ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES H. ROWE

Couples de tétraèdres de Moebius inscrits dans une quadrique (ou une biquadrique) et circonscrits à une autre quadrique (ou une développable de classe quatre)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 58 (1941), p. 261-283

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1941_3_58__261_0>

COUPLES

DE

TÉTRAÈDRES DE MÖBIUS

INSCRITS DANS UNE QUADRIQUE
(OU UNE BIQUADRIQUE)

ET CIRCONSCRITS A UNE AUTRE QUADRIQUE
(OU UNE DÉVELOPPABLE DE CLASSE QUATRE)

PAR M. CHARLES H. ROWE
(Dublin).

1. **Introduction**. — Nous avons, M. Gambier et moi, rédigé en collaboration deux Mémoires parus aux *Annales de l'École Normale* :

1° Tétraèdres inscrits dans une quadrique Q et circonscrits à une autre quadrique Q_1 [1934, (3), t. 51, p. 153-198].

2° Lieu des points dont les rapports des distances à 3 droites fixes restent constants. Biquadratiques, cubiques gauches et dégénérescences [1936, (3), t. 53, p. 329-386)].

Cette fois-ci, nous avons traité séparément le sujet annoncé dans le titre de ce travail; nous avons, après une rédaction provisoire, pris connaissance chacun des méthodes de l'autre chercheur et il nous a paru préférable de publier séparément nos résultats, les procédés étant assez différents; la rédaction définitive a été, bien entendu, améliorée chez chacun de nous en tenant compte des suggestions provoquées par la lecture des résultats de son collaborateur [1].

Le premier Mémoire commun contenait implicitement les couples de Möbius, sans que nous l'eussions remarqué; le travail actuel montrera comment le second Mémoire commun se rattache d'une façon imprévue aux couples de Möbius.

2. **Quadriques ayant en commun un quadrilatère gauche.** — Imaginons une quadrique Q et un complexe linéaire L; chacune des semi-quadriques portées par Q a en commun avec L deux génératrices: *la polarité* L *remplace* Q *par une quadrique* Q_1 *ayant en commun avec* Q *les* 4 *droites citées. Réciproquement, si deux quadriques* Q, Q_1 *ont en commun un quadrilatère gauche* $G_1, \Gamma_1, G_2, \Gamma_2$, *il existe deux complexes linéaires conjugués* L, L' *tels que* Q *s'échange avec* Q_1 *par la polarité* L *ou* L'; L et L' appartiennent au faisceau déterminé par les complexes spéciaux ayant pour axe les diagonales d, d' du quadrilatère commun.

Il existe ∞^2 tétraèdres conjugués communs à Q, Q_1; les arêtes de ces tétraèdres, autres que les droites d, d', engendrent la congruence linéaire de directrices d, d'. Ces résultats se vérifient aussitôt sur les équations réduites

$$(\mathrm{Q}) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0, \qquad (\mathrm{Q}_1) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{a}+\frac{t^2}{b}=0.$$

Le couple (d, d') est $d(x=z=0)$, $d'(y=t=0)$; la substitution linéaire $(\varepsilon=\pm 1,\ \eta=\pm 1)$

$$(1) \qquad \left\{\begin{array}{ll} x=\mathrm{X}\cos\alpha-\mathrm{Z}\sin\alpha, & y=\mathrm{Y}\cos\beta-\mathrm{T}\sin\beta; \\ \varepsilon z=\mathrm{X}\sin\alpha+\mathrm{Z}\cos\alpha, & \eta t=\mathrm{Y}\sin\beta+\mathrm{T}\cos\beta; \end{array}\right.$$

remplace le tétraèdre conjugué (x, y, z, t) par le tétraèdre conjugué (X, Y, Z, T). Le complexe L(ou L') a pour équation

$$(\mathrm{L\ ou\ L'}) \qquad (z_1x_2-x_1z_2)\rho+(y_1t_2-y_2t_1)=0 \qquad \left(\rho^2=\frac{b}{a}\right).$$

Chacun de ces complexes reste invariant par la substitution (1) si $\varepsilon\eta=1$ ou s'échange avec l'autre si $\varepsilon\eta=-1$.

---

[1] Le Mémoire de M. Gambier a paru aux *Annales de l'École Normale*, t. 56, 1939, p. 71-118.

Soit maintenant un point *arbitraire* A sur Q et un plan tangent *arbitraire* α de Q_1; il s'agit de montrer que le cône S de sommet A, ayant pour base la conique (Q, α) est capable de ∞^1 trièdres circonscrits au cône S_1, de sommet A, circonscrit à Q_1; pour cela, il suffit de montrer qu'il existe *un* trièdre de cette espèce; en limitant les trièdres en jeu au plan α, nous obtenons bien un tétraèdre, à 5 paramètres au total, inscrit dans Q, circonscrit à Q_1 (cette proposition a été démontrée de deux façons différentes dans notre premier Mémoire commun; j'y ai montré qu'elle est fondamentale). Prenons, en effet, le pôle D de α par rapport à L; D est dans α, sur la conique (Q, α); le plan polaire de A relativement à L, corrélativement, passe en A, est tangent à Q_1 et coupe (Q, α) en deux points B, C. Le tétraèdre ABCD est inscrit dans Q; les faces ABC, BCD sont tangentes à Q_1; AB, DB sont des droites de L, donc le plan BAD est polaire de B (point de Q) par rapport à L, il est tangent à Q_1; pour la même raison CAD est tangent à Q_1 : *notre proposition est démontrée.*

M. Gambier me fait remarquer que, si nous prenons le transformé par rapport à L ou L′ d'un des ∞^5 tétraèdres T inscrits dans Q, circonscrits à Q_1, le nouveau tétraèdre T_1 est lui aussi circonscrit à Q_1, inscrit dans Q et est en position de Möbius avec T; *nous avons ainsi obtenu ∞^5 couples de Möbius, inscrits dans* Q, *circonscrits à* Q_1, *les tétraèdres d'un même couple étant réciproques par rapport à un complexe fixe :* il y a *deux* séries distinctes de tels tétraèdres, une pour L, une pour L′.

Si donc nous nous reportons au paragraphe 8 du travail de M. Gambier, sur les couples de Möbius nous voyons que Q, Q_1 admettent ∞^6 couples de Möbius et que, parmi eux, il y a deux familles ∞^5 qui se séparent; chacune de ces deux familles ∞^5 comprend elle-même ∞^2 séries, chaque série étant formée de ∞^3 couples inscrits dans Q, circonscrits à Q_1, les tétraèdres de cette série étant chacun conjugués par rapport à une quadrique q; or, il est facile de voir que *les deux familles ∞^5 du Mémoire précédent sont celles que nous avons trouvées ici,* ce qui donne une nouvelle propriété de ces deux familles ∞^5 : *chacune d'elles a donné ∞^2 quadriques q, mais correspond à un même complexe* L *ou* L′; il suffit de remarquer que les ∞^2 quadriques q sont celles qui se déduisent de la quadrique particulière

$$(q) \qquad \rho z x \pm y t = 0 \qquad \left(\rho^2 = \frac{b}{a}\right)$$

par la substitution (1); les génératrices d'un système de (q) appartiennent à L, celles de l'autre système à L′; les deux droites Δ, Δ' du Mémoire de M. Gambier sont deux droites de la congruence linéaire (d, d') et sont communes à L et L′; il y a ∞^2 couples tels que Δ, Δ' et chacune donne une quadrique q.

