ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL VINCENSINI

Sur certaines surfaces à lignes de courbure planes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 59 (1942), p. 141-164
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1942_3_59__141_0>

SUR

CERTAINES SURFACES

A

LIGNES DE COURBURE PLANES

PAR M. PAUL VINCENSINI.

1. Le problème de la détermination des surfaces (S) à lignes de courbure planes dans les deux systèmes est l'un des plus intéressants, par l'élégance géométrique du résultat, parmi les problèmes de géométrie différentielle, à la vérité peu nombreux, dont on peut donner une solution explicite complète.

On sait que G. Darboux a montré que l'on obtient toutes ces surfaces, en considérant deux coniques focales l'une de l'autre et deux séries de sphères centrées, respectivement, sur les deux coniques, et de rayon variable suivant une loi arbitraire dans l'une et l'autre série. Le plan radical de deux sphères choisies arbitrairement dans les deux séries enveloppe la surface S la plus générale. Ponctuellement, S s'obtient comme lieu du centre radical des deux sphères et des deux sphères respectivement infiniment voisines dans les deux séries; les plans radicaux de deux sphères infiniment voisines dans chaque série fournissent les plans des lignes de courbure des deux systèmes.

Le procédé employé, quand on veut approfondir une question aussi complètement résolue que la précédente, consiste, généralement, à imposer à la surface S une condition géométrique supplémentaire choisie aussi judicieusement que possible. On obtient alors un nouveau problème, et c'est un problème de ce genre qui est à l'origine de cet article; la condition imposée aux surfaces S du début est la suivante : la *développée moyenne* de S (lieu des milieux des segments déterminés par les différents couples de centres de courbure principaux associés) *est un plan.*

D'une façon générale, on ne peut pas imposer aux surfaces à ligne de courbure planes dans les deux systèmes (ou même dans un seul système) la condition d'avoir une développée moyenne donnée, et le développement qui va suivre tire en partie son intérêt du fait que la forme *plane* est l'une des formes admises pour la développée moyenne.

Parmi les surfaces S générales à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, il en existe dont les deux nappes de la développée dégénèrent en deux courbes : les cyclides de Dupin dont les normales s'appuient sur deux coniques focales l'une de l'autre. Si l'on impose une condition supplémentaire aux surfaces S, il n'y aura plus, en général, dans la nouvelle famille obtenue, de surfaces pour lesquelles la développée dégénère. Il est remarquable que si la condition est celle dont il est question plus haut (développée moyenne plane), il existe des surfaces S pour lesquelles l'*une* des deux nappes de la développée se réduit à une courbe. Ces surfaces sont des enveloppes de sphères susceptibles d'une élégante définition géométrique, que nous étudierons aussi complètement que possible au n° 3, et qui peuvent recevoir, comme nous le montrerons au n° 4, une intéressante généralisation.

La considération des congruences des normales aux surfaces enveloppes de sphères auxquelles il vient d'être fait allusion, permet d'étendre aux adjointes des surfaces minima d'O. Bonnet à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, certaines propriétés des asymptotiques qui ne semblent guère avoir été signalées que pour l'hélicoïde minima réglé et la surface d'Enneper.

Nous avons, chaque fois que cela a été possible, poussé les calculs jusqu'au bout : c'est souvent difficile en géométrie différentielle où l'on est obligé, la plupart du temps, de s'en tenir aux indications d'ordre général déduites de la théorie des équations différentielles ou aux dérivées partielles.

Il nous sera commode de substituer, à la recherche de divers types de surfaces que nous rencontrerons dans cette étude, celle des congruences de leurs normales. Nous adopterons alors, pour la détermination d'une congruence inconnue, le procédé de C. Guichard [1], qui consiste à supposer la congruence rapportée à ses développables ($u=$ const., $v=$ const.), et à prendre comme surface de départ la *surface moyenne* (lieu des milieux des segments focaux).

Si l'élément linéaire de la représentation sphérique des développables de la congruence est

$$ds^2 = \mathrm{E}\,du^2 + 2\mathrm{F}\,du\,dv + \mathrm{G}\,dv^2,$$

si l'on désigne par x, y, z les coordonnées du point moyen sur chaque rayon, par X, Y, Z les cosinus directeurs du rayon, par x_1, y_1, z_1 et x_2, y_2, z_2 les coordonnées des deux foyers F_1, F_2 situés sur le rayon envisagé, et par 2ρ la distance de ces deux foyers, on a

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} x_1 &= x + \rho\mathrm{X}, & y_1 &= y + \rho\mathrm{Y}, & z_1 &= z + \rho\mathrm{Z}, \\ x_2 &= x - \rho\mathrm{X}, & y_2 &= y - \rho\mathrm{Y}, & z_2 &= z - \rho\mathrm{Z}. \end{aligned}\right.$$

[1] *Surfaces rapportées à leurs lignes asymptotiques et congruences rapportées à leurs développables* (*Ann. École Norm.*, Paris, 3e série, t. VI).

Le premier foyer, F_1, étant supposé correspondre aux développables $v=$ const., et le second aux $u=$ const., la connaissance de la représentation sphérique (X, Y, Z, et par suite E, F, $G=$ fonctions connues de u et v) entraînera celle de la congruence, et en particulier de ses deux nappes focales définies par les deux systèmes d'équations (1), dès que la fonction $\rho(u, v)$ sera connue. Cette fonction est définie (*voir* le Mémoire cité de C. Guichard) par l'équation de Laplace

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v}+a\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\frac{\partial\rho}{\partial v}+\left(\frac{\partial a}{\partial u}+\frac{\partial b}{\partial v}+F\right)\rho=0, \tag{2}$$

dans laquelle on a

$$a=\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix}=\frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v}-F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2(EG-F^2)},\qquad b=\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix}=\frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u}-F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2(EG-F^2)}, \tag{3}$$

et la surface moyenne de la congruence correspondant à une solution déterminée ρ de (2), s'obtient en intégrant le système [complètement intégrable en vertu de (2)]

$$\left\{\begin{aligned}\frac{\partial x}{\partial u}&=\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+2b\rho\right)X-\rho\frac{\partial X}{\partial u},\\ \frac{\partial x}{\partial v}&=-\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+2a\rho\right)X+\rho\frac{\partial X}{\partial v},\end{aligned}\right. \tag{4}$$

et les deux systèmes analogues en y et z.

Les éléments des deux nappes focales (F_1) (lieu du foyer F_1) et (F_2) (lieu du foyer F_2), relatives à une congruence déterminée [$\rho=$ solution connue de (2)], s'obtiennent sans difficulté à partir des équations (1). On a, en particulier, pour les coefficients E_1, F_1, G_1, du ds^2 de la première nappe focale,

$$\left\{\begin{aligned}E_1&=S\left(\frac{\partial x_1}{\partial u}\right)^2=4\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right)^2,\\ F_1&=S\frac{\partial x_1}{\partial u}\frac{\partial x_1}{\partial v}=-4a\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial u}+b\rho\right),\\ G_1&=S\left(\frac{\partial x_1}{\partial v}\right)^2=4\rho^2(a^2+G),\end{aligned}\right. \tag{5}$$

et pour ceux de la deuxième

$$\left\{\begin{aligned}E_2&=S\left(\frac{\partial x_2}{\partial u}\right)^2=4\rho^2(b^2+E),\\ F_2&=S\frac{\partial x_2}{\partial u}\frac{\partial x_2}{\partial v}=-4b\rho\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right),\\ G_2&=S\left(\frac{\partial x_2}{\partial v}\right)^2=4\left(\frac{\partial\rho}{\partial v}+a\rho\right)^2.\end{aligned}\right. \tag{5'}$$

2. Surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane. — Nous commencerons par rechercher les congruences des normales aux surfaces indiquées; les surfaces elles-mêmes s'en déduiront facilement. La congruence la plus générale admettant un plan P pour surface moyenne s'obtient, géométriquement, de la façon suivante :

On projette orthogonalement un point quelconque M d'une surface arbitraire Σ en m sur le plan P, on fait tourner dans le plan P (supposé orienté) m d'un angle droit autour d'un point fixe du plan, ce qui amène m en m'; on mène par m' la parallèle D à la normale en M à Σ; l'ensemble des droites D ainsi obtenues fournit la congruence la plus générale du type indiqué.

