ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JACQUES DUFRESNOY

Sur les domaines couverts par les valeurs d'une fonction méromorphe ou algébroïde

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 58 (1941), p. 179-259

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1941_3_58__179_0>

SUR

LES DOMAINES COUVERTS

PAR

LES VALEURS D'UNE FONCTION
MÉROMORPHE OU ALGÉBROÏDE

PAR M. JACQUES DUFRESNOY.

INTRODUCTION.

En 1879, M. É. Picard publiait son célèbre théorème fixant à deux le nombre maximum des valeurs non prises par une fonction analytique au voisinage d'un point singulier essentiel isolé. Ce résultat ne devait être rattaché à aucun autre pendant plus de vingt ans. Mais, comme suite aux travaux fondamentaux de M. É. Borel, MM. E. Landau et G. Schottky établissaient leurs théorèmes précisés ensuite par M. C. Carathéodory. Puis M. P. Montel donnait sa puissante méthode des familles normales conduisant à de nombreux résultats qualitatifs. M. G. Julia, en utilisant les résultats précédents, donnait au théorème de M. Picard un complément important qui engageait la théorie dans une voie nouvelle (1). Par ailleurs le théorème de M. A. Denjoy sur les

(1) G. JULIA, *Sur quelques propriétés nouvelles des fonctions entières ou méromorphes* (*Annales de l'École Normale*, t. 36, 1919, p. 93-125; t. 37, 1920, p. 165-218; t. 38, 1921, p. 165-181).

valeurs asymptotiques ([1]) recevait de M. Carleman sa première démonstration qui basée sur des méthodes entièrement nouvelles, que M. Valiron avait soupçonnées dans des travaux antérieurs, faisait apparaître une méthode d'étude dont M. R. Nevanlinna allait montrer la fécondité. L'étude de la distribution des valeurs d'une fonction méromorphe semblait alors terminée. Mais, à la même époque, M. A. Bloch énonçait le théorème auquel on a donné son nom, puis il le précisait en 1925 (théorème des trois cercles). Huit ans plus tard, M. L. Ahlfors généralisait, dans une certaine mesure, ces résultats sans toutefois parvenir à retrouver, par ses méthodes, le théorème des trois cercles.

Enfin, dans un Mémoire paru en 1935 ([2]), il a montré qu'une étude essentiellement topologique des surfaces de Riemann permet d'obtenir un théorème général sur les fonctions méromorphes, qui généralise, en un certain sens, le second théorème fondamental de R. Nevanlinna ([3]). Ce Mémoire constitue le point de départ de notre travail.

Avant d'énoncer le théorème de L. Ahlfors, il convient de préciser la terminologie. Nous étudierons uniquement les surfaces de Riemann décrites par des fonctions $w=f(z)$, méromorphes dans le cercle *fermé* $|z|\leqq r$, lorsque z décrit ce cercle. Rappelons brièvement la définition de la caractéristique ρ d'une surface dont l'idée première est due à Euler (étude des polyèdres). Faisons un pavage de la surface à l'aide de triangles (ou plus exactement de pavés topologiquement équivalents à des triangles). La surface apparaît alors comme une sorte de polyèdre ayant f faces (triangles), a arêtes (côtés des triangles), s sommets (sommets des triangles). La quantité $\rho = -s+a-f$, qui, par définition, est la caractéristique de la surface, est indépendante du pavage choisi. En effet, si dans un pavage donné on sépare un triangle en deux il en est bien ainsi, car f a crû d'une unité, s de deux

---

([1]) A. Denjoy, *Sur les fonctions entières de genre fini* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 145, 1907, p. 106-108).

([2]) *Acta mathematica*, 65, p. 157-194. Ce Mémoire sera désigné dans la suite par [A].

([3]) *Cf.* par exemple, R. Nevanlinna. *Eindeutige analytische Funktionen* (Julius Springer, à Berlin, 1936). On trouvera dans cet Ouvrage un exposé de la théorie d'Ahlfors. On pourra consulter également R. Nevanlinna. *Le Théorème de Picard-Borel et la théorie des fonctions méromorphes* (Gauthier-Villars, 1929).

unités et a de trois; la propriété est donc vérifiée lorsqu'on remplace un pavage par un autre *plus fin*; elle est encore vraie pour deux pavages quelconques, comme on s'en assure aussitôt en prenant un troisième pavage auxiliaire *plus fin* que les deux premiers et dont l'ensemble des arêtes est constitué par la réunion des ensembles des arêtes des deux premiers. En particulier, une surface fermée du type topologique de la sphère a, comme le tétraèdre, pour caractéristique $\rho = -2$; nous retrouvons ainsi le théorème d'Euler relatif aux polyèdres. Une surface simplement connexe a, comme un triangle, pour caractéristique $\rho = -1$.

Sur la sphère unitaire Σ_0, nous considérons maintenant $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints. Soit Σ une surface de recouvrement de Σ_0, ayant un contour Γ de longueur L et une aire égale à $4\pi S$. Les portions connexes de la surface Σ situées sur le domaine D_i sont de deux sortes : ou bien elles n'ont aucune frontière relative par rapport à D_i (c'est-à-dire que toute leur frontière a pour trace la frontière de D_i), ce sont par définition des *disques* (Inseln dans la terminologie d'Ahlfors); ou bien elles ont une frontière relative par rapport à D_i (frontière relative qui appartient nécessairement à Γ), ce sont par définition des *langues*.

Nous appellerons enfin *multiplicité* d'un disque le nombre de ses feuillets et *multiplicité simple p* d'un disque l'opposé $-\rho$ de sa caractéristique. Nous aurons donc $p = 1$ pour les disques simplement connexes et $p \leqq 0$ pour les autres disques. Ahlfors a établi le théorème suivant :

THÉORÈME D'AHLFORS. — *Étant donnés, sur la sphère unitaire* Σ_0, $q \geqq 3$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints, on peut déterminer une constante h telle que toute surface de recouvrement* Σ *de* Σ_0, *simplement connexe, présente sur les domaines* D_i *des disques dont la somme* $\Sigma p(D_i)$ *des multiplicités simples satisfait à*

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqq (q-2)S - hL,$$

où $4\pi S$ *désigne l'aire de* Σ *et* L *la longueur de son contour.*

Cette relation s'applique encore lorsque les domaines D_i se réduisent à des points a_i; on a alors

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{n}(a_i) \geqq (q-2)S - hL,$$

en appelant $\overline{n}(a_i)$ le nombre de points *distincts* de la surface Σ situés sur le point a_i.

Enfin, *si tous les disques situés sur le domaine* D_i *ont une multiplicité au moins égale à* μ_i, *on a*

$$\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) - 2 \leqq h\frac{L}{S},$$

où h est une nouvelle constante ne dépendant que des domaines D_i. Cette inégalité est encore valable lorsque certains domaines D_i se réduisent à des points.

Appliquant ces théorèmes à la surface de Riemann $\Sigma(r)$ décrite par la fonction $w=f(z)$, méromorphe dans $|z|<R\leqq\infty$, lorsque z décrit le cercle $|z|\leqq r<R$, Ahlfors obtient des propriétés des fonctions $w=f(z)$ lorsque $R=\infty$ ou lorsque $R<\infty$ avec $\overline{\lim\limits_{r\to R}}\, S(r)(R-r)=\infty$. Ce sont le théorème du défaut et le théorème des domaines (Scheibensatz) qui comprennent, comme cas particuliers, le théorème de Valiron et Bloch et les théorèmes classiques sur les valeurs complètement ramifiées.

Dans le premier Chapitre de ce travail, nous donnerons une démonstration nouvelle du théorème d'Ahlfors, qui présente l'avantage de permettre l'estimation de la constante h; nous verrons que cette démonstration peut être simplifiée dans le cas particulier où tous les domaines D_i sont réduits à des points. Enfin, nous étendrons le théorème aux surfaces multiplement connexes. Dans le Chapitre II nous exposerons les théorèmes asymptotiques d'Ahlfors pour les fonctions méromorphes et nous apporterons à ces théorèmes des précisions nouvelles; nous montrerons que l'on retrouve le théorème du défaut de Nevanlinna. Le Chapitre III sera consacré à des théorèmes en termes finis qui comprennent, comme cas particuliers, les théorèmes de Landau, Schottky, Bloch, ..., et qui généralisent des théorèmes qu'avait obtenus Ahlfors par une méthode très différente ([1]). Enfin dans le Chapitre IV nous étendrons ces résultats aux fonctions algébroïdes; nous obtiendrons ainsi de nouvelles propriétés, certaines étant asymptotiques, d'autres en termes finis. Nous terminerons en donnant quelques conséquences pour les algébroïdes à deux branches, d'où nous déduirons une extension, pour des domaines D_i plus généraux que ceux envisagés au début de cette étude, des théorèmes relatifs aux fonctions méromorphes; on peut espérer parvenir à des résultats analogues, pour les algébroïdes à un nombre quelconque de branches et pour des domaines D_i encore plus généraux.

Pour rendre cet exposé cohérent et intelligible, nous serons obligés de faire, à plusieurs reprises, des emprunts au Mémoire d'Ahlfors. Nous signalerons les passages correspondants par l'indication « d'après [A] ... » mise en note; les références données sous une autre forme indiquant simplement des rapprochements et des comparaisons de résultats.

Qu'il me soit maintenant permis d'exprimer ma respectueuse reconnaissance à M. Georges Valiron qui m'a incité à l'étude des remarquables Mémoires d'Ahlfors, m'a suggéré d'entreprendre ce travail et n'a cessé de me prodiguer conseils et encouragements. Je tiens à adresser également mes remerciements à M. G. Julia qui a bien voulu présenter à l'Académie des Sciences des Notes résumant les principaux résultats de cette étude et à M. A. Denjoy qui a accepté de se joindre à MM. Julia et Valiron pour constituer le jury.

Je prie M. É. Picard, qui a bien voulu publier cet article dans les *Annales de l'École Normale supérieure*, de trouver ici l'expression de toute ma gratitude.

([1]) *Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée. Acta Soc. Scient. Fennicæ*, Nova Series A, t. II, n° 2, (1933).

CHAPITRE I.

LE THÉORÈME FONDAMENTAL.

1. Soit, sur la sphère unitaire Σ_0, une surface de recouvrement Σ d'aire $4\pi S$ et ayant un contour de longueur L. On considère les points de Σ_0 sur lesquels se trouve au moins un point de Σ; ils constituent un ou plusieurs domaines Σ_1. On définit de même $\Sigma_2, \Sigma_3, \ldots$; Σ_ν est formé par l'ensemble des points de Σ_0 sur lesquels se trouvent au moins ν points de Σ. Les surfaces $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots, \Sigma_\nu, \ldots$ sont les différents feuillets [1] de la surface Σ; on reconstitue cette dernière à partir des feuillets en reliant ceux-ci entre eux de façon convenable. Nous désignerons par $4\pi S_\nu$ l'aire du feuillet Σ_ν et par L_ν la longueur de son contour. Il est clair que l'on a

$$S = \sum S_\nu \qquad \text{et} \qquad L = \sum L_\nu.$$

Nous aurons besoin, au cours des démonstrations suivantes, d'utiliser deux propriétés [2] de la caractéristique d'une surface. Établissons-les rapidement.

2. Faisons un pavage de la sphère Σ_0 tel que le contour Γ de la surface Σ se projette sur des côtés des triangles du pavage, et que les points de ramification se projettent tous en des sommets. Cela entraîne un pavage de chaque feuillet Σ_ν, d'où un pavage de la surface Σ elle-même. Les caractéristiques des feuillets et de la surface totale sont données par les relations

$$\rho_\nu = -s_\nu + a_\nu - f_\nu,$$
$$\rho = -s + a - f.$$

---

(1) D'après [A], p. 162.
(2) D'après [A], p. 166-168.

On a $a=\Sigma a_\nu$ et $f=\Sigma f_\nu$; par contre, on a, en général, $s<\Sigma s_\nu$, car un point de ramification d'ordre μ (réunissant $\mu+1$ feuillets) donne un sommet à la surface Σ d'une part, et d'autre part un sommet à chacun de $\mu+1$ feuillets; on a donc

$$\sum s_\nu - s = \sum \mu.$$

Et, en introduisant l'*ordre de ramification total* $v=\Sigma\mu$ de la surface Σ, nous obtenons la première des relations que nous voulions établir

$$\rho=\sum \rho_\nu + v.$$

On démontre aussi facilement la propriété suivante. Si n transversales et un nombre quelconque de rétrosections sans points communs séparent la surface Σ en surfaces Σ', on a

$$\rho=\sum \rho' + n.$$

En effet, on peut toujours supposer que le pavage effectué sur Σ est tel que transversales et rétrosections soient formées de côtés de triangles du pavage. Et la propriété énoncée est une conséquence de ce qu'une rétrosection dédouble le même nombre d'arêtes et de sommets, tandis qu'une transversale dédouble une arête de plus.

Nous allons maintenant démontrer deux cas particuliers du théorème fondamental.

Premier cas particulier.

3. Nous supposerons que trois points distincts a_1, a_2 et a_3 de Σ_0 ne sont pas recouverts par la surface Σ simplement connexe et nous désignerons par δ_0 la plus petite des distances sphériques de ces trois points pris deux à deux. Nous allons montrer que

$$L > \frac{2}{3}\delta_0 S.$$

A cet effet, décomposons la surface en feuillets et étudions le $\nu^{\text{ième}}$ feuillet de caractéristique ρ_ν. Deux cas peuvent se présenter :

a. $S_\nu \leqq \frac{1}{2}$; dans cette hypothèse on a

$$L_\nu \geqq 4\pi S_\nu,$$

car le minimum de la longueur L_ν est obtenu, pour S_ν donné, lorsque le feuillet a la forme d'une calotte, auquel cas on a

$$L_\nu^2 = 16\pi^2 S_\nu(1 - S_\nu);$$

d'où l'inégalité précédente puisque $S_\nu(1 - S_\nu) \geqq S_\nu^2$.

b. $S_\nu > \frac{1}{2}$; alors $L_\nu \geqq 3\delta_0$ si $\rho_\nu = -1$ (feuillet simplement connexe) et $L_\nu \geqq 2\delta_0$ si $\rho_\nu = 0$ (feuillet doublement connexe).

En résumé, que l'on soit dans l'un ou l'autre cas, si $\rho_\nu \leqq 0$, on a toujours

$$L_\nu \geqq 2\delta_0 S_\nu.$$

D'autre part

$$S - \frac{1}{2\delta_0} L = \sum \left(S_\nu - \frac{1}{2\delta_0} L_\nu\right).$$

Chaque terme de cette somme étant inférieur à 1, il y a n feuillets Σ_ν avec $n \geqq S - \frac{1}{2\delta_0} L$, pour lesquels on a

$$S_\nu - \frac{1}{2\delta_0} L_\nu > 0.$$

Chacun de ces feuillets vérifie donc l'inégalité $\rho_\nu > 0$.

De la relation

$$\rho = \sum \rho_\nu + \nu$$

nous déduisons

$$\rho \geqq n + \nu - N,$$

où N est le nombre de feuillets simplement connexes ($\rho_\nu = -1$); soit encore

$$\rho \geqq S - \frac{1}{2\delta_0} L - N_1 - 1,$$

où N_1 est le nombre de feuillets simplement connexes et non ramifiés.

La propriété est établie s'il n'existe pas de tel feuillet. S'il en existe, on les détache de la surface Σ par m transversales; la surface Σ se décompose ainsi en surfaces Σ_k, en nombre au plus égal à $m+1$, et auxquelles on peut appliquer la relation précédente [1] où l'on a fait $N_1 = 0$; soit

$$\rho_k + 1 \geqq S_k - \frac{1}{2\delta_0} L_k.$$

Nous allons additionner ces relations membre à membre en remarquant que, d'une part

$$\rho = \sum \rho_k + m \qquad \text{entraîne} \qquad \rho + 1 \geqq \sum (\rho_k + 1)$$

et que, d'autre part

$$\sum \left(S_k - \frac{1}{2\delta_0} L_k \right) > S - \frac{1}{2\delta_0} L - \frac{2}{2\delta_0} \sum L_k,$$

cette dernière somme étant étendue aux feuillets simplement connexes, non ramifiés; donc étant inférieure à L. Il vient finalement

$$\rho + 1 > S - \frac{3}{2\delta_0} L.$$

Dans le cas particulier où la surface Σ est simplement connexe ($\rho = -1$), on trouve bien la propriété annoncée.

Si la surface Σ simplement connexe ne recouvre pas trois points a_i de la sphère Σ_0, on a

$$L > \frac{2}{3} \delta_0 S,$$

en désignant par δ_0 la distance sphérique minima de ces trois points pris deux à deux.

De cette proposition on déduit facilement le théorème de Picard [2] ainsi que les théorèmes de Landau et de Schottky [3].

---

(1) Valable pour les feuillets simplement connexes eux-mêmes.
(2) *Cf.* § 21.
(3) *Cf.* § 30 et 31.

Deuxième cas particulier.