Nous pouvons, à titre de curiosité, remarquer que notre démonstration fournit un tétraèdre T particulier dépendant de quatre paramètres seulement (2 pour A, 2 pour α) et que les ∞^4 couples de Möbius correspondants sont dégénérés, car

$$A_1 = D, \qquad B_1 = C, \qquad C_1 = B, \qquad D_1 = A.$$

3. **Séries quadratiques de quadriques se coupant suivant quatre droites.** — Imaginons un couple de Möbius, les ∞^2 quadriques Q circonscrites, les ∞^2 quadriques Q_1 inscrites (inutile de répéter des explications données au Mémoire de M. Gambier). Si X, Y, Z, T sont les premiers membres des équations des faces du premier tétraèdre, X_1, Y_1, Z_1, T_1 ceux des faces homologues, il existe une identité que l'on peut réduire à la forme

$$(1) \qquad XX_1 + YY_1 + ZZ_1 + TT_1 = 0.$$

Les quadriques dégénérées XX_1, YY_1, ZZ_1, TT_1 appartiennent au système Q; les quadriques dégénérées (tangentiellement) AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 au système Q_1. *La quadrique* $XX_1 + YY_1 = 0$, *ou ce qui revient au même* $ZZ_1 + TT_1 = 0$ *appartient au système* Q, *et aussi au système* Q_1, puisque chaque plan X, ..., T_1 la coupe suivant deux droites; nous avons ainsi trouvé les trois quadriques fondamentales Σ_1, Σ_2, Σ_3; en appelant d'une façon précise X, ..., T_1 les plans

$$(2) \qquad \begin{cases} X = A_1BCD, & Y = AB_1CD, & Z = ABC_1D, & T = ABCD_1; \\ X_1 = AB_1C_1D_1, & Y_1 = A_1BC_1D_1, & Z_1 = A_1B_1CD_1, & T_1 = A_1B_1C_1D; \end{cases}$$

on peut prendre pour équation tangentielle de $\Sigma_1[XX_1 + YY_1 = 0$ ou $ZZ_1 + TT_1 = 0]$, l'équation $AA_1 + BB_1 = 0$ ou $CC_1 + DD_1 = 0$, en appelant A, ..., D_1 les premiers membres des équations tangentielles de A, ..., D_1, équations normalisées de façon à avoir l'identité

$$AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 0. \tag{2'}$$

Σ_2 a pour équation ponctuelle $XX_1 + ZZ_1 = 0$ ou $YY_1 + TT_1 = 0$ et pour équation tangentielle $AA_1 + CC_1 = 0$ ou $BB_1 + DD_1 = 0$; de même Σ_2 donne $XX_1 + TT_1$, $YY_1 + ZZ_1$, $AA_1 + DD_1$, $BB_1 + CC_1$. Nous avons ainsi trouvé les quadriques obtenues par une autre voie par M. Gambier.

Nous allons prouver que *les quadriques du système* (Q) *qui coupent une quadrique donnée du système* (Q_1) *suivant quatre droites forment une série ponctuelle quadratique*, c'est-à-dire peuvent être représentées par une équation ponctuelle qui contient une arbitraire au second degré.

La quadrique Q_1 étant donnée, menons une conique quelconque Γ par les quatre points donnés A_1, B, C, D du plan $X = 0$; puisque Q_1 est tangente à ce plan, nous savons, d'après le premier Mémoire commun, que le lieu du point d'intersection des plans tangents, autres que $X = 0$, menés à Q_1 par les côtés d'un triangle variable inscrit dans Γ est *une quadrique qui passe par* Γ *et coupe* Q_1 *suivant quatre droites*; ce lieu contient évidemment les A, B_1, C_1, D_1 (A est obtenu par BCD_1A, B_1CDA, BDC_1A); *c'est donc une quadrique du système* Q. Les ∞^1 coniques Γ issues de A_1BCD donnent ainsi au total ∞^1 quadriques du système Q coupant la quadrique donnée suivant quatre droites; pour qu'une quadrique Q de cette espèce passe par un point donné P choisi au hasard, il faut qu'il existe des triangles inscrits dans Γ et circonscrits à la section γ par le plan $X = 0$ du cône circonscrit à Q_1 de sommet P; or on sait que le nombre des coniques Γ d'un faisceau ponctuel qui sont triangulairement circonscrites à une conique donnée γ est *deux*; ces deux coniques donnent, dans la famille Q obtenue, deux quadriques contenant P; nous avons donc bien obtenu une série *quadratique*. (Pour abréger nous dirons *série quadratique* tout court, pour désigner les séries quadratiques, incluses dans le système Q, déterminées par le procédé qui vient d'être indiqué.)

Nous pouvons remarquer que *les quadriques* $XX_1 = 0$, $YY_1 = 0$, $ZZ_1 = 0$, $TT_1 = 0$ *appartiennent évidemment à toutes nos séries quadra-*

tiques; or nous pouvons représenter la quadrique générale

$$l_1\Sigma_1 + l_2\Sigma_2 + l_3\Sigma_3 = 0 \tag{3}$$

du système (Q) par le point (l_1, l_2, l_3) d'un plan auxiliaire π; *un faisceau de quadriques* Q *est représenté par une droite, et une série quadratique par une conique passant par les points images des quatre quadriques* XX_1, YY_1, ZZ_1, TT_1; *les coniques* σ *du plan* π, *images des séries quadratiques, forment un faisceau.* En vertu des définitions

$$\left\{\begin{aligned} \Sigma_1 &\equiv XX_1 + YY_1 \equiv -ZZ_1 - TT_1, \\ \Sigma_2 &\equiv XX_1 + ZZ_1 \equiv -TT_1 - YY_1, \\ \Sigma_3 &\equiv XX_1 + TT_1 \equiv -ZZ_1 - YY_1, \end{aligned}\right. \tag{4}$$

on a

$$\left\{\begin{aligned} 2XX_1 &\equiv \Sigma_1 + \Sigma_2 + \Sigma_3, & 2ZZ_1 &\equiv -\Sigma_1 + \Sigma_2 - \Sigma_3; \\ 2YY_1 &\equiv \Sigma_1 - \Sigma_2 - \Sigma_3, & 2TT_1 &\equiv -\Sigma_1 - \Sigma_2 + \Sigma_3; \end{aligned}\right. \tag{5}$$

de sorte que ξ, η, φ, θ étant les images de XX_1, YY_1, ZZ_1, TT_1 on voit que *les images de* Σ_1, Σ_2, Σ_3 *sont les sommets du triangle conjugué commun aux coniques* σ (les droites $\xi\eta$, $\varphi\theta$ concourent au point image de Σ_1, etc.). *Il existe une série quadratique et une seule qui contient une quadrique donnée* Q.

Par dualité, on obtient des *séries quadratiques tangentielles,* en cherchant les quadriques du système Q_1 qui coupent suivant quatre droites une quadrique donnée Q, et *chaque quadrique* Q_1 *appartient à une seule série quadratique tangentielle, représentée elle aussi par une conique* σ_1 *d'un plan auxiliaire :* les coniques σ_1 forment elles aussi un faisceau ponctuel.