Il est bien connu que les développables de la congruence correspondent aux lignes asymptotiques de la surface Σ (dite *surface génératrice* de la congruence), les deux plans focaux issus de D étant perpendiculaires aux tangentes asymptotiques de Σ en M. Pour que la congruence soit normale, il faut et il suffit que sa surface génératrice soit minima. S'il s'agit d'une congruence constituée par les normales à une surface à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, l'image sphérique de ses développables, qui est celle des lignes de courbure des ∞^1 surfaces orthogonales aux rayons, est formée de deux familles orthogonales de cercles. La surface génératrice Σ est, dans ce cas, une surface minima admettant pour représentation sphérique de ses asymptotiques un double système orthogonal de cercles. Si l'on envisage la surface minima *adjointe* de Σ, cette surface a pour image sphérique de ses lignes de courbure l'image des asymptotiques de Σ; cette image étant constituée par deux familles orthogonales de cercles, la surface a ses deux familles de lignes de courbure planes et est l'une quelconque des surfaces minima définies par cette propriété (*surfaces minima d'O. Bonnet*).

On peut donc définir les surfaces que nous recherchons, comme les *surfaces orthogonales aux congruences à surface moyenne plane admettant pour génératrices les adjointes des surfaces minima d'O. Bonnet*. Cette définition nous montre dès à présent quel est le degré de généralité des surfaces étudiées; en négligeant les paramètres correspondant aux homothéties et aux déplacements, ces surfaces forment une famille à *trois* paramètres, à savoir, le paramètre qui définit la *forme* de la surface d'O. Bonnet et de son adjointe génératrice, et les deux paramètres qui définissent la *direction* du plan moyen par rapport à la surface génératrice. Mais, pour une étude aussi complète que possible, il convient d'effectuer la recherche analytiquement, ce que nous allons faire en utilisant les formules de C. Guichard rappelées au numéro précédent.

Le double système de cercles définissant la représentation sphérique des développables des congruences normales à surface moyenne plane qui nous intéressent, s'obtient en coupant la sphère image par deux faisceaux de plans dont les axes D et D' sont conjugués par rapport à la sphère. Il en résule immédiatement que, comme dans toutes les surfaces à ligne de courbure planes dans les deux systèmes, les plans des lignes de courbure des surfaces cherchées sont parallèles à l'une ou l'autre des deux droites orthogonales fixes D et D'.

Nous envisagerons deux cas suivant que les deux droites conjuguées D et D′ définissant la représentation sphérique sont, l'une sécante et l'autre non sécante à la sphère, ou bien tangentes à la sphère en un même point. Dans le premier cas, si nous supposons que la droite D ne coupe pas la sphère et que par suite D′ la coupe, si nous prenons pour axe Oz la perpendiculaire commune à D et D′ et pour axes Ox et Oy les parallèles respectives aux droites D et D′, et si nous désignons par α la distance du centre O de la sphère image à D′ ($\alpha < 1$), les équations donnant la représentation sphérique sont

$$X = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}\sin u}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}, \qquad Y = -\frac{\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}, \qquad Z = \frac{\cos u + \alpha \operatorname{ch} v}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}, \tag{6}$$

les cercles $u = \text{const.}$ étant ceux déterminés sur la sphère image par les plans issus de D′, et les cercles $v = \text{const.}$ ceux déterminés par les plans issus de D.

Le ds^2 correspondant de la sphère est

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\operatorname{ch} v + \alpha\cos u)^2}. \tag{7}$$

Dans le deuxième cas, D et D′ étant supposées respectivement parallèles à Oy et Ox, et menées par le point $(0, 0, 1)$, on a

$$X = \frac{2u}{u^2+v^2+1}, \qquad Y = \frac{2v}{u^2+v^2+1}, \qquad Z = \frac{u^2+v^2-1}{u^2+v^2+1}, \tag{8}$$

$$ds^2 = \frac{4(du^2+dv^2)}{(u^2+v^2+1)^2}. \tag{9}$$

Plaçons-nous dans le premier cas. On a alors

$$\left\{\begin{aligned} &F = 0, \\ &E = G = \frac{1}{(\operatorname{ch} v + \alpha\cos u)^2}, \\ &a = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{-\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}, \\ &b = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} = \frac{\alpha\sin u}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}, \\ &\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{-\alpha \operatorname{sh} v \sin u}{(\operatorname{ch} v + \alpha\cos u)^2}, \end{aligned}\right. \tag{10}$$

et l'équation de Laplace (2) s'écrit

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \frac{\operatorname{sh} v}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}\frac{\partial\rho}{\partial u} + \frac{\alpha\sin u}{\operatorname{ch} v + \alpha\cos u}\frac{\partial\rho}{\partial v} - \frac{2\alpha\operatorname{sh} v\sin u}{(\operatorname{ch} v + \alpha\cos u)^2}\rho = 0. \tag{11}$$

Cela étant, A, B, C désignant des constantes arbitraires, soit

$$Ax + By + Cz = 0, \tag{12}$$

l'équation du plan moyen P d'une congruence normale à surface moyenne plane admettant (6) pour représentation sphérique de ses développables $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$ Il s'agit, pour déterminer la congruence, de calculer la fonction ρ solution de (11) qui lui correspond, après quoi l'intégration des trois systèmes d'équations (4) fera connaître les trois fonctions x, y, z de u, v qui fixent le point où le rayon générateur de la congruence, de cosinus directeurs X, Y, Z [donnés par (6)], perce le plan P.

Dérivons (12) successivement par rapport à u et v; nous obtenons les deux équations

$$A\frac{\partial x}{\partial u} + B\frac{\partial y}{\partial u} + C\frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad A\frac{\partial x}{\partial v} + B\frac{\partial y}{\partial v} + C\frac{\partial z}{\partial v} = 0,$$

qui peuvent s'écrire, en substituant aux dérivées $\frac{\partial x}{\partial u}, \ldots, \frac{\partial x}{\partial v}, \ldots,$ leurs expressions (4) et en posant

$$\Theta = AX + BY + CZ,$$

$$\frac{\partial \log \rho}{\partial u} = \frac{\partial \log \Theta}{\partial u} - 2b, \qquad \frac{\partial \log \rho}{\partial v} = \frac{\partial \log \Theta}{\partial v} - 2a.$$

Le système des deux équations précédentes, où l'inconnue est la fonction ρ, est complètement intégrable comme le montrent les expressions (10) de a, b, et son intégration donne

$$\rho = \lambda\frac{\Theta}{E},$$

λ étant une constante que nous pouvons égaler à l'unité, puisque les coefficients A, B, C qui rentrent dans l'expression de Θ ne sont évidemment définis qu'à un facteur près.

En remplaçant dans Θ, (X, Y, Z) par leurs expressions (6), et E par son expression (10), on obtient

$$\rho = (\operatorname{ch} v + \alpha \cos u)\left[A\sqrt{1-\alpha^2}\sin u - B\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{sh} v + C(\cos u + \alpha \operatorname{ch} v)\right]. \tag{13}$$

On vérifie sans difficultés que cette valeur de ρ est solution de l'équation de Laplace (11). Elle fournit donc la congruence normale à surface moyenne plane la plus générale, admettant pour image sphérique de ses développables un double système orthogonal de cercles défini par deux droites conjuguées D et D′ dont l'une coupe la sphère image ($\alpha < 1$).

Les congruences en question forment bien, comme nous l'avions prévu géométriquement, une famille à trois paramètres, α et les rapports de deux des trois quantités A, B, C à la troisième. Leurs surfaces orthogonales fournissent, à une exception près, correspondant au cas laissé de côté où $\alpha = 1$, l'ensemble des surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane.

La détermination analytique complète des congruences que l'on vient d'obtenir et de leurs surfaces orthogonales s'achève sans peine. Les coordonnées x, y, z du point où le rayon générateur de l'une quelconque de ces congruences perce le plan moyen, sont fournies par l'intégration des trois systèmes complètement intégrables (4). En remplaçant dans ces systèmes ρ par son expression (13), a et b par leurs expressions (10), X, Y, Z par leurs valeurs (6), les trois systèmes s'écrivent