4. Considérons $q \geqq 3$ domaines D_i, simplement connexes et disjoints, situés sur la sphère Σ_0. Désignons par δ_0 la distance sphérique minima de ces domaines pris deux à deux. Remarquons, en passant, que $\delta_0 \leqq \frac{2\pi}{3}$, car le maximum de δ_0 est obtenu pour $q = 3$, lorsque les domaines sont réduits à des points. Nous allons démontrer le lemme suivant :

Si la sphère Σ_0 est recouverte d'une surface connexe Σ à un seul feuillet, de caractéristique ρ, d'aire $4\pi S$, ayant un contour Γ de longueur L et telle que

$$S - \frac{L}{2\delta_0} > 0,$$

la surface Σ présente sur les domaines D_i un nombre $p \geqq 0$ de disques satisfaisant à

$$p + \rho \geqq q - 2.$$

En effet, si $L = 0$, la frontière de Σ est formée de points en nombre m arbitraire. On a $\rho = -2 + m$ et $p \geqq q - m$; la relation est satisfaite. Reste donc à examiner le cas $0 < L < 2\delta_0 S$. Le contour Γ se compose de $\rho + 2$ courbes fermées Γ_k; chacune d'elles a une longueur inférieure à $L < 2\delta_0 S < 2\pi$; elle découpe Σ_0 en deux domaines simplement connexes dont l'un Δ_k a une aire inférieure à 2π, et l'autre Δ'_k une aire supérieure à 2π. Montrons d'abord que Σ est nécessairement contenue dans tous les domaines Δ'_k; s'il n'en était pas ainsi, Σ aurait une aire inférieure à 2π, d'où l'inégalité $L > 4\pi S$, ce qui est contraire à l'hypothèse puisque $\delta_0 < \pi$. D'autre part chaque courbe Γ_k, ayant une longueur inférieure à $2\delta_0$, ne peut rencontrer ou contenir dans son intérieur Δ_k qu'un domaine D_i au plus. La surface Σ s'obtient donc, à partir de Σ_0, en retirant les domaines Δ_k et chaque retrait supprime un disque au plus. Puisque Σ_0 comprend q disques, il en résulte que Σ comprend un nombre $p \geqq 0$ de disques satisfaisant à $p \geqq q - (\rho + 2)$; c'est la relation annoncée.

5. Soit alors Σ une surface de recouvrement de la sphère Σ_0; désignons par $\nu(D_i)$ le nombre de feuillets de cette surface qui recouvrent *complètement* le domaine D_i, par $\nu_1(D_i)$ l'ordre de ramifi-

cation entre elles des portions de ces feuillets intérieures à D_i, et enfin par $r(D_i)$ la quantité $\nu(D_i) - \nu_1(D_i)$; celle-ci satisfait au théorème suivant :

THÉORÈME A. — *Si la sphère Σ_0 est recouverte d'une surface de Riemann Σ de caractéristique ρ, d'aire $4\pi S$ et ayant un contour de longueur L, la somme $\Sigma r(D_i)$ étendue aux q domaines D_i vérifie l'inégalité*

$$\sum_{i=1}^{q} r(D_i) \geqq (q-2)\left(S - \frac{3}{2\delta_0}L\right) - (\rho + 1).$$

En effet, décomposons la surface Σ en feuillets Σ_ν d'aire $4\pi S_\nu$ et ayant un contour de longueur L_ν. Nous avons

$$S - \frac{1}{2\delta_0}L = \sum\left(S_\nu - \frac{1}{2\delta_0}L_\nu\right).$$

Chaque terme de cette somme étant inférieur ou égal à 1, il y a n feuillets Σ_ν pour lesquels on a

$$S_\nu - \frac{1}{2\delta_0}L_\nu > 0 \qquad \text{avec} \quad n \geqq S - \frac{1}{2\delta_0}L.$$

Appliquons le lemme à chacun de ces n feuillets et sommons en remarquant que

$$\rho = \sum \rho_\nu + v,$$

et que $p_\nu + \rho_\nu \geqq -1$, l'égalité n'ayant lieu que pour les feuillets simplement connexes ne contenant aucun disque. Soit N le nombre de ces feuillets; il vient

$$\sum \nu(D_i) \geqq n(q-2) + v - N - \rho.$$

Tenant compte de l'ordre v de ramification, on arrive à

$$\sum r(D_i) \geqq (q-2)\left(S - \frac{1}{2\delta_0}L\right) - \rho - N_{1-1},$$

où N_1 désigne le nombre de feuillets simplement connexes, non ramifiés, ne contenant aucun disque. Le théorème est donc établi s'il n'existe pas de tel feuillet. S'il en existe, on les détache de la surface Σ par m transversales, la surface Σ se décompose ainsi en surfaces Σ_k, en nombre au plus égal à $m+1$, auxquelles on peut appliquer la relation précédente où l'on a fait $N_1 = 0$. En sommant on obtient

$$\sum r(D_i) \geqq (q-2)\sum\left(S_k - \frac{1}{2\delta_0}L_k\right) - (\rho+1)$$

puisque $\rho = \Sigma\rho_k + m$ entraîne $\rho + 1 \geqq \Sigma(\rho_k + 1)$.

D'autre part

$$\sum\left(S_k - \frac{1}{2\delta_0}L_k\right) > S - \frac{1}{2\delta_0}L - \frac{2}{2\delta_0}\sum L_k,$$

cette dernière somme étant étendue aux feuillets simplement connexes non ramifiés, donc étant inférieure à L. Le théorème est ainsi démontré.

6. Dans le cas particulier où les domaines D_i se réduisent à des points, le théorème A devient

THÉORÈME A_1. — *On considère $q \geqq 3$ points a_i de la sphère Σ_0. Si cette sphère est recouverte d'une surface de Riemann Σ, de caractéristique ρ, d'aire $4\pi S$ et ayant un contour de longueur* L, *on a*

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{n}(a_i) \geqq (q-2)\left(S - \frac{3}{2\delta_0}L\right) - (\rho+1),$$

où δ_0 désigne la distance minima des points a_i pris deux à deux et $\overline{n}(a_i)$ le nombre des points de la surface Σ situés sur le point a_i, chacun de ces points étant compté une seule fois.

Ce théorème a été obtenu par Ahlfors [1] pour les surfaces simplement connexes; toutefois la méthode d'Ahlfors ne permettait pas l'estimation du coefficient de L. Ce théorème contient le résultat de l'étude du premier cas particulier.

---

[1] [A], p. 181; inégalité (B_1).

Le théorème fondamental.

7. Soient toujours, sur la sphère Σ_0, $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints; et soit δ_0 la distance (sphérique) minima des domaines D_i pris deux à deux. Nous allons définir *a priori* une constante k dépendant de ces domaines, et qui jouera dans la suite un rôle important.

Si nous ajoutons au domaine D_i l'ensemble des points de Σ_0 dont la distance à D_i est inférieure à $l \leqq \delta_0$, on obtient un nouveau domaine $D_i(l)$ qui satisfait à l'*une* des propriétés suivantes :

α. Il est simplement connexe;

β. Il est multiplement connexe mais ne sépare pas l'un de l'autre deux quelconques des domaines D_j $(j \neq i)$;

γ. Il est multiplement connexe et sépare les uns des autres certains des domaines D_j.

Il existe un nombre l_i au plus égal à δ_0 et tel que pour $l < l_i$ on soit dans l'un des cas α ou β et que pour $l_i < l < \delta_0$ on soit dans le cas γ. Par définition, la *distance d'isolement* l_0 de l'ensemble des domaines D_i sera le plus petit des nombres l_i. Enfin, nous désignerons par $\overline{D}_i(l_0)$ le domaine $D_i(l_0)$ s'il appartient au cas α, le domaine $D_i(l_0)$ complété de ceux de ses *trous* qui ne contiennent pas de domaine D_j, s'il appartient au cas β.

Soit $\Sigma_0^\star$ la portion de la sphère Σ_0 extérieure aux domaines D_i. Considérons sur $\Sigma_0^\star$ un domaine Δ d'aire $4\pi\sigma$ et dont le contour *relatif* a une longueur $\lambda < 2l_0$ (par contour relatif, nous désignons les portions du contour de Δ qui sont *intérieures* à $\Sigma_0^\star$).

Si le contour ne touche aucun domaine D_i et si l'on suppose de plus $\sigma < \frac{1}{2}$, on a

$$\sigma < \frac{1}{4\pi}\lambda.$$

Si le contour touche un domaine D_i (et il n'en peut toucher qu'un seul puisque $\lambda < 2l_0 \leqq 2\delta_0$) et si l'on suppose de plus que le domaine Δ

est intérieur à $\overline{D}_i(l_0)$, on pourra déterminer un nombre k_i tel que l'on ait toujours

$$\sigma < k_i \lambda.$$

Nous définirons enfin la constante k par la relation

$$k = \frac{1}{S_0} \operatorname{Max}\left(\frac{S_0}{2l_0}, \frac{1}{4\pi}, k_1, k_2, \ldots, k_q\right),$$

en désignant par $4\pi S_0$ l'aire de la sphère *trouée* Σ_0^*.

8. Calculons la valeur de cette constante k dans quelques cas particuliers :

1° *Les domaines* D_i *sont réduits à des points.* — On a $l_0 = \delta_0$, $k_i = \frac{1}{4\pi}$ et $S_0 = 1$. Par conséquent, $k = \frac{1}{2\delta_0}$.

2° *Les domaines* D_i *sont circulaires ou réduits à des points.* — On a encore $l_0 = \delta_0$. Évaluons k_i. Soit P celui des deux pôles du cercle

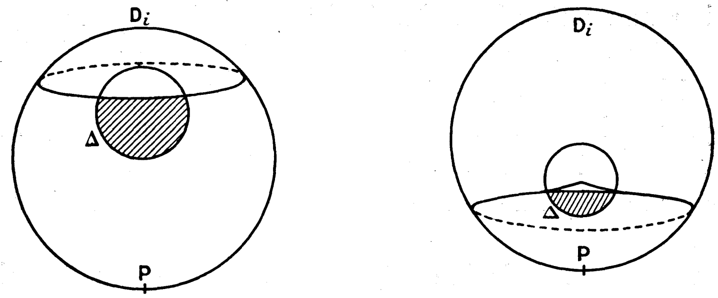

Fig. 1 et 2.

limitant D_i qui est extérieur au domaine D_i. La distance δ_0 est inférieure à la distance de P au domaine D_i. Le point P est extérieur à $D_i(l_0)$. Pour un contour relatif de longueur $\lambda < 2l_0$ donnée, le domaine Δ d'aire maxima est limité par un arc d'un cercle C qui coupe orthogonalement le cercle frontière de D_i. Soit D la plus petite des deux calottes découpées par C sur la sphère Σ_0 ; cette calotte ne contient pas P, c'est donc elle qui contient le domaine Δ. Nous distinguerons alors deux cas :

a. Le domaine D_i est inférieur à la demi-sphère (*fig.* 1);

$$4\pi\sigma < \text{aire de } D < \text{long. de } C < 2\lambda;$$

donc

$$k_i < \frac{1}{2\pi}.$$

b. Le domaine D_i est supérieur à la demi-sphère (*fig.* 2);

$$4\pi\sigma < \text{aire du secteur de D limité par les deux « rayons » tangents à } D_i;$$

d'autre part

$$\text{aire de } D < \text{long. de } C$$

entraîne

$$\text{aire du secteur de } D < \lambda;$$

et finalement $k_i < \frac{1}{4\pi}$.

On a donc toujours

$$k = \text{Max}\left[\frac{1}{2\delta_0}, \frac{1}{2\pi S_0}\right] < \frac{1}{2\delta_0 S_0}.$$

3° *Les domaines* D_i *sont convexes ou circulaires ou réduits à des points.* — Nous dirons qu'un domaine D_i est convexe si le plus petit arc de grand cercle joignant deux points quelconques intérieurs au

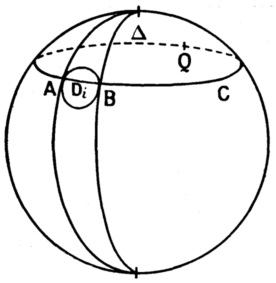

Fig. 3.

domaine est tout entier intérieur au domaine; il en résulte qu'un grand cercle tangent au contour du domaine laisse tout ce domaine d'un même côté de lui. Ici l_0 peut être différent de δ_0; la détermination de l_0 ne présente pas de difficulté sérieuse. Voyons ce qu'il advient de la constante k_i relative à un domaine convexe. Pour un contour relatif de longueur $\lambda < 2l_0$ donnée, le domaine Δ d'aire maxima est limité par un arc d'un cercle C qui coupe orthogonalement la frontière de D_i aux points A et B (*fig.* 3). Le domaine D_i est situé dans celui des deux fuseaux qui est inférieur à la demi-sphère, fuseaux limités par les deux demi-grands cercles joignant les pôles du cercle C et passant respectivement par A et B. Le domaine Δ est contenu dans la plus petite D des deux calottes découpées par C sur la sphère Σ_0, car tous les points de cette calotte sont situés dans $D_i(l_0)$; pour s'en assurer, il suffit de remarquer que la distance à A ou à B de tous les points de la calotte est au plus égale à la distance du point Q, milieu du plus grand des deux arcs du cercle C ayant pour extrémités A et B; cette distance est inférieure à la moitié de la longueur λ de cet arc de cercle, donc est inférieure à l_0. On a, par conséquent,

$$4\pi\sigma < \text{aire de D} < \text{long. de C} < 2\lambda;$$

d'où

$$k_i < \frac{1}{2\pi}.$$

De sorte que la constante k a pour expression

$$k = \operatorname{Max}\left[\frac{1}{2l_0}, \frac{1}{2\pi S_0}\right] < \frac{1}{2l_0 S_0}.$$

De plus, on peut obtenir une estimation de la distance d'isolement l_0

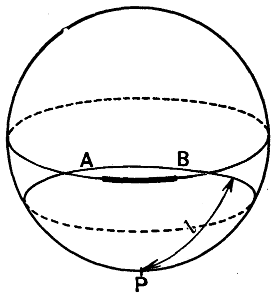

Fig. 4.

à partir de δ_0. Nous allons montrer que si $\delta_0 > \frac{\pi}{2}$ (ce qui ne peut se produire que pour $q = 3$ ou 4) on a $l_0 \geqq \frac{\pi}{2}$, tandis que si $\delta_0 \leqq \frac{\pi}{2}$ on a $l_0 = \delta_0$. Ceci est une conséquence immédiate de la remarque suivante : Si le domaine D_i est convexe, le domaine $D_i(l)$ est simplement connexe, lorsque $l \leqq \frac{\pi}{2}$. En effet, pour que $D_i(l)$ soit multiplement connexe, il faut et il suffit qu'il existe un point P de Σ_0 et deux points A et B de D_i (*fig.* 4) tels que les distances de P à A et à B soient inférieures à l et qu'il n'existe pas dans D_i un chemin allant de A à B dont tous les points soient à une distance de P inférieure à l. Ceci ne peut se présenter pour $l \leqq \frac{\pi}{2}$, car le petit arc de grand cercle joignant A à B (arc qui appartient à D_i) est intérieur à la calotte de centre P et de rayon (sphérique) l.

D'où finalement

$$k \leqq \operatorname{Max}\left[\frac{1}{2\delta_0}, \frac{1}{\pi}, \frac{1}{2\pi S_0}\right] < \operatorname{Max}\left[\frac{2}{3\delta_0}, \frac{1}{2\pi S_0}\right] < \frac{2}{3\delta_0 S_0}.$$

9. La constante k étant ainsi définie, nous allons démontrer le lemme suivant :

La sphère trouée $\Sigma_0^\star$, d'aire $4\pi S_0$, est recouverte d'une surface connexe Σ à un seul feuillet, d'aire $4\pi S_0 S$, et ayant un contour relatif Γ de longueur L. *Si* $S - kL > 0$, *la caractéristique ρ de Σ est au moins égale à $q - 2$.*

En effet, si $L = 0$, on a $\rho \geqq q - 2$; la relation est satisfaite. Reste donc à examiner le cas où L est tel que $0 < L < \frac{S}{k}$. Le contour Γ se compose :

1° de courbes fermées de longueur inférieure à $2l_0 \leqq 2\delta_0$. Une telle courbe sépare Σ_0 en deux domaines dont l'un Δ a une aire inférieure à 2π; ce domaine Δ contient un domaine D_i au plus. D'autre part, la surface Σ est contenue dans le complémentaire de Δ, car sinon nous aurions $S < \frac{1}{4\pi S_0} L < kL$, ce qui est contraire à l'hypothèse.

2° de courbes ouvertes de longueur totale inférieure à $2l_0 \leqq 2\delta_0$. Les extrémités de l'une de ces courbes aboutissent donc au contour d'un même domaine D_i. Une telle courbe sépare la partie de Σ_0 extérieure à D_i en deux domaines dont l'un Δ est intérieur à $\overline{D_i}(l_0)$ et par conséquent ne contient aucun domaine D_j. D'autre part, la surface Σ est contenue dans le complémentaire de Δ, car sinon nous aurions

$$S < \frac{k_i}{S_0} L \leqq kL,$$

ce qui est encore contraire à l'hypothèse.

Donc, Σ se déduit de Σ_0^* par retrait de tous les domaines Δ; chacune de ces opérations ne peut que faire croître ρ (c'est ce qui a lieu dans le cas 1° lorsque Δ ne contient aucun domaine D_i) ou le laisser constant. Le lemme est donc établi.

10. A partir de là, nous allons démontrer un théorème obtenu par Ahlfors [1], en utilisant une méthode qui ne fournit pas d'estimation du coefficient de L.

