

Dans le cas d'un groupe abélien quelconque, il est possible de montrer que, si $\varphi \in L_\infty$ est uniformément continue, il existe, parmi les limites étroites de combinaisons linéaires de translatées de φ, au moins une fonction *dont le spectre est réduit à un seul point* (qui peut être du reste choisi arbitrairement dans σ_φ). Une généralisation complète du théorème de Beurling se ramène donc essentiellement (ce que nous n'avons pu faire) à une démonstration de l'Hypothèse A. En termes algébriques, le résultat principal de Beurling peut donc s'énoncer comme suit : dans l'algèbre normée L^1, un idéal fermé ne peut être *primaire* sans être déjà *maximal*.

Appendice 2. — On trouvera la plupart des résultats du paragraphe 1 exposés, par une méthode plus systématiquement algébrique que la nôtre, mais au fond équivalente, dans le mémoire suivant : I. E. Segal, The group algebra of a locally

---

(1) A. Beurling, *Un théorème sur les fonctions uniformément continues et uniformément bornées sur l'axe réel* (*Acta Math.*, 77, 1945).

compact group (*Trans. Am. Math. Soc.*, 61, 1947, pp. 69-105). Signalons en passant que l'un des problèmes soulevés par les résultats de Segal dans le cas d'un groupe non abélien (à savoir : un idéal à gauche maximal fermé de l'algèbre L^1 est-il associé à une représentation *unitaire* irréductible du groupe?) dépend essentiellement du suivant : un sous-espace vectoriel faiblement fermé de L^∞, non nul et invariant par les translations à gauche de G, contient-il nécessairement une fonction *de type positif* non nulle? On peut voir facilement que ce dernier problème revient, à peu près, à une extension, analogue à celle du paragraphe 2, du théorème de Beurling à un groupe non abélien; mais il n'est bien entendu pas certain qu'une telle extension soit toujours possible. On trouvera dans une Note récente de D. A. Raïkov (1) une condition algébrique remarquablement simple pour que ce problème admette une réponse affirmative : c'est que, dans l'algèbre obtenue en adjoignant à L^1 un élément unité ε, tout élément de la forme $f \star \tilde{f} + \varepsilon$ soit inversible (condition évidemment vérifiée par les groupes abéliens).

---

(1) D. A. Raïkov, *To the theory of normed rings with an involution* [*C. R. U. R. S. S.* (Doklady), t. 54, 1946, p. 387-390].