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial u} &= \mathrm{B}(1-\alpha^2)\cos u \operatorname{sh} v - \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}, \\ \frac{\partial x}{\partial v} &= \mathrm{B}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{ch} v - \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial u} &= -\mathrm{A}(1-\alpha^2)\cos u \operatorname{sh} v + \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v, \\ \frac{\partial y}{\partial v} &= -\mathrm{A}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{ch} v - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v - \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}; \end{aligned}\right.$$

$$\left\{\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial u} &= -\mathrm{B}\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v + \mathrm{A}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v + \mathrm{A}\sqrt{1-\alpha^2}, \\ \frac{\partial z}{\partial v} &= \mathrm{B}\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v + \mathrm{A}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v + \mathrm{B}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}; \end{aligned}\right.$$

on en déduit, en négligeant une translation parallèle au plan moyen

$$(14)\quad \left\{\begin{aligned} x &= \mathrm{B}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{sh} v - \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{ch} v - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}\, u, \\ y &= -\mathrm{A}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{sh} v - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{sh} v - \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\, v, \\ z &= \mathrm{B}\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{sh} v + \mathrm{A}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{ch} v + \mathrm{A}\sqrt{1-\alpha^2}\, u + \mathrm{B}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\, v; \end{aligned}\right.$$

et l'on vérifie d'ailleurs aussitôt que l'on a

$$\mathrm{A}x + \mathrm{B}y + \mathrm{C}z = 0.$$

Les deux nappes focales sont données par les équations (1). Le calcul donne, pour la première nappe focale (lieu du foyer F_1 correspondant aux développables $v = \text{const.}$)

$$(\mathrm{F}_1)\quad \left\{\begin{aligned} x_1 &= \mathrm{A}(1-\alpha^2)\sin^2 u + \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}(\sin u \cos u - u), \\ y_1 &= -2\mathrm{A}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{sh} v + \mathrm{B}(1-\alpha^2)\operatorname{sh}^2 v \\ &\qquad - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}(2\cos u \operatorname{sh} v + \alpha \operatorname{sh} v \operatorname{ch} v + \alpha v), \\ z_1 &= \mathrm{A}\sqrt{1-\alpha^2}(2\alpha \sin u \operatorname{ch} v + \sin u \cos u + u) - \mathrm{B}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(\operatorname{ch} v \operatorname{sh} v - v) \\ &\qquad + \mathrm{C}(2\alpha \cos u \operatorname{ch} v + \cos^2 u + \alpha^2 \operatorname{ch}^2 v); \end{aligned}\right.$$

et pour la nappe focale (F_2)

$$(\mathrm{F}_2)\quad \left\{\begin{aligned} x_2 &= -\mathrm{A}(1-\alpha^2)\sin^2 u + 2\mathrm{B}(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{sh} v \\ &\qquad - \mathrm{C}\sqrt{1-\alpha^2}(2\alpha \sin u \operatorname{ch} v + \sin u \cos u + u), \\ y_2 &= -\mathrm{B}(1-\alpha^2)\operatorname{sh}^2 v + \mathrm{C}\alpha\sqrt{1-\alpha^2}(\operatorname{sh} v \operatorname{ch} v - v), \\ z_2 &= -\mathrm{A}\sqrt{1-\alpha^2}(\sin u \cos u - u) + \mathrm{B}\sqrt{1-\alpha^2}(2\cos u \operatorname{sh} v + \alpha \operatorname{ch} v \operatorname{sh} v + \alpha v) \\ &\qquad - \mathrm{C}(2\alpha \cos u \operatorname{ch} v + \cos^2 u + \alpha^2 \operatorname{ch}^2 v). \end{aligned}\right.$$

Les surfaces normales aux rayons des congruences qui viennent d'être déterminées, c'est-à-dire, à l'exception près signalée plus haut, les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane, sont définies par les équations

$$(15) \qquad \xi = x + tX, \qquad \eta = y + tY, \qquad \zeta = z + tZ,$$

où x, y, z ont les expressions (14), X, Y, Z les expressions (6), et où t a pour valeur

$$t = \lambda - \int U\,du + V\,dv,$$

λ désignant une constante arbitraire, et U, V étant, comme il est bien connu, les deux sommes

$$U = SX\frac{\partial x}{\partial u}, \qquad V = SX\frac{\partial x}{\partial v}.$$

Tous calculs faits on a

$$U = A\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v - B\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v - C(1-\alpha^2)\sin u \operatorname{ch} v + A\alpha\sqrt{1-\alpha^2},$$
$$V = A\sqrt{1-\alpha^2}\sin u \operatorname{sh} v + B\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\cos u \operatorname{ch} v + C(1-\alpha^2)\cos u \operatorname{sh} v + B\sqrt{1-\alpha^2},$$

d'où l'expression de t qui fait connaître les surfaces (15)

$$t = \lambda - \left[A\sqrt{1-\alpha^2}(\sin u \operatorname{ch} v + \alpha u) + B\sqrt{1-\alpha^2}(\alpha\cos u \operatorname{sh} v + v) + C(1-\alpha^2)\cos u \operatorname{ch} v\right].$$

Les lignes de courbure planes de ces surfaces sont les courbes $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, et le plan moyen est le plan

$$Ax + By + Cz = 0.$$

Dans le cas, laissé de côté, où les deux droites D et D′ qui définissent la représentation sphérique sont tangentes à la sphère image au point (0, 0, 1), D et D′ étant respectivement parallèles à Oy et à Ox, les cosinus directeurs X, Y, Z de la normale à l'une quelconque des surfaces cherchées ont les expressions (8), et le Tableau (10) est à remplacer par

$$(16) \qquad \left\{\begin{aligned} &F = 0,\\ &E = G = \frac{4}{(u^2+v^2+1)^2},\\ &a = \begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial v} = \frac{-2v}{u^2+v^2+1},\\ &b = \begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} = \frac{\partial \log\sqrt{E}}{\partial u} = \frac{-2u}{u^2+v^2+1},\\ &\frac{\partial a}{\partial u} = \frac{\partial b}{\partial v} = \frac{4uv}{(u^2+v^2+1)^2};\end{aligned}\right.$$

d'autre part, l'équation de Laplace (11) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \frac{2v}{u^2+v^2+1}\frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{2u}{u^2+v^2+1}\frac{\partial \rho}{\partial v} + \frac{8uv}{(u^2+v^2+1)^2}\rho = 0. \tag{17}$$

L'équation du plan moyen de la congruence des normales à l'une quelconque des surfaces cherchées étant encore

$$Ax + By + Cz = 0,$$

et, Θ désignant toujours la quantité $AX + BY + CZ$, on vérifie aussitôt que l'on a, comme dans le cas général,

$$\rho = \frac{\Theta}{E}.$$

L'expression explicite de ρ est

$$\rho = \frac{u^2+v^2+1}{4}[2Au + 2Bv + C(u^2+v^2-1)], \tag{18}$$

et cette expression vérifie l'équation de Laplace (17).

Les trois systèmes (4) s'écrivent ici :

$$\begin{aligned}
\frac{\partial x}{\partial u} &= -Bv + \frac{C}{2}(u^2-v^2+1), & \frac{\partial x}{\partial v} &= -Bu - Cuv;\\
\frac{\partial y}{\partial u} &= Av + Cuv, & \frac{\partial y}{\partial v} &= Au + \frac{C}{2}(u^2-v^2-1);\\
\frac{\partial z}{\partial u} &= \frac{A}{2}(-u^2+v^2-1) - Buv, & \frac{\partial z}{\partial v} &= \frac{B}{2}(v^2-u^2+1) + Auv;
\end{aligned}$$

et l'on en déduit, en négligeant une translation, pour les coordonnées x, y, z du point où le rayon générateur de la congruence des normales à l'une des surfaces envisagées perce le plan moyen, les expressions

$$\left\{\begin{aligned}
x &= \frac{C}{6}(u^3 - 3uv^2 + 3u) - Buv,\\
y &= \frac{C}{6}(3u^2v - v^3 - 3v) + Auv,\\
z &= \frac{A}{6}(-u^3 + 3uv^2 - 3u) + \frac{B}{2}(-u^2v + v^3),
\end{aligned}\right. \tag{19}$$

qui vérifient bien, comme l'on voit, l'équation du plan moyen $Ax+By+Cz=0$,

Les congruences actuelles ne dépendent que de deux paramètres de forme, à savoir les rapports de deux des quantités A, B, C à la troisième, rapports qui fixent la direction du plan moyen par rapport à l'image sphérique des développables.

Les deux nappes focales de l'une quelconque des congruences obtenues sont définies par les équations (1). Le calcul, fait en tenant compte des expressions précédentes de x, y, z, de la valeur (18) de ρ, et des expressions (8) de X, Y, Z, donne pour la première nappe focale

$$(F'_1)\quad \begin{cases} x_1 = \frac{2}{3}\,C u^3 + A u^2, \\ y_1 = C\left(u^2 v + \frac{v^3}{3} - v\right) + 2 A u v + B v^2, \\ z_1 = \frac{C}{4}(u^2 + v^2 - 1)^2 + A\left(\frac{u^3}{3} + u v^2\right) + \frac{2}{3}\,B v^3, \end{cases}$$

et pour la deuxième

$$(F'_2)\quad \begin{cases} x_2 = -C\left(\frac{u^3}{3} + u v^2 + u\right) - A u^2 - 2 B u v, \\ y_2 = -\frac{2}{3}\,C v^3 - B v^2, \\ z_2 = -\frac{C}{4}(u^2 + v^2 - 1)^2 - \frac{2}{3}\,A u^3 - B\left(u^2 v + \frac{v^3}{3}\right). \end{cases}$$

Les surfaces normales aux congruences qui viennent d'être déterminées s'obtiennent, comme dans le cas général, en remplaçant dans les formules (15), x, y, z par leurs valeurs (19), ρ par son expression (18), et t par $\left(\lambda - \int U du + V dv\right)$, λ étant une constante arbitraire. On a ici

$$U = SX\frac{\partial x}{\partial u} = \frac{A}{2}(v^2 - u^2 + 1) - B u v + C u,$$

$$V = SX\frac{\partial x}{\partial v} = \frac{B}{2}(v^2 - u^2 - 1) + A u v - C v,$$

et l'on en déduit

$$t = \lambda - \int U\,du + V\,dv = \lambda - \left[\frac{A}{6}(3 v^2 u - u^3 + 3 u) + \frac{B}{6}(v^3 - 3 u^2 v - 3 v) + \frac{C}{2}(u^2 - v^2)\right];$$

u et v sont les paramètres des lignes de courbure des surfaces obtenues, et les constantes A, B, C, dont seuls les rapports mutuels interviennent si l'on néglige une homothétie, définissent le plan qui constitue la développée moyenne $(Ax + By + Cz = 0)$.