On voit donc, qu'une quadrique Q_1 donnée ayant déterminé *une série quadratique ponctuelle* (Q), si nous prenons dans cette série diverses quadriques Q', Q'', ..., les séries quadratiques tangentielles (Q_1) correspondant à Q', Q'', ..., contiennent toutes Q_1 et par suite coïncident. Autrement dit : *chacune des* ∞^1 *séries quadratiques ponctuelles de quadriques* Q *est associée à une série quadratique tangentielle bien déterminée de quadriques* Q_1, *de telle sorte que chaque quadrique de l'une des séries coupe suivant quatre droites chaque quadrique de l'autre série quadratique.*

Avec les notations que nous avons adoptées ici, les coniques σ

images des séries ponctuelles quadratiques sont données par l'équation suivante où l_1, l_2, l_3 sont les coordonnées ponctuelles et α_1, α_2, α_3 des constantes

$$(6) \qquad \alpha_1 l_1^2 + \alpha_2 l_2^2 + \alpha_3 l_3^2 = 0 \qquad (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0).$$

De même si l'on a introduit l'identité $AA_1 + BB_1 + CC_1 + DD_1 = 0$ déjà indiquée, on peut prendre comme équations tangentielles de Σ_1, Σ_2, Σ_3 les expressions

$$(4') \qquad \left\{ \begin{array}{l} \overline{\Sigma_1} \equiv AA_1 + BB_1 \equiv - CC_1 - DD_1 = 0, \\ \overline{\Sigma_2} \equiv AA_1 + CC_1 \equiv - DD_1 - BB_1 = 0, \\ \overline{\Sigma_3} \equiv AA_1 + DD_1 \equiv - BB_1 - CC_1 = 0. \end{array} \right.$$

La quadrique générale Q_1 est représentée par une équation

$$(3') \qquad m_1 \overline{\Sigma_1} + m_2 \overline{\Sigma_2} + m_3 \overline{\Sigma_3} = 0,$$

autrement dit le point (m_1, m_2, m_3) sert d'image à Q_1 et les coniques σ_1 images des séries quadratiques tangentielles sont

$$(6') \qquad \beta_1 m_1^2 + \beta_2 m_2^2 + \beta_3 m_3^2 = 0 \qquad (\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 = 0).$$

Puisque dans tout faisceau de coniques, il y en a trois réduites à deux droites, il y a trois coniques σ décomposées en deux droites; quelques remarques géométriques montrent sans effort qu'*à chacune de ces trois coniques σ décomposées correspond, dans le faisceau σ_1, une conique également dégénérée*. Par exemple les quadriques $hXX_1 + kYY_1 = 0$ forment, quand $h:k$ varie, un faisceau linéaire ponctuel (ou tangentiel), car le quadrilatère gauche $(XY)(YX_1)(X_1Y_1)(Y_1X)$ ou $(CD)(AB_1)(C_1D_1)(A_1B)$ est commun à toutes ces quadriques : (XY), ici, signifie la droite commune aux plans X et Y; cette droite CD rencontre AB_1 et ainsi de suite; l'équation tangentielle $h'AA_1 + k'BB_1 = 0$ représente de même des quadriques ayant en commun le quadrilatère $(AB)(BA_1)(A_1B_1)(B_1A)$ et ce quadrilatère a deux côtés opposés (AB_1), (A_1B) communs avec le précédent, de sorte que chaque quadrique $hXX_1 + kYY_1 = 0$ coupe chaque quadrique $h'AA_1 + k'BB_1 = 0$ suivant quatre droites (deux étant indépendantes de $h:k$ et $k':k'$); pour la même raison les quadriques $h'_1CC_1 + k'_1DD_1 = 0$ sont coupées suivant quatre droites par les quadriques $hXX_1 + kYY_1 = 0$ (deux, CD et C_1D_1, sont fixes); et, comme la quadrique $h_1 ZZ_1 + k_1 TT_1 = 0$ peut être substituée à la quadrique $hXX_1 + kYY_1 = 0$, nous voyons que nous avons *deux séries quadratiques associées, l'une ponctuelle, l'autre tangentielle, toutes deux décomposées en deux faisceaux :* $hXX_1 + kYY_1$ et $h_1 ZZ_1 + k_1 TT_1$ d'un côté, $h'AA_1 + k'BB_1$ et $h'_1 CC_1 + k'_1 DD_1$ de l'autre; le faisceau $hXX_1 + kYY_1$ contient comme quadriques particulières XX_1, YY_1 et $XX_1 + YY_1$ ou Σ_1, de sorte qu'il a pour image une droite issue du point image de Σ_1; la conclusion est que la série ponctuelle quadratique $l_i^2 - l_j^2 = 0$ a pour associée la série tangentielle quadratique $m_i^2 - m_j^2 = 0 (i \neq j, 1, 2, 3, j = 1, 2, 3)$; on conclut sans peine de là que *la série ponctuelle quadratique* $\alpha_1 l_1^2 + \alpha_2^2 l + \alpha_3 l_3^2 = 0 (\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 = 0)$ *a pour associée la série tangentielle quadratique* $\alpha_1 m_1^2 + \alpha_2 m_2^2 + \alpha_3 m_3^2 = 0$. Autrement dit *on peut supposer que les coniques σ et σ_1 sont tracées dans le même plan et coïncident dans leur ensemble; la conique σ_1 associée à une conique σ se trouve coïncider avec σ.*

Il est intéressant de confronter ces résultats avec ceux de M. Gambier, dont les notations n'ont pas le même sens qu'ici; la quadrique

$$(7) \quad \lambda_1(x^2 + y^2 + z^2 + t^2) + \lambda_2[x^2 - y^2 + m(z^2 - t^2)] + 2\lambda_3(xy + nzt) = 0$$

coupe la quadrique

$$(8) \quad \mu_1(u^2 + v^2 + w^2 + h^2) + \mu_2[m(u^2 - v^2) + w^2 - h^2] + 2\mu_3[nuv + wh] = 0,$$

suivant quatre droites, si l'on a

$$(9) \qquad \frac{\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2}{\lambda_1^2 - m^2\lambda_2^2 - n^2\lambda_3^2} = \frac{\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2}{\mu_1^2 - m^2\mu_2^2 - n^2\mu_3^2}.$$

On obtient les séries quadratiques associées en égalant à une même constante chacune de ces fractions.

L'équation $\lambda_1^2 - \lambda_2^2 - \lambda_3^2 = 0$ définit en particulier une série ponctuelle quadratique formée de *cônes* et $\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0$ la série tangentielle associée, formée de *coniques*; deux génératrices de chaque cône sont tangentes à chaque conique, circonstance possible pour la raison suivante : les coniques C de la série quadratique $\mu_1^2 - \mu_2^2 - \mu_3^2 = 0$ sont réparties dans les plans pivotant autour de l'une des deux droites Δ, Δ' de M. Gambier, Δ par exemple et les sommets S des cônes de la série quadratique $\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2=0$ sont répartis sur cette même droite; S étant un point de Δ, le lieu des tangentes issues de S aux coniques de la série en jeu est précisément le cône S. L'existence des deux droites Δ, Δ' explique pourquoi il y a deux familles ponctuelles quadratiques de cônes. Si l'on veut raccorder les notations des deux travaux actuels, il n'y a qu'à écrire

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} l_1\left[(x^2+y^2+z^2+t^2)\sqrt{n^2-m^2}\right] \\ +\ l_2\left[\{x^2-y^2+m(z^2-t^2)\}\sqrt{n^2-1}\right]+2l_3\left[(xy+nzt)\sqrt{1-m^2}\right]=0, \\ m_1\left[(u^2+v^2+w^2+h^2)\sqrt{n^2-m^2}\right] \\ +\ m_2\left[\{m(u^2-v^2)+w^2-h^2\}\sqrt{n^2-1}\right]+2m_3\left[(nuv+wh)\sqrt{1-m^2}\right]=0, \end{array}\right.$$

en posant

$$(11)\quad \left\{\begin{array}{lll} \lambda_1=\ l_1\sqrt{n^2-m^2}, & \lambda_2=\ l_2\sqrt{n^2-1}, & \lambda_3=\ l_3\sqrt{1-m^2}; \\ \mu_1=m_1\sqrt{n^2-m^2}, & \mu_2=m_2\sqrt{n^2-1}, & \mu_3=m_3\sqrt{1-m^2}. \end{array}\right.$$

