ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PIERRE LELONG

Les fonctions plurisousharmoniques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 62 (1945), p. 301-338

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1945_3_62__301_0>

LES

FONCTIONS PLURISOUSHARMONIQUES

PAR M. P. LELONG.

I. — Introduction.

1. Je me propose, dans ce Mémoire, d'étudier une classe (L) de fonctions réelles dont l'étude systématique est en rapport avec celle des fonctions analytiques de plusieurs variables complexes.

La classe (L) est constituée par des fonctions définies dans des domaines de l'espace C^n des n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$. Ces fonctions sont semi-continues supérieurement du point M de coordonnées (z_k). La classe (L) est invariante dans son ensemble par les transformations analytiques faites sur les z_k et comprend les deux sous-ensembles suivants :

1° Les fonctions sousharmoniques dans le plan complexe C^1, ensemble auquel se réduit (L) pour $n=1$;

2° Les fonctions de la forme $\log|f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ où f est holomorphe dans un domaine de C^n.

Je désignerai par (L_1) ce dernier sous-ensemble qui contient en particulier les parties réelles des fonctions holomorphes. Pour celles-ci j'adopterai le nom de *fonctions pluriharmoniques* (1) et j'appellerai en conséquence *plurisousharmoniques* les fonctions étudiées dans ce Mémoire.

Dans un précédent travail (2) j'avais été conduit à grouper un certain nombre de propriétés des fonctions holomorphes de *deux* variables complexes. J'utilisais, en effet, pour les établir, une même méthode de démonstration qui consistait, pour l'essentiel, à déterminer une correspondance entre la propriété

(1) Au lieu du terme *biharmonique* employé quelquefois.

(2) *Ann. Éc. Norm.*, t. 58, 1941, p. 83-177.

étudiée et une propriété des fonctions sousharmoniques. Les propriétés des fonctions analytiques établies par cette voie étaient toutefois diverses, et s'il était heureux de faire appel aux moyens d'un chapitre déjà très élaboré de la théorie des fonctions de variables réelles, chapitre que des acquisitions d'un très grand prix sont venues récemment enrichir, par contre il était malaisé d'apercevoir plus qu'un rapport d'occasion entre les propriétés des fonctions analytiques ainsi établies, et le champ d'application de la méthode n'apparaissait pas nettement.

Le passage aux fonctions analytiques de plus de deux variables m'a conduit tout d'abord à rechercher une extension de la classe des fonctions sousharmoniques qui formaient l'instrument essentiel de la méthode suivie dans le cas de deux variables. Cette extension à l'espace $C^n (n \geqq 2)$, faite avec l'idée d'obtenir une classe iuvariante par les transformations analytiques de C^n, conduit à la classe (L) des fonctions plurisousharmoniques ainsi qu'on le verra.

L'extension obtenue présente également un intérêt logique. La définition adoptée pour les fonctions plurisousharmoniques délimite en effet le groupe des propriétés rencontrées antérieurement dans l'étude des fonctions analytiques de deux variables et permet d'en fixer le caractère véritable. La première étude de ces fonctions qui est faite ici explique plus généralement le succès de certaines méthodes de la théorie des fonctions de variables réelles pour l'étude de la structure analytique complexe dans le cas $n > 1$.

Parmi les propriétés des fonctions analytiques de n variables, il en est dont l'énoncé ne fait intervenir que le module de ces fonctions [indiquons dès maintenant qu'elles seront rapportées non au module $|f|$, mais à $\log |f|$, c'est-à-dire à la classe (L_1) définie plus haut]. Si l'on s'efforce de grouper celles de ces propriétés qu'on peut déduire directement de l'une d'entre elles, soit (P), il apparaît possible de choisir pour (P) une propriété nullement caractéristique de (L_1), et de conserver cependant parmi celles associées à (P) nombre de propriétés remarquables de (L_1); celles-ci appartiennent donc à une classe (L) plus étendue que la classe (L_1) définie plus haut à partir des modules des fonctions analytiques.

Nous choisirons comme propriété (P) celle qui résulte des deux remarques suivantes : si V est de classe (L_1) dans le domaine D :

1° V a pour trace sur une variété analytique linéaire (plan) à une dimension complexe dans D, soit la constante $-\infty$, soit une fonction sousharmonique;
2° V est bornée supérieurement sur tout compact contenu dans D.

Une fonction $V(-\infty \leqq V < \infty)$ satisfaisant à ces deux conditions sera dite *plurisousharmonique* (définition 1, § II). La suite montrera (§ III) que la classe (L) ainsi définie comprend des fonctions qui ne possèdent que la semi-continuité supérieure.

L'étude faite ici peut donc être présentée encore comme un moyen de grouper un ensemble de propriétés particulières des fonctions analytiques, ou, plus exactement, de leurs modules. Ces propriétés, dont l'ensemble est particulièrement riche pour $n > 1$, ne sont nullement liées à la totalité de la structure analytique complexe, étant l'apanage d'un ensemble de fonctions semi-continues; en conséquence, elles peuvent être déduites de (P) indépendamment des moyens que le caractère holomorphe pourrait offrir (série de Taylor, intégrale de Cauchy, etc.). On conçoit que leur démonstration fasse appel aux méthodes de la théorie des fonctions de variables réelles, et les raisons de succès de celle-ci apparaissent ainsi nettement.

Les considérations qui précèdent contribuent à une classification logique des difficultés qu'on rencontre dans l'étude des fonctions de plusieurs variables complexes. Leur importance et leur diversité soulignent la très grande richesse de la structure analytique pour $n \geqq 2$. L'analyse de celle-ci doit conduire, si possible, à en recomposer les éléments à partir des propriétés de structures moins riches; cette tendance aboutit dans des travaux récents à rattacher certaines des difficultés rencontrées à des problèmes portant sur une structure topologique ou algébrique. A côté des propriétés de ces deux ordres, il en existe d'autres parmi lesquelles se groupent les propriétés de la structure analytique complexe dont on a défini l'ensemble en plongeant (L_1) dans la classe plus étendue (L) : ce sont les propriétés d'une fonction holomorphe qui découlent du fait que $\log |f|$ est une fonction plurisousharmonique; on pourra les appeler *propriétés de convexité*, l'image attachée à ce mot s'accordant assez bien avec l'énoncé précis de certaines d'entre elles.

2. Donnons un aperçu des définitions ([3]) auxquelles nous conduit cette première étude des fonctions plurisousharmoniques. La première d'entre elles (définition 1, § II), fondée sur les deux conditions (P), permet d'établir par récurrence de C^{n-1} à C^n la sommabilité des fonctions étudiées, puis leur semi-continuité (§ III). Chemin faisant sont démontrées des propriétés de la moyenne sur l'arête d'un n-cercle, propriétés qui, associées à la semi-continuité, apportent, par la suite, une seconde définition des fonctions étudiées (théorème 3, § V); elle montre qu'une part importante de la théorie des fonctions sousharmoniques, celle qu'on peut établir sans l'aide de la représentation potentielle de Riesz, trouve son correspondant quand on passe de C^1 à $C^n (n > 1)$; toutefois les propriétés obtenues sont, en un certain sens, plus riches de conséquences précises [on remarquera, à ce propos, que la classe des fonctions de (L) qui ne dépendent que des $|z_k|$

([3]) Ces définitions ont été indiquées dans deux Notes (*C. R. Acad. Sc.*, t. 215, 1942, pp. 398 et 454).

est constituée (§ VIII) par les fonctions convexes des variables $u_k = \log|z_k|$, la convexité ayant lieu par rapport à l'*ensemble des variables*].

Une fonction plurisousharmonique dans un domaine de C^n est sousharmonique dans le domaine correspondant de l'espace réel R^{2n} trace de C^n (§ IV). La comparaison des diverses fonctions de masse associées aboutit à un résultat particulièrement simple (théorème 4, § VI); en particulier si la fonction est de classe (L_1), on retrouve ainsi un beau résultat de Poincaré ([4]) que nous énoncerons : si $f(z_k)$ est une fonction holomorphe dans un domaine D, $\log|f(z_k)|$ est égal, à une fonction harmonique près dans D des variables (x_k, y_k), au potentiel ([4]) d'une masse de densité 2π répartie sur la variété $f(z_k) = 0$.

Une troisième définition de la classe (L) est obtenue en remarquant qu'une fonction plurisousharmonique qui a des dérivées secondes continues, satisfait à un système d'inégalités aux dérivées partielles (système I, § VI), obtenu en exprimant qu'une forme hermitienne associée à V est positive ou nulle; les coefficients de cette forme sont les composantes d'un tenseur qui généralise la densité de masse potentielle à laquelle il se réduit pour $n = 1$. La classe (L) est formée des fonctions qui satisfont au système I et de celles (à l'exclusion de la constante $-\infty$) qui sont limites de suites non croissantes de telles fonctions, L'extension suivante de la propriété (P) en résulte : une fonction plurisousharmonique a pour trace sur une variété irréductible soit une fonction sousharmonique, soit la constante $-\infty$. On en déduit (§ VII) qu'une fonction plurisousharmonique sur un domaine fermé n'atteint un maximum qu'en un point de pseudo-convexité de la frontière du domaine.

Les familles de fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement possèdent des propriétés simples. Nous définissons (§ IX) une classe (M) plus vaste que (L) à laquelle appartiennent encore les enveloppes supérieures de telles familles. La régularisée supérieure d'une fonction de classe (M) appartient à (L). Une application des fonctions plurisousharmoniques concerne la démonstration de la propriété suivante signalée dans une Note antérieure ([5]) : si D est un domaine d'holomorphie, la distance à la frontière d'un point intérieur M, comptée parallèlement à une direction fixe de plan analytique à une dimension complexe, est une fonction plurisousharmonique de M. Cette propriété simple (dont on déduirait sans peine la plupart des caractères *nécessaires* de ces domaines) peut être appliquée à l'étude du prolongement analytique d'une fonction de n variables, ainsi que je me propose de le montrer dans un prochain travail.

([4]) *Mémoire sur le potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta Math.*, t. 22, p. 159). Voir la Note ([17]), n° 15 du présent travail.

([5]) *C. R. Acad. Sc.*, t. 216, 1943, p. 107.

II. — Définition des fonctions plurisousharmoniques.

3. Une fonction réelle et définie dans un domaine de l'espace C^n des n variables complexes $z_1, z_2, \ldots, z_n$ peut être notée brièvement sous la forme $V(M)$ d'une fonction de point. La nécessité d'expliciter les coordonnées complexes z_k de M amène toutefois à utiliser la notation $V(z_1, z_2, \ldots, z_n)$. C'est celle dont nous ferons usage en général, en observant, une fois pour toutes, que le signe de la fonction précédant les variables complexes z_k n'indique par lui-même qu'une correspondance, la plus générale, sauf mention du contraire.

Exceptionnellement nous considérerons la fonction sur l'espace R^{2n} à $2n$ coordonnées réelles x_k, y_k, qui est la trace de C^n. Nous écrirons alors $V(x_1, y_1; \ldots; x_n, y_n)$, en sous-entendant les équations $z_k = x_k + iy_k$ de passage de C^n à R^{2n}.

C'est ainsi qu'une fonction définie sur C^1 (plan complexe) s'écrit soit $V(M)$, soit $V(x, y)$, soit $V(z)$. Cette dernière notation, une fois prise la précaution signalée plus haut, présente quelques avantages pour l'étude des fonctions sousharmoniques [6], classe invariante, comme on sait, par les transformations analytiques de C^1. Pour $n \geq 2$, elle apporte une simplification indispensable à l'écriture des fonctions que nous définirons dans C^n, ces fonctions étant, dans leur ensemble, invariantes par les transformations analytiques faites sur les z_k.

4. Rappelons qu'un ensemble E est une *variété analytique complexe* [7] *dans un domaine* D de C^n si E est fermé sur D et si E est défini au voisinage d'un de ses points M par un nombre fini d'équations $f_p = 0$ (f_p holomorphe au voisinage de M); E sera dit *variété irréductible* dans D si E n'est pas la réunion de deux variétés dans D dont l'une au moins soit distincte de E. Nous ne considérerons que des variétés homogènes W^q, c'est-à-dire ayant en chacun de leurs points même nombre de dimensions complexes (ce nombre figurera en indice supérieur). Nous supposerons de plus qu'elles sont simples, c'est-à-dire que, N désignant le rang du tableau $\left(\frac{\partial f_p}{\partial z_k}\right)$, on n'a pas $N < q$ en tous les points de E appartenant à un voisinage ouvert ω (auquel cas on aurait $N < q$ sur toutes les variétés irréductibles contenues dans E et intersectant ω). Dans ces conditions nous appellerons *réguliers* sur E les points où $N = q$, *singuliers* ceux où $N < q$;

---

(6) On trouvera dans l'ouvrage de T. Radó, *Subharmonic functions* ((*Ergebnisse der Mathematik*, t. 5, 1937, p. 1), la démonstration des propriétés des fonctions sousharmoniques dont la connaissance est nécessaire à la lecture de ce travail; seuls les résultats plus récents ici utilisés feront l'objet d'un renvoi aux Mémoires originaux.

(7) *Voir* en particulier H. Cartan, *Idéaux de fonctions analytiques de n variables complexes* (*Ann. Éc. Norm.*, t. 61, 1944, p. 195).

ces derniers forment une variété $E' \subset E$, à $q-1$ dimensions complexes au plus au voisinage d'un de ses points.

Une variété linéaire de C^n sera appelée *plan*, ou plus précisément *variété plane*, quel que soit le nombre de ses dimensions.