Ainsi se trouvent déterminées, de façon complète et sans signes de quadratures, toutes les surfaces dont nous nous étions proposé la recherche, avec, pour chacune d'elles, les deux nappes de la développée.

Il n'est pas inutile de noter que la raison géométrique du succès de la recherche tient à ce que des trois conditions suivantes imposées à une surface :

le premier système de lignes de courbure est formé de courbes planes;

le deuxième système de lignes de courbure est formé de courbes planes;

la développée moyenne est plane;

conditions qui, par leur nombre, sembleraient devoir entraîner une impossibilité, la troisième jointe à l'une quelconque des deux premières entraîne la restante. Autrement dit, pour les surfaces admettant un système de lignes de courbure planes, la planéité de la développée moyenne entraîne celle du deuxième système de lignes de courbure.

Soit, en effet, S une surface admettant un système de lignes de courbure planes et dont la développée moyenne est plane; envisageons la surface *génératrice* Σ (*voir* le n° 2) de la congruence de ses normales: Σ est une surface minima dont la représentation sphérique des asymptotiques est celle des lignes de courbure de S. Une des familles de courbes de la représentation sphérique (celle qui correspond aux lignes de courbure planes de S) est formée de cercles; l'image des asymptotiques d'une surface minima constituant un système orthogonal isotherme, l'autre famille de courbes de la représentation sphérique est aussi formée de cercles, et les lignes de courbure correspondantes sont planes comme celles du premier système.

Si, par exemple, on avait recherché les surfaces à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, et telles que les points partageant dans un rapport constant les différents segments focaux (déterminés par deux centres de courbure principaux associés) soient dans un même plan, on se serait heurté à une impossibilité. Pour retrouver la compatibilité, il faut abandonner la planéité de l'un des deux systèmes de lignes de courbure. On obtient alors un nouveau problème que nous aurons l'occasion d'examiner un peu plus loin dans un cas particulier.

3. **Surfaces dont l'une des nappes focales est une courbe.** — Pour chaque valeur (supposée fixée) du paramètre α définissant la représentation sphérique, nous obtenons, en ne considérant pas comme distinctes des surfaces parallèles au sens ordinaire, une famille de ∞^2 surfaces de même représentation sphérique pour leurs lignes de courbure (parallèles au sens de Péterson suivant le réseau de courbure) et à développée moyenne plane, correspondant aux ∞^2 orientations possibles du plan moyen. Les ∞^1 familles relatives aux différentes valeurs de α jouissent d'une propriété intéressante que nous allons signaler.

Étant donnée une surface S dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes, il existe une infinité de surfaces *enveloppes de sphères* admettant même représentation sphérique de leurs lignes de courbure que S. Pour en avoir une, il suffit de prendre les points où les ∞^1 lignes de courbure planes coupent une ligne de courbure L de l'autre système, puis de construire les cercles osculateurs en ces points aux différentes lignes de courbure planes; la surface est constituée par l'ensemble de ces cercles. Les sphères touchant la surface le long des ∞^1 cercles précédents ont leurs centres sur la nappe de la développée de S relative aux lignes de courbure planes, et le lieu de ces centres est une courbe de la famille conjuguée des géodésiques enveloppées sur cette nappe par les normales de S. Si la surface S est à lignes de courbure planes dans les deux systèmes, la construction ci-dessus peut être effectuée indifféremment avec les lignes de courbure de l'un ou de l'autre système, et elle fournit une double infinité de surfaces enveloppes de sphères parallèles entre elles au sens de Péterson.

La conservation de l'image sphérique des lignes de courbure est, en général, la seule propriété invariante quand on passe de S à l'une des enveloppes de sphères associées. En particulier, si S est l'une des surfaces envisagées dans cet article, à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane, les enveloppes de sphères associées, parallèles de Péterson à S, ne sont généralement pas à développée moyenne plane. Mais nous allons montrer que, dans chacune des différentes familles de ∞^2 surfaces de même représentation sphérique de leurs lignes de courbure correspondant aux différentes valeurs de α, *il existe deux surfaces enveloppes de sphères*. Nous mettrons ainsi en évidence *deux infinités, géométriquement séparées, de surfaces enveloppes de sphères à développée moyenne plane*, constituant d'ailleurs la totalité des surfaces de ce type. La détermination des courbes lieux des centres des sphères engendrant ces surfaces, et la loi de variation de leurs rayons le long d'une même courbe, vont d'ailleurs nous conduire à des résultats dignes d'être notés.

Les expressions des ds^2 des deux nappes (F_1) et (F_2) de la développée d'une surface à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane, s'obtiennent, suivant que l'on est dans le cas $\alpha \neq 1$ ou $\alpha = 1$, au moyen des formules (5) ou (5') du n° 1, dans lesquelles il faut remplacer l'élément linéaire sphérique par l'une ou l'autre des expressions (6), (9) du n° 2, et ρ par l'expression (13) ou (18) suivant que l'on est dans le premier cas ou dans le second. Les formules (5) et (5') montrent que, dans l'un comme dans l'autre cas, la première nappe de la développée se réduit à une courbe si l'on peut avoir identiquement

$$\frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho = 0,$$

et, de même, la deuxième nappe se réduit à une courbe si

$$\frac{\partial \rho}{\partial v} + a\rho = 0.$$

Plaçons-nous d'abord dans le cas général $(0 \leq \alpha < 1)$; on a alors, compte tenu de la valeur (13) de ρ et des expressions (10) de a et b,

$$\begin{aligned} \frac{\partial \rho}{\partial u} + b\rho &= (\operatorname{ch} v + \alpha \cos u)\left(A\sqrt{1-\alpha^2}\cos u - C\sin u\right), \\ \frac{\partial \rho}{\partial v} + a\rho &= (\operatorname{ch} v + \alpha \cos u)\left(-B\sqrt{1-\alpha^2}\operatorname{ch} v + C\alpha \operatorname{sh} v\right). \end{aligned}$$

On constate que la première nappe de la développée de la surface S la plus générale à développée moyenne plane et à lignes de courbure planes, est une courbe, si $A = C = 0$, soit si l'équation du plan moyen est $y = 0$, c'est-à-dire *si ce plan moyen est perpendiculaire à la direction de droite* D' (*voir le* n° 2) *commune aux plans des lignes de courbure du premier système de* S.

De même, la deuxième nappe de la développée se réduira à une courbe si $B = C = 0$, c'est-à-dire si le plan moyen est perpendiculaire à la direction commune D aux plans des lignes de courbure du second système de S.

Dans le premier cas, $A = C = 0$, les équations de la nappe de développée curviligne sont [*voir* les équations (F_1) et (F_2) du n° 2]

$$x_1 = 0, \qquad y_1 = B(1-\alpha^2)\,\mathrm{sh}^2 v, \qquad z_1 = B\alpha\sqrt{1-\alpha^2}\,(v - \mathrm{sh}\, v\, \mathrm{ch}\, v),$$

soit, en disposant d'une homothétie et en posant $2v = \varphi$

$$(F_1) \qquad x_1 = 0, \qquad y_1 = \frac{\sqrt{1-\alpha^2}}{\alpha}(\mathrm{ch}\,\varphi - 1), \qquad z_1 = \varphi - \mathrm{sh}\,\varphi.$$

Dans le deuxième cas, $B = C = 0$, la nappe de développée curviligne est (F_2) et ses équations sont, moyennant une homothétie et après avoir posé $2u = \varphi$,

$$(F_2) \qquad x_2 = -\sqrt{1-\alpha^2}\,(1-\cos\varphi), \qquad y_2 = 0, \qquad z_2 = \varphi - \sin\varphi.$$

En définitive, il existe deux infinités de surfaces S à développée moyenne plane admettant une nappe de développée curviligne (enveloppes de sphères). Chaque représentation sphérique (α donné) fournit deux de ces surfaces, qui sont engendrées par des sphères dont les centres décrivent l'une ou l'autre des deux courbes planes (et dans des plans rectangulaires) définies par les équations (F_1), (F_2). Ces surfaces constituent (à l'exception $\alpha = 1$ près que nous allons examiner) les surfaces enveloppes de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane les plus générales, car il n'y a pas d'autre moyen d'annuler identiquement $\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho$ ou $\frac{\partial\rho}{\partial v} + a\rho$, qu'en faisant $A = C = 0$ ou $B = C = 0$.