Théorème. — *La sphère trouée* Σ_0^*, *d'aire* $4\pi S_0$, *est recouverte d'une surface connexe* Σ *d'aire* $4\pi S_0 S$ *et ayant un contour relatif* Γ *de longueur* L. *La caractéristique* ρ *de* Σ *vérifie l'inégalité*

$$\overset{+}{\rho} \geqq (q-2)(S - 3kL).$$

En effet, si $S - kL < 0$, l'inégalité est triviale. Sinon, décomposons la surface Σ en feuillets Σ_ν d'aire $4\pi S_0 S_\nu$ et ayant un contour relatif de longueur L_ν. Nous avons

$$S - kL = \sum (S_\nu - kL_\nu).$$

Chaque terme de cette somme étant inférieur ou égal à 1, il y a n feuillets Σ_ν pour lesquels $S_\nu - kL_\nu > 0$, avec

$$n \geqq S - kL.$$

Appliquons le lemme à chacun de ces n feuillets et sommons en remarquant que

$$\rho = \sum \rho_\nu + \nu.$$

Il vient

$$\rho \geqq n(q-2) + \nu - N,$$

[1] [A], p. 168-174.

en désignant par N le nombre de feuillets simplement connexes, car $\rho_\nu \geqq -1$, l'égalité ayant lieu pour ces feuillets. Tenant compte de l'ordre ν de ramification, on arrive à

$$\overset{+}{\rho} \geqq (q-2)(S-kL)-N_1,$$

où N_1 désigne le nombre de feuillets simplement connexes non ramifiés. Le théorème est donc établi s'il n'existe pas de tels feuillets. S'il en existe, on les détache de la surface Σ par m transversales; la surface Σ se décompose ainsi en surfaces Σ_k, en nombre au plus égal à $m+1$, auxquelles on peut appliquer la relation précédente; ce qui donne

$$\overset{+}{\rho}_k \geqq (q-2)(S_k-kL_k).$$

En sommant on obtient

$$\overset{+}{\rho} \geqq (q-2)\sum(S_k-kL_k)$$

puisque

$$\rho = \sum \rho_k + m \qquad \text{entraîne} \qquad \overset{+}{\rho} \geqq \sum \overset{+}{\rho}_k.$$

D'autre part

$$\sum(S_k-kL_k) > S-kL-2k\sum L_k,$$

cette dernière somme étant étendue aux feuillets simplement connexes non ramifiés; elle est donc inférieure à L et le théorème est démontré.

11. Pour appliquer ce résultat nous devrons faire usage du *premier théorème du recouvrement* d'Ahlfors (1), que nous allons établir succinctement. Soit, sur Σ_0, un domaine D d'aire $4\pi S_0$. Nous désignerons par $4\pi S_0 S(D)$ l'aire de la portion, située sur D, de la surface de recouvrement Σ de Σ_0. Décomposons la surface Σ en feuillets Σ_ν; pour chacun d'eux nous avons

$$S_\nu < \frac{S_\nu}{S_0} \qquad \text{et} \qquad S_\nu(D) \leqq \frac{S_\nu}{S_0};$$

(1) D'après [A], p. 163-164.

d'où, puisqu'il s'agit de quantités positives,

$$|S_\nu - S_\nu(D)| < \frac{S_\nu}{S_0}.$$

En remplaçant Σ_ν par son complémentaire par rapport à Σ_0, nous obtenons de même

$$\left|\left(1 - S_\nu\right) - \left(1 - S_\nu(D)\right)\right| < \frac{1 - S_\nu}{S_0},$$

soit

$$|S_\nu - S_\nu(D)| < \frac{1 - S_\nu}{S_0}.$$

Par conséquent

$$|S_\nu - S_\nu(D)| < \frac{1}{S_0}\min[S_\nu,\ 1 - S_\nu].$$

En utilisant une inégalité déjà employée (§ 3), nous obtenons

$$\min[S_\nu,\ 1 - S_\nu] \leqq \frac{L_\nu}{4\pi}$$

et, en faisant la somme des relations pour les différents feuillets,

$$|S - S(D)| < \frac{L}{4\pi S_0}.$$

C'est l'inégalité que nous voulions établir.

12. Nous allons maintenant démontrer le théorème fondamental (1). Soit Σ, simplement connexe, une surface de recouvrement de Σ_0. Retirons de Σ toutes les langues situées sur les domaines D_i; il reste un certain nombre de surfaces Σ'. Celles-ci sont simplement connexes; en effet, il suffit de montrer qu'il en est bien ainsi après le retrait d'une langue et de répéter ensuite le raisonnement autant de fois qu'il est nécessaire. Or la langue se détache par m transversales et r rétrosections. On a donc, d'après les propriétés de la caractéristique, $-1 = \Sigma\rho(\Sigma') + \rho_l + m$, en désignant par ρ_l la caractéristique de la langue; celle-ci étant limitée par $r + 1$ contours distincts, on a

(1) D'après [A], p. 179-180.

$\rho_i \geqq r - 1$; donc $\Sigma \rho(\Sigma') + m + r \leqq 0$. Et par conséquent il y a $m+r$ surfaces Σ' toutes simplement connexes.

De chaque surface Σ' retirons tous les disques situés sur les domaines D_i; nous obtenons un certain nombre de surfaces $\bar{\Sigma}$. D'après les propriétés de la caractéristique, nous avons

$$\sum \rho(\Sigma') = \sum \rho(\bar{\Sigma}) - \sum_{i=1}^{q} p(D_i),$$

soit encore

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) = \sum \overset{+}{\rho}(\bar{\Sigma}) - N_1 + N,$$

en désignant par N le nombre des surfaces Σ' et par N_1 le nombre des surfaces $\bar{\Sigma}$ simplement connexes. On voit que $N' = N - N_1$ est le nombre des surfaces Σ' contenant un disque au moins. Or, ci-dessus, nous avons obtenu une borne inférieure de $\overset{+}{\rho}(\bar{\Sigma})$ à partir de l'aire de $\bar{\Sigma}$ et de la longueur de son contour relatif. Il vient, en sommant et en majorant la somme des longueurs des contours relatifs des $\bar{\Sigma}$ par la longueur du contour de Σ,

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqq (q-2)[S(\Sigma_0^*) - 3kL] + N'.$$

Et, en appliquant le théorème du recouvrement, nous obtenons :

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqq (q-2)\left[S - \left(3k + \frac{1}{4\pi S_0}\right)L\right] + N'.$$

C'est le théorème d'Ahlfors [1] avec de plus une évaluation de la constante h. Résumons les résultats dans un énoncé :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Étant donnés, sur la sphère unitaire Σ_0, $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, on peut déterminer une constante h telle que toute surface de recouvrement Σ de Σ_0, simple-*

---

[1] [A], p. 180, inégalité (B).

ment connexe, présente sur les domaines D_i *des disques dont la somme* $\Sigma p(D_i)$ *des multiplicités simples satisfait à*

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) \geqq (q-2)(S-hL),$$

où $4\pi S$ *désigne l'aire de* Σ *et* L *la longueur de son contour.*

Si les domaines D_i *sont circulaires, on a*

$$h = \frac{1}{4\pi S_0} + \frac{3}{2}\operatorname{Max}\left[\frac{1}{\delta_0}, \frac{1}{\pi S_0}\right].$$

Si les domaines D_i *sont circulaires ou convexes, on a*

$$h = \frac{1}{4\pi S_0} + \frac{3}{2}\operatorname{Max}\left[\frac{1}{l_0}, \frac{1}{\pi S_0}\right] \leqq \frac{1}{4\pi S_0} + \frac{3}{2}\operatorname{Max}\left[\frac{1}{\delta_0}, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi S_0}\right].$$

Enfin si les domaines D_i *se réduisent à des points* a_i, *on a*

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{n}(a_i) \geqq (q-2)\left(S - \frac{3}{2\delta_0}L\right).$$

Extension du théorème fondamental aux surfaces multiplement connexes.

13. Supposons maintenant que nous partions d'une surface Σ multiplement connexe de caractéristique ρ. Retirons encore de Σ les langues situées sur les domaines D_i; il reste un certain nombre de surfaces Σ' qui ne sont plus toujours simplement connexes; mais leurs caractéristiques $\rho(\Sigma')$ satisfont à l'inégalité

$$\sum [\rho(\Sigma') + 1] \leqq \rho + 1.$$

Pour démontrer cette inégalité, nous pouvons tout d'abord nous limiter au cas où l'on retire de Σ une seule langue; le cas général s'en déduit immédiatement par itération. La surface Σ est séparée en plusieurs morceaux par un certain nombre de transversales et de rétrosections. L'un de ces morceaux, dont le contour contient nécessairement des parties du contour de Σ, constituent la langue; les autres constituent les surfaces Σ'. Par l'adjonction de bandes infiniment étroites, sans points communs, traversant la langue et dont le nombre est inférieur d'une unité à celui des surfaces Σ', réunissons ces dernières en une surface d'un seul tenant Σ'', dont nous désignerons la caractéristique par ρ''. En retranchant de la langue les bandes précédentes, il reste une langue entaillée. La surface Σ est maintenant décomposée en deux parties : la langue entaillée et la surface Σ''; cette décomposition est obtenue par m transversales et par un certain nombre de rétrosections. Si ρ_l est la caractéristique de la langue entaillée, nous avons donc

$$\rho = \rho'' + \rho_l + m.$$

Nous distinguerons alors deux cas :

1° $m > 0$; puisque $\rho_l \geqq -1$, nous avons $\rho'' \leqq \rho$.

2° $m = 0$; la langue ayant alors plusieurs contours distincts (une rétrosection au moins et une partie au moins du contour de Σ) ne peut être simplement connexe; $\rho_l \geqq 0$; nous avons encore $\rho'' \leqq \rho$.

L'inégalité annoncée sera démontrée si nous prouvons que

$$\sum [\rho(\Sigma') + 1] = \rho'' + 1.$$

Cette relation est bien vérifiée car, au point de vue topologique, on obtient les surfaces Σ' à partir de la surface Σ'' en effectuant sur cette dernière un nombre de sections transversales inférieur d'une unité au nombre des surfaces Σ' (chacune de ces transversales coupant l'une des bandes réunissant les Σ').

A partir de l'inégalité que nous venons d'établir, on conclut comme on l'a fait pour les surfaces simplement connexes

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) = \sum \rho(\overline{\Sigma}) - \sum \rho(\Sigma') = \sum \overset{+}{\rho}(\overline{\Sigma}) + \mathrm{N} - \mathrm{N}_1 - \sum [\rho(\Sigma') + 1].$$

D'où

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) \geqq \sum \rho(\overline{\Sigma}) + \mathrm{N} - \mathrm{N}_1 - (\rho + 1) \geqq \sum \overset{+}{\rho}(\overline{\Sigma}) - (\rho + 1),$$

car $\mathrm{N}' = \mathrm{N} - \mathrm{N}_1$ est le nombre de surfaces Σ' multiplement connexes ou contenant un disque au moins; c'est donc une quantité positive ou nulle. La démonstration se termine comme dans le paragraphe précédent et finalement :

Le théorème fondamental s'applique aux surfaces de recouvrement Σ *multiplement connexes à condition d'écrire l'inégalité de la façon suivante*

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) \geqq (q-2)(\mathrm{S}-h\mathrm{L})-(\rho+1)$$

qui fait intervenir la caractéristique ρ *de ces surfaces.*

Remarques.

14. Tous comptes faits, nous avons obtenu deux résultats distincts, le théorème A d'une part et d'autre part le théorème fondamental (étendu aux surfaces multiplement connexes).

Le théorème A présente l'avantage d'un coefficient de L complètement explicité qui *ne dépend que de* δ_0. Ce théorème peut donc être appliqué à des domaines D_i quelconques disjoints que l'on a rendus simplement connexes par des coupures convenables; si l'on revient à la définition de $r(\mathrm{D}_i)$, on voit que cette dernière précaution est superflue (il suffit de choisir des coupures ne passant par aucune des traces sur Σ_0 des points de ramification de Σ et coupant peut-être la trace du contour Γ de Σ, mais ne se confondant jamais avec elle sur un arc). Par conséquent, *le théorème* A *s'applique à des domaines* D_i *qui peuvent être multiplement connexes et emboîtés de façon quelconque les uns dans les autres.*

Par contre le théorème fondamental est plus précis en ce sens qu'il fait intervenir $\Sigma p(\mathrm{D}_i)$ au lieu de $\Sigma r(\mathrm{D}_i)$ qui lui est supérieur ou égal. On peut se demander s'il est aussi possible de donner, pour tous les cas, une expression simple de la constante h, qui ne ferait intervenir, par exemple, que δ_0 et les aires des domaines D_i (comme nous l'avons fait dans le cas particulier de domaines convexes ou circulaires). S'il en était ainsi, le théorème s'appliquerait encore à des domaines D_i quelconques disjoints dans lesquels on aurait fait des coupures assujetties uniquement à les rendre simplement connexes. Nous montrerons dans la suite ([1]) que ceci conduirait à une contradiction.

15. Remarquons enfin que, de la seule connaissance de q et de δ_0, on peut déduire une borne inférieure de S_0. En effet Σ_0^* comprend dans son intérieur les q bandes de largeur $\delta_0/2$ bordant chacun des domaines D_i; d'autre part chacune de ces bandes a une aire supérieure à celle de la calotte de rayon $\delta_0/2$. Donc

$$S_0 > \frac{q}{2}\left(1 - \cos\frac{\delta_0}{2}\right).$$

En remarquant que

$$1 - \cos\frac{\delta_0}{2} = 2\sin^2\frac{\delta_0}{4} > 2\left(\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\frac{\pi}{6}}\frac{\delta_0}{4}\right)^2 = 2\left(\frac{3\delta_0}{4\pi}\right)^2,$$

nous obtenons *a fortiori*

$$S_0 > q\left(\frac{3\delta_0}{4\pi}\right)^2.$$

Cela nous permet de donner une estimation de h en fonction seulement de δ_0 et de q dans le cas de domaines convexes ou circulaires. Si l'on ne connaît pas q, on a toujours

$$S_0 > \frac{27}{16}\frac{\delta_0^2}{\pi^2}$$

et l'on vérifie immédiatement l'inégalité

$$\frac{4}{3}\frac{\pi}{\delta_0^2} > \frac{3}{2}\operatorname{Max}\left[\frac{1}{\delta_0}, \frac{2}{\pi}, \frac{1}{\pi S_0}\right]$$

et donc $h < \frac{3}{2}\frac{\pi}{\delta_0^2}$. Quel que soit δ_0, *lorsque les domaines* D_i *sont circulaires ou convexes, on a* $h < \frac{3}{2}\frac{\pi}{\delta_0^2}$.

([1]) *Voir* § 33.

CHAPITRE II

APPLICATIONS AUX FONCTIONS MÉROMORPHES (1).

16. Nous allons d'abord donner quelques conséquences des théorèmes précédents pour les surfaces de Riemann *simplement connexes;* nous ferons ensuite l'application aux fonctions méromorphes.

Désignons par $n(D_i)$ le nombre de disques, comptés avec leur ordre de multiplicité, situés sur D_i; par $\bar{n}(D_i)$ le nombre de ces mêmes disques, mais où chacun est compté une seule fois; enfin, par $n_1(D_i)$ l'ordre de ramification total de ces disques. D'après les propriétés fondamentales de la caractéristique, nous avons

$$p(D_i) = n(D_i) - n_1(D_i) \leqq \bar{n}(D_i).$$

Le théorème fondamental nous donne alors :

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, on a

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{n_1(D_i)}{S} + \sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{n(D_i)}{S}\right) \leqq 2 + (q-2)h\frac{L}{S}$$

et, a fortiori,

$$\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{\bar{n}(D_i)}{S}\right) \leqq 2 + (q-2)h\frac{L}{S}.$$

En particulier, si la surface Σ ne présente aucun disque sur les domaines D_i, on a

$$L > \frac{1}{h} S,$$

***h** étant une constante dépendant uniquement des domaines D_i et que nous avons évaluée, lorsque ceux-ci sont circulaires, convexes ou réduits à des points.*

---

(1) D'après [A], p. 181-182 et 188-191 pour les paragraphes 16 à 22 de ce Chapitre. Nous avons de plus donné des estimations de h et précisé les propriétés des fonctions véritablement transcendantes (qui interviendront dans la suite de ce travail).