La notion de fonction sousharmonique se transpose, par application, de l'espace C^1 à une variété W^1 définie dans un domaine D. Nous dirons que V(M) est *sousharmonique sur la variété irréductible* W^1 si :

1° V(M) possède une valeur bien déterminée ($-\infty \leqq V < \infty$) en tout point de W^1. Il existe un point de W^1 en lequel $V > -\infty$.

2° Si $M(z_k^0)$ est un point régulier de W^1 au voisinage duquel la variété est représentée par le système

$$z_k = \varphi_k(u) \tag{1}$$

(φ_k holomorphe du paramètre complexe u; $\varphi_k(u_0) = z_k^0$), V est sur W^1 une fonction sousharmonique de u au voisinage de u_0.

3° Au voisinage d'un point singulier, où il est besoin de plusieurs systèmes de la forme (1) pour représenter W^1, la condition précédente est réalisée par rapport à chacun d'eux séparément.

5. Nous caractériserons les fonctions plurisousharmoniques par la propriété de leurs traces sur les variétés planes P^1. Remarquons que les définitions adoptées plus haut entraînent que les diverses composantes connexes de l'intersection $D \cap W^q$, où W^q est une variété analytique *dans* C^n, soient comptées comme autant de variétés distinctes *dans* D. Dès lors, si Q^1 est un plan de C^n, chaque composante de l'intersection $Q^1 \cap D$ *constitue une variété plane* P^1 *dans* D.

Définition 1. — Nous dirons qu'une fonction V est plurisousharmonique dans un domaine D de C^n si elle satisfait aux conditions suivantes :

(*a*). *En tout point de* D *elle possède une valeur déterminée, réelle, qui peut être soit une valeur finie, soit la valeur représentée par* $-\infty$. *En un point de* D *au moins cette valeur est finie.*

(*b*). *Elle possède une borne supérieure finie sur tout compact contenu dans* D.

(*c*). *Sur une variété plane à une dimension complexe dans* D, *la trace de* V *est une fonction sousharmonique ou vaut identiquement* $-\infty$.

La seconde condition (*a*) s'énonce encore : la constante $-\infty$ n'est pas une fonction plurisousharmonique.

Dans C^1 on retrouve exactement la classe des fonctions sousharmoniques. Dans C^n pour $n \geqq 2$, la classe (L) ainsi définie n'est pas vide : elle contient les fonctions de la forme $C(f) \log |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|$ où $C(f)$ est une constante positive et $f(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ une fonction holomorphe dans D : ces fonctions constituent une classe restreinte qui jouit de propriétés particulières (continuité, disposition de l'ensemble $V = -\infty$). La définition conduit aux remarques suivantes :

1° Soit P^q une variété plane dans D définie en se donnant les z_k linéairement en fonction de q paramètres complexes $u_1, u_2, \ldots, u_q (q < n)$: V est fonction plurisousharmonique de $(u_1, \ldots, u_q)$ sur P^q ou identique à $-\infty$ sur P^q. Les fonctions de la classe restreinte montrent les deux possibilités.

2° Si V est pluriharmonique, $V_1 = aV + b$, où a et b sont deux constantes, $a \geqq 0$, $b > -\infty$, est une fonction plurisousharmonique.

3° Si $V_1, V_2, \ldots, V_p$ sont p fonctions plurisousharmoniques, $V = \max V_i$ est plurisousharmonique.

4° Une suite non croissante de fonctions plurisousharmoniques a pour limite soit une fonction de même nature, soit la constante $-\infty$.

5° Nous dirons que $\mathcal{E}$ est un *ensemble polaire* (8) *dans un domaine* D *de* C^n s'il existe une fonction V plurisousharmonique dans D dont l'ensemble $V = -\infty$ coïncide avec $\mathcal{E}$ dans D. La définition 1 a pour conséquence : *un ensemble polaire dans* D *a pour trace sur une variété plane* P^1 *dans* D *un ensemble de capacité extérieure* (9) *nulle ou bien la contient tout entière.*

6° Un ensemble polaire $\mathcal{E}$ ne contient aucun domaine.

Supposons en effet que V soit plurisousharmonique dans un domaine D contenant deux hypersphères S_1, S_2 sécantes et que $\mathcal{E}$ soit l'ensemble $V = -\infty$. Si $\mathcal{E}$ contenait S_1, il contiendrait aussi S_2, car on peut relier un point M de S_2 à un point Q intérieur à S_1 choisi de manière que M et Q appartiennent à une même variété plane P^1 dans la réunion $S_1 \cup S_2$; sur P^1, $\mathcal{E}$ ne saurait être de capacité extérieure nulle puisqu'il contient un voisinage de Q; il contient donc P^1 et M. Si $\mathcal{E}$ contient une hypersphère S_1 dans D, il contient ainsi toute réunion d'hypersphères deux à deux sécantes à laquelle appartient S_1, donc, en définitive, tout point intérieur à D, contrairement à la condition (a) de la définition 1.

La condition (a) est ainsi réalisée dans tout sous-domaine de D. Nous énoncerons :

Une fonction plurisousharmonique dans D *l'est aussi dans tout domaine intérieur à* D.

---

(8) L'expression a été formée par M. Brelot pour désigner l'ensemble des infinis (négatifs) d'une fonction sousharmonique dans tout le plan C^1. Il a été établi depuis par H. Cartan (*C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 945), qu'il y a identité entre ces ensembles et les ensembles de capacité extérieure nulle. Il nous paraît sans inconvénient de disposer du mot polaire dans un sens élargi afin d'exprimer une notion qui est nouvelle pour $n \geqq 2$.

(9) Un ensemble est dit de capacité extérieure nulle s'il est contenu dans un ensemble ouvert de capacité arbitrairement petite.

La trace d'un ensemble polaire dans D *sur un domaine* $D' \subset D$ *est un ensemble polaire dans* D'.

La propriété 6°, peu précise, constitue un lemme utile pour la suite.

III. — Sommabilité et semi-continuité des fonctions plurisousharmoniques.

6. Nous nous proposons d'établir le résultat suivant :

Théorème 1. — *Les fonctions plurisousharmoniques sont semi-continues supérieurement.*

Admettons l'énoncé pour l'espace C^{n-1} : une fonction V plurisousharmonique dans un domaine D de C^{n-1} est alors mesurable; elle est bornée supérieurement, donc sommable sur un compact de D, l'intégrale pouvant avoir la valeur $-\infty$.

Soit M un point de coordonnées ζ_k. Pour abréger, nous emploierons les notations suivantes :

$C(M, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, ou $C(M, r_k)$ désigne l'arête du n-cercle $|z_k - \zeta_k| = r_k$;
$S(M, r_1, r_2, \ldots, r_n)$, ou $S(M, r_k)$ désigne le n-cercle fermé $|z_k - \zeta_k| \leqq r_k$.

Nous désignerons par D_r l'ensemble des points de D qui sont centres d'un n-cercle $S(M, r)$ de rayons égaux à r entièrement contenu dans D.

Soit M un point de coordonnées ζ_k, contenu dans D_r et soit σ la variété parcourue par le point m de coordonnées dans C^{n-1}

$$z_k = \zeta_k + r_k e^{i\theta_k}$$

pour $2 \leqq k \leqq n$, $0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi$. Nous considérerons l'intégrale de Lebesgue étendue à σ

$$(1) \qquad I(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_\sigma V(z_1, m)\, dm$$
$$= \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

Montrons tout d'abord que (1) a un sens. Deux cas sont possibles : ou bien $V(z_1, m)$ vaut identiquement $-\infty$ pour la valeur z_1 considérée quand $m(z_k, k \geqq 2)$ varie au voisinage de $m_0(\zeta_k, k \geqq 2)$, ou bien $V(z_1, m)$ est une fonction plurisousharmonique de m (remarque 1°, § IV), et alors $V(z_1, m)$ est sommable sur σ. Dans les deux cas l'intégrale $I(z_1)$ a une valeur déterminée, finie ou $-\infty$. Nous établirons que $I(z_1)$ est encore une fonction sommable de z_1 grâce au lemme suivant :

Lemme 1. — *Soit* $V(z, m)$ *une fonction définie dans le domaine fermé* Δ *qui est le produit des domaines fermés* $z \in d$, $m \in \sigma$, *et possédant les propriétés suivantes :*

1° *elle est bornée supérieurement sur* Δ;

2° *pour* m *fixé, elle est fonction sousharmonique de* z *dans le domaine fermé* d, *ou bien est identique à la constante* $-\infty$;

3° *pour* z *fixé, elle est fonction semi-continue supérieurement de* m *dans* σ.

Dans ces conditions, l'intégrale de Lebesgue

$$\mathrm{I}(z) = \int_\sigma \mathrm{V}(z, m)\, dm \tag{2}$$

est une fonction quasi-sousharmonique de z *ou vaut identiquement* $-\infty$ *dans* d.

Nous disons qu'une fonction est *quasi-sousharmonique* si elle est égale à une fonction sousharmonique, sauf aux points d'un ensemble de capacité extérieure nulle où elle lui est inférieure.

Remarquons pour la démonstration du lemme 1 que, $\mathrm{V}(z, m)$ étant semi-continue supérieurement, l'intégrale de Lebesgue (2) peut s'obtenir comme intégrale supérieure de Riemann. Soient $\Delta\sigma_i^p$ les mesures des éléments d'une partition de σ, i étant l'indice de l'élément, p celui de la partition, et soit $\mu_i^p(z)$ le maximum de $\mathrm{V}(z, m)$ pour $m \in \Delta\sigma_i^p$. Posons

$$\mathrm{S}_p(z) = \sum_i \mu_i^p(z)\, \Delta\sigma_i^p.$$

La fonction $\mu_i^p(z)$ est une enveloppe supérieure de fonctions sousharmoniques (ou identiques à $-\infty$) bornées supérieurement. Dans ces conditions $\mu_i^p(z)$ est une fonction quasi-sousharmonique [10] (ou $-\infty$) dans d; $\mathrm{S}_p(z)$ est de même nature, ainsi que l'intégrale (2) obtenue comme limite de la suite $\mathrm{S}_p(z)$ quand on donne à $\varepsilon_p = \max_i \Delta\sigma_i^p$ une suite de valeurs tendant vers zéro. Le lemme 1 est ainsi démontré.

Il en résulte que $\mathrm{I}(z_1)$, calculé à partir de (1), est fonction quasi-sousharmonique de z_1 (ou est identique à $-\infty$), donc est sommable en z_1 pour $|z_1 - \zeta_1| \leqq r$.

Pour abréger, nous conviendrons :

$\mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_1, \ldots, r_n)$ ou $\mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_k)$ désigne la moyenne de V sur $\mathrm{C}(\mathrm{M}, r_k)$ prise par rapport aux $\theta_k (0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi,\ k = 1, 2, \ldots, n)$.

$\mathrm{A}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_1, \ldots, r_n)$ ou $\mathrm{A}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_k)$ désigne la moyenne de V sur le n-cercle $\mathrm{S}(\mathrm{M}, r_k)$.

Dans ces conditions on a

$$\mathrm{L}(\mathrm{V}, \mathrm{M}, r_k) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{I}(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1})\, d\theta_1,$$

---

(10) *Voir*, pour ce théorème dû à M. Brelot et H. Cartan : H. CARTAN, *C. R. Acad. Sc.*, 214, 1942, p. 945, et M. BRELOT, *Ann. Ec. Norm.* t. 61, p. 317.

et le résultat précédent s'énonce :

Lemme 2. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^n, *et* $S(M, r_k)$ *un n-cercle intérieur à* D : *le théorème* 1 *supposé vrai pour* C^{n-1} *entraîne l'existence de la moyenne* $L(V, M, r_k)$ dans C^n.

7. En utilisant la remarque 6°, n° 4 et une inégalité classique, nous établirons maintenant que $L(V, M, r_k)$ a une valeur finie.

Remarquons tout d'abord que, V étant borné supérieurement, $L(V, M, r_k)$ peut, selon un résultat connu ([11]), être calculée soit comme intégrale double à partir de (1) et (3), soit comme intégrale étendue à la variété $C(M, r_k)$, soit encore comme intégrale n-uple sous la forme

$$(3)\qquad L(V, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi}\cdots\int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

l'ordre des n intégrations étant quelconque.

Supposons $M \in D_{2r}$, de manière que pour $r_k < r$, on ait $S(M, r_k) \subset D_r$. Désignons par K une borne supérieure de V sur D_r et majorons V dans $S(M, \tau r_k)$, $0 < \tau < 1$, en fonction de $L(V, M, r_k)$. Pour ce calcul nous supposerons, afin de simplifier l'écriture, que les coordonnées ζ_k de M sont nulles. Notons $l(\xi_1, z_1)$ le noyau de Poisson, égal à la partie réelle du rapport $\frac{\xi_1 + z_1}{\xi_1 - z_1}$, et majorons V en utilisant sa sousharmonicité en z_1 pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés. On a, pour $|\xi_1| = r_1$ et $|z_1| = \tau r_1$,

$$(4)\qquad B_\tau = \frac{1-\tau}{1+\tau} \leq l(\xi_1, z_1) \leq \frac{1+\tau}{1-\tau}.$$

Posons $V_1 = V - K$: V_1 est négatif ou nul. En exprimant que V_1 est au plus égal à la fonction harmonique qui prend les mêmes valeurs pour $|z_1| = r_1$ et se calcule par l'intégrale de Poisson, nous obtenons

$$(5)\qquad V_1(z_1, z_2, \ldots, z_n) \leq B_\tau \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V_1(r e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1.$$

Dans (5) il n'est pas exclu que les deux membres aient pour valeur $-\infty$.