Ce calcul est d'ailleurs celui auquel on est conduit naturellement en exprimant que la quadrique (7) est décomposée en deux plans : le trinome en (x, y), et le trinome en (z, t) qui figurent dans (7) doivent être séparément carrés parfaits : on a ainsi

$$\begin{aligned} XX_1 = {} & (x^2+y^2+z^2+t^2)\sqrt{n^2-m^2} \\ & +\{x^2-y^2+m(z^2-t^2)\}\sqrt{n^2-1}+(xy+nzt)\sqrt{1-m^2} \end{aligned}$$

et les autres formules analogues déduites de (5). Ce qui précède montre que l'*étude du couple général de Möbius revient à la détermination des deux constantes m, n qui en sont les invariants homographiques; cela revient à donner deux coniques qui sont les images des deux séries quadratiques particulières composées de cônes ou coniques;* cette figure plane, au point de vue homographique, a deux invariants et l'on prend comme formes réduites d'équations de ces deux coniques

$$\lambda_1^2-\lambda_2^2-\lambda_3^2=0, \qquad \lambda_1^2-m^2\lambda_2^2-n^2\lambda_3^2=0.$$

Remplacer m, n par $\pm m$, en $\pm n$ n'a aucune importance, car l'échange de z avec t dans (7) change m en $-m$ et ensuite le changement de signe de z ou t change n en $-n$; ce sont donc m^2 et n^2 qui doivent intervenir.

4. **Quadriques Q Möbius-ment circonscrites à une quadrique Q_1.** — Il est maintenant très simple de démontrer *qu'une biquadratique quelconque $\mathcal{B}$ circonscrite au couple de Möbius* T, T_1 *donné admet ∞^2 couples de cette espèce circonscrits à une quadrique donnée Q_1 quelconque parmi les quadriques inscrites à* T, T_1.

La série quadratique (Q), correspondant à Q_1, a deux quadriques Q′, Q″, en général *distinctes*, communes avec le faisceau issu de $\mathcal{B}$ (on doit prendre les deux points communs à la conique image de la série et à la droite image du faisceau). Nous coupons $\mathcal{B}$ par un plan tangent *quelconque* π de Q_1; soient a_1, b, c, d les points d'intersection; d'après le lemme déjà employé (¹), nous construisons les quatre tétraèdres $abcd$, a_1b_1cd, a_1bc_1d, a_1bcd_1 circonscrits à Q_1 (en partant des triangles bcd, a_1cd, a_1bd, a_1bc), ce qui donne quatre nouveaux points a, b_1, c_1, d_1 situés sur Q′ et Q″, donc sur $\mathcal{B}$. Les huit points (a, b, c, d, a_1, b_1, c_1, d_1) sont *associés* (j'entends par là : base d'un réseau de quadriques); ils sont en effet sur trois couples de plans ($abcd_1$, $a_1b_1c_1d$), (ab_1cd, $a_1bc_1d_1$), (abc_1d, $a_1b_1cd_1$) car chacune des six droites joignant deux des points a_1, b, c, d a été utilisée deux fois pour obtenir un tétraèdre circonscrit à Q_1 (a_1b a été utilisée dans le triangle a_1bc et dans le triangle a_1bd de façon à donner le point d_1 et le tétraèdre a_1bcd_1 ou le point c_1 et le tétraèdre a_1bc_1d, de sorte que $a_1bc_1d_1$ sont dans le plan, autre que π, tangent à Q_1 issu de a_1b); d'autre part a_1, b, c, d sont dans un plan, donc a, b_1, c_1, d_1 sont aussi dans un plan; nous avons donc bien un couple de Möbius ($abcd$, $a_1b_1c_1d_1$); les huit faces de ce couple sont huit plans *associés*; or sept sont tangents à Q_1, donc le huitième $ab_1c_1d_1$ est aussi tangent à Q_1 : *notre proposition est établie*.

Le même raisonnement prouve que, si l'on considère en même temps que $\mathcal{B}$ une développable $\mathcal{D}$ de classe 4 et genre 1 tangente aux huit faces du couple (T, T_1), *il existe ∞^1 couples de même définition, inscrits dans $\mathcal{B}$ circonscrits à $\mathcal{D}$* : cela tient à ce que nous utilisons, cette fois, seulement les ∞^1 plans π tangents à Q_1 ET à Q'_1.

Le raisonnement qui a été employé prouve que nous avons trouvé

(¹) Nous n'utilisons pas ici la propriété que les droites Δ, Δ' fournies par T, T_1 sont conjuguées par rapport aux quadriques Q et aux quadriques Q_1.

tous les couples de Möbius *inscrits dans $\mathcal{B}$ et circonscrits soit à* Q_1 *seule, soit à la développable* $\mathcal{D}$.

Il reste à traiter la question suivante : nous partons d'un couple de Möbius (T, T_1) donné, nous lui circonscrivons une quadrique Q, nous lui inscrivons une quadrique Q_1 : *combien existe-t-il de couples de Möbius inscrits dans* Q, *circonscrits à* Q_1 ? Les résultats acquis prouvent que, si nous traçons les ∞^1 biquadratiques *issues sur* Q des huit sommets $(ABCD, A_1B_1C_1D_1)$, chacune fournit ∞^2 couples de Möbius relatifs à Q et Q_1 ; nous avons ainsi obtenu au total ∞^3 couples relatifs à Q et Q_1, déduits de T et T_1 ; *il faut se garder de croire que l'on a obtenu ainsi tous les couples de Möbius possibles, relatifs à* Q *et* Q_1*;* considérons en effet un couple (T', T'_1) obtenu par la méthode suivie et une biquadratique $\mathcal{B}'$ *issue de* $T'T'_1$ *sur* Q, autre que celle qui a servi à obtenir (T', T'_1) à partir de (T, T_1); *cette biquadratique ne passe plus aux sommets de* (T, T_1); elle donne ∞^2 couples (T'', T''_1) relatifs encore à Q et Q_1 : il est très facile de voir que, parmi ces ∞^2 couples (T'', T''_1), il y en a qui ne rentrent pas dans la série $\infty^3(T', T'_1)$. En effet un couple qui appartient *simultanément* à la série $\infty^3(T', T'_1)$ et à la série $\infty^2(T'', T''_1)$ doit, d'après la première condition, être sur l'une des ∞^1 biquadratiques $(\overline{\mathcal{B}})$ issues, sur Q, de (T, T_1), et, d'après la seconde, sur la courbe $\mathcal{B}'$: les ∞^1 courbes $(\overline{\mathcal{B}})$ déterminent sur $(\mathcal{B}')$ ∞^1 groupes de 8 points (¹), de sorte que ces groupes ne donnent pas la série $\infty^2(T'', T''_1)$. *Donc deux quadriques* Q, Q_1 *qui admettent un couple de Möbius inscrit dans* Q, *circonscrit à* Q_1, *en admettent au moins* ∞^4*;* nous allons prouver qu'*elles en admettent exactement* ∞^4.

Nous avons supposé donné un couple de Möbius, une quadrique Q circonscrite, une quadrique Q_1 inscrite; nous supposons aussi que Q et Q_1 ne se coupent pas suivant quatre droites, ce qui est possible puisqu'il existe ∞^2 quadriques Q_1, et que ∞^1 seulement coupent Q suivant quatre droites : je vais utiliser un résultat important, que M. Gambier donne dans son Mémoire sur les couples de Möbius (p. 86-87), (je ne reproduirai pas la démonstration ici); les segments

(¹) Chacun de ces groupes de 8 points fournit, comme on le démontre un peu plus bas, un couple de tétraèdres de Möbius (et même quatre couples), mais ce résultat n'a pas à intervenir pour la démonstration.

AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 sont, comme on sait, divisés harmoniquement par les sécantes communes Δ, Δ' de leurs supports; Δ, Δ' *sont deux arêtes opposées convenablement choisies du tétraèdre* Θ *conjugué commun à* Q *et* Q_1.