Le théorème A nous conduirait à l'inégalité analogue

$$\sum_{i=1}^{q} \frac{\nu_1(D_i)}{S} + \sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{\nu(D_i)}{S}\right) < 2 + \frac{3}{2} \frac{q-2}{\delta_0} \frac{L}{S}.$$

17. Plaçons-nous, de nouveau, dans les conditions du théorème fondamental et supposons que tous les disques de la surface Σ situés sur le domaine D_i aient μ_i feuillets au moins; on a alors

$$\bar{n}(D_i) \leqq \frac{1}{\mu_i} n(D_i) \leqq \frac{1}{\mu_i} S(D_i);$$

et d'autre part, (§ 11),

$$S(D_i) \leqq S + \frac{1}{4\pi S_i} L,$$

en désignant par $4\pi S_i$ l'aire du domaine D_i. D'après le théorème précédent, nous avons donc

$$\sum_{i=1}^{q} \left[1 - \frac{1}{\mu_i}\left(1 + \frac{1}{4\pi S_i} \frac{L}{S}\right)\right] < 2 + (q-2) h \frac{L}{S},$$

soit

$$\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) < 2 + \left[(q-2) h + \frac{1}{4\pi} \sum_i \frac{1}{\mu_i S_i}\right] \frac{L}{S}.$$

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, si tous les disques situés sur le domaine D_i ont μ_i feuillets au moins, on a

$$\frac{L}{S} > \frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{(q-2) h + \frac{1}{4\pi} \sum \frac{1}{\mu_i S_i}} > \frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{(q-2) h + \frac{1}{4\pi} \sum \frac{1}{S_i}}.$$

On obtiendrait des théorèmes semblables si, au lieu de fixer la borne inférieure μ_i de $\frac{n(D_i)}{\bar{n}(D_i)}$, on fixait une borne inférieure de $\frac{n(D_i)}{p(D_i)}$ ou de $\frac{n_1(D_i)}{p(D_i)}$ ou bien encore de $\frac{S(D_i)}{p(D_i)}$. Dans cet ordre d'idées, on peut obtenir des théorèmes analogues à partir du théorème A. Par exemple :

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i satifaisant aux conditions du théo-

rème A, *si* $\nu(D_i) > \mu_i r(D_i)$, *c'est-à-dire si* $\nu_1(D_i) > \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right)\nu(D_i)$, *on a*

$$\frac{L}{S} > \frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{\frac{3}{2}\frac{q-2}{\delta_0} + \frac{1}{4\pi}\sum\frac{1}{\mu_i S_i}} > \frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{\frac{3}{2}\frac{q-2}{\delta_0} + \frac{1}{4\pi}\sum\frac{1}{S_i}}.$$

18. Une remarque très importante doit être faite sur la forme des bornes inférieures obtenues pour $\frac{L}{S}$ dans les deux théorèmes précédents. Ces bornes sont loin d'être précises; en particulier elles s'évanouissent lorsque l'un des domaines D_i se réduit à un point a_i. Mais il apparaît aussitôt que si les hypothèses des deux derniers théorèmes sont remplies, elles le sont *a fortiori* lorsqu'on *agrandit* les domaines D_i jusqu'à être des domaines $D_i^\star$ satisfaisant encore, suivant le cas, aux conditions du théorème fondamental ou à celles du théorème A. Dans chaque cas particulier on choisira les domaines $D_i^\star$ de façon à obtenir la borne la plus grande possible. Pour l'un et l'autre théorème on obtiendra ainsi

$$\frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{(q-2)h^\star + \frac{1}{4\pi}\sum\frac{1}{S_i^\star}} \quad \text{et} \quad \frac{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}{\frac{3}{2}\frac{q-2}{\delta_0^\star} + \frac{1}{4\pi}\sum\frac{1}{S_i^\star}},$$

qui seront toujours positives, même si certains domaines D_i se réduisent à des points. En particulier, on peut donner, en fonction de δ_0 seul, une estimation de la première de ces bornes lorsque les domaines sont circulaires ou convexes et de la seconde dans tous les cas. Faisons complètement ce dernier calcul. Il suffit d'agrandir chaque domaine D_i d'une bande de largeur $\theta\frac{\delta_0}{2}$ où θ est un nombre compris entre 0 et 1. Le dénominateur est alors inférieur à

$$\begin{aligned}\frac{3}{2}\frac{q-2}{\delta_0(1-\theta)} + \frac{q}{2\pi\left(1 - \cos\theta\frac{\delta_0}{2}\right)} &< \frac{3}{2}\frac{q-2}{\delta_0(1-\theta)} + \frac{q}{4\pi\left(\theta\frac{\delta_0}{4}\right)^2\left(\frac{\sin\pi/6}{\pi/6}\right)^2} \\ &< \frac{\pi}{\delta_0^2}\left(\frac{q-2}{1-\theta} + \frac{4q}{9\theta^2}\right).\end{aligned}$$

En donnant à θ la valeur $2/3$ on trouve que cette dernière parenthèse est inférieure à $q\left(\frac{1}{1-\theta}+\frac{4}{9\theta^2}\right)=4q$. Donc,

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i satisfaisant aux conditions du théorème A, si $\nu(D_i) > \mu_i r(D_i)$, c'est-à-dire si $\nu_1(D_i) > \left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)\nu(D_i)$, on a

$$\frac{L}{S} > \frac{\delta_0^2}{4\pi q}\left[\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right].$$

Lorsqu'on connaît autre chose que δ_0 sur les domaines D_i, on peut améliorer cette borne inférieure. On obtient de même le théorème suivant :

Étant donnés $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, certains de ces domaines pouvant être réduits à des points, si tous les disques situés sur le domaine D_i ont μ_i feuillets au moins, on a

$$\frac{L}{S} > \frac{1}{h'}\left[\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right],$$

h' étant une constante dépendant uniquement des domaines D_i et que nous savons évaluer lorsque ces domaines sont circulaires ou convexes.

Un cas particulier important de ces théorèmes est celui où tous les domaines D_i sont réduits à des points a_i.

Étant donnés $q \geqq 3$ points a_i, si tous les points de la surface Σ situés sur le point a_i sont des points de ramification d'ordre au moins égal à $\mu_i - 1$, on a

$$\frac{L}{S} > \frac{\delta_0^2}{4\pi q}\left[\sum_{i=1}^{q}\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right].$$

Les théorèmes précédents conduiront à une borne inférieure de $\frac{L}{S}$ chaque fois que $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. Cela se présentera, en particulier, si $q=5$ (puisque $\mu_i \geqq 2$) dans le cas d'une surface Σ dont tous les disques situés sur les domaines D_i sont multiples ou bien dans le cas d'une surface Σ complètement ramifiée sur les points a_i. Cela se présentera encore si $q=4$ dans le cas d'une surface Σ n'ayant aucun disque sur un domaine D_i et dont tous les disques situés sur les trois autres domaines D_i sont multiples, ou bien dans le cas d'une surface Σ ne recouvrant pas un point a_i et complètement ramifiée sur les trois autres points. Ou bien encore si $q=3$, dans le cas d'une surface Σ n'ayant aucun disque sur deux domaines D_i et dont tous les disques situés sur l'autre domaine sont multiples, ou bien dans le cas d'une surface Σ ne recouvrant pas deux points a_i et complètement ramifiée sur l'autre point, etc.

Applications aux fonctions méromorphes.

19. Soit une fonction $w=f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z|<R\leqq\infty$. Nous allons appliquer les résultats précédents à la surface de Riemann $\Sigma(r)$ décrite par w lorsque z décrit le cercle $|z|\leqq r<R$.

En posant $z=\rho e^{i\varphi}$, nous avons

$$S(r)=\frac{1}{\pi}\iint_{\rho\leqq r}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}\rho\,d\rho\,d\varphi,$$

$$L(r)=2\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}r\,d\varphi.$$

De la première de ces deux relations nous déduisons

$$\frac{dS(r)}{dr}=\frac{r}{\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}d\varphi.$$

Et l'inégalité de Schwarz

$$\left(\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|}{1+|w(z)|^2}d\varphi\right)^2\leqq\int_0^{2\pi}\frac{|w'(z)|^2}{(1+|w(z)|^2)^2}d\varphi\int_0^{2\pi}d\varphi$$

entraîne

$$L^2(r)\leqq 8\pi^2 r\frac{dS}{dr}. \tag{1}$$

Cette relation sera fondamentale dans toute notre étude. Elle montre que, lorsque $R=\infty$, la fonction $L(r)$ est négligeable devant $S(r)$ (¹), sauf peut-être sur des intervalles exceptionnels Δ_r de r. En effet, les intervalles Δ_r, dans lesquels $L(r) > S(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$, où ε est un nombre positif arbitraire, ont une mesure logarithmique totale finie; car l'inégalité (1) entraîne, dans ces intervalles,

$$S(r)^{1+2\varepsilon} \leqq 8\pi^2 r \frac{dS}{dr},$$

d'où

$$\int_{\Delta_r} \frac{dr}{r} \leqq 8\pi^2 \int_{\Delta_r} \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} < 8\pi^2 \int_{r_0}^{\infty} \frac{dS}{S^{1+2\varepsilon}} < \frac{8\pi^2}{2\varepsilon S^{2\varepsilon}(r_0)}.$$

20. Le théorème fondamental se traduit donc par les inégalités

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) > (q-2)S(r) - S(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{n}(a_i) > (q-2)S(r) - S(r)^{\frac{1}{2}+\varepsilon},$$

vérifiées pour tous r sauf, peut-être, sur des intervalles exceptionnels de mesure logarithmique totale finie.

La dernière relation (cas particulier où tous les domaines D_i sont réduits à des points a_i) doit être rapprochée du second théorème fondamental de Nevanlinna d'après lequel on a (²)

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r, a_i) > (q-2)T(r) - O[\log r T(r)]$$

sauf sur des intervalles exceptionnels. Mais, on ne peut déduire ce

(¹) Nous supposons ici que $S(r) \to \infty$. Si $S(r)$ est borné la relation (1) montre que $L(r) \to 0$, sauf *peut-être* sur des intervalles exceptionnels de mesure logarithmique totale finie. La proposition annoncée est donc encore vraie, ainsi que les théorèmes que nous allons en déduire. On sait d'ailleurs que, dans ce cas (*cf.* R. NEVANLINNA, Ouvrage cité), la fonction $w=f(z)$ est une fraction rationnelle de degré d; donc la fonction $S(r)$ tend vers d, et $L(r)$ tend vers zéro *sans intervalles exceptionnels*.

(²) Nous utilisons les notations classiques

$$T(r) = \int_0^r S(r)\frac{dr}{r} \qquad \text{et} \qquad N(r, a) = \int_0^r [n(r, a) - n(0, a)]\frac{dr}{r} + n(0, a)\log r.$$

théorème de notre dernière relation; et l'inverse, non plus, ne peut être fait. De plus la propriété relative aux domaines D_i apparaît comme une extension qui n'a rien d'équivalent dans la théorie de Nevanlinna.

21. Nous allons maintenant démontrer le *théorème du défaut*. Nous aurons seulement besoin de la propriété $\underline{\lim}_{r \to R} \frac{L}{S} = 0$. Elle aura lieu dans les cas, et dans ces cas-là seulement, où l'on n'a pas pour toutes [1] les valeurs de r

$$L(r) > \varepsilon S(r) \tag{2}$$

où ε est une constante positive. Si cette inégalité était satisfaite, nous aurions [en utilisant (1)]

$$\frac{1}{r} < \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2} \frac{\frac{dS}{dr}}{S^2};$$

et, en intégrant entre r et R, nous obtenons

$$\log \frac{R}{r} < \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2} \left[\frac{1}{S(r)} - \frac{1}{S(R)} \right] > \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2} \frac{1}{S(r)}.$$

Soit encore

$$S(r) \log \frac{R}{r} < \frac{8\pi^2}{\varepsilon^2}, \tag{3}$$

relation très importante, dont nous tirons, pour l'instant, la conséquence suivante :

Si $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$ *avec* $\overline{\lim}_{r \to R} S(r)(R - r) = \infty$ [2], *on a*

$$\underline{\lim}_{r \to R} \frac{L}{S} = 0.$$

---

[1] On peut en effet envisager *toutes* les valeurs de r, car, à condition de choisir la constante ε assez petite, la relation précédente est vérifiée au voisinage de $r = 0$, donc pour $r \leqq R - \varepsilon'$; et, d'autre part, elle est encore vérifiée pour $R - \varepsilon' < r < R$, d'après la définition même de la plus petite limite.

[2] On a, en effet, $\overline{\lim}_{r \to R} S(r) \log \frac{R}{r} = \overline{\lim}_{r \to R} S(r) \frac{R - r}{R}$. Remarquons de plus que la condition $\overline{\lim}_{r \to R} S(r)(R - r) = \infty$ est satisfaite *en particulier* lorsque $\overline{\lim}_{r \to R} \frac{T(r)}{\log \frac{1}{R - r}} = \infty$; car, sinon, on aurait $S(r) = O\left[\frac{1}{R - r}\right]$, d'où, par intégration, $T(r) = O\left[\log \frac{1}{R - r}\right]$.

Introduisons, avec Ahlfors, les quantités

$$\Theta'(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{\overline{n}(D_i)}{S} \leqq \Theta'_1(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{p(D_i)}{S},$$

$$\delta'(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{n(D_i)}{S},$$

$$\theta'(D_i) = \underline{\lim_{r \to R}} \frac{n_1(D_i)}{S}.$$

L'*indice de ramification* $\theta'(D_i)$ du domaine D_i est positif ou nul; son *défaut* $\delta'(D_i)$ et la quantité $\Theta'(D_i)$ sont compris entre zéro et un d'après le théorème du recouvrement; et nous avons de plus

$$\theta'(D_i) + \delta'(D_i) \leqq \Theta'_1(D_i) \leqq 1.$$

Les mêmes définitions s'appliquent encore lorsque les domaines D_i sont réduits à des points; mais alors la théorie précédente ne permet plus d'affirmer que les quantités $\Theta'(a_i)$ et $\Theta'_1(a_i)$ et le défaut $\delta'(a_i)$ sont positifs.

On en déduit immédiatement (§ 16) le

THÉORÈME. — *Si* $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$ *avec* $\overline{\lim_{r \to R}} S(r)(R - r) = \infty$, *on a*

$$\sum \Theta'_1(D_i) \leqq 2;$$

donc, a fortiori,

$$\sum \Theta'(D_i) \leqq 2 \qquad \text{et} \qquad \sum \theta'(D_i) + \sum \delta'(D_i) \leqq 2,$$

d'où

$$\sum \delta'(D_i) \leqq 2.$$

Ces relations sont encore satisfaites lorsque certains domaines D_i *se réduisent à des points.*

S'il n'y a pas de disque sur un domaine, le défaut de celui-ci est égal à l'unité; donc :

Dans les hypothèses du théorème précédent, il y a nécessairement au moins un disque sur l'un de trois domaines simplement connexes et *disjoints. En particulier, il existe au plus deux valeurs non prises par la fonction* $w = f(z)$.

Remarquons que, si nous écartons le cas où $w = f(z)$ est une fraction rationnelle, $S(r)$ tend vers l'infini et par conséquent le théorème ci-dessus peut s'énoncer sous une forme plus précise, car, dans ces conditions, le défaut d'un domaine est égal à l'unité lorsqu'il n'y a qu'un *nombre fini* de disques sur ce domaine. Et alors, il y a une infinité de disques sur l'un de trois domaines simplement connexes et disjoints; et en particulier il existe au plus deux valeurs non prises une infinité de fois par la fonction $w = f(z)$ [théorème de Picard (¹)].

22. Nous obtenons de même (§ 17) le *théorème des domaines.*

Théorème. — *Si* $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$ *avec* $\overline{\lim\limits_{r \to R}}\, S(r)(R - r) = \infty$, *et si l'on a* $q \geqq 3$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent être réduits à des points; si, de plus, tous les disques situés sur le domaine* D_i *ont* μ_i *feuillets au moins, on a*

$$\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leqq 2.$$

La même relation s'applique, en particulier, au cas de q ***points*** a_i***, lorsque le point*** a_i ***n'est recouvert que par des points de ramification de la surface de Riemann d'ordre au moins égal à*** $\mu_i - 1$ (²).

Nous pouvons faire encore la même remarque. Si nous écartons le

---

(¹) É. **Picard**, *Sur une propriété des fonctions entières* (*C. R. Acad. Sc.*, **88**, 1879, p. 1024).

(²) *Cf.* C. **Caratheodory**, *Sur quelques généralisations du théorème de M. Picard* (*C. R. Acad. Sc.*, **141**, 1905, p. 1213-1215). P. **Montel**, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales de l'École normale*, **32**, 1916, p. 223-302). **Fatou**, *Remarques au sujet du théorème de M. Picard sur les fonctions entières* (*Comptes rendus des séances de la Soc. Math. de France*, 1920, p. 23).

Les auteurs précédents supposent que les racines de $f(z) - a_i = 0$ ont toutes des ordres de multiplicité multiples de μ_i; les ordres de multiplicité au moins égaux à μ_i ont été considérés pour la première fois par G. **Valiron**, *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923), p. 74-78.

cas où $w = f(z)$ est une fraction rationnelle, le théorème précédent s'applique avec l'hypothèse moins restrictive dans laquelle tous les disques situés sur le domaine D_i, *sauf peut-être un nombre fini d'entre eux*, ont μ_i feuillets au moins et l'hypothèse correspondante relative au cas où les domaines D_i se réduisent à des points a_i.

Cas particulier. — Si $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$ *avec*

$$\overline{\lim_{r \to R}} S(r)(R - r) = \infty,$$

il y a au moins un disque simple sur l'un de cinq domaines simplement connexes et disjoints; en particulier $w = f(z)$ *ne peut présenter plus de quatre valeurs complètement ramifiées.*

Si, de plus, la fonction $w = f(z)$ est véritablement transcendante, il y a une infinité de disques simples sur l'un des cinq domaines et, en particulier, $w = f(z)$ présente au plus quatre valeurs ramifiées complètement, sauf peut-être un nombre fini de fois.

Si la fonction $w = f(z)$ ne prend pas une valeur a, on a $\mu(a) = \infty$, et la proposition s'applique avec trois domaines (laissant le point a à leur extérieur) et deux valeurs complètement ramifiées. Pour les fonctions ne prenant pas deux valeurs a_1 et a_2 (fonctions nécessairement transcendantes dans les hypothèses faites), il y a une infinité de disques simples sur un domaine simplement connexe laissant les points a_1 et a_2 à son extérieur; et il ne peut exister de valeurs ramifiées complètement, sauf peut-être un nombre fini de fois.

23. Au début de ce chapitre nous avons dû exposer un certain nombre de résultats figurant dans le Mémoire d'Ahlfors. Dans la suite de ce travail nous allons indiquer les extensions que nous avons obtenues.