Considérons maintenant z_1 comme seul variable et appliquons la majoration (5) à la fonction V_1 écrite au second membre de (5) : il vient une inégalité analogue où figure une double moyenne. En répétant l'opération par rapport à toutes les variables z_k successivement, nous obtenons la majoration cherchée qui s'écrit, P représentant le point de coordonnées z_k

$$(6)\qquad \begin{cases} V_1(P) \leq B_\tau^n L(V_1, M, r_k), \\ V(P) \leq B_\tau^n L(V, M, r_k) + K(1 - B_\tau^n). \end{cases}$$

([11]) Énoncé dû à L. Tonelli. *Voir* Saks, *Théorie de l'intégrale*, p. 75, édition française, 1933.

Nous énoncerons :

LEMME 3. — *Si* V *est plurisousharmonique sur le n-cercle fermé* $S(M, r_k)$, *et y est borné supérieurement par* K, (5) *donne une majoration de* V(P) *dans le n-cercle* $S(M, \tau r_k)$, $0 < \tau < 1$, B_τ *ayant la valeur* (4).

Supposons qu'on ait $L(V, M, r_k) = -\infty$, le n-cercle $S(M, r_k)$ étant intérieur au domaine D où V est plurisousharmonique : (6) montre qu'on a $V(P) = -\infty$ dans $S(M, \tau r_k)$; l'ensemble polaire $V = -\infty$ contient un domaine contrairement à la remarque 6°, paragraphe 4. Ainsi :

LEMME 4. — *Si* V *est plurisousharmonique dans* D, *la moyenne* $L(V, M, r_k)$ *possède une valeur finie pour* $r_k > 0$ *et pour* $S(M, r_k) \subset D$; *elle est fonction non décroissante et convexe de chacune des variables* $u_k = \log r_k$.

La dernière partie de l'énoncé résulte de (3) et du caractère sousharmonique de V par rapport à chacun des z_k séparément; elle entraîne à son tour :

LEMME 5. — *La moyenne* $L(V, M, r_k)$ *possède, quand* M *est fixé et quand le plus grand des* r_k *tend vers zéro, une limite déterminée* $V_0(M)$.

8. Nous sommes maintenant en possession du résultat suivant : V étant une fonction plurisousharmonique dans un domaine de C^n le théorème 1 supposé vrai pour C^{n-1} entraîne dans C^n l'existence et les propriétés de la moyenne $L(V, M, r_k)$ qui sont exprimées par les lemmes 2, 3, 4, 5.

Nous nous proposons maintenant de montrer que ces mêmes propriétés ont pour conséquence la semi-continuité supérieure de V, c'est-à-dire entraînent le théorème 1 pour l'espace C^n.

Nous appelons *régularisée supérieure* [12] d'une fonction A(M) une fonction B(M) égale en chaque point au maximum de Baire de la fonction A(M). Nous écrirons :

$$B(M) = \text{reg. sup. } A(M),$$

B(M) est encore la plus petite majorante de A(M) qui soit semi-continue supérieurement.

En posant

$$V_0(M) = \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k)$$

---

[12] En un point M considérons une suite de voisinages $S_n(M)$ n'ayant en commun que le point M : le maximum de Baire est la borne inférieure des maxima μ_n de la fonction sur ces voisinages. Dans un travail antérieur (*Thèse Ann. Éc. Norm.*, 58, 1941, p. 98), j'avais, pour une classe de fonctions particulière, considéré les maxima μ'_n sur les ensembles ouverts $S_n(M) - M$ et défini la valeur de la régularisée supérieure en M à partir des μ'_n : pour ces fonctions qui rentrent d'ailleurs dans la classe (M) définie § IX, la plus petite majorante semi-continue supérieurement peut en effet être obtenue de cette manière.

nous nous proposons de montrer successivement les deux égalités

$$\text{(7)} \qquad V_0(M) = \text{reg. sup. } V(M),$$

$$\text{(8)} \qquad V_0(M) = V(M).$$

Le théorème 1 en résultera dans l'espace C^n.

L'égalité (7) se démontre comme dans le cas $n=1$. Soit ε quelconque positif : il existe un voisinage ω de M tel que pour $P \in \omega$, on ait

$$V(P) < \text{reg. sup. } V(M) + \varepsilon.$$

Pour $\max r_k$ suffisamment petit, on aura

$$S(M, r_k) \subset \omega,$$

donc

$$L(V, M, r_k) \leq \text{reg. sup. } V(M) + \varepsilon.$$

D'où

$$\text{(9)} \qquad V_0(M) = \lim_{r_k=0} L(V, M, r_k) \leq \text{reg. sup. } V(M).$$

Par ailleurs revenons à (6) et posons $\tau = 1 - \eta$; il vient $B_\tau = 1 - \eta'$, η' tendant vers zéro en même temps que η. De (6) résulte

$$\text{(6')} \qquad V(P) \leq (1 - \eta') L(V, M, r_k) + \eta' K$$

pour $P \in S(M, \varepsilon r_k)$. Faisons tendre η vers zéro; (6') nous donne

$$\text{(10)} \qquad \text{reg. sup. } V(M) \leq L(V, M, r_k),$$

quels que soient les $r_k > 0$. Faisons tendre ceux-ci vers zéro; nous obtenons

$$\text{(11)} \qquad \text{reg. sup. } V(M) \leq \lim_{r_k=0} L(V, M, r_k) = V_0(M).$$

L'ensemble de (9) et (11) démontre (7).

9. Reste à établir (8) qui s'énonce :

Lemme 6. — *Une fonction plurisousharmonique* V(M) *est égale à la limite de sa moyenne* $L(V, M, r_k)$ *quand* $\max r_k$ *tend vers zéro.*

Posons $\rho = \max(r_2, \ldots, r_n)$ et remarquons que le théorème 1 supposé vrai dans C^{n-1} entraîne pour une fonction plurisousharmonique de C^{n-1} les égalités (7) et (8). On aura donc, en laissant ζ_1 constant,

$$\text{(12)} \qquad V(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = \lim_{\rho=0} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(\zeta_1, \zeta_2 + r_2 e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

Cette égalité est en effet vérifiée si $V(\zeta_1, z_2, \ldots, z_n)$ est une fonction plurisousharmonique de $(z_2, \ldots, z_n)$ pour la valeur ζ_1 considérée; elle l'est encore si, pour cette valeur ζ_1, V vaut identiquement $-\infty$ quand on fait varier $(z_2, \ldots, z_n)$ au voisinage de $(\zeta_2, \ldots, \zeta_n)$.

Ceci posé, $M(\zeta_k)$ étant un point déterminé du domaine D où V est plurisousharmonique, nous considérerons la différence

$$(13)\qquad \varepsilon_\rho(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + \rho e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + \rho e^{i\theta_n}) \times d\theta_2 \ldots d\theta_n - V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n),$$

où z_1 est variable dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| < r_0$; on suppose $\rho < \rho_0$, r_0 et ρ_0 positifs assez petits pour que $S(M, r_0, \rho_0, \ldots, \rho_0)$ soit intérieur à D. Nous distinguerons trois cas selon le comportement de V au point M, le raisonnement ne différant du reste que par des détails :

1° $V(M) > -\infty$: la fonction $\varepsilon_\rho(z_1)$ est alors définie sauf pour les valeurs de z_1 où $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = -\infty$, valeurs dont l'ensemble e est de capacité nulle dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| < r_1$ et est indépendant de ρ; hors de e, on a

$$\varepsilon_\rho(z_1) \geqq 0, \quad \varepsilon_{\rho_1}(z_1) \leqq \varepsilon_{\rho_2}(z_2) \qquad \text{pour } 0 < \rho_1 < \rho_2 < \rho_0$$

et

$$\lim_{\rho=0} \varepsilon_\rho(z_1) = 0$$

d'après (12) et (13). Considérons alors l'intégrale

$$(14)\qquad J_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \varepsilon_\rho(\zeta_1 + r e^{i\theta_1})\, d\theta_1,$$

où r a une valeur positive inférieure à r_0. Pour $\rho = \rho_0$, J_ρ a un sens, car on a

$$(15)\qquad J_\rho = L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r e^{i\theta_1}, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\theta_1.$$

Au second membre le premier terme est fini (lemme 4), et il en est de même de l'intégrale qui est supérieure à $V(\zeta_1, \ldots, \zeta_n) = V(M) > -\infty$: J_ρ a donc une valeur finie pour $\rho = \rho_0$. Pour résumer : les fonctions $\varepsilon_\rho(z_1)$ forment une suite de fonctions définies hors de l'ensemble de mesure nulle e, suite non croissante quand ρ tend vers zéro en décroissant, et les intégrales J_ρ, $(\rho < \rho_0)$, sont bornées par J_{ρ_0}. Dans ces conditions on peut affirmer que J_ρ tend vers zéro avec ρ. Le résultat est indépendant de la valeur positive, inférieure à r_0, donnée à r. Or on a

$$(16)\quad L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - V(M) = J_\rho + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} V(\zeta_1 + r e^{i\theta_1}, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)\, d\theta_1 - V(M).$$

Donnons à r une valeur positive r_1 assez petite pour que la différence des deux derniers termes au second membre de (16) soit inférieure à ε pour $r = r_1$.

Prenons ensuite ρ_1 de manière que J_{ρ_1} soit, lui aussi, inférieur à ε. Nous aurons

$$0 < L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) - V(M) < 2\varepsilon,$$

pour $r < r_1$, $\rho < \rho_1$, ce qui démontre le lemme 6 dans le cas étudié.

2° Supposons $V(M) = -\infty$, la fonction $V(z, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ de z n'étant pas identique à $-\infty$ au voisinage de $z = \zeta_1$ pour les coordonnées $\zeta_2, \ldots \zeta_n$ considérées. L'ensemble $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n) = -\infty$ est encore un ensemble de capacité nulle e (auquel appartient maintenant la valeur $z_1 = \zeta_1$ correspondant au point M); (13) définit $\varepsilon_\rho(z)$ sauf sur e; (15) montre que J_ρ a encore une valeur finie et tend vers zéro avec ρ. L'intégrale au second membre de (15) a pour limite $-\infty$ quand r tend vers zéro. On choisira r_0 pour que cette intégrale soit inférieure à $-N$, puis ρ_0 pour que J_{ρ_0} soit inférieur à l'unité. On aura alors d'après (5)

$$L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho) < -N + 1 \qquad \text{pour } r < r_0, \ \rho < \rho_0.$$

On a donc

$$\lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = -\infty = V(M).$$

3° Supposons enfin que pour les valeurs $\zeta_2, \ldots, \zeta_n$ considérées et pour $|z_1 - \zeta_1| \leqq r_0$, $V(z_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ soit identique à $-\infty$: (13) n'a plus de sens; nous poserons

$$\lambda_\rho(z_1) = \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \zeta_2 + \rho e^{i\theta_2}, \ldots, \zeta_n + \rho e^{i\theta_n})\, d\theta_2 \ldots d\theta_n.$$

On a

$$\lambda_{\rho_1}(z_1) \leqq \lambda_{\rho_0}(z_1) \quad \text{pour } \rho_1 < \rho_0 \qquad \text{et} \qquad \lim_{\rho = 0} \lambda_\rho(z_1) = -\infty,$$

quel que soit z_1 dans le cercle $|z_1 - \zeta_1| \leqq r_0$. L'intégrale

$$J'_\rho = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \lambda_\rho(\zeta_1 + r e^{i\theta_1})\, d\theta_1$$

a un sens et vaut $L(V, M, r, \rho, \ldots, \rho)$: si l'on fixe $r (r < r_0)$, elle tend vers $-\infty$ quand ρ tend vers zéro. On a donc encore

$$\lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = -\infty = V(M),$$

ce qui établit le lemme 7 dans le troisième des cas possibles.

Les propriétés (7) et (8) sont ainsi démontrées sous la forme

$$\text{rég. sup. } V(M) = \lim_{r_k = 0} L(V, M, r_k) = V(M)$$

égalités dont la comparaison établit le théorème I.

IV. — Fonctions plurisousharmoniques de C^n et fonctions sousharmoniques de R^{2n}.

10. Dans la démonstration du théorème 1 interviennent seules les propriétés de la fonction $V(M)$ sur les plans P^1 obtenus en laissant constants $n-1$ des z_k. Nous considérerons trois classes de fonctions (A), (B), (L).

(A) désigne les fonctions sousharmoniques dans un domaine de R^{2n}.

(B) désigne l'ensemble des fonctions V satisfaisant dans un domaine de C^n aux conditions (a), (b) de la définition 1, et à la condition (c_1) :

(c_1). P^1 *étant une variété plane (dans le domaine de définition de la fonction) obtenue en donnant à* $n-1$ *des* z_k *des valeurs constantes,* V *est sousharmonique sur* P^1 *ou y vaut identiquement* $-\infty$.

(L) désigne enfin la classe des fonctions plurisousharmoniques dans un domaine de C^n.

La démonstration du théorème 1 s'applique au résultat plus précis.

Théorème 1 *bis*. — *Les fonctions de la classe* (B) *sont semi-continues supérieurement.*

Les classes (A), (B), (L) sont donc toutes trois semi-continues : nous allons les comparer. Remarquons que (B) possède les propriétés établies, chemin faisant, au paragraphe 7; on a, en particulier, pour une fonction $V \in (B)$

$$V(M) \leq L(V, M, r_k). \tag{1}$$

Nous en déduirons :

Théorème 2 *bis*. — *La classe* (B) *est contenue dans* (A).