Si donc on donne, *a priori*, deux quadriques Q, Q_1 (n'ayant pas quatre droites en commun), pour obtenir un couple de Möbius inscrit dans Q, circonscrit à Q_1, nous pourrions essayer de choisir A sur Q (deux paramètres); d'après notre premier Mémoire commun, la face opposée BCD doit passer par l'homologue A' de A dans l'homographie indiquée au Mémoire en jeu; mais BCD doit contenir aussi A_1, homologue de A dans l'involution biaxiale de directrices Δ, Δ' (arêtes opposées convenablement choisies du tétraèdre Θ); si A' ne coïncide pas avec A_1, la face BCD est déterminée, puisqu'elle est l'un des deux plans tangents menés de $A'A_1$ à Q_1 et le triangle BCD a ∞^1 déterminations possibles dans ce plan α: le choix de ABCD fait, le tétraèdre $A_1B_1C_1D_1$ ne *peut* avoir qu'une détermination, puisqu'il se déduit de ABCD par l'involution biaxiale Δ, Δ' : mais alors nous n'avons pu disposer que de trois paramètres et il y a encore de nombreuses relations à vérifier, de sorte que le nombre de paramètres dont pourrait dépendre un couple de Möbius solution serait au plus *trois* : il y a donc impossibilité; *si donc deux quadriques* Q, Q_1 *sont données au hasard, elles n'admettent aucun couple de Möbius. Si l'homographie* (A, A') *se confond avec l'involution biaxiale* (Δ, Δ'), *tout tétraèdre* T *inscrit dans* Q *et circonscrit à* Q_1 *est transformé par cette involution en un nouveau tétraèdre* T_1 *de même nature et* T, T_1 *sont en position de Möbius :* ce résultat figurait dans notre premier Mémoire en collaboration, mais nous n'avions pas songé à la configuration réciproque de Möbius entre T et T_1. *Si donc deux quadriques admettent un couple de Möbius, elles en admettent exactement* ∞^4. Nous considérons le tétraèdre conjugué commun Θ à Q et Q_1 et l'équation en λ exprimant que $Q - \lambda Q_1 = 0$ est un cône (Q et Q_1 étant les premiers membres des équations ponctuelles); la somme de deux racines λ_1, λ_2 devra être égale à la somme des deux autres racines λ_3, λ_4; l'arête Δ est la droite réunissant les sommets des deux cônes λ_1, λ_2; l'arête Δ' est celle qui réunit les sommets des cônes λ_3, λ_4; nous disons alors que Q *est Möbius-ment circonscrite à* Q_1 *pour le couple* Δ, Δ'. Quand on a pris pour tétraèdre de référence Θ, les équations, ponctuelle de Q et tangentielle de Q_1, sont

$$Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0, \qquad Q_1 \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 = 0,$$

la relation $Aa + Bb = Cc + Dd$ exprime que Q est Möbius-ment circonscrite à Q_1 pour le couple $x = y = 0$, $z = t = 0$. Si l'on se contente d'équations moins réduites, Δ étant $(x = y = 0)$, et $\Delta'(z = t = 0)$,

$$Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fzt = 0,$$
$$Q_1 \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 + 2euv + 2fwh = 0;$$

la relation est

$$Aa + Bb + 2Ee = Cc + Dd + 2Ff.$$

J'ai ainsi retrouvé tous les résultats par des méthodes différentes de celles de M. Gambier; nous allons indiquer quelques résultats complémentaires ([1]).

Si trois quadriques Q, Q', Q'' *sont chacune Möbius-ment circonscrites à une même quadrique* Q_1 (*pour le même couple* Δ, Δ'), *les huit points communs à* Q, Q', Q'' *forment les sommets d'un couple de Möbius circonscrit à* Q_1 (en réalité les huit points peuvent, de quatre façons différentes, être répartis aux sommet d'un tel couple, comme nous l'avons dit souvent).

Par dualité, on a l'énoncé : *les plans tangents à trois quadriques* Q_1, Q'_1, Q''_1, *Möbius-ment inscrites à une quadrique* Q (*pour le même couple* Δ, Δ') *sont les faces d'un couple de Möbius inscrit dans* Q.

En réalité dans l'une ou l'autre de ces propositions ce sont les trois quadriques Q, Q', Q'' (pour la première proposition) ou Q_1, Q'_1, Q''_1 (pour la seconde) qui interviennent seules et l'on peut substituer à l'une ou l'autre proposition la suivante, qui se correspond à elle-même par dualité.

Si trois quadriques Q, Q', Q'' *ont en commun un couple de deux droites conjuguées* Δ, Δ', *leurs huit points communs se répartissent* (*de quatre façons*) *aux sommets de deux tétraèdres associés de Möbius et leurs huit plans tangents* (*de quatre façons aussi*) *suivant les faces de deux tétraèdres associés de Möbius*.

([1]) Le Mémoire de M. Gambier et le mien devaient être imprimés à la suite l'un de l'autre; les hostilités ont retardé l'impression du mien, de sorte que M. Gambier a bien voulu, en mai 1941, me communiquer les résultats qui font l'objet des lignes qui terminent ce paragraphe.

Rappelons le théorème connu; huit points associés (c'est-à-dire communs à trois quadriques) se répartissent (de trente-cinq façons) aux sommets de deux tétraèdres T, T_1 tous deux auto-polaires par rapport à une même quadrique q; réciproquement, deux tétraèdres conjugués chacun par rapport à une quadrique donnée donnent, par leurs sommets, huit points associés, par leurs faces huit plans associés. L'énoncé que nous avons donné se rapporte au cas où il existe un même couple de droites Δ, Δ' conjuguées par rapport à chacune des quadriques.

Notre énoncé se démontrera aisément après le suivant : *si deux quadriques* Q, Q' *sont chacune Möbius-ment circonscrites à une quadrique* Q_1 *pour le même couple* Δ, Δ', *il existe* ∞^2 *couples de Möbius, inscrits dans la biquadratique* (Q, Q'), *circonscrits à* Q_1. Il faut bien remarquer que cet énoncé n'est pas celui qui a été donné au début de ce paragraphe : nous considérions alors une biquadrique $\mathcal{B}$ *circonscrite à un couple de Möbius* circonscrit à Q_1, tandis qu'ici nous savons qu'il existe ∞^4 couples inscrits dans Q, circonscrits à Q_1 et ∞^4 couples analogues relatifs à Q' et Q_1 : mais rien n'autorise, *a priori*, à admettre que ces deux séries ∞^4 ont en commun une série ∞^2. Pour le démontrer remarquons que les conditions nécessaires et suffisantes pour que les deux quadriques

$$(1) \qquad \begin{cases} q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fzt = 0, \\ q_1 \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 + 2euv + 2fwh = 0 \end{cases}$$

aient quatre droites communes formant un quadrilatère gauche, dont les diagonales sont le couple $(x = y = 0)$, $(z = t = 0)$ conjugué commun à q et q_1, sont

$$(2) \qquad \begin{cases} Aa + Bb + 2Ee = Cc + Dd + 2Ff, \\ (AB - E^2)(ab - e^2) = (CD - F^2)(cd - f^2). \end{cases}$$

La première de ces deux relations est celle qui exprime que q est Möbius-ment circonscrite à q_1 pour le couple conjugué en jeu $(x = y = 0)$, $(z = t = 0)$. Revenons donc au dernier énoncé; on a

$$(3) \qquad \begin{cases} Q \equiv Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 + 2Exy + 2Fzt = 0, \\ Q' \equiv A'x^2 + B'y^2 + C'z^2 + D't^2 + 2E'xy + 2F'zt = 0, \\ Q_1 \equiv au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 + 2euv + 2fwh = 0, \end{cases}$$

et les relations

$$(4)\quad \begin{cases} A a + B b + 2 E e = C c + D d + 2 F f, \\ A' a + B' b + 2 E' e = C' c + D' d + 2 F' f. \end{cases}$$