Revenons, tout d'abord, au théorème du défaut. Introduisons les quantités

$$\Theta(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{\overline{N}(D_i)}{T} \leqq \Theta_1(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{P(D_i)}{T},$$

$$\delta(D_i) = 1 - \overline{\lim_{r \to R}} \frac{N(D_i)}{T},$$

$$\theta(D_i) = \underline{\lim_{r \to R}} \frac{N_1(D_i)}{T},$$

où $P(D_i)$, $\overline{N}(D_i)$, $N(D_i)$ et $N_1(D_i)$ sont respectivement égaux à

$$\int_0^r p(D_i)\frac{dr}{r}, \quad \int_0^r \overline{n}(D_i)\frac{dr}{r}, \quad \int_0^r n(D_i)\frac{dr}{r} \quad \text{et} \quad \int_0^r n_1(D_i)\frac{dr}{r}.$$

Ces définitions s'appliquent encore lorsque le domaine D_i est réduit à un point a_i (¹). Elles coïncident alors avec les définitions du défaut et de l'indice de ramification *de Nevanlinna*.

Nous avons

$$\theta(D_i) + \delta(D_i) \leqq \Theta_1(D_i) \leqq 1.$$

Le seul cas intéressant est celui où $T(r) \to \infty$. Les quantités introduites sont alors, pour un domaine D_i réduit à un point a_i, comprises entre zéro et un d'après le premier théorème de Nevanlinna. Il en est encore de même pour un véritable domaine D_i, ce théorème donnant par une intégration

$$\overline{\lim_{r \to R}} \frac{\int_0^r S(D_i)\frac{dr}{r}}{T(r)} \leqq 1,$$

donc $\delta(D_i) > 0$. Il apparaît, ici encore, que les théories de Nevanlinna et d'Ahlfors se complètent, sans qu'aucune des deux puisse conduire à tous les résultats.

Nous allons maintenant établir le

24. Théorème. — *Si* $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$ *avec* $\overline{\lim_{r \to R}}\, T(r)(R - r) = \infty$, *on a*

$$\sum \Theta_1(D_i) \leqq 2,$$

donc, a fortiori,

$$\sum \Theta(D_i) \leqq 2 \quad \text{et} \quad \sum \theta(D_i) + \sum \delta(D_i) \leqq 2;$$

(¹) La définition de toutes ces quantités $X(r) = \int_0^r x(r)\frac{dr}{r}$, où $x(r)$ est une fonction croissante, ne peut plus s'appliquer lorsque $x(0) \neq 0$. S'il en est ainsi, on pose

$$X(r) = \int_0^r [x(r) - x(0)]\frac{dr}{r} + x(0)\log r.$$

d'où

$$\sum \delta(\mathrm{D}_i) \leqq 2,$$

Ces relations sont encore satisfaites lorsque certains domaines D_i *se réduisent à des points.*

Ce théorème, qui est dans une certaine mesure [1] une extension du théorème du défaut de Nevanlinna, est distinct du théorème du défaut d'Ahlfors (§ 21); en effet, si l'hypothèse est un peu plus restrictive ainsi que nous l'avons déjà vu, la conclusion est plus précise, car

$$\theta(\mathrm{D}_i) = \varliminf_{r \to \mathrm{R}} \frac{\mathrm{N}_1(\mathrm{D}_i)}{\mathrm{T}} \geqq \varliminf_{r \to \mathrm{R}} \frac{\dfrac{d\mathrm{N}_1(\mathrm{D}_i)}{dr}}{\dfrac{d\mathrm{T}}{dr}} = \theta'(\mathrm{D}_i);$$

et de même

$$\delta(\mathrm{D}_i) \geqq \delta'(\mathrm{D}_i); \qquad \Theta(\mathrm{D}_i) \geqq \Theta'(\mathrm{D}_i) \qquad \text{et} \qquad \Theta_1(\mathrm{D}_i) \geqq \Theta'_1(\mathrm{D}_i).$$

Pour faire la démonstration, revenons à l'inégalité fondamentale

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) \geqq (q-2)(\mathrm{S} - h\mathrm{L}).$$

En intégrant, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^{q} \mathrm{P}(\mathrm{D}_i) \geqq (q-2)\,\mathrm{T}(r) - (q-2)\,h \int_0^r \mathrm{L}(r)\,\frac{dr}{r}.$$

D'autre part la relation (1), jointe à l'inégalité de Schwarz, nous donne

$$\left(\int_{r_0}^{r} \mathrm{L}(r)\,\frac{dr}{r}\right)^2 \leqq \log\frac{r}{r_0} \int_{r_0}^{r} \mathrm{L}^2(r)\,\frac{dr}{r} < 8\pi^2\,\mathrm{S}(r)\log\frac{r}{r_0}.$$

---

(1) Le théorème de Nevanlinna s'applique seulement aux points et non aux domaines. Mais son hypothèse est différente [$\mathrm{R} = \infty$ ou $\mathrm{R} < \infty$ avec $\lim \mathrm{T}(r)/\log(1/\mathrm{R} - r) = \infty$]. Sous cette dernière hypothèse, on a *probablement* encore les conclusions de notre théorème.

Et, par conséquent, nous avons

$$\sum_{i=1}^{q} P(D_i) \geqq (q-2)\,T(r) - O\left[\sqrt{S(r)\log r}\right];$$

et notre théorème sera démontré si nous prouvons que

$$\lim_{r \to R} \frac{S(r)\log r}{T^2(r)} = 0.$$

Or, si cette propriété n'était pas vérifiée, nous aurions, pour r suffisamment grand,

$$\frac{S(r)\log r}{T^2(r)} > \varepsilon > 0.$$

soit

$$\frac{\dfrac{dT}{dr}}{T^2(r)} > \frac{\varepsilon}{r\log r},$$

et, par intégration,

$$\frac{1}{T(r)} > \varepsilon \log \frac{\log R}{\log r},$$

ce qui est en contradiction avec les hypothèses du théorème [1].

25. On peut aussi préciser le théorème du paragraphe 22. En effet, d'après le calcul effectué dans le paragraphe 21,

Si $w = f(z)$ est méromorphe dans $|z| < R$ et satisfait à la condition suivante :

(Condition C) *il existe $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent être réduits à des points et à chacun desquels est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$, tels que tous les disques de la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ et situés sur D_i*

---

(1) Le même raisonnement permet d'établir que, lorsque $R = \infty$, le terme complémentaire est inférieur à $\varepsilon\sqrt{T(r)}\log T(r)$, sauf sur un ensemble exceptionnel Δ_r de r pour lequel on a $\int_{\Delta_r} d\log\log r < \infty$. *Cf.* A. Dinghas, *Eine Bemerkung zur Ahlforssche Theorie der Ueberlagerungsflächen* (*Math. Zeitschr.*, **44**, 1939, p. 568-572).

aient μ_i *feuillets au moins ;*

alors on a $\mathrm{R} < \infty$ *et*

$$S(r) \log \frac{R}{r} < \frac{8\pi^2 h'^2}{\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2}, \tag{3}$$

où h' *est une constante dépendant uniquement des domaines* D_i *et que nous savons évaluer.*

La condition C peut être remplacée par l'une des quatre conditions suivantes plus restrictives :

(Condition C_1) $w = f(z)$ *ne prend pas trois valeurs distinctes ;*

(Condition C_2) *elle présente cinq valeurs complètement ramifiées ;*

(Condition C_3) *la surface de Riemann ne présente aucun disque sur trois domaines simplement connexes et disjoints ;*

(Condition C_4) *elle ne présente aucun disque simple sur cinq domaines simplement connexes et disjoints.*

Par exemple, pour une fonction ne prenant pas trois valeurs, on a

$$S(r) \log \frac{R}{r} < \frac{18\pi^2}{\delta_0^2},$$

et, en particulier, pour la fonction modulaire définie dans $|z| < 1$ et ne prenant pas les valeurs 0, 1, ∞, nous avons

$$S(r) < \frac{72}{\log \frac{1}{r}}.$$

26. Remarquons que les bornes ainsi obtenues pour $S(r)$ sont loin d'être précises au voisinage de $r = 0$, où $S(r)$ est un infiniment petit du même ordre que r^2. Nous verrons dans le chapitre suivant qu'à partir de (3) on peut obtenir une inégalité plus stricte donnant une borne supérieure ayant un ordre de grandeur convenable au voisinage de $r = 0$. On pourra en déduire une limitation de la dérivée à l'origine et une borne supérieure de $T(r) = \int_0^r S(r) \frac{dr}{r}$, ce qui était impossible avec l'inégalité (3) non améliorée.

CHAPITRE III.

AUTRES APPLICATIONS AUX FONCTIONS MÉROMORPHES.

27. Nous allons d'abord démontrer le lemme suivant, qui nous sera utile dans la suite [1].

LEMME. — *Si l'aire sphérique décrite par la fonction $w = f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < r_0$ est $4\pi S_0 < 4\pi$, l'aire sphérique $4\pi S$ décrite par w, lorsque z décrit le cercle $|z| \leqq r < r_0$, satisfait à l'inégalité*

$$\frac{1}{r^2}\frac{S}{1-S} \leqq \frac{1}{r_0^2}\frac{S_0}{1-S_0}.$$

Dans le cas limite $r = 0$, cette relation devient

$$\left(\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2}\right)^2 \leqq \frac{1}{r_0^2}\frac{S_0}{1-S_0}.$$

---

[1] La même méthode donne une démonstration, que nous croyons nouvelle, du théorème bien connu :

Si l'aire plane décrite par la fonction $w = f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| < r_0$ est A_0, l'aire plane A décrite par w, lorsque z décrit le cercle $|z| \leqq r < r_0$, satisfait à l'inégalité

$$\frac{A}{r^2} \leqq \frac{A_0}{r_0^2}.$$

Dans le cas limite $r = 0$, cette relation devient

$$\pi\,|f'(0)|^2 \leqq \frac{A_0}{r_0^2}.$$

En effet, $\lambda(r)$ étant la longueur du contour de la surface de Riemann plane, on démontre, exactement comme on l'a fait pour (1), que

$$\lambda^2(r) \leqq 2\pi r\frac{dA}{dr}.$$

D'autre part, pour un feuillet, on a $\lambda_0^2 \geqq 4\pi A_0$; d'où l'on déduit $\lambda^2 \geqq 4\pi A$. Et en utilisant l'inégalité précédente on obtient $2A \leqq r\frac{dA}{dr}$, qu'il suffit d'intégrer entre r et r_0. Le passage à la limite est immédiat.

Ce lemme se déduit de l'inégalité

$$(1) \qquad L^2(r) \leqq 8\pi^2 r \frac{dS}{dr},$$

que nous avons déjà employée. D'autre part, nous avons établi (§ 3) que, pour un feuillet, on a

$$L_\nu^2 \geqq 16\pi^2 S_\nu(1 - S_\nu).$$

Nous en déduisons

$$\sum L_\nu^2 \geqq \sum 16\pi^2 S_\nu(1 - S_\nu) = 16\pi^2 \sum S_\nu - 16\pi^2 \sum S_\nu^2.$$

Puisque $L = \Sigma L_\nu$ et $S = \Sigma S_\nu$, il vient $L^2 \geqq \Sigma L_\nu^2$ et $S^2 \geqq \Sigma S_\nu^2$; donc, pour une surface de Riemann à plusieurs feuillets, on a encore

$$L^2 \geqq 16\pi^2 S(1 - S).$$

Et, en tenant compte de l'inégalité (1),

$$2S(1 - S) \leqq r \frac{dS}{dr},$$

d'où

$$2\int_r^{r_0} \frac{dr}{r} \leqq \int_S^{S_0} \frac{dS}{S(1-S)},$$

ce qui démontre la première partie du lemme. Le cas limite $r = 0$ s'en déduit immédiatement en remarquant que S est infiniment petit avec r et a pour partie principale

$$\frac{1}{4\pi}\left(\frac{2|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2}\right)^2 \pi r^2.$$

L'inégalité du lemme se transforme en égalité lorsqu'il en est ainsi pour toutes les inégalités utilisées dans la démonstration; c'est-à-dire lorsque la surface de Riemann $\Sigma(r)$ est constituée par un seul feuillet en forme de calotte $[L_\nu^2 = 16\pi^2 S_\nu(1 - S_\nu)]$ et que $\frac{|f'|}{1 + |f|^2}$ est constant pour $|z| = \text{const.}$ [égalité (1)]. Cette dernière condition revient à dire que les calottes $\Sigma(r)$ doivent être concentriques. Cela a lieu dans le cas, et seulement dans le cas, où

$$w = \frac{w_0 + \lambda z}{1 - \lambda \overline{w}_0 z},$$

w_0 et λ étant des constantes arbitraires.

28. *Remarque.* — Connaissant $|f(0)|$, r_0 et S_0, le lemme nous donne une borne de $|f'(0)|$. On peut aussi obtenir des bornes pour les dérivées d'ordre supérieur. Pour le montrer, nous allons supposer que $f(0)$ est nul, cas auquel il est toujours possible de se ramener par une transformation homographique de la variable w se traduisant par une rotation sur elle-même de la sphère Σ_0 [1]. Effectuons sur la variable z la substitution

$$t = \frac{r_0^2(z - z_0)}{r_0^2 - z\overline{z}_0}, \qquad (|z_0| < r_0),$$

qui conserve le cercle de rayon r_0 centré à l'origine et transforme la fonction $f(z)$ en une fonction $F(t) \equiv f(z)$ à laquelle nous appliquons le lemme; cela nous donne

$$\left(\frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2}\right)^2 \leqq \frac{1}{r_0^2}\,\frac{S_0}{1 - S_0}.$$

Or, aux points correspondants $z = z_0$ et $t = 0$, on a

$$dt = \frac{r_0^2\,dz}{r_0^2 - |z_0|^2}.$$

Il en résulte que

$$\frac{|f'(z_0)|}{1 + |f(z_0)|^2} \leqq \frac{r_0}{r_0^2 - |z_0|^2}\sqrt{\frac{S_0}{1 - S_0}}.$$

Soit alors θ un nombre quelconque compris entre 0 et $\frac{\pi}{2}$. Les valeurs de $w = f(z)$ correspondant à $|z| \leqq r_0 \operatorname{th}\theta \sqrt{\frac{S_0}{1 - S_0}}$ sont donc situées

(1) On trouvera des précisions sur ce sujet dans un article qui doit paraître prochainement dans le *Bulletin des Sciences mathématiques.*

dans la calotte ayant pour centre l'origine et pour rayon sphérique

$$\int_0^{r_0 \operatorname{th} \theta \sqrt{\frac{S_0}{1-S_0}}} \frac{2 r_0}{r_0^2 - \rho^2} \sqrt{\frac{S_0}{1-S_0}}\, d\rho = 2\theta.$$

Autrement dit, nous avons $|f(z)| < \operatorname{tang} \theta$ et par conséquent

$$\frac{|f^{[p]}(0)|}{p\,!} < \frac{1}{r_0^p} \frac{\operatorname{tang} \theta}{\operatorname{th}^p \theta \sqrt{\frac{1-S_0}{S_0}}}.$$

Nous choisirons, par exemple, $\theta = \frac{\pi}{4}$ si $S_0 \geqq \frac{1}{2}$ et $\theta = \frac{\pi}{4}\sqrt{\frac{S_0}{1-S_0}}$ si $S_0 \leqq \frac{1}{2}$; nous obtiendrons ainsi

$$\frac{|f^{[p]}(0)|}{p\,!} < \frac{1}{\operatorname{th}^p \frac{\pi}{4}} \frac{1}{r_0^p} \left(\sqrt{\frac{S_0}{1-S_0}}\right)^{\lambda}$$

avec

$$\lambda = p \quad \text{si } S_0 \geqq \frac{1}{2} \qquad \text{et} \qquad \lambda = 1 \quad \text{si } S_0 \leqq \frac{1}{2}.$$

Cette remarque permettrait d'introduire dans les théorèmes I et I *bis* (§ 30 et 36), à la place de la dérivée sphérique à l'origine, une expression ne dépendant que de $|f(0)|$ et $|f^{[p]}(0)|$, comme cela se fait habituellement pour le théorème de Landau.

Premier groupe de théorèmes.

29. Dans le chapitre précédent nous avons montré que si $w = f(z)$ est méromorphe dans $|z| < R$ et satisfait à la condition C (§ 25), nous avons $R < \infty$ et

$$\text{(3)} \qquad S(r) \log \frac{R}{r} < \frac{8\pi^2 h'^2}{\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2} = 8\pi^2 h''^2.$$

Cette relation nous permettra de trouver une borne supérieure de R, si nous savons de plus que, pour $r = r_0$, on a $S > S_0$; nous obtenons alors

$$\log\frac{R}{r_0} < \frac{8\pi^2 h'^2}{S_0\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right]^2}.$$

Ou bien encore, si nous savons de plus que, pour $r > r_0$, on a $L > L_0$, car la relation (1) intégrée entre r_0 et r nous conduit alors à l'inégalité

$$S(r) > \frac{L_0^2}{8\pi^2}\log\frac{r}{r_0}$$

qui, jointe à (3), entraîne, après avoir choisi $r = \sqrt{Rr_0}$,

$$\log\frac{R}{r_0} < \frac{16\pi^2 h''}{L_0}.$$

Mais la relation (3) est trop peu précise pour donner directement une limitation de R à partir de $f(0)$ et de $f'(0)$. Nous allons améliorer la relation (3) en utilisant le lemme démontré au début de ce chapitre.