Il nous suffira en faisant appel à une propriété bien connue des fonctions sousharmoniques de démontrer que $V(M)$ est au plus égal à la moyenne de V sur une hypersphère Σ de centre M intérieure au domaine D de définition de la fonction. Nous désignerons par ζ_k les coordonnées de M; celles d'un point de Σ sont de la forme

$$z_k = \zeta_k + r_k e^{i\theta_k} \quad \text{avec} \quad \sum_k r_k^2 = R^2,$$

R étant le rayon de Σ; l'élément d'aire $d\sigma$ sur Σ a pour expression

$$d\sigma = h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n,$$

où $h(r_1, \ldots, r_{n-1})$ est positif. On a donc

$$\int_\Sigma d\sigma = (2\pi)^n \int h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1},$$

$$\int_\Sigma V\, d\sigma = \int_\Sigma V(\zeta_k + r_k e^{i\theta_k})\, h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

$$= (2\pi)^n \int L(V, M, r_k)\, h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1}.$$

ou, encore, d'après (1),

$$\int_\Sigma V\, d\sigma \geqq (2\pi)^n V(M) \int h(r_1, \ldots, r_{n-1})\, dr_1 \ldots dr_{n-1} = V(M) \int_\Sigma d\sigma,$$

ce qui démontre le théorème 2 *bis*. Pour achever d'ordonner (A), (B), (L), remarquons que (c_1) est moins restrictif que la condition (c) de la définition 1 ; on a donc $(L) \subset (B)$ et pour résumer

$$(L) \subset (B) \subset (A).$$

Ainsi donc :

THÉORÈME 2. — *Une fonction plurisousharmonique de C^n a pour trace une fonction sousharmonique sur R^{2n}.*

En particulier un ensemble polaire dans un domaine D de C^n est un ensemble de capacité extérieure nulle (au sens de la capacité dans R^{2n}); un tel ensemble est donc de mesure nulle dans R^{2n}. En voici une conséquence : si $V_1, \ldots, V_p$ sont p fonctions plurisousharmoniques dans D, $V = V_1 + \ldots V_p$ est de même nature; en effet il existe un point de D où l'on a $V > -\infty$, D ne pouvant être la somme d'ensembles de mesure nulle en nombre fini.

V. — Propriétés caractéristiques des moyennes sur un n-cercle.

11. Parmi les domaines appelés n-cercles, nous comprendrons non seulement les domaines déterminés par n inégalités de la forme $|z_k - \zeta_k| \leqq r_k$, mais encore tous ceux qui en résultent par un changement de coordonnées dans C^n. Un n-cercle quelconque sera défini par n inégalités

$$\left| \sum_i a_{ik}(z_k - \zeta_k) \right| \leqq r_k,$$

où le tableau (a_{ik}) est formé des coefficients d'une transformation orthogonale et unitaire :

$$\sum_i a_{ip}\overline{a_{iq}} = \delta_{pq}, \quad \delta_{pq} = 0 \text{ si } p \neq q, \quad \delta_{pq} = 1 \text{ si } p = q.$$

Les rayons r_k sont des nombres *positifs*; le point de coordonnées (ζ_k) est le *centre* du n-cercle; la variété à n dimensions réelles

$$\sum_i a_{ik}(z_k - \zeta_k) = r_k e^{i\theta_k} \qquad (0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi)$$

est l'*arête* du n-cercle.

Des trois classes semi-continues supérieurement (A), (B), (L) du paragraphe IV, la première est caractérisée par la propriété de la moyenne sur la frontière à $2n-1$ dimensions réelles d'une hypersphère, la seconde par la propriété de la moyenne sur l'arête d'un n-cercle dont les faces sont parallèles aux plans coordonnés; enfin les fonctions plurisousharmoniques le sont par la propriété de leurs moyennes sur l'arête d'un n-cercle *quelconque*. Nous démontrerons en effet

THÉORÈME 3. — *Pour qu'une fonction* $V(-\infty \leqq V < \infty,\ V \not\equiv -\infty)$ *définie dans un domaine* D *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'elle possède les propriétés suivantes :*

(α). V *est semi-continue supérieurement dans* D.

(β) *A tout point* $M \in D$ *correspond un nombre positif* $\rho(M)$ *tel que la moyenne de* V *sur l'arête d'un n-cercle quelconque de centre* M, *de rayons positifs inférieurs à* $\rho(M)$, *soit au moins égale à* $V(M)$.

Pour qu'une fonction soit plurisousharmonique, il faut et il suffit, bien évidemment, qu'elle soit de classe (B) et le demeure par tout changement de coordonnées de C^n. Donc le théorème 3 équivaut au

LEMME 1. — *Pour qu'une fonction* $V(M)$ *soit de classe* (B) *dans un domaine* D, *il faut et il suffit qu'elle satisfasse à la condition* (α) *et à la condition*

(β_1) *A tout point* M *de* D *correspond un nombre positif* $\rho(M)$ *tel que*

$$V(M) \leqq L(V, M, r_k) \qquad \text{pour } 0 < r_k < \rho(M).$$

Si l'on remplace dans les hypothèses du lemme 1 la condition (β_1) par la condition (β_2) qui n'en diffère que par l'inégalité moins restrictive $0 \leqq r_k < \rho(M)$, l'énoncé est immédiatement établi. En effet prenons $r_1 > 0$, $r_2 = r_3 \ldots = r_n = 0$; l'inégalité $V(M) \leqq L(V, M, r_k)$ montre, associée à (α), que V est sousharmonique de z_1 variant seul, ou vaut identiquement $-\infty$.

Tout revient donc à montrer que (α), (β_2) entraînent (β_1). Ce point résulte à son tour des remarques suivantes que nous présenterons sous forme de lemmes :

LEMME 2. — *Si* V *est une fonction semi-continue supérieurement,* $e(t)$ *un ensemble fermé qui se déforme continûment en fonction du paramètre réel* t, *le maximum de* $V(M)$ *pour* $M \in e(t)$ *est une fonction semi-continue supérieurement de* t.

En effet si pour $t = t_0$ ce maximum vaut A, l'ensemble $V < A + \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, étant ouvert, constitue un voisinage de $e(t_0)$, donc contient $e(t_0)$ pour $|t - t_0| < \eta$.

Pour assurer la semi-continuité de la moyenne de V sur un ensemble fermé $\sigma(t)$ qui se déforme continûment en fonction d'un paramètre réel t, nous sommes amené à faire des hypothèses plus précises; ces hypothèses seront réalisées en particulier, quand $\sigma(t)$ sera une variété dépendant analytiquement de t, ne conservant pas nécessairement un nombre de dimensions constant quand t varie; $\sigma(t)$ pourra en particulier se réduire à un point auquel cas la moyenne de V sera la valeur de V en ce point. Nous supposerons que les conditions suivantes (*conditions* C) sont réalisées pour $|t - t_0| < h$.

1° Sur $\sigma(t)$ est définie une mesure $\mathfrak{M}_t$ (ou répartition de masses positives) faisant correspondre un nombre positif (mesure ou masse portée) à chaque sous-ensemble fermé, la mesure de $\sigma(t)$ avec $\mathfrak{M}_t$ étant égale à l'unité.

2° Entre $\sigma(t)$ et $\sigma(t_0)$ existe une correspondance $\Gamma(t)$ de manière qu'à tout point M de $\sigma(t_0)$ corresponde un ensemble $e(t, M)$ de $\sigma(t)$, un point de $\sigma(t)$ appartenant à un ensemble $e(t, M)$ et à un seul.

3° ε étant un nombre positif quelconque, il lui correspond un nombre $\eta (\eta < h)$ tel que :

a. l'ensemble $e(t, M)$ est intérieur à l'hypersphère de centre M, de rayon ε pour tout $M \in \sigma(t_0)$ et tout t de l'intervalle $|t - t_0| < \eta$.

b. ω_t désignant la mesure d'un ensemble (ω_t) de $\sigma(t)$ par $\mathfrak{M}_t$, on a

$$(1 - \varepsilon)\omega_0 < \omega_t < (1 + \varepsilon)\omega_0$$

pour tout couple d'ensembles (ω_0), (ω_t) en correspondance par $\Gamma(t)$ et pour tout t de l'intervalle $|t - t_0| < \eta$.

LEMME 3. — *Si la déformation de $\sigma(t)$ satisfait aux conditions* C *pour les valeurs de t voisines de t_0 et si* V(M) *est semi-continue supérieurement, la moyenne de* V(M) *sur $\sigma(t)$ au sens de la mesure $\mathfrak{M}_t$ est semi-continue supérieurement pour* $t = t_0$.

Soient, en effet, (ω_0^i) les éléments d'une partition de $\sigma(t_0)$ en domaines fermés n'ayant en commun deux à deux que des points formant un ensemble de mesure nulle sur $\sigma(t_0)$; nous choisirons la partition assez fine pour qu'on ait, μ^i désignant le maximum de V sur (ω_0^i),

$$L_0 = \int_{\sigma(t_0)} V(M)\, d\sigma > \sum_i \omega_0^i \mu^i - \varepsilon, \tag{1}$$

ε donné positif. Nous choisirons ensuite $|t - t_0| < \eta$ de manière que l'ensemble $V < \mu^i + \varepsilon$ contienne l'ensemble (ω_t^i) pour tous les indices i, ce qui est possible d'après la semi-continuité de V et la condition C, (3°, a). Dans ces conditions, on aura, L_t désignant la moyenne de V sur $\sigma(t)$

$$L_t = \int_{\sigma(t)} V(M)\, d\sigma < \sum_i (\mu^i + \varepsilon)\omega_t^i < \varepsilon + \sum \mu^i \omega_t^i.$$

Mais

$$\omega_t^i < (1+\varepsilon)\omega_0^i \qquad \text{pour } |t - t_0| < \eta'.$$

Donc

$$L_t < \varepsilon + (1+\varepsilon)\sum_i \mu^i \omega_0^i < \varepsilon + (1+\varepsilon)(L_0 + \varepsilon)$$

pour $|t - t_0|$ suffisamment petit. On a donc $L_t < L_0 + \varepsilon'$, quand L_0 a une valeur finie, pour t voisin de t_0, ce qui démontre la semi-continuité supérieure de la moyenne L_t quand L_0 est finie. La démonstration s'étend sans peine au cas $L_0 = -\infty$ en remplaçant (1) par $\Sigma \mu^i \omega_0^i < -N$, N positif arbitrairement grand.

Appliquons le lemme 3 au cas où $t_0 = 0$, et $\sigma(0)$ est la variété $C(M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ définie par

$$z_1 = \zeta_1, \quad \ldots, \quad z_{p-1} = \zeta_{p-1}, \qquad z_p = \zeta_p + r_p e^{i\theta_p}, \quad \ldots, \quad z_n = \zeta_n + r_n e^{i\theta_n},$$

ζ_k, r_k étant constants, θ_q variable ($0 \leqq \theta_q \leqq 2\pi$, $p \leqq q \leqq n$). Cette variété est limite de $C(M, r_1, \ldots, r_n)$ pour $t = \max(r_1, \ldots, r_{p-1})$ tendant vers zéro et les conditions C sont réalisées au voisinage de $t = 0$. On aura donc si $L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ désigne la moyenne de V sur $C(M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$:
soit

$$L(V, M, r_1, \ldots, r_n) < L(V, M, 0, \ldots, 0, 2p, \ldots, r_n) + \varepsilon;$$

soit

$$L(V, M, r_1, \ldots, r_n) < -N \qquad \text{pour } |t| < \eta,$$

selon que $L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$ est fini ou non. Dans le second cas on a $V(M) = -\infty$. Dans le premier la condition (β_2), soit

$$V(M) \leqq L(V, M, r_1, \ldots, r_n) \qquad \text{entraîne} \qquad V(M) \leqq L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n) + \varepsilon,$$

quel que soit $\varepsilon > 0$, donc $V(M) \leqq L(V, M, 0, \ldots, 0, r_p, \ldots, r_n)$, soit, *dans tous les cas la condition* (β_1). Le lemme 1 en résulte. Le théorème 3 est ainsi établi.

12. Le théorème 3 permet d'affirmer dans de nombreux cas qu'une fonction est plurisousharmonique *à condition qu'elle soit semi-continue supérieurement.*

Ce dernier point pourra quelquefois être établi au moyen du lemme 2 ou du lemme 3.

1° Soit $V(M, P)$ une famille de fonctions plurisousharmoniques dans D dépendant du paramètre P, et soit e un ensemble dans l'espace du paramètre P. Posons

$$W_1(M) = \max_{P \in e} V(M, P).$$

Si $W_1(M)$ *est semi-continue supérieurement*, $W_1(M)$ *est plurisousharmonique dans* D : on appliquera le théorème 3 en remarquant que

$$W_1(M) \leqq \max_{P \in e} L[V(M, P), M, r_k] \leqq L(W_1, M, r_k).$$

2° Même résultat pour la fonction

$$W_2(M) = \int_e d\mu(P) V(M, P),$$

où $\mu(P)$ est une fonction *positive* d'ensemble définie sur e,

3° En particulier soit $V(M, P) = V(M+P)$, $M+P$ désignant le point de coordonnées $\zeta_k + \zeta'_k$ quand M a pour coordonnées ζ_k, P pour coordonnées ζ'_k. D'après le lemme 2, *si e est un ensemble fermé* (13)

$$W_1(M) = \max_{P \in e} V(M+P)$$

est plurisousharmonique.

4° Soit encore

$$W_2(M) = \int_e V(M+P)\, d\mu(P).$$

L'intégration se fait sur les ensembles e_M obtenus à partir de e par la translation M; les conditions du lemme 3 sont réalisées (au besoin après multiplication de la fonction de masse par un nombre constant, de manière que la masse totale sur e ait pour valeur l'unité); dans ces conditions $W_2(M)$ est *une fonction plurisousharmonique*, étant semi-continue supérieurement d'après le lemme 3.