Si $\alpha = 1$, ρ a la valeur (18) et a et b ont les expressions (16). On a alors

$$\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\rho = \frac{u^2+v^2+1}{2}(A + Cu), \qquad \frac{\partial\rho}{\partial v} + a\rho = \frac{u^2+v^2+1}{2}(B + Cv),$$

et l'on voit que si l'on a $(A = C = 0)$ ou bien $(B = C = 0)$, la première ou la deuxième nappe de la développée de la surface S envisagée sera une courbe.

Les équations de la nappe curviligne de développée se déduisent des équations générales (F'_1), (F'_2) du n° 2. Si $A = B = 0$, on obtient

$$(F'_1) \qquad x_1 = 0, \qquad y_1 = Bv^2, \qquad z_1 = \frac{2}{3}Bv^3,$$

et l'on voit que, dans le cas actuel, le lieu des centres des sphères enveloppant

S est une *développée de parabole* (courbe plane) dont la tangente de rebroussement est perpendiculaire au plan moyen ($x_1 = 0$).

Le cas $B = C = 0$ conduit ici à la même surface (à la disposition par rapport aux axes près).

En ce qui concerne les nappes curvilignes (F_1) et (F_2) des développées des surfaces générales envisagées dans ce paragraphe, nous pouvons observer que les équations (F_2) définissent la *projection orthogonale d'une cycloïde* sur un plan passant par la base et faisant avec le plan de la cycloïde un angle dont le sinus est α. Les équations (F_1) peuvent alors être dites définir une *cycloïde hyperbolique projetée*, la projection ayant lieu, suivant la valeur de α, sur un plan parallèle à la base (Oz) ou à l'axe de symétrie (Oy).

Nous pouvons donc dire que les surfaces enveloppes de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane ont pour déférentes (lieux des centres des sphères), soit des projections orthogonales de cycloïdes sur des plans parallèles aux bases, soit des projections orthogonales de cycloïdes hyperboliques sur des plans parallèles aux bases ou aux axes de symétrie, soit des développées de paraboles. Toute courbe de l'un quelconque de ces trois types peut d'ailleurs être regardée comme la déférente d'une surface enveloppe de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane. Nous verrons dans la suite que la loi de variation du rayon de la sphère génératrice de la surface S ayant pour déférente l'une quelconque des courbes indiquées, peut être présentée sous une forme géométrique extrêmement simple.

Il ne semble pas inutile, avant d'aller plus loin, de signaler que les cycloïdes et les courbes que nous avons appelées cycloïdes hyperboliques, que le problème de la recherche des surfaces enveloppes de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane vient de rapprocher, sont susceptibles d'un autre mode de rapprochement.

Étant donnée une courbe plane quelconque C et l'un de ses points O, nous appellerons transformée de C par la transformation (T) relative au point O, la courbe C′ obtenue de la façon suivante : La courbe C et sa tangente ($t't$) en O étant supposées orientées dans des sens conformes, et M étant un point quelconque de C, portons sur ($t't$) un segment $\overline{Om}$ de même mesure algébrique que l'arc $\overset{\frown}{OM}$ de C. Soit $\overrightarrow{OM'}$ le vecteur issu de O équipollent à $\overrightarrow{mM}$. Lorsque M décrit C, M′ décrit la courbe C′ déduite de C par la tranfsrmation (T) relative au point O.

On vérifie aussitôt que les cycloïdes sont les transformées (T) d'un cercle par rapport à l'un quelconque de ses points, et que les cycloïdes hyperboliques sont les transformées (T) d'une chaînette relativement à son sommet.

4. Une généralisation des surfaces du numéro précédent. — Les surfaces enveloppes de sphères du numéro précédent sont des solutions particulières (correspondant au cas où $K = -1$) du problème suivant :

Trouver les surfaces enveloppes de sphères telles, que le lieu géométrique des points partageant les segments focaux (déterminés par les différents couples de centres de courbure principaux associés) dans un rapport constant K, *soit un plan.*

A priori ce problème n'a pas forcément de solutions, car, les surfaces partageant dans un rapport constant les segments focaux des congruences des normales aux enveloppes de sphères, sont des surfaces particulières, que rien n'oblige à voir une forme imposée. Il est assez remarquable que la forme plane soit admise pour ces surfaces.

Nous allons étudier le problème directement, par une méthode inspirée des travaux de G. Darboux [1], se prêtant de la façon la plus simple à la détermination *simultanée*, des courbes déférentes des surfaces cherchées, et de la loi de variation des rayons des sphères qui les engendrent comme enveloppes.

Supposons que le plan partageant les différents segments focaux d'une surface S répondant à la question dans le rapport constant K soit le plan xOy du système rectangulaire $Oxyz$. Soient F_1, F_2 deux centres de courbure associés quelconques; pour que le point μ qui partage $(F_1 F_2)$ dans le rapport $K\left(\frac{\overline{\mu F_1}}{\overline{\mu F_2}} = K\right)$ soit constamment dans le plan xOy, il faut et il suffit que, si z est la côte de F_1, celle de F_2 soit $\frac{z}{k}$.

Cela étant, envisageons une surface quelconque S du type indiqué, et soit C la courbe lieu du centre (x, y, z) de la sphère variable (σ) dont elle est l'enveloppe; x, y et z sont des fonctions d'un certain paramètre variable. Si l'on suppose connue C, ainsi que le rayon R de la sphère centrée au point (x, y, z) de C, rayon qui est une fonction déterminée du paramètre qui fixe le centre de la sphère sur C, la surface S, enveloppe de (σ), s'obtient en éliminant le paramètre variable entre les deux équations

$$(20)\qquad \left\{ \begin{aligned} (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2 &= R^2, \\ (X-x)\,dx+(Y-y)\,dy+(Z-z)\,dz+R\,dR &= 0, \end{aligned} \right.$$

où X, Y, Z sont les coordonnées courantes sur S.

L'équation

$$(21)\quad (X-x)^2+(Y-y)^2+(Z-z)^2 = \left[(X-x)\frac{dx}{dR}+(Y-y)\frac{dy}{dR}+(Z-z)\frac{dz}{dR}\right]^2,$$

qui est une combinaison des deux équations (20), représente le cône de

---

(1) *Voir* G. DARBOUX, *Théorie des surfaces*, t. II, p. 279.

révolution formé par l'ensemble des normales à S aux différents points de la ligne de courbure circulaire définie par les équations (20).

L'enveloppe du cône (21) est une certaine surface qui contient, en dehors de la courbe C lieu du sommet et première nappe de la développée de S, la deuxième nappe de cette même développée. En dérivant l'équation (21) par rapport au paramètre variable dont elle dépend, et en négligeant un facteur imaginaire, on trouve que cette deuxième nappe est le lieu de la conique section du cône (21) par le plan

$$(22) \qquad (X-x)\frac{d}{dR}\left(\frac{dx}{dR}\right)+\ldots+1-\frac{dx^2+dy^2+dz^2}{dR^2}=0.$$

Nous prendrons dans la suite R pour variable indépendante, en excluant ainsi le cas des surfaces canaux (R = const.) qui, comme il est facile de s'en rendre compte, ne sauraient fournir d'autres solutions du problème que les solutions banales obtenues avec une déférente plane et un rapport constant K = O, et les enveloppes de sphères de rayon constant centrées sur une courbe de Ribaucour. Nous écrirons alors (22)

$$(23) \quad (X-x)\frac{d^2x}{dR^2}+(Y-y)\frac{d^2y}{dR^2}+(Z-z)\frac{d^2z}{dR^2}+1-\left[\left(\frac{dx}{dR}\right)^2+\left(\frac{dy}{dR}\right)^2+\left(\frac{dz}{dR}\right)^2\right]=0.$$