Déterminons r_0 par la relation

$$\log\frac{R}{r_0} = 16\pi^2 h''^2.$$

Nous avons

$$S(r)\log\frac{R}{r} < 8\pi^2 h''^2, \qquad \text{pour} \quad r < R;$$

donc, en particulier, $S(r_0) < \frac{1}{2}$ et, d'après le lemme,

$$S(r) < \frac{r^2}{r^2 + r_0^2}, \qquad \text{pour} \quad r < r_0;$$

relation plus précise que (3) dans son domaine d'application. Sans trop nuire à la précision, nous pouvons rassembler ces deux résultats dans une seule expression très simple. Si $r_0 < r < R$, nous avons, d'après (3),

$$S(r) < \frac{8\pi^2 h''^2}{\frac{R/r-1}{R/r_0-1}\log\frac{R}{r_0}} < \frac{r}{2(R-r)}e^{16\pi^2 h''^2} < \frac{r^2}{R^2-r^2}e^{32\pi^2 h''^2},$$

tandis que, si $r < r_0$,

$$S(r) < \frac{r^2}{r_0^2} = \frac{r^2}{R^2}e^{32\pi^2 h''^2} < \frac{r^2}{R^2-r^2}e^{32\pi^2 h''^2}.$$

Finalement, quel que soit $r < \mathrm{R}$, nous avons

$$\mathrm{S}(r) < \frac{r^2}{\mathrm{R}^2 - r^2} e^{32\pi^2 h''^2}, \tag{3'}$$

relation moins précise que (3) au voisinage de $r = \mathrm{R}$, mais beaucoup plus précise au voisinage de $r = 0$. En passant à la limite pour $r = 0$, cette relation nous donne

$$\mathrm{R} \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{16\pi^2 h''^2}. \tag{4}$$

30. Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME I. — *Si la fonction $w = f(z)$ est méromorphe dans $|z| < \mathrm{R}$ et satisfait à la condition suivante :*

(Condition C) *il existe $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints dont certains peuvent être réduits à des points et à chacun desquels est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$, tels que tous les disques de la surface de Riemann, décrite par $w = f(z)$ et situés sur D_i, aient μ_i feuillets au moins;*

alors on a $\mathrm{R} < \infty$ et

$$\mathrm{R} \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < \exp \frac{16\pi^2 h'^2}{\left[\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2\right]^2},$$

où h' est une constante dépendant seulement des domaines D_i.

Ce théorème contient en particulier les propositions suivantes [1] :

---

[1] Sous sa forme générale, ce théorème est nouveau. Les cas particuliers suivants étaient déjà connus :

(C_1) *cf.* E. LANDAU, *Über eine Verallgemeinerung des Picardschen Satz, Berlin. Sitzgsber*, 1904, p. 1118-1134.

Théorème de Bloch [compris dans (C_4)]. *Cf.* A. BLOCH, *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 178, 1924, p. 2051).

Théorème des trois cercles de Bloch [compris dans (C) : domaines $\mathrm{D}_i =$ trois cercles ($\mu = 2$) et le point à l'infini ($\mu = \infty$)]. *Cf.* A. BLOCH, *Quelques théorèmes sur les fonctions entières et méromorphes d'une variable* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 181, 1925, p. 1123).

(C_3) et (C_4) avec *six* domaines au lieu de *cinq*. *Cf.* L. AHLFORS, *Sur les domaines dans lesquels une fonction méromorphe prend des valeurs appartenant à une région donnée* (*Acta Soc. Scient. fennicœ, Nova series A*, t. II, n° 2, 1933).

(C_1) *Si $w = f(z)$ ne prend pas trois valeurs distinctes, on a*

$$R \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{\frac{36\pi^2}{\delta_0^2}}$$

(c'est le théorème de Landau).

(C_2) *Si $w = f(z)$ présente cinq valeurs complètement ramifiées, on a*

$$R \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{160^2\left(\frac{\pi}{\delta_0}\right)^4}.$$

(C_3) *Si la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur aucun de trois domaines simplement connexes et disjoints, on a*

$$R \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{16\pi^2 h^2}.$$

(C_4) *Si la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque simple sur aucun de cinq domaines simplement connexes et disjoints, on a*

$$R \frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{64\pi^2 h'^2}$$

(généralisation du théorème de Bloch).

31. Nous pouvons tirer encore d'autres conséquences de la relation (4). En effet, la transformation homographique de la variable

$$t = \frac{R^2(z - z_0)}{R^2 - z\bar{z}_0},$$

qui conserve le cercle de rayon R centré à l'origine, transforme la fonction $f(z)$ en une fonction $F(t) \equiv f(z)$ satisfaisant à la même condition C; par conséquent

$$R \frac{|F'(0)|}{1 + |F(0)|^2} < e^{16\pi^2 h''^2}.$$

Or, aux points correspondants $z = z_0$ et $t = 0$, on a

$$dt = \frac{R^2\, dz}{R^2 - |z_0|^2};$$

la dernière relation s'écrit donc encore (en remplaçant la notation z_0

par la notation z)

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < \frac{R\, e^{16\pi^2 h''^2}}{R^2-|z|^2}.$$

Nous obtenons une limitation de la dérivée sphérique de la fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z|<R$ et satisfaisant à la condition C [1]. D'où :

THÉORÈME II. — *Les fonctions méromorphes dans le cercle* $|z|<R$ *et satisfaisant à la condition* C *du théorème* I *forment une famille normale.*

On peut remplacer la condition C par l'une des conditions plus restrictives C_1, C_2, C_3 ou C_4 [2].

Si donc, en particulier, nous avons affaire à des fonctions holomorphes, leur module sera borné dans $|z|\leqq r<R$ par une quantité dépendant de r et de $f(0)$. Nous allons déterminer cette borne explicitement. Nous avons

$$T(r)=\int_0^r S(r)\frac{dr}{r} < e^{32\pi^2 h''^2}\int_0^r \frac{r\,dr}{R^2-r^2} = \frac{e^{32\pi^2 h''^2}}{2}\log\frac{R^2}{R^2-r^2}$$

et nous savons [3] que, pour $|z|=r<\rho<R$,

$$\log|f(z)| < \frac{\rho+r}{\rho-r}\left[T(\rho)+\log\sqrt{1+|f(0)|^2}\right],$$

ce qui entraîne, en choisissant $\rho=\sqrt{rR}$,

$$\log|f(z)| < \frac{2R}{R-r}\left[e^{32\pi^2 h''^2}\log\frac{R}{R-r}+\log\left(1+|f(0)|^2\right)\right].$$

---

(1) Dans un premier exposé de la question (*C. R. Acad. Sc.*, t. **212**, 1941, p. 595), nous avions utilisé une méthode un peu différente qui nous avait conduit tout d'abord à cette limitation d'où nous avions déduit celle de $S(r)$.

(2) Pour les cas particuliers :

(C_1) *cf.* P. MONTEL, *Sur les familles normales des fonctions analytiques* (*Ann. de l'Éc. Norm.*, t. **32**, 1916, p. 223-302).

(Valeurs ramifiées) *cf.* G. VALIRON. *Sur les fonctions méromorphes qui admettent des valeurs quasi exceptionnelles* (*Association française pour l'avancement des Sciences*, 1926, p. 82).

(C_3) et (C_4) avec 6 domaines, *cf.* L. AHLFORS, *Sur les domaines dans lesquels...* (ouvr. cité).

(3) *Cf.* par exemple R. NEVANLINNA, ouvr. cité.

On obtient un résultat meilleur en utilisant les deux bornes supérieures de $S(r)$ (§ 28). Cela conduit à

$$T(r) < \frac{1}{2}\log 2 + 8\pi^2 h''^2 \left[\log 16\pi^2 h''^2 - \log\log\frac{R}{r}\right] \qquad \text{si} \quad r \geqq R\, e^{-16\pi^2 h''^2}$$

et à une autre limitation pour les petites valeurs de r. D'où une borne supérieure pour $\log|f(z)|$ plus précise que la précédente et que l'on peut écrire (¹)

$$\log|f(z)| < \frac{2R}{R-r}\left[16\pi^2 h''^2 \overset{+}{\log}\frac{32\pi^2 h''^2}{\log R/r} + \log 2\left(1 + |f(0)|^2\right)\right].$$

Théorème III. — *Nous aurons une telle limitation pour le module d'une fonction $w = f(z)$ holomorphe dans le cercle $|z| < R$ et satisfaisant à la condition suivante :*

(Condition $\overline{C}$) *il existe $q \geqq 2$ domaines D_i finis, simplement connexes et disjoints dont certains peuvent être réduits à des points et à chacun desquels est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 1$, tels que tous les disques de la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ et situés sur D_i aient μ_i feuillets au moins.*

Ce théorème (²) contient les propositions suivantes dans lesquelles la condition $\overline{C}$ est remplacée par l'une des conditions $\overline{C_1}$, $\overline{C_2}$, $\overline{C_3}$ ou $\overline{C_4}$.

Nous aurons une telle limitation si la fonction holomorphe $w = f(z)$

($\overline{C_1}$) *ne prend pas deux valeurs finies* $\left(h'' = \frac{3}{2\delta_0}\right)$; c'est le théorème de Schottky;

($\overline{C_2}$) *ou bien si elle présente trois valeurs finies complètement ramifiées* $\left(h'' = \frac{32\pi}{\delta_0^2}\right)$;

(¹) d'où, *a fortiori*,

$$\log|f(z)| < \frac{2R}{R-r}\left[2(16\pi^2 h''^2)^2 \log\frac{R}{R-r} + \log 2(1 + |f(0)|^2)\right].$$

(²) Pour le cas particulier $\overline{C_1}$, *cf.* G. Schottky, *Über den Picardschen Satz und die Borelschen Ungleichungen. Berlin. Sitzgsber.*, 1904, p. 1244-1263. Pour $\overline{C_3}$ et $\overline{C_4}$, *cf.* L. Ahlfors. *Sur les domaines dans lesquels* ... (ouv. cité).

$(\overline{C_3})$ *ou bien si la surface de Riemann décrite par* $w = f(z)$ *ne présente aucun disque sur deux domaines finis simplement connexes et disjoints* $(h'' = h)$;

$(\overline{C_4})$ *ou bien si cette surface de Riemann ne présente aucun disque simple sur trois domaines finis simplement connexes et disjoints* $(h'' = 2h')$.

32. A ce même ordre d'idées, on peut rattacher le théorème de Kœbe sur les fonctions univalentes. Soient $f(z)$ une fonction holomorphe univalente, et deux courbes C de la sphère de Riemann, fermées, sans points doubles et sans points communs et telles que $f(0)$ et ∞ ne soient situés dans la même région par rapport à aucune de ces deux courbes C. Nous désignerons par C_1 celle des deux courbes C qui est la plus voisine de $f(0)$ et par δ_0 le minimum des distances de ces courbes entre elles et de ces courbes au point ∞. Alors, *si*

$$R\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} \geqq e^{\frac{36\pi^2}{\delta_0^2}},$$

l'une au moins des deux courbes est complètement couverte, donc (en raison de l'holomorphie et de l'univalence) *la portion de la sphère de Riemann limitée par* C_1 *et comprenant* $f(0)$ *est complètement couverte*. C'est une généralisation du théorème de Kœbe, comparable à celle que nous avons donnée du théorème de Bloch; mais ici, la généralisation est plus apparente que réelle. Retrouvons le théorème de Kœbe sous sa forme classique. Supposons $f(0) = 0$ et prenons, comme courbes C sur la sphère de Riemann, l'équateur et le parallèle de latitude 45°. Il résulte de ce qui précède que $w = f(z)$ couvre $|w| \leqq 1$ lorsque

$$R|f'(0)| \geqq e^{36^2}.$$

Et, après avoir fait $R = 1$, on revient à la forme habituelle [1] du théorème en multipliant la fonction f par e^{-36^2}.

---

[1] *Cf.* P. KŒBE, *Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven* II (*Math. Annal.*, 69, 1910, p. 1-81).

Sur les rapports entre les théorèmes de Landau et Schottky et celui de Kœbe, *cf.* E. LANDAU, *Zum Kœbeschen Verzerrungssatz* (*Rendi Conti del circolo mat. Palermo*, 46, *Si $w = z + a_2 z^2 + \ldots$ est holomorphe et univalente dans le cercle $|z| < 1$, elle représente ce cercle sur un domaine du plan des w, qui comprend le cercle $|w| < k$ à son intérieur* (k = constante de Kœbe).

Cette démonstration donne une mauvaise évaluation de la constante k ($k > e^{-36^2}$). Mais elle montre que le théorème de Kœbe peut être considéré comme une conséquence du théorème de Landau.

33. Une idée voisine de celle qui nous a guidés ici va nous permettre de faire une remarque importante sur la constante h du théorème fondamental. *On ne peut trouver une expression de la constante h qui ne fasse intervenir que δ_0 et les aires des domaines D_i ainsi que leur nombre.* Sinon le théorème fondamental s'appliquerait à des domaines D_i quelconques, disjoints, dans lesquels on aurait fait des coupures assujetties uniquement à les rendre simplement connexes. Considérons alors une fonction entière $w = f(z)$ et deux domaines D_1 et D_2 disjoints situés tout entiers à distance finie. Nous savons qu'il existe une valeur de r pour laquelle

$$S(r) - hL(r) > 0;$$

il en résulterait que la surface de Riemann $\Sigma(r)$, décrite par w pour $|z| \leqq r$, présenterait au moins un disque sur le domaine D_1 ou le domaine D_2 fendus de la manière la plus quelconque qui les rende simplement connexes. Supposons que D_1 et D_2 soient des couronnes; il résulte de l'arbitraire des fentes, que, sur l'une au moins de ces couronnes *non fendues*, il y aurait un « disque » (ici la dénomination « anneau » conviendrait mieux). Celle des deux portions de la sphère

---

1922, p. 347-348). G. Valiron, *Sur un théorème de MM. Kœbe et Landau* (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 51, 1927, p. 34-42); *Sur les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle* (*C. R. Acad. Sc.*, 183, 1926, p. 1256-1258).

Si l'on ne s'oblige pas à rattacher le théorème de Kœbe à celui de Landau on peut procéder beaucoup plus simplement en utilisant *uniquement* l'inégalité (1) et le lemme du § 27. En effet, $S(R) < 1$; donc, si $|w| \leqq 1$ n'est pas complètement couvert, $S(Re^{-4}) < \frac{1}{2}$ d'après l'inégalité (1) en remarquant que $L > \pi$ dès que $S > \frac{1}{2}$. Et, en utilisant le lemme, on obtient $R \dfrac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^4$. Cela donne d'ailleurs une meilleure estimation de la constante de Kœbe ($k > e^{-4} = 0{,}0183\ldots$).

de Riemann extérieures à la couronne, qui ne comprend pas le point ∞, serait donc complètement couverte. Si nous choisissons alors les deux couronnes D_1 et D_2 extérieures à la calotte $|w| \leqq 1$ et séparant cette calotte du point ∞, nous arriverions à la conclusion suivante : toute fonction entière $w = f(z)$ couvre complètement le cercle $|w| \leqq 1$. Ce qui est manifestement absurde.

Deuxième groupe de théorèmes.

34. Dans ce qui précède, nous avons étudié des propriétés des fonctions méromorphes caractérisées par le fait suivant : si l'une de ces propriétés n'est pas satisfaite on a

$$L > \frac{1}{h''} S. \tag{2}$$

Cette étude peut être étendue aux propriétés dont la non-vérification entraîne

$$L > \frac{1}{h''}(S - l), \tag{2 bis}$$

où l, de même que h'', est une constante connue. En utilisant l'inégalité (1), on en déduit, par intégration,

$$[S(r) - l] \log \frac{R}{r} < 8\pi^2 h''^2. \tag{3 bis}$$

Il en résulte, en particulier, que $R = \infty$ entraîne $S(r) < l$; cette relation exprime que $w = f(z)$ est une fraction rationnelle dont le degré ne dépasse pas l. En reprenant les considérations faites au début du Chapitre II, on est conduit au théorème suivant :

Théorème. — *Si $w = f(z)$ est méromorphe dans tout le plan et satisfait à la condition suivante :*

(Condition $C^\star$) *il existe $q \geqq 3$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent être réduits à des points et à chacun desquels est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$, tels que, à l'excep-*

tion de d d'entre eux, tous les disques de la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ et situés sur D_i aient μ_i feuillets au moins;

alors $w = f(z)$ est une fraction rationnelle dont le degré ne dépasse pas

$$\frac{d}{\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) - 2}.$$

Dans ce théorème, d désigne le nombre total des disques exceptionnels, chacun de ceux-ci étant compté une seule fois quelle que soit sa multiplicité.

La condition $C^\star$ peut être remplacée par l'une des quatre conditions suivantes plus restrictives :

(Condition $C_1^\star$) *$w = f(z)$ ne prend trois valeurs distinctes que d fois en tout* ($\mu_i = \infty$);

(Condition $C_2^\star$) *elle présente cinq valeurs ramifiées complètement sauf d fois en tout* ($\mu_i = 2$);

(Condition $C_3^\star$) *la surface de Riemann présente au total d disques sur trois domaines simplement connexes et disjoints* ($\mu_i = \infty$);

(Condition $C_4^\star$) *elle présente au total d disques simples sur cinq domaines simplement connexes et disjoints* ($\mu_i = 2$).

35. Pour obtenir des théorèmes en termes finis ayant la forme de ceux de Landau et de Schottky, il est donc bien clair que nous devrons faire des hypothèses supplémentaires afin d'écarter polynomes et fractions rationnelles.