5° En particulier

$$L(V, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(\zeta_k + z_k e^{i\theta_k})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n \qquad (|z_k| = r_k)$$

est une fonction plurisousharmonique (14) à la fois de $M(\zeta_k)$ et de $P(z_k)$; en P elle ne dépend que des modules $|z_k|$.

6° Si V est plurisousharmonique, la fonction

$$W_3 = \max V(z_1, z_2, \ldots, z_{p-1}, z_{p+1} e^{i\theta_{p+1}}, \ldots, z_n e^{i\theta_n})$$

pour z_k constant et θ_q variable ($0 \leqq \theta_q \leqq 2\pi$, $p \leqq q \leqq n$) est une fonction plurisousharmonique de $(z_1, \ldots, z_n)$. De même

$$W_4 = \frac{1}{(2\pi)^{n-p}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} V(z_1, \ldots, z_p, z_{p+1} + z'_{p+1} e^{i\theta_{p+1}}, \ldots, z_n + z'_n e^{i\theta_n})\, d\theta_{p+1} \ldots d\theta_n$$

(13) Si l'on ajoute une restriction convenable sur la nature de l'ensemble au voisinage de ses points-frontières, $W_1(M)$ est même une fonction *continue*.

(14) On peut montrer qu'elle est fonction plurisousharmonique *continue* de M.

est une fonction plurisousharmonique de $(z_1, \ldots, z_n)$; elle l'est aussi du point Q de coordonnées $z_1, \ldots, z_p, z'_{p+1}, \ldots, z'_n$.

7° En particulier, si $f(z_1, \ldots, z_n)$ désigne une fonction holomorphe, les quantités W_3 et W_4 formées à partir de $V = \log|f|$ seront désignées respectivement par $\log M(z_1, \ldots, z_p; r_{p+1}, \ldots, r_n)$ et par $N(z_1, \ldots, z_p; r_{p+1}, \ldots, r_n)$. Ces quantités qui interviennent dans l'étude de la croissance d'une fonction entière et dans celle de la répartition de ses variétés zéros sont des fonctions plurisousharmoniques.

8° Remarquons enfin que les propriétés établies plus haut pour la moyenne $L(V, M, r_k)$ sont valables et se démontrent de même pour la moyenne $A(V, M, r_k)$; on peut remplacer l'une par l'autre dans l'énoncé du théorème 3.

VI. — Fonctions plurisousharmoniques ayant des dérivées secondes continues.

13. Pour abréger, nous dirons qu'une fonction est de classe $K^{(n)}$ si elle possède des dérivées continues jusqu'à l'ordre n compris. Les fonctions plurisousharmoniques qui sont de classe $K^{(2)}$ sont les solutions d'un certain système d'inégalités aux dérivées partielles. Nous poserons :

$$\frac{\partial V}{\partial z_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} - i\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) \qquad (z_k = x_k + iy_k),$$

$$\frac{\partial V}{\partial \bar{z}_k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial V}{\partial x_k} + i\frac{\partial V}{\partial y_k}\right) \qquad (\bar{z}_k = x_k - iy_k).$$

$$s_{ij} = \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} = \frac{1}{4}\left[\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial x_j} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_i\, \partial y_j} + i\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i\, \partial y_j} - \frac{\partial^2 V}{\partial x_j\, \partial y_i}\right)\right] \quad \text{si } i \neq j \qquad (s_{ij} = \overline{s_{ji}})$$

et

$$s_{ii} = \frac{1}{4}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2}\right) \quad \text{si } i = j \qquad (s_{ii} \text{ réel}).$$

Soit V, plurisousharmonique dans un domaine D; menons par un point $M(\zeta_k)$ de D un plan P^1 défini par $z_k = \zeta_k + t_k u$ et exprimons que, sur P^1, la trace de V est sousharmonique. Il vient

$$\frac{\partial^2 V}{\partial u\, \partial \bar{u}} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} t_i \bar{t}_j \geq 0.$$

Nous énoncerons :

Pour qu'une fonction V de classe $K^{(2)}$ soit plurisousharmonique dans, D, il faut et il suffit que la forme hermitienne

$$\Phi = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i\, \partial \bar{z}_j} dz_i\, d\bar{z}_j = \sum_{i,j} s_{ij}\, dz_i\, d\bar{z}_j \tag{1}$$

soit une forme positive ou nulle en tout point de D, ou encore

Pour que V, *de classe* $K^{(2)}$, *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'entre ses dérivées secondes complexes* s_{ij} *soient vérifiées les* n *inégalités*

$$\sum_{\alpha_p} D^{(\alpha_p)} \geqq 0 \qquad (p=1, 2, \ldots, n), \tag{1}$$

obtenues en exprimant que la matrice hermitienne $\|s_{ij}\|$ a ses valeurs propres positives ou nulles; $D^{(\alpha_p)}$ est le déterminant tiré du tableau $\|s_{ij}\|$ en prenant p lignes et p colonnes dont les indices appartiennent à une même combinaison (α_p); la sommation est faite par rapport à toutes les combinaisons obtenues pour p fixé.

Fonctions pluriharmoniques. — Nous dirons que V est pluriharmonique dans D si V et $-$V y sont plurisousharmoniques (ce qui équivaut à dire que V est bornée sur tout compact intérieur à D, et est harmonique sur les variétés planes P^1); V et $-$V sont sousharmoniques dans R^{2n}; V est donc harmonique et, par suite, analytique des variables (x_k, y_k), ou, encore, des $(z_k, \bar{z}_k)$.

Écrivons que la fonction

$$V = \psi(z_1, \ldots, z_n, \bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

satisfait au système des $\frac{n(n+1)}{2}$ équations aux dérivées partielles $s_{ij}=0$, la forme (1) devant être nulle identiquement; nous obtenons pour ψ une solution

$$\psi = f(z_1, \ldots, z_n) + g(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n)$$

ou

$$\psi = f(z_1, \ldots, z_n) + \bar{f}(\bar{z}_1, \ldots, \bar{z}_n),$$

en exprimant que ψ est réel. Nous énoncerons :

Pour qu'une fonction soit pluriharmonique il faut et il suffit qu'elle soit la partie réelle d'une fonction holomorphe.

14. *Tenseur des densités de masse d'une fonction de classe* $K^{(2)}$. — Nous appellerons ainsi le tenseur contravariant formé des coefficients complexes s_{ij} de la forme Φ. Il est facile de donner la signification des coefficients s_{kk} : considérons la fonction sousharmonique obtenue en faisant varier z_k seul; il est associé à cette fonction dans le plan P^1 ainsi décrit une répartition de masses potentielles, dont la densité est

$$\rho_k = \frac{1}{2\pi}\left(\frac{\partial^2 V}{\partial x_k^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y_k^2}\right) = \frac{2}{\pi} s_{kk}.$$

Considérons maintenant un plan P^1 quelconque donné par les équations $z_k = \zeta_k + t_k u$ avec $\Sigma t_k \bar{t}_k = 1$: la densité de masse relative à la trace sousharmonique de V sur ce plan est, au point $M(z_k)$,

$$\frac{2}{\pi}\frac{\partial^2 V}{\partial u\,\partial \bar{u}} = \frac{2}{\pi}\sum_{i,j} s_{ij} t_i \bar{t}_j.$$

Il est intéressant de la comparer avec la masse relative à la fonction V, *considérée comme fonction sousharmonique dans* R^{2n}. Cette masse dépend d'une densité. On a, en désignant par ω_{2n} la surface de la sphère $\sum_k |z_k|^2 = 1$,

$$\Delta V = \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial x_i^2} + \sum_i \frac{\partial^2 V}{\partial y_i^2} = (2n-2)\omega_{2n}\rho,$$

pour $n \geqq 2$ et $\Delta V = \omega_{2n}\rho = 2\pi\rho$, pour $n=1$. Par ailleurs, $\omega_{2n} = \frac{2\pi^n}{(n-1)!}$. Donc la densité ρ s'obtient en multipliant la somme des densités ρ_k relatives à chacune des variables z_k par un facteur A_n ne dépendant que de n. On a

$$(2)\qquad \rho = A_n \sum_k \rho_k \qquad \text{avec } A_n = \frac{(n-2)!}{2\pi^{n-1}}.$$

15. Le résultat précédent est lié à un énoncé plus général relatif aux fonctions plurisousharmoniques *quelconques*. Pour simplifier faisons disparaître le coefficient A_n, en prenant comme fonction fondamentale du potentiel dans R^{2n} non pas $-\frac{1}{r^{2n-2}}$, mais

$$(3)\qquad g_n(r) = -\frac{1}{\omega_{2n}(2n-2)r^{2n-2}} \qquad \text{si } n \geqq 2$$

et

$$g_n(r) = \frac{1}{2\pi}\log r \qquad \text{pour } n=1.$$

L'avantage est le suivant : le flux Φ qui sort de la surface frontière d'un domaine D est égal à la masse contenue dans D; il suffit de le vérifier pour une hypersphère, ce qui est immédiat.

Soit $S(M, r_k)$ un n cercle contenu dans D, de centre $M(\zeta_k)$; désignons par σ_k une des n hypersurfaces qui constituent la froutière de D (sur σ_k, $|\zeta_k| = r_k$, $|z_j| \leqq r_j$ pour $j \neq k$). Dans ces conditions la masse μ contenue dans $S(M, r_k)$, relative à V *fonction sousharmonique dans* R^{2n}, est

$$(4)\qquad \mu = \Phi = \sum_k \int_{\sigma_k} \frac{\partial V}{\partial n_k} d\sigma_k = \sum_k \int \frac{\partial V}{\partial r_k} r_k\, d\theta_k \prod_{j \neq k} r_j\, dr_j\, d\theta_j.$$

Désignons par $\mu_k^0(\zeta_k, r_k; z_j)$ la masse relative à V considérée comme *fonction sousharmoniquede* z_k *seul*, quand z_k varie dans le cercle $|z_k - \zeta_k| \leqq r_k$, pour $z_j (j \neq k)$ fixés, et par μ_k la quantité qui en résulte par intégration dans le volume balayé par le point de coordonnées $z_j (j \neq k)$ de C^{n-1} quand on parcourt $S(M, r_k)$. On aura, d'après (4),

$$\mu = \sum_k \int_{\sigma_k} \mu_k^0(\zeta_k, r_k; z_j) \Pi r_j \, dr_j \, d\theta_j$$

ou

$$\mu = \sum_k \mu_k. \tag{5}$$

Nous énoncerons :

THÉORÈME 4. — *Si la fonction fondamentale est prise sous la forme* (3), *la masse de* V *dans un domaine* D *de* C^n *est égale à la somme dans* D *des masses relatives aux* n *fonctions sousharmoniques obtenues en faisant varier successivement chacun des* z_k *séparément.*

Indiquons deux applications :

a. V est de classe $K^{(2)}$. Désignons par ρ' et ρ'_k les densités relatives aux fonctions fondamentales (3). On aura

$$\rho' = \sum_k \rho'_k = 2 \sum_k s_{kk}.$$

b. On a

$$V = \log |f(z_1, z_2, \ldots, z_n)|,$$

où f est holomorphe dans D.

La masse $\mu_k^0(\zeta_k, r_k; z_j)$ est alors égale à 2π multiplié par le nombre de racines de l'équation $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ pour z_j fixé $(j \neq k)$, situées dans le cercle $|z_k - \zeta_k| < r_k$; l'intégrale μ_k est, au facteur 2π près, l'aire de la projection de la variété $f(z_1, \ldots, z_n) = 0$ sur le sous-espace C^{n-1} des $z_j (j \neq k)$, chaque point de la projection étant compté autant de fois qu'il est la projection de points différents de la variété dans C^n. L'égalité (5), où μ est évidemment indépendant d'un changement d'axes de C^n nous montre que la somme des projections d'une variété analytique W^{n-1} sur les sous-espaces coordonnés C^{n-1} est un invariant. Du reste en choisissant les axes de manière que le plan P^{n-1} tangent à W^{n-1} ait pour équation $z_n = 0$, on voit que cet invariant n'est autre que l'aire de W^{n-1}. Ainsi donc : d'une part, nous retrouvons la propriété connue [16] de l'aire d'une variété analytique complexe d'être égale à la somme de ses projectious sur les n sous-espaces coordonnés C^{n-1}, d'autre part, (5) nous donne, en appelant S l'aire de W^{n-1} et S_k l'aire des projections

$$\mu_k = 2\pi S_k, \qquad \mu = \sum_k \mu_k = 2\pi \sum_k S_k = 2\pi S$$

---

[16] *Voir* WIRTINGER, *Monatshefte für Math. und Physik*, t. 44, 1936, p. 343.

qui s'énonce :

La masse associée à la fonction sousharmonique $V = \log|f(z_1, \ldots, z_n)|$ *dans* R^{2n} *est répartie sur la variété* $f = 0$ *et de densité constante* 2π, *la fonction potentielle fondamentale étant prise sous la forme* $g_n(r)$ *indiquée par* (3).

Nous retrouvons donc en second lieu le résultat signalé § I, n° 2, résultat qui donne une interprétation remarquable de l'aire d'une variété analytique W^{n-1} dans C^n; on en trouvera la première démonstration, par une voie assez longue, dans le Mémoire de H. Poincaré ([17]).