Pour une valeur déterminée de R, on a un centre de courbure principal déterminé F_1 de S sur la nappe de développée curviligne C, auquel sont associés ∞^1 centres de courbure, situés sur la nappe non curviligne Γ, et distribués sur la courbe (γ) de contact du cône de sommet F_1 circonscrit à Γ. Cette courbe est, comme on vient de le voir, une conique, ce qui prouve que les nappes focales non curvilignes des surfaces cherchées appartiennent à la famille des surfaces étudiées par M. E. Blutel en 1890, et sur lesquelles MM. Gambier et Blutel sont revenus plus récemment, qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. Dans le cas actuel les plans des coniques sont *parallèles* et les cônes du second degré sont *de révolution*, sans que, d'ailleurs, les surfaces que nous allons obtenir épuisent la famille définie par ces deux dernières particularités. Pour achever la recherche, *exprimons que le plan* (23) *de la conique* (γ) *est constamment parallèle au plan* xy, *sa côte étant constamment égale à* $\frac{z}{k}$ (z désignant, comme on l'a déjà dit, la côte de la position, sur la nappe curviligne C, du sommet du cône circonscrit à la nappe non curviligne Γ le long de la conique γ). (23) fournit alors les trois équations suivantes, propres à déterminer *simultanément* la nappe de développée curviligne C et l'expression du rayon de la sphère enveloppant la surface cherchée

$$(24) \quad \frac{d^2x}{dR^2}=0, \qquad \frac{d^2y}{dR^2}=0, \qquad \left(\frac{k-1}{k}\right)z\frac{d^2z}{dR^2}=1-\left[\left(\frac{dx}{dR}\right)^2+\left(\frac{dy}{dR}\right)^2+\left(\frac{dz}{dR}\right)^2\right].$$

(1) B. Gambier, *Ann. Fac. Sc. Toulouse*, 3e série, t. XXVII, p. 202; E. Blutel, *ibid.*, p. 241.

Les deux premières équations (24) donnent

$$\begin{aligned} x &= a\mathrm{R} + b \\ y &= a'\mathrm{R} + b' \end{aligned} \qquad (a, \ldots, b' = \text{const.}),$$

et prouvent que la nappe curviligne *est nécessairement plane et dans un plan perpendiculaire au plan* ($x\mathrm{O}y$) *partageant les segments focaux en rapport constant.*

Nous pouvons toujours supposer que le plan de la nappe curviligne est le plan $x\mathrm{O}z$. Nous aurons alors, en négligeant une translation parallèle à $\mathrm{O}x$, ce qui est indifférent

$$x = a\mathrm{R}, \qquad y = 0, \tag{25}$$

et la dernière équation (24) donne, après substitution de $\frac{x}{a}$ à R, pour déterminer la nappe curviligne dans le plan $x\mathrm{O}z$, l'équation différentielle

$$\frac{k-1}{k} z \frac{d^2 z}{dx^2} + \left(\frac{dz}{dx}\right)^2 = \frac{1-a^2}{a^2}. \tag{26}$$

L'intégration de (26) conduit à l'équation de C sous la forme

$$x = a \int \left(\mathrm{A} z^{\frac{2k}{1-k}} + 1 - a^2\right)^{-\frac{1}{2}} dz, \tag{27}$$

où A est une constante d'homothétie. Le seul paramètre de forme pour C est a.

Si l'on néglige une homothétie, ainsi que la transformation qui fait passer d'une surface à toutes ses parallèles, on voit que, pour chaque valeur de la constante K, on a ∞^1 surfaces enveloppes de sphères, telles que le lieu des points partageant les segments focaux dans le rapport K soit un plan P. Si $x\mathrm{O}y$ est le plan P, les courbes C lieux des centres des sphères sont les courbes (27) (où l'on peut poser $\mathrm{A} = \pm 1$), et la loi de variation du rayon de la sphère enveloppant la surface S qui admet pour déférente une courbe déterminée (27) (correspondant à une valeur déterminée du paramètre de forme a) est, d'après (25), $\mathrm{R} = \frac{x}{a}$: le rayon varie donc *proportionnellement à la distance du centre à un plan orthogonal à la fois au plan* P *et au plan de la déférente.*

L'intégrale (27) est une intégrale de différentielle binome, que l'on pourra aisément expliciter si le rapport constant K est l'inverse d'un nombre entier (positif ou négatif). Le cas où $\mathrm{K} = -1$ redonne les déférentes obtenues au n° 3 (projections orthogonales de cycloïdes ordinaires ou hyperboliques, ou développées de paraboles). D'une façon précise, le calcul de l'intégrale (27) conduit si $\mathrm{K} = -1$ (une homothétie étant négligée), aux équations (F_1) du n° 3 (où α est remplacé par a) si $a < 1$, aux équations (F_2) $\left(\text{où } \alpha \text{ est remplacé par } \frac{1}{a}\right)$ si $a > 1$, et aux équations (F'_1) si $a = 1$. Nous pouvons maintenant, relativement à ce dernier cas ($\mathrm{K} = -1$), compléter les résultats déjà établis et énoncer ce résultat général :

Les surfaces S, enveloppes de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane, se répartissent en trois familles distinctes, que l'on obtient de la façon suivante. On considère, soit la projection orthogonale d'une cycloïde sur un plan quelconque parallèle à la base, soit la projection d'une cycloïde hyperbolique sur un plan indifféremment parallèle à la base ou à l'axe de symétrie, soit une développée de parabole. On envisage, dans les plans des courbes précédentes, une droite fixe perpendiculaire aux bases (1). On centre, en chaque point de l'une quelconque de ces courbes, une sphère dont le rayon s'obtient en réduisant la distance du point à la droite fixe, dans le rapport constant $\frac{1}{a}$ qui caractérise la déférente envisagée ; les enveloppes des familles de sphères ainsi obtenues donnent, à l'homothétie et au parallélisme près, toutes les surfaces enveloppes de sphères à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane : le plan moyen est, dans tous les cas, le plan perpendiculaire au plan de la déférente le long de sa base.

Si la déférente est la projection d'une cycloïde sur un plan issu de la base et faisant l'angle θ avec ce plan, $\frac{1}{a} = \alpha$ n'est autre chose, comme on l'a observé au n° 3, que le sinus de l'angle θ, et le rapport constant dans lequel il faut réduire les distances à la droite fixe pour avoir les rayons des sphères génératrices prend une signification géométrique simple : *il est égal à* $\sin\theta$.

Si la déférente est une développée de parabole, $a = 1$ et la surface S prend une physionomie plus simple encore. *C'est l'enveloppe d'une sphère variable, dont le centre décrit une développée de parabole, et qui reste tangente à une parallèle quelconque à l'arête de rebroussement* (*dans le plan de la courbe*).

5° **Remarques sur les adjointes des surfaces minima d'O. Bonnet.** — Comme nous l'avons observé au n° 2, les congruences formées par les normales aux surfaces générales (S) à lignes de courbure planes dans les deux systèmes et à développée moyenne plane [que nous dirons du type (G)], sont les congruences normales admettant pour surfaces *génératrices* les adjointes (Σ) des surfaces minima d'O. Bonnet à lignes de courbure planes dans les deux systèmes. En outre, les développables de l'une quelconque des congruences envisagées correspondent, dans la construction rappelée au début du n° 2, aux lignes asymptotiques de la surface génératriec Σ, lignes dont l'image sphérique est constituée par un double système orthogonal de cercles.

La *forme* d'une surface minima étant *déterminée* par la représentation sphérique de ses lignes asymptotiques, on voit que, chacune des ∞^1 familles doublement infinies, constituées par les congruences des normales aux ∞^1 familles de ∞^2 surfaces (S) (parallèles de Péterson) dont il a été question au n° 3, fournit *une seule* surface minima génératrice Σ. Mais, en vue de propriétés,

(1) Les bases des trois types de courbes dont il est question, sont les droites de leurs plans, perpendiculaires aux tangentes de rebroussement aux points de rebroussement.

pouvant résulter de la considération simultanée d'une congruence à surface moyenne plane du type (G) et de la surface minima génératrice Σ, il n'est pas indifférent de considérer Σ comme génératrice de telle congruence particulière de la famille des ∞^2 congruences G associées. Nous allons regarder Σ comme génératrice *de l'une ou l'autre des deux congruences* G *normales à des enveloppes de sphères qui figurent dans la famille des* ∞^2 *congruences associées*, et déduire de cette façon d'envisager Σ quelques propriétés des lignes asymptotiques des adjointes des surfaces minima d'O. Bonnet.

Considérons l'asymptotique A qui a pour image l'un, C, des cercles sections de la sphère unitaire par les plans passant par l'une, D, des deux droites conjuguées (D, D') qui définissent la représentation sphérique des asymptotiques de Σ. La tangente à A, en l'un quelconque M de ses points d'image μ, est parallèle à la tangente en μ à la sphère image normale au cercle C; cette tangente fait donc un angle constant avec l'axe du cercle C, lequel axe est orthogonal à D, et A (de même d'ailleurs que toutes les asymptotiques du même système) est une hélice dont les tangentes font un angle constant avec une direction fixe normale à D. Les asymptotiques du deuxième système sont, de même, des hélices dont les tangentes font un angle constant avec les différentes directions normales à D'.