Il existe deux quadriques $Q - \rho Q' = 0$ coupant Q_1 suivant quatre droites, ρ étant fourni par l'équation du second degré

$$(5)\quad \begin{aligned} &[(A - \rho A')(B - \rho B') - (E - \rho E')^2](ab - e^2) \\ &= [(C - \rho C')(D - \rho D') - (F - \rho F')^2](cd - f^2). \end{aligned}$$

Il a suffi d'écrire les équations (2) pour $Q - \rho\, Q' = 0$ et $Q_1 = 0$; la première équation (2) s'est trouvée identiquement vérifiée en ρ en vertu de (4) et il reste l'unique équation (5) dont nous appelons les racines ρ_1, ρ_2 [1]. Si donc on coupe $\mathcal{B}$ par un plan tangent α quelconque de Q_1, et si A_1, B, C, D sont les points d'intersection de ce plan avec $\mathcal{B}$, la proposition du paragraphe 2, appliquée à $Q - \rho_1 Q'$ et Q_1 (ou à $Q - \rho_2 Q'$ et Q_1) prouve que les nouveaux plans tangents à Q_1 issus de BC, CD, DB se recoupent en un point A situé sur $Q - \rho_1 Q'$ (et aussi sur $Q - \rho_2 Q'$), donc sur $\mathcal{B}$; par suite A_1BCD est inscrit dans $\mathcal{B}$, circonscrit à Q_1 et l'involution biaxale (Δ, Δ') fournit ensuite le tétraèdre $AB_1C_1D_1$ en position de Möbius avec A_1BCD. On trouve ainsi les ∞^2 couples annoncés.

Ce résultat permet d'aborder la proposition relative à trois quadriques qui ont en commun un couple conjugué de deux droites Δ, Δ'. Prenons leurs équations tangentielles

$$(6)\quad Q_1 \equiv a u^2 + \ldots + 2 f z t = 0, \qquad Q'_1 \equiv a' u^2 + \ldots, \qquad Q''_1 \equiv a'' u^2 + \ldots$$

conformément aux notations employées dans (1). Mais alors les quadriques Q Möbius-ment circonscrites à Q_1, Q'_1, Q''_1 pour le couple Δ, Δ' forment un *réseau ponctuel*, car on pose, toujours comme dans (1),

$$(7)\quad Q \equiv A x^2 + \ldots + 2 F z t = 0$$

et l'on a

$$(8)\quad \begin{cases} A a + B b + 2 E e = C c + D d + 2 F f, \\ A a' + B b' + 2 E e' = C c' + D d' + 2 F f', \\ A a'' + B b'' + 2 E e'' = C c'' + D d'' + 2 F f'', \end{cases}$$

---

[1] Ce résultat a été utilisé, sous une forme presque identique, au début de ce paragraphe.

de sorte qu'il existe trois quadriques linéairement indépendantes, que nous appellerons Q, Q', Q'', et la quadrique $\rho Q + \rho' Q' + \rho'' Q'' = 0$ engendre le réseau ponctuel en jeu. Considérons donc la biquadratique (Q, Q') et la quadrique Q_1 : un plan tangent *quelconque* α de Q_1 coupe (Q, Q') en quatre points que nous appelons, au hasard, A_1, B, C, D; l'homologue A de A_1 dans l'involution biaxale (Δ, Δ') est de nouveau sur (Q, Q') et les plans ABC, ACD, ADB sont tangents à Q_1; supposons donc que α soit tangent à Q_1, Q'_1, Q''_1 *simultanément*; ce qui précède prouve que les plans ABC, ACD, ADB sont tangents aussi à Q_1, Q'_1, Q''_1 et que $(ABCD)$, $(A_1B_1C_1D_1)$ forment un couple de Möbius inscrit dans (Q, Q') circonscrit à Q_1, Q'_1, Q''_1; or se résultat reste le même, quel que soit le mode adopté pour choisir Q, Q', Q'' dans le réseau ponctuel associé à Q_1, Q'_1, Q''_1; donc les huit plans tangents communs à Q_1, Q'_1, Q''_1 non seulement déterminent bien quatre couples de Möbius, mais encore donnent pour les sommets de ces tétraèdres les huit points de base du réseau Q.

Nous voyons que nous avons retrouvé, en fin de ce paragraphe, les systèmes (Q), (Q_1) qui avaient servi de point de départ (paragraphe 3 précédant celui-ci); seulement au début du paragraphe actuel, nous supposions que deux quadriques Q, Q_1 étaient déjà l'une circonscrite, l'autre inscrite à un couple *donné* de Möbius : nous déduisions de là une condition analytique *nécessaire*; en fin de ce paragraphe, nous n'introduisons que la condition analytique et finalement nous conclurons qu'elle est *suffisante*. Finalement ce sont les séries quadratiques associées, l'une ponctuelle, l'autre tangentielle, qui ont reparu ici. En effet si l'on a posé

$$(9)\qquad \begin{cases} Q \equiv A\,x^2 + \ldots + 2F\,zt = 0, \\ Q' \equiv A'x^2 + \ldots + 2F'zt = 0, \\ Q'' \equiv A''x^2 + \ldots + 2F''zt = 0, \end{cases}$$

on a la relation

$$\begin{aligned} & [(\rho A + \rho' A' + \rho'' A'')(\rho\, B + \rho' B' + \rho'' B'') - (\rho\, E + \rho' E' + \rho'' E'')^2] \\ & \times [(\rho_1 a + \rho'_1 a' + \rho''_1 a'')(\rho_1 b + \rho'_1 b' + \rho''_1 b'') - (\rho_1 e + \rho'_1 e' + \rho''_1 e'')^2] \\ = \; & [(\rho\, C + \rho' C' + \rho'' C'')(\rho\, D + \rho' D' + \rho'' D'') - (\rho\, F + \rho' F' + \rho'' F'')^2] \\ & \times [(\rho_1 c + \rho'_1 c' + \rho''_1 c'')(\rho_1 d + \rho'_1 d' + \rho''_1 d'') - (\rho_1 f + \rho'_1 f' + \rho''_1 f'')^2] \end{aligned}$$

pour que la quadrique ponctuelle (ρ, ρ', ρ'') et la quadrique tangentielles $(\rho_1, \rho'_1, \rho''_1)$ se coupent suivant quatre droites, et l'on retrouverait sans peine tous les autres résultats du paragraphe 3.

D'ailleurs si les trois quadriques Q, Q', Q'' admettent un couple de droites (Δ, Δ') conjuguées communes, la séparation des huit points communs à Q, Q', Q'' en un couple (TT_1) de Möbius fournit une quadrique q par rapport à laquelle T est autopolaire, T_1 aussi; *mais alors la polarité q change le réseau ponctuel* (Q) *en un réseau tangentiel* (Q_1) *tangent aux huit faces de ces tétraèdres et ce réseau tangentiel est celui que nous pouvons appeler Möbius-ment inscrit pour* (Δ, Δ') *dans le réseau ponctuel donné*. Si nous avons adopté l'un des trois autres modes d'association des huit points en deux tétraèdres de Möbius, q est remplacée par une autre quadrique q', mais les huit sommets dans leur ensemble, ni les huit faces n'ont changé, *de sorte que c'est le même réseau tangentiel que l'on retrouve par la polarité q'*. On retrouve ainsi les résultats géométriques donnés par M. Gambier dans son Mémoire (paragraphe 5).