16. Le système d'inégalité I (§ VI, n° 13) nous fournit une troisième définition de la classe des fonctions plurisousharmoniques. Nous démontrerons :

THÉORÈME 5. — *La classe des fonctions plurisousharmoniques se compose : 1° des fonctions ayant des dérivées secondes continues satisfaisant au système* I; *2° des fonctions (à l'exception de la constante* $-\infty$*) obtenues comme limites de suites non croissantes des précédentes.*

Remarquons en effet que la moyenne $A(V, M, r)$ d'une fonction plurisousharmonique V définie dans D, moyenne prise sur le n-cercle $|z_k - \zeta_k| \leqq r$, de centre $M(\zeta_k)$, de rayons égaux à r, est une fonction continue de M pour $M \in D_r$. Plus généralement, si V est de classe $K^{(p)}$, $A(V, M, r)$, est de classe $k^{(p+1)}$. Dans ces conditions, soit $A_p(V, M, r)$ la moyenne itérée p fois; elle est une fonction de classe $k^{(p-1)}$. De plus elle est plurisousharmonique pour $M \in D_{pr}$ (Remarque 4°, n° 12), Pour $p = 3$, $A_3(V, M, r)$ est donc une fonction plurisousharmonique, de classe $K^{(2)}$, pour tout r positif; elle est de plus non croissante quand r décroît et a pour limite $V(M)$ pour $r = 0$. En donnant à r la suite des valeurs $\frac{1}{n}$, on obtiendra donc V comme limite d'une suite non croissante de solutions du système I, ce qui établit le théorème 5.

17. Il est facile de voir qu'*une transformation analytique de* C^n *transforme une fonction plurisousharmonique en une fonction de même nature*. Soit, tout d'abord, V de classe $K^{(2)}$ dans D; substituons aux variables z_k des variables z'_k, le point (z_k) parcourant D quand (z'_k) parcourt un domaine D'; si la transformation est analytique ([18]), les z_k s'expriment par des équations $z_k = \varphi_k(z'_j)$, où les

---

([17]) *Sur les propriétés du potentiel et les fonctions abéliennes* (*Acta Math.*, t. 22, 1899, p. 159). H. Poincaré prend la fonction fondamentale sous la forme $g'_n(r) = -\frac{1}{r^{2n-2}}$. Dans ces conditions la densité constante à prendre sur la variété $f = 0$ est égale au coefficient A_n qui figure dans notre égalité (2), et non pas à *un*, ainsi qu'il est dit dans le Mémoire cité.

([18]) Nous disons analytique (dans C^n) au lieu de pseudo-conforme.

φ_k sont analytiques et ne dépendent que des variables z' (à l'exclusion des $\overline{z'_j}$). La forme

$$\Phi = \sum_{p,q} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \, \partial \overline{z}_q} t_p \overline{t}_q$$

est positive ou nulle. Soit $t_p = \sum_i \frac{\partial \varphi_p}{\partial z'_i} dz'_i$; φ s'écrit

$$\Phi = \sum_{\substack{p,q \\ i,j}} \frac{\partial^2 V}{\partial z_p \, \partial \overline{z}_q} \frac{\partial \varphi_k}{\partial z'_i} \frac{\partial \overline{\varphi}_q}{\partial \overline{z'_j}} dz'_i \, d\overline{z'_j} = \sum_{i,j} \frac{\partial^2 V}{\partial z_i \, \partial \overline{z}_j} dz'_i \, d\overline{z'_i}$$

et $\Phi \geqq 0$ exprime que V est fonction plurisousharmonique des (z'_j).

Si, maintenant, on suppose que V est une fonction plurisousharmonique quelconque, on considérera V comme limite des moyennes $A_3\left(V, M, \frac{1}{n}\right)$ pour $n \to \infty$ et l'on appliquera le résultat précédent.

Réciproquement, soit (T) une transformation continue, biunivoque, d'un domaine D de C^n en un domaine D'. Supposons que (T) transforme l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques dans D en fonctions de même nature dans D'. L'ensemble des fonctions pluriharmoniques est conservé par (T), une fonction pluriharmonique V étant telle que V et $-V$ soient simultanément plurisousharmoniques. Dès lors, soient

$$z_k = x_k + i y_k = \varphi_k(z'_j, \overline{z'_j})$$

les équations qui définissent (T); x_k est égal à la partie réelle de la fonction φ_k; c'est une fonction pluriharmonique dans D de (z_k); elle devient par la transformation une fonction H_k pluriharmonique de (z'_j) dans D'. On a donc

$$\varphi_k = H_k + i H'_k,$$

où H_k, H'_k sont deux fonctions pluriharmoniques de (z'_j), donc d'expression *analytique* par rapport aux variables z'_j, $\overline{z'_j}$. La fonction $\varphi_k(z'_j, \overline{z'_j})$ est donc analytique de ces variables. Pour achever de caractériser φ_k, il suffit d'exprimer qu'une fonction $A(z_1, \overline{z}_1)$ harmonique et ne dépendant que du point (z_1) dans C_1 reste pluriharmonique après la transformation (T), c'est-à-dire satisfait aux équations $\frac{\partial^2 A}{\partial z'_i \, \partial \overline{z'_j}} = 0$; les conditions obtenues

$$\frac{\partial \varphi_k}{\partial \overline{z'_j}} = 0 \qquad \text{ou} \qquad \frac{\partial \varphi_k}{\partial z_i} = 0$$

montrent que φ_k ne dépend que de n des variables $\overline{z'_j}$, z'_j. Au besoin, après une permutation, on pourra supposer que ces variables sont les z'_j, à l'exclusion de leurs conjuguées. Nous énoncerons :

THÉORÈME 6. — *Pour qu'une transformation biunivoque conserve l'ensemble des fonctions plurisousharmoniques, il faut et il suffit qu'elle soit, à une symétrie près, une transformation analytique complexe dans* C^n.

18. Nous dirons qu'une fonction V(M) est *plurisousharmonique sur une variété* W^q *irréductible dans un domaine* D si elle satisfait aux conditions suivantes :

1° *Elle possède une valeur bien déterminée* ($-\infty \leqq V < \infty$) *en tout point de* W^q; *il existe un point de* W^q *où* $V > -\infty$.

2° *Si* $M(z_k^0)$ *est un point régulier de* W^q *au voisinage duquel* W^q *est représentée par un système*

$$z_k = \varphi_k(u_1, \ldots, u_q) \tag{4}$$

de n fonctions holomorphes des paramètres $u_1, \ldots, u_q$, *avec* $z_k^0 = \varphi_k(u_i^0)$, V *est une fonction pluriharmonique de* (u_i) *au voisinage des valeurs* (u_i^0).

3° *Au voisinage d'un point singulier de* W^q, *s'il est besoin de plusieurs systèmes de la forme* (4) *pour représenter* W^q, *nous supposerons que la condition* 2° *est réalisée par rapport à chacun d'eux séparément.*

Nous démontrerons :

LEMME. — *Une suite non croissante* S *de fonctions plurisousharmoniques sur une variété* W^q *irréductible dans* D *a pour limite une fonction plurisousharmonique sur* W^q *ou bien identiquement* $-\infty$ *sur* W^q.

Remarquons tout d'abord que W^q est la somme d'une infinité dénombrable d'éléments δ, chacun représenté par un système de la forme (4); à tout élément $\delta^{(1)}$ on peut en associer un autre *contigu* $\delta^{(2)}$ tel que les deux systèmes (4) associés $\varphi_k^{(1)}(u_i^{(1)})$ et $\varphi_k^{(2)}(u_i^{(2)})$ satisfassent à

$$\varphi_k^{(1)}(u_i^{(1)}) \equiv \varphi_k^{(2)}(u_i^{(2)}),$$

pour un ensemble ouvert $\delta_1 \cap \delta_2$ de valeurs $(u_i^{(1)})$ et de valeurs $(u_i^{(2)})$. Dans ces conditions si δ a pour limite la constante $-\infty$ sur un élément δ, S converge vers $-\infty$ sur tout élément contigu, et finalement converge vers $-\infty$ sur toute la variété W^q. Dans le cas contraire, S ne peut converger vers $-\infty$ dans aucun des éléments δ; la limite de S est une fonction plurisousharmonique dans chacun des éléments δ, donc sur toute la variété W^q. Le lemme est établi; il permet de démontrer :

THÉORÈME 7. — *Une fonction plurisousharmonique dans un domaine* D *de* C^n *a pour trace sur une variété* W^q ($q \leqq n-1$) *irréductible dans* D, *soit une fonction plurisousharmonique, soit la constante* $-\infty$.

En effet, si V n'est pas de classe $K^{(2)}$, considérons V comme la limite de la suite $A_3\left(V, M, \frac{1}{n}\right) = V'_n$. Les fonctions, V'_n, de classe $K^{(2)}$, sont plurisousharmoniques sur W^q : en effet si, utilisant (4), nous exprimons V_n en fonction des u_i, la forme Φ définie par (1) s'écrit $\sum_{i,j} \frac{\partial^2 V'_n}{\partial u_i \partial \bar{u}_j} du_i d\bar{u}_j$, forme *positive ou nulle*. D'autre part, quand n augmente indéfiniment, V'_n, suite non croissante, a pour limite V sur W^q; d'après le lemme, V est donc une fonction plurisousharmonique sur W^q, où y vaut identiquement $-\infty$.

Le théorème 7 nous permet de généraliser la propriété (c) de la définition 1, § II, n° 5 : la trace d'une fonction plurisousharmonique sur une variété analytique W^1 irréductible dans un domaine D est une fonction sousharmonique ou est la constante $-\infty$.

VII. — Maximum d'une fonction plurisousharmonique dans un domaine et pseudo-convexité.

19. Une fonction plurisousharmonique dans un domaine D est sousharmonique sur la trace de D dans R^{2n}; elle ne peut donc avoir un maximum relatif en un point intérieur de D, à moins d'être constante dans D. Nous supposerons dans ce qui suit que V est une fonction non constante dans D, plurisousharmonique dans D et sur sa frontière F; nous dirons que V a un maximum A en P s'il existe un voisinage ω de P tel que $V \leqq A$ sur $\omega \cap D^{\bullet}$ ($D^{\bullet}$ désigne la fermeture D + F). Ce maximum sera dit *strict* si P est point isolé de l'ensemble $V = A$ sur $D^{\bullet}$; sinon il sera dit *simple*. Dans ce cas il existe une suite de points $P_n \in D^{\bullet}$ ayant P comme limite. Ces points peuvent être choisis sur F; en effet, si P_n n'est pas sur F, P_n est un point intérieur d'une composante δ_n convexe de l'intersection $\omega \cap D$; on a donc $V \equiv A$ sur δ_n et sur la frontière de δ_n; mais celle-ci contient des points de F; on pourra donc remplacer P_n par un point P'_n sur F appartenant à la frontière de δ_n. Remarquons que, dans ce cas, existe une suite de domaines δ_n tendant vers P avec $\delta_n \in D$, $V = A$ sur δ_n; cette circonstance n'est réalisée que si tout voisinage de P découpe sur D une infinité de domaines disjoints, et si V peut être constante sur des domaines intérieurs à D aboutissant à F.

Dans la suite, nous supposerons que V, définie sur $D^{\bullet}$, satisfait à la condition (α) :

α. P *étant un point quelconque de la frontière de* D, ω *un voisinage de* P, V *n'est pas identique à une constante sur* $\omega \cap D$.

Lemme. — *Si* V *est plurisousharmonique sur* $D^{\bullet}$ *et satisfait à la condition* (α), *un point* P *de la frontière* F *de* D *en lequel* V *possède un maximum, possède la propriété suivante : ou bien il existe une variété analytique* W^1 *qui appartient à* F *dans un voisinage de* P, *ou bien toute variété analytique* W^1 *qui passe par* P *et est définie dans un voisinage de* P *possède des points étrangers à* $D^\cdot$ *ayant* P *comme point limite.*

Supposons $V(P) = A$ et soit ω un voisinage de P tel que V soit plurisousharmonique sur ω; W^1 étant une variété analytique dans ω passant par P, la trace de V sur $\omega \cap W^1$ est une fonction sousharmonique. Si l'on exclut la seconde alternative du lemme, W^1 appartient à $D^\cdot$; on a donc $V \leqq A$ sur $\omega \cap W^1$ et $V = A$ en P, point intérieur de l'ensemble $\omega \cap W^1$: on a donc nécessairement $V = A$ sur $\omega \cap W^1$. Ainsi l'hypothèse $(\omega \cap W^1) \in D^\cdot$ entraîne que le maximum en P soit simple. D'autre part il ne peut exister une suite de points $P_n \in (\omega \cap W^1)$ tendant vers P et intérieurs à D, car on aurait $V(P_n) = A$ en ces points, ce qui entraîne, comme on l'a vu, que (α) ne soit pas vérifié. Ainsi donc il existe un voisinage ω_1 de P, $\omega_1 \subset \omega$, et dans ce voisinage W^1 appartient à F, ce qui établit la première alternative du lemme.

Nous sommes ainsi conduit à distinguer une pseudo-convexité ([19]) stricte. Nous dirons que $D^\cdot$ est *strictement pseudo-convexe* en un point frontière P si toute variété analytique W^1 contenant P et définie dans un voisinage de P contient des points *étrangers* à $D^\cdot$. Nous dirons que $D^\cdot$ est *simplement pseudo-convexe* en P si toute variété W^1 par P contient des points *étrangers ou frontières* de $D^\cdot$. Nous énoncerons alors :

Théorème 8. — *Soit* V *une fonction plurisousharmonique sur le domaine fermé* $D^\cdot$ *et y satisfaisant à la condition* (α). *Si elle possède un maximum en un point* P *de la frontière de* D :

ou bien $D^\cdot$ *est strictement pseudo-convexe en* P ;
ou bien $D^\cdot$ *est simplement pseudo-convexe en* P, *mais la frontière de* $D^\cdot$ *contient une variété analytique* W^1 *dans un voisinage de* P *et* V *est constant sur cette variété.*

Nous dirons qu'un point P de la frontière de $D^\cdot$ appartient à *l'ensemble maximal* de $D^\cdot$ s'il existe une fonction plurisousharmonique dans $D^\cdot$ satisfaisant à la condition (α) et ayant un maximum simple en P. On pourra définir un ensemble maximal *restreint* de $D^\cdot$ en opérant à partir de la classe (L_1) des fonctions de la forme $V = \log|f(z_k)|$, $f(z_k)$ étant holomorphe dans $D^\cdot$. D'après le théorème 8, *l'ensemble maximal appartient à l'ensemble des points frontières de* $D^\cdot$ *en lesquels* $D^\cdot$ *est pseudo-convexe.*

La notion d'ensemble maximal est à comparer avec la surface frontière « remarquable » introduite par S. Bergmann ([20]), relativement à certains

([19]) *Voir* Behnke et Thullen, *Ergebnisse der Math.*, 3, 1934, p. 53.