Cela étant, supposons la surface Σ orientée de façon que la représentation sphérique de ses asymptotiques soit définie par les formules (6) du n° 2; nous nous plaçons dans le cas général où les deux droites D et D' définissant la représentation sont l'une, D', sécante à la sphère image, et l'autre non sécante, les cercles $u = \text{const.}$ étant les sections de la sphère par les plans du faisceau d'arête D', et les cercles $v = \text{const.}$ les sections par les plans du faisceau d'arête D. Les congruences G à surface moyenne plane associées à Σ admettant une focale curviligne (normales à des enveloppes de sphères) s'obtiennent, comme on l'a vu au n° 3, en choisissant pour plan moyen $x\mathrm{O}z$ $(\mathrm{A} = \mathrm{C} = 0)$, ou $y\mathrm{O}z$ $(\mathrm{B} = \mathrm{C} = 0)$. Envisageons d'abord la congruence G admettant pour plan moyen $x\mathrm{O}z$. Le réseau déterminé par ses développables $u = \text{const.}$, $v = \text{const.}$, dans le plan moyen, s'obtient en annulant A et C dans les équations (14) du n° 2; on trouve ainsi, en négligeant une homothétie,

$$y = 0, \qquad x = \sqrt{1 - \alpha^2} \sin u \operatorname{sh} v, \qquad z = \cos u \operatorname{sh} v + \alpha v. \tag{28}$$

Les courbes $v = \text{const.}$ du réseau précédent sont des ellipses; ce sont d'ailleurs les sections du plan moyen $x\mathrm{O}z$ par les cônes de révolution constituant (*voir* le n° 4) la famille des développables $v = \text{const.}$ de la congruence normale envisagée. Ces ellipses sont définies par l'équation (dépendant du paramètre v)

$$\frac{x^2}{(1 - \alpha^2) \operatorname{sh}^2 v} + \frac{(z - \alpha v)^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1, \tag{29}$$

et l'on voit qu'elles sont homothétiques entre elles, et que leurs grands axes sont portés par la même droite (Oz).

Si l'on a égard à la construction, rappelée au n° 2, qui fait passer de la surface Σ à la congruence G associée, et si l'on tient compte de la correspondance des asymptotiques de Σ et des développables de G, on constate qu'il suffit de faire tourner en bloc le réseau (28), dans le plan xOz, d'un angle droit autour de O, pour avoir le réseau projection des asymptotiques de Σ sur le plan xOz. Ce réseau est défini par les équations

$$x = \cos u \operatorname{sh} v + \alpha v, \qquad z = -\sqrt{1-\alpha^2} \sin u \operatorname{sh} v, \tag{30}$$

et l'on voit que *les asymptotiques* $v =$ const. *de* Σ *se projettent orthogonalement, sur le plan* xOz, *suivant la famille d'ellipses homothétiques, dont les grands axes sont portés par* Ox, *définie par l'équation*

$$\frac{z^2}{(1-\alpha^2)\operatorname{sh}^2 v} + \frac{(x-\alpha v)^2}{\operatorname{sh}^2 v} = 1. \tag{31}$$

Il résulte de là que les asymptotiques $v =$ const. de la surface Σ sont des hélices tracées sur une famille de cylindres elliptiques homothétiques de génératrices parallèles à Oy (à D′), admettant en commun le plan principal (xOy) contenant les grands axes de leurs sections droites. Les directions avec lesquelles les tangentes aux hélices asymptotiques font un angle constant (orthogonales à la droite D) sont celles du plan yOz (ou plutôt de l'angle 2θ de ce plan, de bissectrice Oy, tel que $\sin\theta = \alpha$).

La considération de la deuxième congruence G admettant Σ pour surface génératrice, congruence dont le plan moyen est yOz, conduit, par un raisonnement analogue à celui qui vient d'être fait [il faut ici annuler B et C dans les équations (14)], aux conclusions suivantes. Le réseau asymptotique de Σ se projette orthogonalement, sur le plan yOz, suivant le réseau défini par les équations (une homothétie sur Σ est toujours négligée)

$$y = \alpha \sin u \operatorname{ch} v + u, \qquad z = \sqrt{1-\alpha^2} \sin u \operatorname{sh} v; \tag{32}$$

les projections orthogonales des asymptotiques $u =$ const. sont des *hyperboles homothétiques*, ayant en commun le support (Oy) des axes transverses, d'équations

$$\frac{(y-u)^2}{\alpha^2 \sin^2 u} - \frac{z^2}{(1-\alpha^2)\sin^2 u} = 1. \tag{33}$$

Les asymptotiques $u =$ const. sont des hélices portées par des cylindres hyperboliques homothétiques de génératrices parallèles à Ox (à D), admettant en commun le plan principal transverse. Les directions avec lesquelles les tangentes des hélices asymptotiques font un angle constant (orthogonales à D′), sont celles du plan xOz auquel sont parallèles les plans principaux non transverses des cylindres hyperboliques. Une vérification immédiate des résultats précédents est fournie par l'hélicoïde minima réglé (correspondant à $\alpha = 0$). Les cylindres hyperboliques dégénèrent alors en plans parallèles contenant les asymptotiques rectilignes, et les cylindres elliptiques sont circulaires et coaxiaux.

Dans le cas particulier laissé de côté, où la représentation sphérique des lignes asymptotiques de Σ est définie par deux droites D et D′ tangentes à la sphère image au point (0, 0, 1), la surface Σ est la surface minima classique d'Enneper; la substitution des formules (19) aux formules (14) conduirait alors aux résultats bien connus relatifs aux asymptotiques de cette surface, à savoir que ces courbes sont des hélices tracées sur l'une ou l'autre de deux familles de cylindres paraboliques homothétiques, apparaissant d'ailleurs comme les limites des deux familles de cylindres elliptiques et hyperboliques du cas général. La direction avec laquelle les tangentes à une hélice asymptotique quelconque font un angle constant est parallèle au plan directeur du cylindre parabolique qui porte l'hélice. Il est bien connu d'ailleurs que, dans ce cas particulier, les hélices asymptotiques sont des cubiques gauches rectifiables.

En résumé, nous pouvons énoncer le résultat général suivant :

Les lignes asymptotiques des surfaces adjointes des surfaces minima d'O. Bonnet à lignes de courbure planes sont des hélices. Les hélices de l'un des systèmes sont tracées sur une famille de cylindres elliptiques homothétiques admettant même plan principal focal; les hélices de l'autre système sont tracées sur une famille de cylindres hyperboliques homothétiques admettant même plan principal transverse; enfin les directions avec lesquelles les tangentes aux hélices de l'un quelconque des deux systèmes font un angle constant sont parallèles aux plans des sections droites des cylindres portant les hélices de l'autre système.

L'existence de surfaces minima (autres que l'hélicoïde minima réglé et la surface d'Enneper) dont toutes les asymptotiques sont des hélices tracées sur des cylindres du second degré, ne nous semble pas avoir été signalée dans les études spéciales consacrées aux surfaces minima. Ce qui précède explique d'ailleurs les particularités connues relatives à la surface d'Enneper qui, étant du type d'O. Bonnet (à lignes de courbure planes), et étant en même temps identique à son adjointe, fait partie de la famille générale dont il est question dans ce paragraphe.

6. **Surfaces admettant un réseau conjugué formé de lignes planes et de lignes géodésiques.** — Si nous revenons aux deux nappes de la développée de l'une quelconque des surfaces (S) du n° 2, nappes qui sont définies dans le cas général ($\alpha < 1$) par les équations (F_1), (F_2), et dans le cas particulier $\alpha = 1$ par les équations (F'_1), (F'_2), nous pouvons faire les remarques suivantes. Les courbes $u =$ const. et $v =$ const. déterminent, sur chacune d'elles, un réseau conjugué (découpé sur la nappe envisagée par les développables de la congruence des normales à la surface S correspondante). Sur la surface (F_1), par exemple, les courbes $v =$ const. sont *géodésiques* (propriété des congruences normales), les courbes $u =$ const. *sont planes et dans des plans* ($x_1 =$ const.) *parallèles*, et

les $v = \text{const.}$ sont les *lignes d'ombre* de (F_1) relatives aux directions des plans $x_1 = \text{const.}$ [courbes de contact de (F_1) et des différents cylindres circonscrits dont les génératrices sont parallèles aux plans $x_1 = \text{const.}$]; ces lignes d'ombre étant géodésiques sur (F_1) le sont aussi sur le cylindre circonscrit qui les porte, et sont, de ce fait, des *hélices cylindriques*. Des remarques analogues s'appliquent aux surfaces (F_2), (F'_1), (F'_2). Mais toutes ces surfaces n'épuisent pas la famille des surfaces admettant un système conjugué formé de lignes géodésiques et de courbes planes parallèles à une même direction de plan. La famille complète est constituée, comme il est aisé de s'en rendre compte, par *l'ensemble des nappes focales (relatives aux lignes de courbure planes) des surfaces admettant un système de lignes de courbure situées dans des plans parallèles à une direction de droite fixe.*