Supposons d'abord que les fonctions $w = f(z)$ ne prennent pas deux valeurs distinctes (fonctions à deux valeurs exceptionnelles). Nous allons montrer que, pour $S(r) > \frac{1}{2}$, $L(r)$ demeure borné inférieurement; nous pourrons alors faire le passage en termes finis comme précédemment, mais avec une étape supplémentaire : faire franchir à $S(r)$ l'intervalle $\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + l$. Soient a_1 et a_2 les deux points exceptionnels de distance sphérique δ. Décomposons la surface Σ en feuillets Σ_ν d'aire $4\pi S_\nu$ et de contour de longueur L_ν. Ou bien tous les feuillets ont une aire inférieure à 2π et alors $L_\nu > 4\pi S_\nu$; d'où

$L > 4\pi S > 2\pi > 2\delta$. Ou bien il existe un feuillet Σ_ν ayant une aire supérieure à 2π; ce feuillet pouvant être multiplement connexe, deux cas sont à distinguer :

α. Les points a_1 et a_2 ne sont pas séparés par le feuillet; alors $L_\nu > 2\delta$ et *a fortiori* $L > 2\delta$;

β. Les points a_1 et a_2 sont séparés par le feuillet; chacun de ces points est alors entouré par une courbe fermée faisant partie du contour du feuillet. Mais, dans le contour total de Σ, il existe deux arcs qui joignent ces deux courbes fermées. Si donc nous fendons Σ_ν le long du plus court chemin joignant les deux courbes fermées, nous obtenons une surface Σ'_ν satisfaisant aux conditions α et dont le contour L'_ν est inférieur à L. Par conséquent $L'_\nu > 2\delta$ et *a fortiori* $L > 2\delta$. En résumé :

Si $w = f(z)$ ne prend pas deux valeurs distinctes de distance sphérique δ, on a $L(r) > 2\delta$ dès que $S(r) > \frac{1}{2}$.

On peut arriver à un résultat analogue en faisant une hypothèse moins restrictive. Supposons qu'il existe deux domaines D_1 et D_2 disjoints sur lesquels la surface Σ ne présente aucun disque. Remarquons d'abord que l'on peut agrandir les domaines D_1 et D_2 de façon à donner dans tous les cas un sens au calcul suivant (même si l'un des domaines initiaux était réduit à un point), ou, tout au moins, à améliorer la borne obtenue. Soient $4\pi S_0$ la plus petite des aires des deux domaines et δ leur distance. Nous distinguerons deux cas :

α. Aucun point de la surface Σ ne se trouve sur l'un de ces domaines; d'après le théorème du recouvrement, nous avons alors

$$S < \frac{L}{4\pi S_0}, \qquad \text{donc} \qquad L > 2\pi S_0;$$

β. Il y a des points de la surface Σ sur chacun des deux domaines; dans ce cas, nous avons $L > 2\delta$. En résumé :

Si la surface Σ décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur deux domaines D_1 et D_2 disjoints, on a $L(r) > L_0$ dès que $S(r) > \frac{1}{2}$, *en désignant par* L_0 *une constante positive ne dépendant que des domaines* D_1 *et* D_2 *et que nous savons évaluer.*

36. Nous allons étudier les fonctions $w = f(z)$ méromorphes dans $|z| < R$ et satisfaisant à la condition suivante :

(Condition C′) il existe trois domaines D_i simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent être réduits à des points, tels que la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur deux de ces domaines et que tous les disques qu'elle présente sur le troisième, à l'exception de d d'entre eux, aient $\mu \geqq 2$ feuillets au moins.

Nous avons déjà vu que cette condition entraîne $\left(l = \dfrac{d}{1 - 1/\mu}\right)$

$$L > \frac{1}{h''}(S - l); \tag{2 bis}$$

d'où

$$[S(r) - l] \log \frac{R}{r} < 8\pi^2 h''^2. \tag{3 bis}$$

De plus $L(r) > L_0$ dès que $S(r) > \frac{1}{2}$. Nous allons améliorer la relation (3 *bis*). Déterminons r_0 par

$$\log \frac{R}{r_0} = 16\pi^2 h''^2.$$

Il résulte de (3 *bis*) que $S(r_0) \leqq l + \frac{1}{2}$. Déterminons r_1 par

$$\log \frac{r_0}{r_1} = \frac{8\pi^2 l}{L_0^2}.$$

Pour r compris entre r_1 et r_0, nous avons

$$S(r) \leqq \frac{1}{2} + \frac{L_0^2}{8\pi^2} \log \frac{r}{r_1}.$$

En effet, supposons qu'il n'en soit pas ainsi; alors pour $\rho \geqq r$ nous aurions $L(\rho) > L_0$ et, d'après l'inégalité (1),

$$L_0^2 < 8\pi^2 \rho \frac{dS(\rho)}{d\rho};$$

intégrons entre r et r_0, il viendrait

$$\log\frac{r_0}{r} < \frac{8\pi^2}{L_0^2}[S(r_0) - S(r)] < \frac{8\pi^2}{L_0^2}\left(l - \frac{L_0^2}{8\pi^2}\log\frac{r}{r_1}\right),$$

ce qui est en contradiction avec la définition de r_1. En particulier, pour $r = r_1$, nous avons $S(r_1) \leqq \frac{1}{2}$.

Par conséquent, pour $r \leqq r_1$, $S(r)$ satisfait à

$$S(r) \leqq \frac{r^2}{r^2 + r_1^2}.$$

Nous obtenons ainsi, pour $r \leqq r_1$ et pour $r_1 \leqq r \leqq r_0$, des bornes supérieures de $S(r)$ meilleures que (3 *bis*). Nous ne conserverons cette dernière que pour $r_0 \leqq r < R$. Sans trop nuire à la précision, nous pouvons rassembler ces limitations dans une seule expression très simple.

Si $r \leqq r_1$, nous avons

$$S(r) < \frac{r^2}{r_1^2} = \frac{r^2}{R^2} e^{32\pi^2 h''^2 + 16\pi^2 \frac{l}{L_0^2}} < \frac{r^2}{R^2 - r^2} e^{32\pi^2 h''^2 + 16\pi^2 \frac{l}{L_0^2}}.$$

Si $r_1 \leqq r \leqq r_0$, en remarquant que $L_0^2 < 8\pi^2$,

$$S(r) < \frac{1}{2} + \log\frac{r}{r_1} < \frac{1}{2}\left(\frac{r}{r_1}\right)^2,$$

d'où la même borne que dans le premier cas.

Enfin, si $r \geqq r_0$,

$$S(r) < (2l + 1)\frac{8\pi^2 h''^2}{\log\frac{R}{r}} < \frac{8\pi^2 h''^2}{\log\frac{R}{r}} e^{2l\frac{8\pi^2}{L_0^2}};$$

et l'on arrive encore à la même borne, en traitant cette quantité comme on l'a déjà fait (§ 29).

Finalement, quel que soit $r < R$, nous avons

$$S(r) < \frac{r^2}{R^2 - r^2} e^{32\pi^2 h''^2 + 16\pi^2 \frac{l}{L_0^2}}, \tag{3' bis}$$

relation moins précise que (3 *bis*) au voisinage de $r = R$, mais beaucoup plus précise au voisinage de $r = 0$. En passant à la limite, pour $r = 0$, cette relation nous donne

$$(4\ bis) \qquad \mathrm{R}\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < e^{16\pi^2 h''^2 + 8\pi^2 \frac{l}{\mathrm{L}_0^2}}.$$

Nous obtenons ainsi le théorème suivant :

THÉORÈME I *bis*. — *Si la fonction* $w = f(z)$ *est méromorphe dans* $|z| < \mathrm{R}$ *et satisfait à la condition suivante :*

(Condition C′) *il existe trois domaines* D_i *simplement connexes et disjoints, dont certains peuvent être réduits à des points, tels que la surface de Riemann décrite par* $w = f(z)$ *ne présente aucun disque sur deux de ces domaines et que tous les disques qu'elle présente sur le troisième, à l'exception de d d'entre eux, aient* $\mu \geqq 2$ *feuillets au moins;*

alors on a $\mathrm{R} < \infty$ *et*

$$\mathrm{R}\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < \exp\left[\frac{16\pi^2 h'^2}{\left(1-\frac{1}{\mu}\right)^2} + \frac{8\pi^2 d}{\mathrm{L}_0^2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)}\right].$$

Ce théorème contient en particulier les propositions suivantes [1] :

(C'_1) *Si* $w = f(z)$ *ne prend pas deux valeurs distinctes et prend d fois au plus une troisième valeur, on a*

$$\mathrm{R}\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < e^{\frac{36\pi^2 + 2\pi^2 d}{\delta_0^2}}.$$

(C'est une extention du théorème de Landau.)

(C'_2) *Si* $w = f(z)$ *ne prend pas deux valeurs distinctes et présente une troisième valeur ramifiée complètement sauf d fois au plus, on a*

$$\mathrm{R}\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < e^{96^2\left(\frac{\pi}{\delta_0}\right)^4 + 4d\left(\frac{\pi}{\delta_0}\right)^2}.$$

(C'_3) *Si la surface de Riemann décrite par* $w = f(z)$ *ne présente aucun*

---

[1] Pour le cas particulier (C'_1), *cf.* E. LANDAU, *Über den Pichen Satardscz. Viertelj. naturf. Ges. Zürich*, 1906, p. 252-318.

disque sur deux de trois domaines simplement connexes et disjoints, et en présente d au plus sur le troisième, on a

$$R\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < e^{16\pi^2 h^2 + 8\pi^2 \frac{d}{L_0^2}},$$

h et L_0 étant deux constantes, dépendant de la position relative des trois domaines, que nous savons évaluer.

(C'_4) *Si cette surface de Riemann ne présente aucun disque sur deux de trois domaines simplement connexes et disjoints, et présente au plus d disques* SIMPLES *sur le troisième, on a*

$$R\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < e^{64\pi^2 h'^2 + 16\pi^2 \frac{d}{L_0^2}}.$$

37. Comme nous l'avons fait à partir de (4), nous pouvons tirer de (4 *bis*) l'inégalité

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < \frac{R\,e^{16\pi^2 h''^2 + 8\pi^2 \frac{l}{L_0^2}}}{R^2 - |z|^2}.$$

Nous obtenons ainsi une limitation de la dérivée sphérique de la fonction $f(z)$ méromorphe dans $|z| < R$ et y satisfaisant à la condition C′. D'où :

THÉORÈME II *bis*. — *Les fonctions méromorphes dans le cercle $|z| < R$ et satisfaisant à la condition* C′ *du théorème* I *bis forment une famille normale.*

On peut remplacer la condition C′ par l'une des conditions C'_1, C'_2, C'_3 ou C'_4 (¹).

Si donc, en particulier, nous avons affaire à des fonctions holomorphes, leur module sera borné dans $|z| < r < R$ par une quantité

(¹) Pour le cas particulier (C'_1), *cf.* P. MONTEL. *Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes* (*Mém. de l'Acad. Roy. de Belgique*, classe des Sciences, 2ᵉ série, 6, 1922 p. 1-41), et A. BLOCH, *Sur les fonctions prenant plusieurs fois dans le cercle unité les valeurs* 0 *et* 1 (*C. R. Acad. Sc.*, 179, 1924, p. 954).

dépendant de r et de $f(0)$. On détermine cette borne comme il a déjà été fait (§ 31)[1]

$$\log|f(z)| < \frac{2R}{R-r}\left[e^{32\pi^2 h''^2 + 16\pi^2 \frac{l}{L_0^2}} \log\frac{R}{R-r} + \log(1+|f(0)|^2)\right].$$

THÉORÈME III *bis*. — *Nous aurons une telle limitation pour le module d'une fonction $w = f(z)$ holomorphe dans le cercle de rayon* R *et satisfaisant à la condition suivante :*

(Condition $\overline{C}'$) *il existe deux domaines* D_i FINIS, *simplement connexes et disjoints dont certains peuvent être réduits à des points tels que la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur l'un de ces domaines et que tous les disques qu'elle présente sur l'autre, à l'exception de d d'entre eux, aient $\mu \geqq 2$ feuillets au moins.*

Ce théorème contient en particulier les propositions suivantes [2] :

Nous aurons une telle limitation si la fonction holomorphe $w = f(z)$

($\overline{C}'_1$) *ne prend pas une valeur finie, et en prend une autre d fois au plus*

$$\left(h'' = \frac{3}{2\delta_0};\ L_0 = 2\delta_0;\ l = d\right);$$

c'est une extension du théorème de Schottky;

($\overline{C}'_2$) *ou bien si elle ne prend pas une valeur finie et présente une autre valeur finie ramifiée complètement, sauf d fois au plus*

$$\left(h'' = 24\frac{\pi}{\delta_0^2};\ L_0 = 2\delta_0;\ l = 2d\right);$$

($\overline{C}'_3$) *ou bien si la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur l'un de deux domaines finis, simplement connexes et disjoints et en présente d au plus sur le second* ($h'' = h$; $l = d$);

($\overline{C}'_4$) *ou bien si cette surface de Riemann ne présente aucun disque sur l'un de deux domaines finis, simplement connexes et disjoints et présente au plus d disques* SIMPLES *sur le second* ($h'' = 2h'$; $l = 2d$).

---

(1) On pourrait améliorer ce résultat de la même façon que dans le paragraphe 31.

(2) *Voir* la bibliographie donnée pour le théorème II *bis*.

38. A cet ordre d'idées on peut rattacher aussi un théorème de G. Valiron [1] sur les fonctions holomorphes dans $|z| < R$, ne s'y annulant pas et dont la dérivée a un module moindre que M aux points où la fonction prend la valeur 1.

Englobons le point 1 dans un domaine D qui est une calotte ayant pour centre le point 1 et pour rayon (sphérique) $\frac{\pi}{3}$. Soient n' le nombre de disques simples et n'' le nombre de disques multiples situés sur D. D'après le théorème fondamental, nous avons

$$n' + n'' > S - hL, \qquad \text{avec} \quad h = \frac{1}{3\pi} + \frac{3}{2}\,\text{Max}\left[\frac{6}{\pi}, \frac{2}{\pi}, \frac{4}{3\pi}\right] = \frac{28}{3\pi},$$

et, d'après le théorème du recouvrement,

$$n' + 2n'' < S(D) < S + h_1 L, \qquad \text{avec} \quad h_1 = \frac{1}{\pi}.$$

En éliminant n'' entre ces deux inégalités, nous obtenons

$$n' > S - (2h + h_1)L.$$

Sur chacun des disques simples, la fonction inverse de $w = f(z)$ est holomorphe et nous avons au point 1, centre de la calotte,

$$\frac{|w'|}{1 + |w|^2} < \frac{M}{2}.$$

A chaque disque simple il correspond donc, dans le plan des z, un domaine dont l'aire [2] est supérieure à $\left(\frac{2}{M}\right)^2 \pi \operatorname{tang}^2 \frac{\pi}{6} = \frac{4\pi}{3M^2}$. La somme de ces aires devant être inférieure à πr^2, nous avons

$$r^2 > \frac{4}{3M^2}\left[S(r) - \frac{59}{3} L(r)\right].$$

Recherchons d'abord les fonctions entières ($R = \infty$) satisfaisant

---

(1) *Cf.* G. VALIRON, *Sur les valeurs exceptionnelles des fonctions méromorphes et de leurs dérivées* (*Actualités Scient. et Indust.*, fasc. 570, 1937), et G. VALIRON, *Sur un critère de famille normale* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 205, 1937, p. 890).

(2) Nous appliquons le théorème sur l'aire plane couverte, démontré paragraphe 27, note (1), après avoir effectué une rotation de la sphère des w qui amène $w = 1$ en $w = 0$.

aux conditions; elles doivent ne pas s'annuler et être d'ordre 2 au plus d'après l'inégalité précédente, donc être de la forme

$$f(z) = e^{az^2+bz+c}.$$

Il faut que les constantes a, b et c soient telles que

$$az^2 + bz + c = 2k\pi i \qquad (k = \text{entier arbitraire})$$

entraîne

$$2az + b < \mathrm{M}.$$

Or, si f ne se réduit pas à une constante, l'équation précédente a des racines de module arbitrairement grand. Il faut donc et il suffit que $a = 0$ et $b < \mathrm{M}$. En résumé, les seules fonctions entières répondant à la question sont de la forme

$$w = \lambda e^{\mu z},$$

où λ et μ sont des constantes, la dernière satisfaisant à $|\mu| < \mathrm{M}$.

Plaçons-nous maintenant dans le cas $\mathrm{R} < \infty$. Nous avons alors

$$\mathrm{L}(r) > \frac{3}{59}\left[\mathrm{S}(r) - \frac{3}{4}\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2\right],$$

c'est-à-dire une inégalité de la forme ($2\,bis$). On en déduit donc la relation

$$(3'\,bis) \qquad \mathrm{S}(r) < \frac{r^2}{\mathrm{R}^2 - r^2} e^{32\pi^2\left(\frac{59}{3}\right)^2 + 3\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2},$$

qui donne en particulier

$$(4\,bis) \qquad \mathrm{R}\frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < e^{16\pi^2\left(\frac{59}{3}\right)^2 + \frac{3}{2}\mathrm{M}^2\mathrm{R}^2}.$$

Cette relation nous limite la dérivée sphérique à l'origine en fonction de M et de R [1], mais ne nous permet pas inversement d'avoir une

---

[1] Il est clair que, dans cette relation, on peut remplacer R par une quantité qui lui est inférieure. Cette remarque permet d'améliorer ($4\,bis$) lorsque $\mathrm{R} > \frac{1}{\mathrm{M}\sqrt{3}}$; dans ce cas, on y remplacera R par $\frac{1}{\mathrm{M}\sqrt{3}}$. Cela montre, en particulier, que la relation ($4\,bis$) ne s'évanouit pas lorsque $\mathrm{R} \to \infty$.

borne supérieure de R en fonction de la dérivée sphérique à l'origine, comme cela avait lieu dans le théorème de Landau (ceci devait nécessairement se présenter, puisque nous avons vu qu'il y avait des fonctions entières satisfaisant aux conditions du problème). De (4 *bis*) on déduit encore

$$\frac{|f'(z)|}{1+|f(z)|^2} < \frac{R\, e^{16\pi^2\left(\frac{59}{3}\right)^2+\frac{3}{2}M^2R^2}}{R^2-|z|^2}.$$

Par conséquent, *les fonctions holomorphes dans* $|z| < R$ *ne s'y annulant pas, et dont la dérivée a un module moindre que* M *aux points où la fonction prend la valeur* 1, *forment une famille normale.*

Et nous obtiendrons une limitation du module à partir de (3′ *bis*) en employant toujours la même méthode. On a [1]

$$\log|f(z)| < \frac{2R}{R-r}\left[e^{32\pi^2\left(\frac{59}{3}\right)^2+3M^2R^2}\log\frac{R}{R-r}+\log[1+|f(0)|^2]\right].$$

Ces résultats, à l'exception du dernier, subsistent dans l'hypothèse moins restrictive d'une *fonction méromorphe dans* $|z| < R$ *dont la surface de Riemann ne présente aucun disque sur deux domaines disjoints et dont la dérivée sphérique a un module moindre que* M *aux points où la fonction prend une valeur fixée extérieure aux deux domaines précédents.*

Le dernier résultat, lui-même, subsiste dans le cas d'une fonction holomorphe dans $|z| < R$, dont la surface de Riemann ne présente aucun disque sur un domaine fini et dont la dérivée a un module moindre que M aux points où la fonction prend une valeur finie fixée extérieure à ce domaine.