([20]) *Voir* S. Bergmann (*Math. Annalen*, 104, 1931, p. 611 et *Math. Zeitschrift*, 36, 1932, p. 171), pour la définition et les applications de la surface « remarquable » (ausgezeichnete Randfläche) reladomaines particuliers limités (dans C^2), par deux hypersurfaces analytiques ([21]). Pour de tels domaines, l'ensemble maximal appartient à l'intersection des deux hypersurfaces frontières et cette intersection constitue la variété « remarquable » du domaine.

Faisons pour terminer deux remarques :

1° *Une fonction $f(z_k)$ holomorphe sur* D^* *y est déterminée entièrement par la connaissance de ses valeurs sur l'ensemble maximal restreint de* D^*, *soit* E_r.

En effet une fonction pluriharmonique H_1 sur D^* atteint son maximum sur E_r, car si l'on pose $H_1 + iH_2 = g(z_k)$, H_2 étant la conjuguée de H_1, $H_1 = \log|e^{g(z_k)}|$ est donc de classe (L_1). S'il existait deux fonctions pluriharmoniques H_1, H'_1 sur D^*, coïncidant sur E_r, on aurait $H_1 - H'_1 = 0$ sur E_r et par suite, à la fois $H_1 - H'_1 \leqq 0$ et $H'_1 - H_1 \leqq 0$ sur D^*; d'où $H_1 \equiv H'_1$. Il suffit alors d'envisager séparément la partie réelle et la partie imaginaire de $f(z_k)$ pour établir la remarque énoncée.

2° Si E est un ensemble polaire dans un domaine Δ, et *si* E_m *est l'ensemble maximal relatif à un domaine fermé* $D^* \subset \Delta$, E *ne peut contenir* E_m. En effet, supposons que E soit l'ensemble $V = -\infty$ (V plurisousharmonique dans Δ, donc dans D^*); si E_m appartenait à E, le maximum de V sur D^* serait égal à $-\infty$, ce qui est impossible.

VIII. — Fonctions plurisousharmoniqnes ne dépendant que des modules $r_k = |z_k|$.

20. Les fonctions plurisousharmoniques qui ne dépendent dans C^n que des quantités $|z_k| = r_k$ se ramènent aux fonctions convexes des variables $u_k = \log r_k$ dans leur ensemble. C'est là une circonstance qui généralise le résultat bien connu pour $n = 1$, mais qui, en un certain sens, est plus riche puisqu'il s'agit d'une convexité dans un espace à $n+1$ dimensions réelles. Les deux énoncés qui suivent expliquent le rôle joué par les fonctions convexes de n variables réelles dans la théorie des fonctions analytiques de n variables complexes.

D'autre part l'un d'eux résout pour les fonctions ne dépendant que des $|z_k|$ le problème important de savoir si la classe (L) peut être engendrée, simplement à partir de (L_1). Pour préciser, soit (L'_1) la classe des fonctions obtenues en multipliant une fonction de (L_1) par un nombre positif quelconque. Toute fonction de (L) s'obtient-elle comme régularisée supérieure d'une limite

tive à la frontière des domaines envisagés par l'auteur dans C^2. La surface « remarquable » S d'un domaine D est définie par la condition d'être à deux dimensions réelles et telle qu'une fonction pluriharmonique dans D soit déterminée par ses valeurs sur S.

([21]) Une hypersurface analytique est constituée dans C^2 par le lieu géométrique d'une variété W^1 dépendant continûment d'un paramètre réel.

supérieure de fonctions de (L'_1) bornées dans leur ensemble comme ceci a lieu pour $n=1$? Le théorème 10 résout la question par l'affirmative pour n quelconque quand la fonction ne dépend que des $|z_k|$.

Nous supposerons dans la suite que D_0 est un domaine univalent, contenant en même temps que le point (z_k) tous les points $(z_k e^{i\theta_k})$, $0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi$. Un tel domaine (qui ne contiendra pas nécessairement son centre O) est encore caractérisé par sa trace d_0 dans l'espace des variables $u_k = \log r_k$, ou encore par le cylindre Γ de base d_0 dans l'espace R^{n+1} des variables $(u_1, \ldots, u_n, y)$.

Théorème 9. — *Pour qu'une fonction* $V(z_1, \ldots, z_n)$ *définie dans un domaine n-cerclé* D_0 *de centre* O *et n'y dépendant que des* $r_k = |z_k|$ *soit plurisousharmonique, il faut et il suffit que dans l'espace* $R^{n+1}(u_1, \ldots, u_n, y)$ *la surface* S *d'équation* $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$, *où* φ *est la valeur de* V *exprimée en fonction des variables* $u_k = \log r_k$, *soit une surface convexe du côté des y négatifs.*

La surface S de l'énoncé est définie à l'intérieur du cylindre Γ de base d_0. Nous démontrerons simultanément

Théorème 10. — *Pour qu'une fonction* V *ne dépendant que des modules* $r_k = |z_k|$, *définie dans un domaine n-cerclé* D_0, *de centre* O, *y soit plurisousharmonique, il faut et il suffit qu'elle soit l'enveloppe supérieure d'une suite de fonctions de la classe* L'_1 *dans* D_0.

Nous démontrerons en premier lieu :

Lemme. — *Si* V *est plurisousharmonique, fonction seulement des* $|z_k|$ *dans* D_0, V *est fini dans* D.

En effet, dans le cas contraire on aurait $V = -\infty$ sur l'arête d'un n cercle $C(O, r_k)$, cette arête étant contenue dans D_0 [en général D_0 ne contiendra pas le n-cercle $S(O, r_k)$]. A chacun des r_k associons un $r'_k < r_k$ de manière que le produit topologique Δ des n couronnes $r'_k < |z_k| < r_k$ appartienne à D_0. En partant de l'expression d'une fonction harmonique dans une couronne $r'_k \leqq z_k \leqq r_k$, prenant des valeurs données sur les deux cercles frontières, on forme aisément l'expression de la fonction H, harmonique par rapport aux variables z_k séparément, et prenant les mêmes valeurs que V sur les 2^n arêtes A_q qui constituent l'ensemble maximal E_m de Δ (chaque arête s'obtient en choisissant l'une des deux circonférences frontières de chaque couronne et effectuant le produit topologique des n circonférences choisies); H est exprimée par la somme de 2^n fonctions H_q de même nature, H_q étant nulle sur E_m sauf sur A_q, où elle prend les valeurs de V. Si l'on a $V = -\infty$ sur A_q la fonction H_q vaut identiquement $-\infty$ dans Δ; il en est donc de même de H, donc aussi de V, H étant une majorante de V dans Δ. On aurait donc $V \equiv -\infty$ dans Δ contrairement à l'hypothèse que V est plurisousharmonique dans D_0. Le lemme est établi.

Il en résulte que la fonction $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ définie dans l'énoncé du théorème 9 est finie en tout point de d_0. D'autre part elle est convexe de chacune des variables u_k, donc, étant finie, continue par rapport à chacune de ces variables; de sa convexité par rapport à chacun des u_k résulte encore qu'elle est bornée et à nombres dérivés bornés sur un compact intérieur à d_0; elle est donc continue par rapport à l'ensemble des u_k et l'équation $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ définit bien une nappe de surface S dans R^{n+1}.

Pour montrer que S est convexe du côté des y négatifs, considérons deux points $A(u_k, y)$, $B(u'_k, y')$ dont les projections $a(u_k)$, $b(u'_k)$ appartiennent à d_0 ainsi que le segment ab. Il nous suffit de montrer que *si* A *et* B *sont au-dessus de* S, *il en est de même de tout le segment* AB.

Si A et B ont des coordonnées (u_k) rationnelles nous pourrons écrire les équations de la droite ab sous la forme

$$u_k = \frac{1}{\delta} m_k \log|t| + \log C_k \tag{1}$$

(t paramètre complexe, δ, m_k entiers); (1) montre que la droite ab est la trace de la variété analytique définie dans D_0 par

$$z_k^{\delta} = C_k t^{m_k}. \tag{2}$$

Sur cette variété la fonction V est sousharmonique de t; φ est donc convexe de $\log|t|$. Ainsi la section de S qui se projette suivant ab sur l'espace des (u_k) est une courbe convexe, ce qui démontre la propriété dans le cas où A et B ont des coordonnées (u_k) rationnelles; elle subsiste quand A et B ont des coordonnées (u_k) quelconques par suite de la continuité de la fonction $\varphi(u_1, \ldots, u_n)$. La première partie du théorème 9 est ainsi établie.

Pour démontrer la réciproque, supposons que V se réduise dans D_0 à une fonction $y = \varphi(u_1, \ldots, u_n)$ donnant l'équation d'une surface S convexe du côté des y négatifs et définie quand (u_k) appartient à d_0. Soit P_i, d'équation

$$y = \sum_k a_k^{(i)} u_k + b^{(i)},$$

un plan tangent à S (plan ayant avec S un point commun au moins et laissant S du côté des y positifs) pris dans un ensemble dénombrable E de tels plans : nous choisirons E de manière que les $(a_k^{(i)})$ soient rationnels $\left(a_k^{(i)} = \frac{m_k^{(i)}}{\delta^{(i)}};\ m_k^{(i)},\ \delta^{(i)}\right.$ entiers; on pose $\left. C^{(i)} = e^{\delta^{(i)} b^{(i)}}\right)$ et qu'ils forment un ensemble partout dense sur l'ensemble des $(a_k^{(i)})$ correspondant aux plans tangents à S. Posons

$$f_i(z_1, \ldots, z_n) = C^{(i)} z_1^{m_1^{(i)}} \ldots z_n^{m_n^{(i)}}$$

et soit

$$V_i = \frac{1}{\delta^{(i)}} \log|f_i(z_k)|. \tag{3}$$

D'après la manière dont l'ensemble E des plans P_i a été défini, on a évidemment sur S

$$y = \max_i \sum_k (a_k^{(i)} u_k + b^{(i)}).$$

D'où

$$\varphi(u_1, \ldots, u_n) = y = \max_i (\Sigma a_k^{(i)} u_k + b^{(i)}) = \max V_i.$$

On a donc

$$(4) \qquad V = \max_i V_i.$$

Ainsi V est l'enveloppe supérieure des fonctions V_i plurisousharmoniques; V est de plus continu, puisqu'il en est ainsi de φ (la continuité de φ résulte elle-même de la convexité de S). Donc V est une fonction plurisousharmonique (n° 12, 1°). La seconde partie du théorème 9 est établie.

La première partie du théorème 10 l'est aussi : si V est plurisousharmonique et ne dépend que des $|z_k|$ dans D_0, il correspond en effet à la surface S représentative de V dans l'espace R^{n+1}, une suite V_i de fonctions de classe restreinte données par (3) dont V est l'enveloppe supérieure.

Pour démontrer la seconde partie du théorème 10, considérons une fonction V définie dans le domaine n-cerclé D_0 de centre O, et soit

$$(5) \qquad V = \max_i C(g_i) \log |g_i(z_k)| \qquad [C(g_i) > 0]$$

l'égalité qui définit V comme enveloppe supérieure d'une suite de fonctions de la classe (L'_1) dans D_0. Posons

$$(6) \qquad V_i = \max_{\theta_k} C(g_i) \log |g_i(z_k e^{i\theta_k})|,$$

le maximum devant être pris quand les $\theta_k (k = 1, \ldots, n)$ parcourent l'intervalle $0 \leqq \theta_k \leqq 2\pi$; V_i est fonction continue et convexe des $u_k = \log r_k$ dans leur ensemble. D'autre part, au lieu de (5), on peut écrire

$$(7) \qquad V = \max_i V_i.$$

Donc V est fonction convexe des u_k dans leur ensemble; elle en est donc fonction continue; dans ces conditions elle est fonction continue dans D_0. Il résulte alors (n° 12, 1°) de (7) qu'elle est plurisousharmonique, ce qui achève la démonstration du théorème 10.

IX. — Les fonctions de classe (M).

21. Soit (F) une famille de fonctions plurisousharmoniques bornées supérieurement localement dans un domaine D, c'est-à-dire ayant une borne supérieure finie sur tout compact intérieur à D. Dans C^1 on obtient une famille fermée par rapport au passage à la limite d'une suite convergente de (F) en adjoignant à (F) l'ensemble des fonctions quasi sousharmoniques [22] ayant les

[22] La définition en est rappelée au n° 6.

mêmes bornes supérieures dans D. Dans l'espace $C^n (n \geq 2)$ on complétera (F) par des fonctions appartenant à une classe (M) plus étendue que (F), une fonction de (M) coïncidant avec une fonction plurisousharmonique sauf sur un ensemble $\mathcal{E}$, de mesure nulle dans R^{2n}, aux points duquel elle lui est inférieure. Cette extension est fonction de la définition adoptée pour $\mathcal{E}$. Pour $n \geq 2$, une telle définition ne peut plus être rattachée à des notions déduites de la théorie du potentiel ([23]), et nous définirons directement la classe (M) de la manière suivante :

Définition 2. — Une fonction U *définie dans un domaine* D *de* C^n *sera dite de classe* (M) *si elle possède les propriétés suivantes :*

a. En tout point de D *elle possède une valeur déterminée, réelle, qui peut être soit une valeur finie, soit la valeur* $-\infty$. *En un point de* D *au moins cette valeur est finie.*

b. Elle possède une borne supérieure finie sur tout compact contenu dans D.

c. Sur une variété plane à une dimension complexe dans D, *la trace de* U *est une fonction quasi sousharmonique ou vaut identiquement* $-\infty$.