Ce théorème qui précède, à savoir que les huit points communs à trois quadriques admettant un couple conjugué commun (Δ, Δ') sont répartis aux sommets de deux tétraèdres de Möbius, peut encore être démontré synthétiquement par l'application d'un principe que M. Gambier a signalé. *Les huit points communs à trois quadriques de cette espèce forment une figure dépendant algébriquement de dix-sept paramètres complexes :* en effet, le couple (Δ, Δ') dépend de huit paramètres; chacune des quadriques Q, Q', Q'' dépend de cinq paramètres; le total $8 + 15$ ou 23 représentent donc le total du nombre x de paramètres nécessaires pour fixer les huit points et du nombre de paramètres nécessaires ensuite pour préciser chacune des trois quadriques dans le réseau issu de ces huit points; ce dernier nombre est 2×3, de sorte qu'il reste dix-sept paramètres. La variété V_{17} formée par l'ensemble de ces ∞^{17} systèmes de huit points est manifestement indécomposable, car on peut passer, par continuité d'un quelconque de ces systèmes à un autre quelconque. D'autre part chaque couple de Möbius dépend de dix-sept paramètres et les sommets d'un tel couple sont huit points communs à trois quadriques ayant un couple de droites conjuguées commun, de sorte que *la variété* W_{17} *formée par ces couples de Möbius est incluse dans la variété indécom-*

posable V_{17} : donc, comme l'a montré M. Gambier, W_{17} *épuise* V_{17} : autrement dit tout élément de V_{17} appartient à W_{17} et c'est notre théorème.

5. **Cas où la quadrique Q se réduit à un cône et où, simultanément ou séparément, Q_1 se réduit à une conique.** — Désormais le raccord entre mes résultats et ceux de M. Gambier est achevé; M. Gambier a traité diverses conséquences des propriétés qui viennent d'être obtenues; je désire, de mon côté, signaler quelques cas spéciaux.

Nous avons vu que, dans les systèmes (Q), (Q_1) associés étudiés au paragraphe 3 et à la fin du paragraphe précédent, il y a, dans le système (Q) des cônes, dans le système (Q_1) des coniques (formant d'ailleurs des séries quadratiques associées). Étudions à part le cas de deux quadriques l'une Q Möbius-ment circonscrite à l'autre Q_1, dans le cas où Q se réduit à un cône ou Q_1 à une conique.

Si l'on écrit les équations réduites

$$(Q) \qquad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dt^2 = 0,$$

$$(Q_1) \qquad au^2 + bv^2 + cw^2 + dh^2 = 0,$$

avec la condition

$$(1) \qquad Aa + Bb = Cc + Dd,$$

on voit que A peut tendre vers zéro sans que rien d'essentiel soit changé; de même si a tend vers zéro; on peut supposer l'une des circonstances se produisant sans que l'autre se produise. Supposons $A = 0$, $a = 0$; l'équation $Bb = Cc + Dd$, limite de la précédente, exprime que la conique q trace du cône Q sur le plan de Q_1 est capable de ∞^1 quadrilatères inscrits dans q, circonscrits à q_1, en précisant que les diagonales de ces quadrilatères passent toutes au sommet $(1, 0, 0)$ du triangle de référence (yzt) situé dans le plan de q et Q_1; cette circonstance était à prévoir, car si l'on imagine un de nos tétraèdres inscrits dans le cône et circonscrit à q_1, on peut concevoir que les quatre sommets se rapprochant tous du sommet S de Q et s'ils se confondent avec S, on a, à la limite, quatre faces passant toutes en S et tangentes à Q_1; leurs traces sur le plan de q et Q_1 forment le quadrilatère annoncé; comme le sommet $S(1, 0, 0, 0)$ est sur la droite Δ', il coïncide avec son homologue dans l'involution (Δ, Δ').

Mais il y a une configuration bien plus intéressante à signaler : *cherchons la limite de la figure constituée par deux quadriques qui ont quatre droites en commun*, *quand l'une des quadriques tend vers un cône et l'autre vers une conique*. Dans le cas où ni Q ni Q_1 ne dégénère, on a

$$(2)\qquad \begin{cases} Aa + Bb = Cc + Dd, \\ Aa \,.\, Bb = Cc \,.\, Dd \end{cases}$$

et si A tend vers zéro, sans que BCD devienne nul, il faut que cd tende vers zéro; nous supposons donc, à la limite, $A = c = 0$, $BCD \neq 0$, $abd \neq 0$ et *nous avons le cas d'un cône* Q, *d'une conique* Q_1, *tels que deux génératrices du cône soient tangentes à la conique :* on a cette fois, en ramenant B, C, D à l'unité, les équations

$$(Q)\qquad \star\, y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$
$$(Q_1)\qquad au^2 + v^2 + \star + h^2 = 0.$$

Les résultats du cas général (de deux quadriques à 4 droites communes) montrent qu'*il existe* ∞^5 *tétraèdres dont les sommets sont sur* Q, *dont les faces touchent* Q_1 : on peut prendre un plan tangent α *quelconque* de Q_1, puis un triangle *quelconque* BCD inscrit dans la conique (Q, α); les plans, autres que α, tangents à Q_1 menés par CD, DB, BC se recoupent en A sur Q. Les deux démonstrations du Mémoire commun s'appliquent presque sans modification; en particulier, la seconde devient plus intuitive, et je la reprends : les deux génératrices SG, SG′ du cône Q, tangentes à Q_1, sont coupées en g, g' par le plan α et la génératrice SA de Q est coupée par α en a; le triangle agg' est inscrit dans la conique (Q, α) et circonscrit à la perspective de Q_1 faite à partir de A sur le plan α : il en résulte que le cône de sommet A et directrice (Q, α) est circonscrit à ∞^1 trièdres, de sommet A, dont les faces touchent Q_1 : en coupant ces trièdres par le plan α on a les tétraèdres demandés (2 paramètres pour α, 2 pour A et 1 pour le choix du trièdre de sommet A, soit 5 paramètres au total).

La démonstration fondée sur l'emploi d'un complexe changeant Q *en* Q_1 *s'applique encore :* il existe deux complexes L ou L′ d'équation

$$(3)\ (\text{L ou L}')\qquad z_1x_2 - x_1z_2 \pm (y_1t_2 - y_2t_1)\rho = 0 \qquad (\rho^2 = a).$$

Il existe donc, *en transformant les* ∞^5 *tétraèdres* T *par la polarité* L *ou* L′, *deux familles* ∞^5 *de couples de Möbius inscrits dans* Q, *de faces tangentes à* Q_1, *les deux tétraèdres d'un même couple étant réciproques par rapport à un complexe fixe.*

Il existe encore ∞^2 tétraèdres conjugués communs à Q et Q_1 : dans le plan de Q_1, une face d'un tel tétraèdre est l'un des ∞^1 triangles conjugués communs à Q_1 et à l'ensemble des deux droites SG, SG′; le sommet S de ce triangle est fixe et le support du côté opposé est fixe, c'est la droite joignant les points γ et γ' où G et G′ touchent Q_1; le plan de la face opposée à S peut tourner autour de $\gamma\gamma'$; c'est le second paramètre; la troisième arête issue de S est fixe, c'est le diamètre conjugué du plan SGG′ par rapport à Q. Ces tétraèdres se déduisent du tétraèdre (x, y, z, t) par la substitution $(\varepsilon = \pm 1, \eta = \pm 1)$

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{ll} x = X + \lambda Z, & y = \quad Y\cos\alpha - T\sin\alpha, \\ z = \varepsilon Z, & \eta t = \quad Y\sin\alpha + T\cos\alpha, \\ U = u, & V = \quad v\cos\alpha + h\eta\sin\alpha, \\ W = u\lambda + w\varepsilon, & H = -v\sin\alpha + h\eta\cos\alpha, \end{array}\right.$$