Soit, en effet, S une surface quelconque admettant un réseau conjugué formé par les lignes de niveau relatives à un plan fixe P et les lignes d'ombre relatives à ce même plan, ces dernières courbes étant géodésiques sur S. Supposons que les lignes de niveau soient les courbes $v = \text{const.}$ Envisageons une direction D du plan P; la ligne d'ombre de contact de S avec le cylindre circonscrit de génératrices parallèles à D est géodésique sur le cylindre; c'est donc une hélice dont les tangentes font le même angle avec D. Ces tangentes coupent la surface Σ orthogonale aux tangentes aux ∞^1 géodésiques $v = \text{const.}$ suivant l'une, C, de ses lignes de courbure. L'image sphérique c de C est le cercle intersection de la sphère représentative avec le cône de révolution formé par les parallèles issues du centre aux tangentes à l'hélice précédente, cône dont l'axe, de direction D, est parallèle au plan P. Il résulte de là que le plan du cercle c est perpendiculaire au plan P, et que, par suite, la ligne de courbure C est plane et dans un plan parallèle à une direction fixe (la normale à P). Les lignes de courbure $v = \text{const.}$ de Σ *sont donc des courbes planes situées dans des plans parallèles à une direction fixe.*

Réciproquement, supposons que les lignes de courbure $v = \text{const.}$ (que nous désignerons par C) d'une surface Σ, soient dans des plans parallèles à une droite fixe D. Les images sphériques de ces lignes de courbure sont des cercles (c) orthogonaux à un plan fixe P normal à D. Soit S la nappe de la développée de Σ relative aux lignes de courbure C, et m le point où la normale à Σ en un point M de C touche S. La tangente à S conjuguée de mM est l'axe (mt) du cercle osculateur en M à C, intersection des plans normaux à C au point M et au point infiniment voisin M′. Ces deux plans sont parallèles aux plans normaux au cercle image c de C aux points infiniment voisins μ et μ' images de M et M′, lesquels se coupent évidemment suivant l'axe de c qui, en raison de l'orthogonalité du cercle c et du plan P, est situé dans le plan fixe P. Il résulte de là que les tangentes conjuguées des géodésiques $v = \text{const.}$ de S sont parallèles au plan fixe P, et que ce sont par suite des courbes planes situées dans des plans parallèles à P. La surface S a bien un réseau conjugué formé de courbes de niveau tel que les lignes d'ombre correspondant à ces lignes de niveau soient géodésiques, et l'ensemble des surfaces possédant de tels systèmes conjugués s'obtient bien comme on l'a dit, en considérant l'ensemble des nappes focales, relatives aux lignes de courbure planes, des surfaces dont les lignes de courbure de l'un des systèmes sont planes et situées dans des plans parallèles à une droite fixe.

Il est à remarquer que la détermination de la surface S la plus générale du type considéré *n'exige que des quadratures*. Il est clair qu'il suffit de montrer qu'il en est ainsi pour les surfaces développantes, Σ, de S, suivant la famille de géodésiques formée de lignes d'ombre. Les images des lignes de courbure planes $v = \text{const.}$ d'une Σ étant des cercles normaux à un plan fixe (que nons supposerons être le plan de l'équateur de la sphère représentative), la représentation sphérique de la surface Σ la plus générale s'obtiendra en se donnant arbitrairement, sur la sphère, une trajectoire orthogonale γ des cercles $v = \text{const.}$ Ces cercles $v = \text{const.}$ sont alors déterminés comme devant être orthogonaux à la fois à γ et à l'équateur (trajectoire orthogonale double). L'équation de Riccati dont dépend la recherche, sur la sphère, des trajectoires orthogonales $u = \text{const.}$ des cercles $v = \text{const.}$, s'intègre sans quadratures puisqu'on en connaît trois solutions particulières, et la représentation sphérique (u, v) des lignes de courbure de Σ s'en déduit. Le ds^2 de cette représentation a la forme

$$ds^2 = \mathrm{E}\, du^2 + \mathrm{G}\, dv^2, \tag{34}$$

les coefficients E et G étant connus dès que la courbe sphérique est donnée, et vérifiant en outre la relation

$$\frac{1}{\sqrt{\mathrm{EG}}} \frac{\partial \sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} = \varphi(v) \tag{35}$$

exprimant que les courbes sphériques $v = \text{const.}$ sont des cercles : $\varphi(v)$ est l'expression de la courbure géodésique de chaque cercle $v = \text{const.}$ sur la sphère image, et la fonction φ est connue dès que la courbe γ servant à définir la représentation est donnée.

Le problème de la détermination des surfaces Σ est ramené au problème classique de la détermination des surfaces admettant une représentation sphérique connue pour leurs lignes de courbure, donnant au ds^2 de la sphère la forme (34). Au point de vue tangentiel, la détermination des surfaces Σ dépend de l'intégration de l'équation de Laplace, bien connue dans la théorie de la représentation sphérique.

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u\, \partial v} = \frac{\partial \log\sqrt{\mathrm{E}}}{\partial v} \frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{\mathrm{G}}}{\partial u} \frac{\partial h}{\partial v}, \tag{36}$$

h étant la distance de l'origine au plan tangent au point de représentation sphérique (u, v), et cette équation rentre, comme l'a montré L. Bianchi [1],

[1] L. Bianchi, *Lezioni di geometria differenziale*, t. I, p. 509.

dans un type particulier susceptible d'intégration complète. On peut, en effet, avec Bianchi, tenir compte de l'expression (35) de la courbure géodésique des cercles $v =$ const. pour écrire successivement l'équation

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u\,\partial v} = \varphi(v)\sqrt{G}\,\frac{\partial h}{\partial u} + \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\,\frac{\partial h}{\partial v},$$

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial h}{\partial v} - \varphi(v)\sqrt{G}\,h\right) = \frac{\partial \log\sqrt{G}}{\partial u}\left[\frac{\partial h}{\partial v} - \varphi(v)\sqrt{G}\,h\right].$$

En intégrant une première fois on obtient

$$\frac{\partial h}{\partial v} - \varphi(v)\sqrt{G}\,h = V\sqrt{G} \qquad (V = \text{fonct. arb. de } v),$$

et il reste à intégrer cette dernière équation linéaire du premier ordre, ce qui se fait moyennant deux quadratures et fournit l'expression définitive de h

$$h = e^{\int_0^v \varphi(v)\sqrt{G}\,dv}\left[\int_0^v \left(V\sqrt{G}\,e^{-\int_0^v \varphi(v)\sqrt{G}\,dv}\right)dv + U\right],$$

où U et V sont deux fonctions arbitraires des arguments u et v.

Les surfaces S portant des réseaux conjugués formés de lignes de niveau et de lignes d'ombre géodésiques, nappes focales relatives aux lignes de courbure $v =$ const. des surfaces qui viennent d'être déterminées tangentiellement, s'obtiennent maintenant par de simples calculs algébriques. Leur détermination n'exige donc, en dehors de calculs algébriques, *que deux quadratures*. On voit en même temps quel est le degré de généralité de ces surfaces. Elles dépendent de deux fonctions arbitraires de l'argument v et d'une fonction arbitraire de l'argument u : $\varphi(v)$ qui fixe la courbe γ définissant la famille des indicatrices sphériques (circulaires) des lignes d'ombre géodésiques, puis les fonctions V et U.

Chaque choix particulier de γ sur la sphère image fournit ∞^2 surfaces S portant des réseaux conjugués du genre indiqué, tous parallèles entre eux au sens de Péterson. Si, par exemple, γ se réduit à un point, on obtient les réseaux focaux des congruences formées par les normales des surfaces parallèles au sens de Péterson (suivant le réseau de courbure) aux cyclides de Dupin. Ces réseaux contiennent comme cas particuliers ceux qui sont définis par les équations (F_1), (F_2) du n° 2, et, plus particulièrement encore, les réseaux *algébriques* définis par les équations (F'_1), (F'_2) de ce même numéro relatifs au cas où le *point* γ est sur l'équateur de la sphère image. Pour des choix convenables des constantes qui figurent dans les équations (F_1), ..., (F'_2), les supports des réseaux font d'ailleurs partie, comme nous avons eu l'occasion de le noter, de la famille des surfaces étudiées par M. Blutel, qui sont en même temps lieux de coniques et enveloppes de cônes du second degré. Si le point γ est un pôle de la sphère image, les surfaces S ne sont évidemment autre chose que les surfaces moulures à développables directrices cylindriques.