On démontre comme au paragraphe II, n° 5, 6° que U ne peut être indentique à $-\infty$ dans un domaine contenu dans D.

De la définition résulte :

1° La classe (M) contient la classe (L) pour n quelconque ; elle est constituée pour $n = 1$ par l'ensemble des fonctions quasi sousharmoniques.

2° Une suite non croissante de fonctions de classe (M) a pour limite soit une fonction de même nature, soit la constante $-\infty$.

3° L'enveloppe supérieure d'une famille de fonctions de classe (M) bornée supérieurement localement dans D, est une fonction de classe (M) (démonstration à partir de la proposition analogue pour $n = 1$).

4° La limite supérieure d'une suite de fonctions de classe (M) bornée supérieurement localement dans D est une fonction de classe (M) ou la constante $-\infty$ (on appliquera 3° puis 2°).

22. Nous nous proposons maintenant de démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME 11. — *La régularisée supérieure d'une fonction de classe* (M) *est une fonction plurisousharmonique.*

La démonstration repose par l'intermédiaire du théorème 3 sur les propriétés des moyennes $L(U, M, r_k)$ et $L(V, M, r_k)$ où l'on a posé

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M).$$

([23]) On remarquera cependant la généralisation de la notion de densité de masse (n° 14) sous forme d'un tenseur, qui montre dans quelle voie peut être recherchée une extension à l'espace C^n des notions capacitaires.

Pour établir l'existence de $L(U, M, r_k)$, nous considérerons l'intégrale

$$(1) \qquad \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1,$$

où $M(z_k)$ et $S(M, r_k)$ sont supposés intérieurs au domaine D où U est défini. Les fonctions quasi sousharmoniques appartiennent à l'ensemble des fonctions appelées par M. Brelot sous-médianes, fonctions qui ne diffèrent d'une fonction sousharmonique que sur un ensemble de mesure nulle où elles lui sont inférieures. On sait ([24]) que l'enveloppe supérieure d'une famille bornée supérieurement de telles fonctions est encore de même nature. Les fonctions de la classe (M) sont des fonctions sous-médianes par rapport à chacune des variables z_k considérées séparément. Donnons des valeurs fixes à $z_2, \ldots, z_n$ et prenons la régularisée supérieure de $U(z_1, z_2, \ldots, z_n)$ par rapport à z_2; nous noterons $U_1(z_1, \ldots, z_n)$ cette régularisée; le résultat cité entraîne que U_1 soit encore une fonction sous-médiane de chacune des variables $z_1, \ldots, z_n$. D'autre part U et U_1 ne différant pour $z_2, \ldots, z_n$ fixés que pour les valeurs z_1 d'un ensemble de mesure nulle, l'intégrale (1) est encore égale à

$$(2) \qquad \int_0^{2\pi} U_1(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, z_2, \ldots, z_n)\, d\theta_1.$$

Cette intégrale portant sur une fonction semi-continue supérieurement de θ_1 se calcule comme intégrale supérieure de Riemann. On en déduit, selon un raisonnement déjà fait (n° 6) qu'elle représente une fonction sous-médiane de chacune des variables $z_2, \ldots, z_n$. On poursuivra en intégrant successivement par rapport aux paramètres $\theta_2, \ldots, \theta_n$. Finalement l'intégrale

$$(3) \qquad L(U, M, r_k) = \frac{1}{(2\pi)^n}\int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U(\zeta_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, \zeta_n + r_n e^{i\theta_n})\, d\theta_1 \ldots d\theta_n$$

existe. Elle ne peut avoir pour valeur $-\infty$, sinon on aurait identiquement $U = -\infty$ dans un n cercle intérieur $S(M, \tau r_k)$, $0 < \tau < 1$ (même démonstration que pour les lemmes 3 et 4, n° 7), ce qui est impossible; donc $L(U, M, r_k)$ possède, pour tout n cercle $S(M, r_k)$ contenu dans D, une valeur finie; cette valeur est fonction non décroissante et convexe des variables $u_k = \log r_k$. Quand $\rho = \max r_k$ tend vers zéro, $L(U, M, r_k)$ a donc une limite bien déterminée $V_0(M)$.

Nous allons montrer qu'on a

$$(4) \qquad V_0(M) = \text{reg. sup. } U(M).$$

En effet on a $V_0(M) \leq$ reg. sup. $U(M)$ d'après la définition même de reg. sup. $U(M)$. D'autre part on a reg. sup. $U(M) \geq L(U, M, r_k)$ [même démonstra-

([24]) *Voir* Brelot, *Bull. Sc. Math.*, t. 68, 1944, p. 9, note (3); l'essentiel, pour la démonstration est d'établir la sommabilité de l'enveloppe supérieure.

tion que pour l'inégalité (10) du n° 8, à partir de l'inégalité (6), n° 8]; en faisant tendre $\rho = \max r_k$ vers zéro, on obtient donc (4). Il résulte de (4) que $V_0(M) = \lim_{r_k=0} L(U, M, r_k)$ est une fonction semi-continue supérieurement. Il est aisé de voir que cette limite est plurisousharmonique. On a, en effet,

$$U(M) \leqq V_0(M) \leqq L(U, M, r_k) \tag{5}$$

ou en itérant la moyenne

$$L(U, M, r'_k) \leqq L[L(U, M, r_k), M, r'_k] = L[L(U, M, r'_k), M, r_k].$$

Quand $\rho' = \max r'_k$ tend vers zéro, $L(U, M, r'_k)$ tend vers $V_0(M)$. On a donc

$$V_0(M) \leqq L(V_0, M, r_k). \tag{6}$$

Cette inégalité, jointe à (4), montre que $V_0(M)$ appartient à la classe (B) du paragraphe IV. D'autre part elle le demeure par un changement d'axes dans C^n; elle est donc plurisousharmonique. Le théorème 11 est établi.

23. L'ensemble des points où une fonction de classe (M) diffère de sa régularisée est de mesure nulle sur l'arête d'un n cercle. Nous démontrerons en effet :

THÉORÈME 12. — *La moyenne d'une fonction de classe* (M) *sur l'arête d'un n-cercle quelconque est égale à la moyenne de sa régularisée supérieure.*

Remarquons, pour la démonstration, que, pour z_n fixé, U est une fonction de classe (M) par rapport à $(z_1, \ldots, z_{n-1})$ ou est identique à $-\infty$. Dans les deux cas, si l'on appelle U_{n-1} la régularisée supérieure de U prise pour z_n constant *par rapport à l'ensemble des variables* $(z_1, \ldots, z_{n-1})$, on a, en admettant le théorème 12 pour C^{n-1},

$$L(U, M, r_k) = L(U_{n-1}, M, r_k). \tag{7}$$

D'autre part, d'après (4)

$$U_{n-1}(z_k) = \lim_{r=0} \frac{1}{(2\pi)^{n-1}} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U(z_1 + r_1 e^{i\theta_1}, \ldots, z_{n-1} + r_{n-1} e^{i\theta_{n-1}}, z_n)\, d\theta_1 \ldots d\theta_{n-1}. \tag{8}$$

La fonction U_{n-1} est sous-médiane en z_n, de sorte que, si l'on appelle U_n sa régularisée supérieure par rapport à z_n, pour $z_1 \ldots z_{n-1}$ constants, on a

$$U_n = \lim_{\rho=0} \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + \rho e^{i\theta_n})\, d\theta_n. \tag{9}$$

En comparant (8) et (9) avec

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M) = \lim_{r_k=0} L(U, M, r_k), \tag{10}$$

on a

$$U_n(M) = V(M),$$

en désignant par $V(M)$ la régularisée supérieure de $U(M)$. On peut donc énoncer, en procédant par récurrence :

Lemme. — *La régularisée supérieure d'une fonction de classe* (M) *s'obtient en régularisant successivement par rapport à chacune des variables z_k prises dans un ordre quelconque.*

On a, de plus, puisque V est la régularisée supérieure de U_{n-1} par rapport à z_n

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} U_{n-1}(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + r e^{i\theta_n})\, d\theta_n = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} V(z_1, \ldots, z_{n-1}, z_n + r e^{i\theta_n})\, d\theta_n,$$

d'où

$$L(U_{n-1}, M, r_k) = L(V, M, r_k). \tag{11}$$

En comparant (11) et (7), il vient

$$L(U, M, r_k) = L(V, M, r_k). \tag{12}$$

L'égalité (12) est ainsi établie par récurrence. Le raisonnement fait est indépendant du système d'axes considéré dans C^n. Le théorème 12 est démontré.

Il est à remarquer que les démonstrations des théorèmes 11 et 12 font passer par l'intermédiaire d'une classe plus générale que (M), celle des fonctions satisfaisant aux conditions (*a*), (*b*) de la définition 2 et à une condition (c_1) moins restrictive que (*c*), où l'on ne considérera que les plans P^1 parallèles aux plans coordonnés. La régularisée supérieure d'une fonction de cette classe est de classe (B); l'ensemble où elle diffère de la fonction est de mesure nulle sur l'arête d'un n-cercle de faces parallèles aux plans coordonnés.

24. Le théorème 11 nous donne la démonstration d'une propriété remarquablement simple d'un domaine d'holomorphie par rapport à ses points intérieurs. Nous l'énoncerons :

Théorème 13. — *Si* D *est un domaine d'holomorphie et si* $\delta_1(M)$ *désigne la distance d'un point intérieur de* D *à la frontière, parallèlement à une direction complexe fixe, la fonction* $V(M) = -\log \delta_1(M)$ *est une fonction plurisousharmonique de* M *dans le domaine* D.

Par le point $M(z_k)$ menons en effet un plan P^1 parallèle à la direction complexe (a_k); ses équations s'écrivent

$$z_k = \zeta_k + a_k u, \tag{13}$$

où u est complexe et où $\Sigma a_k \bar{a}_k = 1$. L'intersection de la frontière de D avec P^1 est un ensemble fermé e. Par définition la distance $\delta_1(M)$ de M à la frontière de D parallèlement à la direction (a_k) sera la distance de M à 'ensemble e. Puisque D est ouvert, $\delta_1(M)$ est une fonction semi-continue inférieurement de M; la fonction $V(M) = -\log \delta_1(M)$ est semi-continue supérieuremen de M; elle est, de plus, fonction continue pour un déplacement de M parallèlement à la direction (a_k).

La trace $\Psi(u)$ de $f(z_k)$ sur le plan P' est holomorphe pour $|u| < \rho_0(M)$

$$(14) \qquad \Psi(u) = f(\zeta_k + a_k u) = f(\zeta_k) + u \sum_k a_k \frac{\partial f}{\partial z_k}(\zeta_k) + \ldots + u^n \Psi_n(a_k, \zeta_k) + \ldots.$$

Ψ_n est holomorphe de (ζ_k) pour $M \in D$, et est un polynome homogène de degré n en a_k; le rayon d'holomorphie de Ψ, soit $\rho_0(M)$, est supérieur en général à $\delta_1(M)$, mais on a $\delta_1(M) = \text{reg. inf. } \rho_0(M)$, et par suite

$$V(M) = -\log\delta_1(M) = \text{reg. sup. } [-\log\rho_0(M)].$$

Soit D_1 un domaine contenu, ainsi que sa fermeture, dans D, et contenant M à son intérieur, soit τ le maximum de $|f(M)|$ pour $M \in D_1$. D'après (14) on a

$$|\Psi_n(a_k, \zeta_k)| \leq \frac{2\pi\tau}{\rho_1^n},$$

où ρ_1 désigne la distance de $M(\zeta_k)$ à la frontière de D, parallèlement à (a_k); ρ_1 est borné inférieurement, quelle que soit cette direction, par un nombre positif; la suite

$$V_n(a_k, \zeta_k) = \frac{1}{n} \log |\Psi_n(a_k, \zeta_k)|$$

est une suite bornée supérieurement de fonctions plurisousharmoniques quand M appartient à un compact contenu dans D_1, c'est-à-dire, en définitive, sur compact quelconque contenu dans D.

Pour une direction (a_k) fixée, on a

$$U = -\log\rho_0(M) = \text{lim sup. } V_n(a_k, \zeta_k),$$

U est une fonction de classe (M). Finalement, d'après le théorème 11

$$V(M) = \text{reg. sup. } U(M)$$

est une fonction plurisousharmonique pour $M \in D$. La propriété énoncée est établie.

L'énoncé du théorème 13 subsiste si l'on remplace la distance $\delta_1(M)$ parallèlement à une direction complexe (a_k) par la distance ordinaire $\delta(M)$ de M à la frontière du domaine D : $\delta(M)$ est en effet le minimum de $\delta_1(M)$ quand le point de coordonnées (a_k) parcourt la sphère $\sum_k a_k \bar{a}_k = 1$. D'autre part $\delta(M)$ est une fonction continue de M. Il en résulte bien (§ V, n° 12, 1°) que

$$-\log\delta(M) = \max_{(a_k)}[-\log\delta_1(M)]$$

est une fonction plurisousharmonique.