Le tétraèdre (x, y, z, t) fournit ∞^1 tétraèdres T pour lesquels les faces BCD, CDA, DAB, ABC passent respectivement par les points A_1, B_1, C_1, D_1 conjugués de A, B, C, D dans l'involution biaxale $\Delta(x = y = 0)$, $\Delta'(z = t = 0)$; les tétraèdres T, T_1 forment un couple de Möbius inscrit dans Q, circonscrit à Q_1 et la substitution (4) fournit ∞^6 *couples de Möbius relatifs à* Q *et* Q_1. Il y a ∞^3 quadriques contenant Δ, Δ'; la substitution (4) fournit ensuite ∞^5 quadriques q et chacune donne ∞^1 couples de Möbius incrits dans la biquadratique (Q, Q′), circonscrits à la développable (Q_1, Q'_1), où Q′ est le cône déduit de Q_1 par la polarité q, Q'_1 la conique déduite de Q. Comme plus haut, parmi les ∞^5 quadriques q, il y a deux familles de chacune ∞^2 quadriques $\bar{q}$ qui se séparent; chacune, $\bar{q}$, transforme Q en Q_1 et donne ∞^3 couples de Möbius inscrits dans Q, circonscrits à Q_1, chaque tétraèdre du couple étant conjugué par rapport à cette quadrique q; *les* ∞^5 *couples de Möbius qui se séparent ainsi du total* ∞^6 *sont ceux qui correspondent aux complexes* L *ou* L′; les génératrices des quadriques $\bar{q}$ engendrent, dans un système L, dans l'autre L′; ces quadriques $\bar{q}$ s'obtiennent, par la substitution (4), à partir de l'une

$$(\bar{q})\qquad zx \pm \rho y t = 0 \qquad (\rho^2 = a).$$

6. **Couples de Möbius relatifs à une biquadratique et une conique.** — Reprenons les notations du Mémoire de M. Gambier :

$$
(1) \quad \begin{cases} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \qquad a+b=c+d, \\ (Q') & x^2-y^2+m(z^2-t^2)=0, \qquad a-b=m(c-d), \\ (Q_1) & au^2+bv^2+cw^2+dh^2+2euv+2fwh=0. \end{cases}
$$

Les quadriques $Q-\rho Q'$, $Q+\rho Q'$ sont coupées par Q_1 suivant 4 droites si l'on a

$$
(2) \qquad (1-\rho^2)(ab-e^2)=(1-m^2\rho^2)(cd-f^2).
$$

Ici Q_1 dégénère en conique si $ab-e^2$ ou $cd-f^2$ est nul; nous pouvons, sans restreindre, supposer $cd-f^2=0$, d'où $\rho=\pm 1$. Les quadriques

$$
(3) \quad \begin{cases} Q-Q' \equiv 2y^2+(1-m)z^2+(1+m)t^2=0, \\ Q+Q' \equiv 2x^2+(1+m)z^2+(1-m)t^2=0 \end{cases}
$$

sont les deux cônes, dont les sommets sont sur $\Delta'(z=t=0)$, contenant $\mathcal{B}$; cette droite Δ' est dans le plan de la conique Q_1; *chacun des deux cônes a deux génératrices tangentes à* Q_1; réciproquement, on peut se donner arbitrairement une conique Q_1 et deux cônes dont deux génératrices sont des tangentes à Q_1 et nous retrouvons la configuration qui précède; dans cette étude, nous avons supposé que les deux cônes possédant chacun pour génératrices deux tangentes de la conique Q_1 soient distincts; on peut imaginer que ces deux cônes appartiennent à une même famille contenant un paramètre : la biquadratique, $[S(\lambda), S(\lambda')]$, admet ∞^2 couples de Möbius inscrits dans elle, de faces tangentes à la conique Q_1; si λ' tend vers λ, on obtient la *caractéristique* du cône $S(\lambda)$: elle passe par le sommet du cône $S(\lambda)$ et ce point est double sur cette biquadratique, car toutes les quadriques du faisceau sont tangentes en ce point, de façon qu'il y ait deux cônes confondus parmi ceux, en nombre 4, qui contiennent la courbe.

Les résultats qui précèdent deviennent particulièrement intéressants si *la conique* Q_1 *est le cercle de l'infini; la biquadratique* $\mathcal{B}$ *est alors l'intersection de deux cylindres de révolution;* considérons alors l'un des ∞^2 couples de Möbius à faces isotropes inscrits dans $\mathcal{B}$: nous conservons les notations (X, Y, Z, T), $(X_1\ Y_1\ Z_1\ T_1)$ du paragraphe 3 pour représenter les premiers membres des équations des faces isotropes de ces deux tétraèdres; on a supposé

$$XX_1 + YY_1 + ZZ_1 + TT_1 \equiv 0,$$

or XX_1 représente, à un facteur numérique près, la distance d'un point de l'espace $(x, y, z, 1)$ à la droite D_1 intersection des 2 plans isotropes conjugués X et X_1; cette distance D_1 est définie par $D_1^2 = m_1^2 XX_1$, où m_1 est une constante déterminée; de même $D_2^2 = m_2^2 YY_1$, $D_3^2 = m_3^2 ZZ_1$, $D_4^2 = m_4^2 TT_1$; si l'on choisit quatre constantes α_1, α_2, α_3, α_4 liées par la relation $\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 0$, les équations

$$\frac{XX_1}{\alpha_1} = \frac{YY_1}{\alpha_2} = \frac{ZZ_1}{\alpha_3} = \frac{TT_1}{\alpha_4} \tag{4}$$

se réduisent à deux et représentent une biquadratique passant par les 8 points (chacune de ces ∞^2 biquadratiques est l'intersection de deux cylindres de révolution); pour un choix convenable de α_1, α_2, α_3, α_4, on a donc la biquadratique $\mathcal{B}$ de départ et les équations (4) équivalent aux équations

$$\frac{D_1^2}{m_1^2 \alpha_1} = \frac{D_2^2}{m_2^2 \alpha_2} = \frac{D_3^2}{m_3^2 \alpha_3} = \frac{D_4^2}{m_4^2 \alpha_4}. \tag{5}$$

Il existe donc une infinité double de quatre directrices associées (D_1, D_2, D_3, D_4) *telles que sur la biquadratique spéciale* $\mathcal{B}$ *en jeu* (*dépendant de* 10 *paramètres*) *les rapports des distances de chaque point aux quatre directrices restent constants.*

Conformément aux résultats indiqués un peu plus haut, nous pouvons envisager ∞^1 cylindres de révolution variant d'une façon continue avec le paramètre dont ils dépendent; la caractéristique de chacun d'eux est une courbe (à 9 paramètres) qui admet encore ∞^2 générations par 4 directrices. Ce résultat devient particulièrement intéressant si l'on considère une surface développable quelconque R et si l'on construit un cylindre de révolution se raccordant à R le long d'une génératrice; en répétant la construction pour chaque génératrice de R, et faisant varier le rayon ρ du cylindre d'une façon continue, on voit que la caractéristique du cylindre se décompose en la génératrice de contact avec R et en une cubique qui est la cubique gauche *horopter* étudiée dans notre second Mémoire commun. Ce résultat est curieux à un certain point de vue : deux cylindres de révolution, non infiniment voisins, qui ont une génératrice commune se coupent suivant une autre génératrice à distance finie et suivant deux droites à l'infini (droites à l'infini des deux plans isotropes parallèles aux génératrices); on a ainsi quatre droites; ici on a deux cylindres de révolution ayant en commun une génératrice et une cubique gauche non décomposée, mais les deux cylindres sont infiniment voisins.

Les résultats relatifs aux intersections de cylindres de révolution ont ainsi établi un lien inattendu entre le second Mémoire rédigé en collaboration avec M. Gambier et le travail présenté actuellement.