---

[1] Même remarque que dans la note précédente (à condition de satisfaire à $r < R$).

CHAPITRE IV

EXTENSIONS AUX FONCTIONS ALGÉBROÏDES.

39. Soit $w = f(z)$ une fonction algébroïde à ν branches définie dans le cercle $|z| < \mathrm{R}$. Lorsque z décrit le cercle $|z| \leqq r < \mathrm{R}$, les points w décrivent un certain nombre (au plus égal à ν) de surfaces connexes Σ_k auxquelles on peut appliquer le théorème fondamental. Après sommation, il vient

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) > (q-2)(\mathrm{S} - h\mathrm{L}) - \sum (\rho_k + 1),$$

où $4\pi\mathrm{S}$ et L sont respectivement l'aire totale et la longueur totale des contours des surfaces Σ_k.

Considérons la surface à ν feuillets située sur le cercle $|z| \leqq r$ et qui uniformise l'algébroïde. Cette surface est constituée par un certain nombre de surfaces connexes Σ'_k. Il y a correspondance biunivoque entre celles-ci et les surfaces Σ_k; la caractéristique de deux surfaces correspondantes est la même. D'autre part, nous avons

$$\rho_k = -\nu_k + v_{z,k},$$

en désignant par ν_k le nombre de feuillets de Σ'_k et par $v_{z,k}$ son ordre total de ramification. D'où

$$\rho_k + 1 \leqq v_{z,k}$$

et

$$\sum (\rho_k + 1) \leqq v_z = \sum v_{z,k}.$$

Finalement, *nous avons*

$$\sum_{i=1}^{q} p(\mathrm{D}_i) > (q-2)(\mathrm{S} - h\mathrm{L}) - v_z,$$

où v_z est l'ordre total de ramification de la surface (non toujours connexe) à ν feuillets qui uniformise l'algébroïde.

40. Dans le cas des algébroïdes, l'inégalité (1) est remplacée par

$$(1') \qquad L^2(r) < 8\pi^2 \nu\, r \frac{dS}{dr},$$

que l'on établit par la même méthode. En effet, nous avons d'une part

$$L^2(r) = \left[2 \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{|f'_i(z)|}{1+|f_i(z)|^2} r\, d\theta \right]^2,$$

et d'autre part

$$S(r) = \frac{1}{\pi} \iint \sum_{i=1}^{\nu} \frac{|f'_i(z)|^2}{[1+|f_i(z)|^2]^2} r\, dr\, d\theta,$$

donc

$$\frac{dS}{dr} = \frac{r}{\pi} \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} \frac{|f'_i(z)|^2}{[1+|f_i(z)|^2)^2} d\theta.$$

D'où, par application de l'inégalité de Schwarz,

$$L^2(r) \leqq 8\pi\; r^2 \int_0^{2\pi} \left[\sum_{i=1}^{\nu} \frac{|f'_i(z)|}{1+|f_i(z)|^2} \right]^2 d\theta$$

$$\leqq 8\pi\nu r^2 \int_0^{2\pi} \sum_{i=1}^{\nu} \left[\frac{|f'_i(z)|}{1+|f_i(z)|^2} \right]^2 d\theta = 8\pi^2 \nu\, r \frac{dS}{dr}.$$

Nous utiliserons (1′) comme nous avons utilisé (1). En particulier on en déduit aisément le lemme suivant (*cf.* § 27) :

Si l'aire sphérique décrite pas la fonction $w = f(z)$ *algébroïde à* ν *branches dans le cercle* $|z| < r_0$ *est* $4\pi S_0 < 4\pi$, *l'aire sphérique* $4\pi S$ *décrite par* w, *lorsque* z *décrit le cercle* $|z| \leqq r < r_0$, *sastifait à l'inégalité*

$$\frac{1}{r^{2/\nu}} \frac{S}{1-S} \leqq \frac{1}{r_0^{2/\nu}} \frac{S_0}{1-S_0}.$$

41. D'autre part, nous allons obtenir une borne supérieure de la quantité v_z en introduisant le discriminant Δ de l'équation entière définissant l'algébroïde. Nous supposerons que les coefficients de cette

équation de degré ν sont holomorphes dans le cercle $|z| < R$ et ne s'y annulent jamais tous simultanément; nous désignerons par $A(z)$ le coefficient de w^ν. Soit $z = z_0$ un point de ramification autour duquel se permutent μ branches de l'algébroïde formant un cycle et prenant la valeur $w = w_0$ pour $z = z_0$. Pour ces branches, on a un développement en série de puissances fractionnaires

$$w = w_0 + (z - z_0)^{\frac{p}{\mu}} \mathfrak{P}\left[(z - z_0)^{\frac{1}{\mu}}\right].$$

Il leur correspond dans le discriminant, mis sous la forme

$$\Delta = A^{2\nu-2} \prod_{i,j} (f_i - f_j)^2,$$

des facteurs, en nombre égal à $\frac{\mu(\mu - 1)}{2}$, s'annulant chacun comme $(z - z_0)^{\frac{2p}{\mu}}$. Au point de ramification considéré, il correspond donc, pour le discriminant, un zéro d'ordre au moins égal à $p(\mu - 1) \geqq \mu - 1$. Le raisonnement précédent s'applique encore si, pour $z = z_0$, il y a plusieurs cycles. Le résultat est encore valable si pour $z = z_0$ une ou plusieurs branches de l'algébroïde sont infinies; on s'en assure sans peine en utilisant les développements en série de ces branches, ainsi que du coefficient A.

Finalement, nous obtenons

$$v_z \leqq n(r, \Delta);$$

d'où l'inégalité

$$\sum_{i=1}^{q} p(D_i) > (q - 2)(S - hL) - n(r, \Delta). \tag{5}$$

Celle-ci s'applique, en particulier, lorsques tous les domaines D_i sont réduits à des points; elle devient alors

$$\sum_{i=1}^{q} \bar{n}(a_i) > (q - 2)(S - hL) - n(r, \Delta).$$

C'est la *forme différentielle* de la relation connue [1]

$$\sum_{i=1}^{q} \overline{N}(r, a_i) > (q-2)T(r) - N(r, \Delta) - \text{terme complémentaire},$$

d'où l'on déduit le deuxième théorème fondamental relatif aux algébroïdes en remarquant que [2]

$$N(r, \Delta) < (2\nu - 2)T(r) + O(1).$$

42. Établissons cette dernière inégalité pour avoir une estimation de la constante $O(1)$. Nous supposerons qu'à l'origine $z = 0$ les ν déterminations de l'algébroïde sont distinctes. Nous avons

$$\begin{aligned} N(r, \Delta) &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log|\Delta(re^{i\theta})|\,d\theta - \log|\Delta(0)| \\ &= \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \log\pi|f_i - f_j|^2\,d\theta + (2\nu-2)\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|A(re^{i\theta})|\,d\theta \\ &\quad - \log\prod|f_i(0) - f_j(0)|^2 - (2\nu-2)\log|A(0)|. \end{aligned}$$

En remarquant que la distance sphérique cordale de f_i et f_j satisfait à

$$\delta_{ij} = \frac{2|f_i - f_j|}{\sqrt{1+|f_i|^2}\sqrt{1+|f_j|^2}} \leqq 2,$$

---

[1] Cette relation peut être obtenue très simplement en utilisant la méthode des densités d'Ahlfors. *Cf.* L. Ahlfors, *Ueber eine Methode in der Theorie der meromorphen Funktionen* (*Soc. Scient. Fennicæ, comment. phys.-math.*, 8, n° 10, 1935).

[2] On peut avoir avantage à conserver $V(r) = \int_0^r v_z(r)\frac{dr}{r}$ au lieu d'introduire $N(r, \Delta)$. *Cf.* E. Ullrich, *Ueber den Einfluss der Verzweigtheit einer Algebroide auf ihre Wertverteilung* (*J. für Math.*, t. 167, 1932, p. 198-220). Par exemple, s'il s'agit de l'algébroïde $\sqrt[\nu]{f(z)}$, où $f(z)$ est holomorphe, on a

$$\begin{aligned} V(r) = (\nu-1)N(r, 0) &= (\nu-1)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\log|f(z)|\,d\theta - \log|f(0)|\right] \\ &< (\nu-1)\left[T(r) - \log\frac{|f(0)|}{\left(1+|f(0)|^{2/\nu}\right)^{\nu/2}}\right]. \end{aligned}$$

il vient

$$N(r, \Delta) < (2\nu - 2)\left[\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \sum \log\sqrt{1+|f_i(z)|^2}\,d\theta - \sum \log\sqrt{1+|f_i(0)|^2}\right] + (2\nu-2)N(r, A) - \log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2,$$

soit

$$(6) \qquad N(r, \Delta) < (2\nu - 2)T(r) - \log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2.$$

Dans le cours du calcul précédent nous avons supposé $A(0) \neq 0$; s'il n'en est pas ainsi, la relation (6) demeure valable, puisqu'elle est invariante dans une rotation de la sphère de Riemann des w. D'autre part, en reprenant le calcul, on voit que, si plusieurs branches sont confondues pour $z = 0$, on a une relation analogue dans laquelle $\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2$ est remplacé par une autre constante.

43. Intégrons l'inégalité (5). Compte tenu de (6), il vient

$$(7) \qquad \sum_{i=1}^{q} P(D_i) > (q - 2\nu)T(r) - (q-2)h\int_0^r L(r)\frac{dr}{r} + \log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2.$$

D'autre part, on déduit de (1′), par l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\int_{r_0}^{r} L(r)\frac{dr}{r}\right)^2 < 8\pi^2\nu[S(r) - S(r_0)]\log\frac{r}{r_0};$$

donc

$$(8) \qquad \sum_{i=1}^{q} P(D_i) > (q - 2\nu)T(r) - O\left[\sqrt{S(r)\log r}\right].$$

Cette relation est valable sans restriction. Elle est tout à fait analogue à la relation correspondante que nous avons obtenue pour les fonctions méromorphes (§ 24). Nous en déduisons donc, de même que nous l'avons fait pour ces fonctions, le théorème du défaut sous la forme intégrale.

Pour une algébroïde à ν *branches, si* $R = \infty$, *ou bien si* $R < \infty$

avec $\overline{\lim\limits_{r \to R}} T(r)(R - r) = \infty$, *on a*

$$\Sigma \Theta_1(D_i) \leqq 2\nu;$$

donc, a fortiori,

$$\Sigma \Theta(D_i) \leqq 2\nu \qquad \text{et} \qquad \Sigma \theta(D_i) + \Sigma \delta(D_i) \leqq 2\nu,$$

d'où

$$\Sigma \delta(D_i) \leqq 2\nu.$$

Ces relations sont encore satisfaites lorsque certains domaines D_i *se réduisent à des points.*

Ce théorème est une extension aux domaines du théorème du défaut de G. Valiron [1].

En particulier, ***dans les conditions du théorème précédent, la surface de Riemann*** Σ ***décrite par*** $w = f(z)$ ***présente au moins un disque sur l'un de*** $2\nu + 1$ ***domaines*** D_i ***simplement connexes et disjoints.***

Elle en présente une infinité si la fonction $w = f(z)$ ***n'est pas algébrique.***

Plus particulièrement encore, ***il existe au plus*** 2ν ***valeurs non prises*** [2]. ***Dans le cas d'une fonction véritablement transcendante, il existe au plus*** 2ν ***valeurs non prises une infinité de fois.***

Exactement comme pour les fonctions méromorphes, nous avons

$$\overline{N}(D_i) \leqq \frac{1}{\mu_i} N(D_i), \qquad \text{donc} \quad \Theta(D_i) \geqq 1 - \frac{1}{\mu_i},$$

si tous les disques situés sur le domaine D_i ont μ_i feuillet au moins.

---

(1) G. Valiron, *Sur les fonctions algébroïdes méromorphes du second degré. Sur les algébroïdes méromorphes. Sur quelques propriétés des algébroïdes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 189, 1929, p. 623-625, 729-731, 824-826). *Sur la dérivée des fonctions algébroïdes* (*Bull. Soc. math. de France*, t. 59, 1931, p. 17-39). H.-L. Selberg, *Ueber die Wertverteilung der algebroiden Funktionen* (*Math. Zeitschr.*, t. 31, 1930, p. 709-728).

Dans ce théorème on peut remplacer 2ν par $2 + \overline{\lim\limits_{r \to R}} \frac{V(r)}{T(r)}$, qui peut être beaucoup meilleur; par exemple, pour l'algébroïde $\sqrt[\nu]{f(z)}$ où $f(z)$ est holomorphe, cette quantité est égale à $\nu + 1$. On améliorerait de même les théorèmes suivants.

(2) Remoundos, *Sur les zéros d'une classe de fonctions transcendantes* (*Ann. de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 2e série, t. 8, 1906, p. 1-72).

Cette dernière inégalité est encore satisfaite, à condition d'écarter les fonctions algébriques [pour lesquelles $R = \infty$ et $T(r) = O(\log r)$], si tous les disques situés sur le domaine D_i, sauf peut-être un nombre fini d'entre eux, ont μ_i feuillets au moins.

D'où la conséquence suivante du théorème du défaut.

Pour une algébroïde à ν branches, avec $R = \infty$, ou bien $R < \infty$ et $\overline{\lim\limits_{r \to R}}\, T(r)(R - r) = \infty$, si tous les disques de la surface Σ situés sur D_i ont μ_i feuillets au moins, on a

$$\sum_{i=1}^{q} \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) \leqq 2\nu.$$

Cette inégalité est encore vérifiée s'il y a un nombre fini de disques exceptionnels, à condition d'écarter les fonctions algébriques.

En particulier, *la surface Σ présente au moins un disque simple sur l'un de $4\nu + 1$ domaines D_i simplement connexes et disjoints; elle en présente même une infinité si $w = f(z)$ n'est pas algébrique.*

Plus particulièrement encore, *il existe au plus 4ν valeurs complètement ramifiées. Dans le cas d'une fonction véritablement transcendante il existe au plus 4ν valeurs ramifiées complètement sauf un nombre fini de fois.*

Théorèmes en termes finis.

44. Considérons une algébroïde à ν branches définie dans $|z| < R$ et ne présentant aucun disque sur $2\nu + 1$ domaines D_i simplement connexes et disjoints. Appliquons-lui la relation (5) que nous intégrons entre r_0 et $r (r_0 < r)$; il vient

$$N(r, \Delta) > \int_{r_0}^{r} n(r, \Delta) \frac{dr}{r} > (2\nu - 1)\left(T(r) - T(r_0) - h \int_{r_0}^{r} L(r) \frac{dr}{r}\right),$$

et, compte tenu de (6),

$$\int_{r_0}^{r} L(r) \frac{dr}{r} > \frac{1}{h(2\nu - 1)} [T(r) - l], \tag{9}$$

avec

$$l = (2\nu - 1)\,T(r_0) - \log \prod \left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2.$$

D'autre part, la relation (1′) nous donne

$$\int_{r_0}^{r} L^2(r)\frac{dr}{r} < 8\pi^2\nu\, S(r);$$

d'où, en utilisant l'inégalité de Schwarz,

$$\left(\int_{r_0}^{r} L(r)\frac{dr}{r}\right)^2 < 8\pi^2\nu\, S(r)\log\frac{r}{r_0}.$$

Et, avec l'inégalité (9), nous obtenons

$$\frac{1}{h^2(2\nu-1)^2}[T(r) - l]^2 < 8\pi^2\nu\, S(r)\log\frac{r}{r_0}.$$

Intégrons cette inégalité entre r et R après avoir remplacé $S(r)$ par $r\dfrac{dT}{dr}$; il vient

$$T(r) - l < \frac{8\pi^2\nu h^2(2\nu-1)^2}{\log\dfrac{\log\frac{R}{r_0}}{\log\frac{r}{r_0}}}.$$

En substituant à $T(r)$ la quantité $S(r_0)\log\dfrac{r}{r_0}$ qui lui est inférieure, car

$$S(r_0)\log\frac{r}{r_0} < \int_{r_0}^{r} S(r)\frac{dr}{r} < T(r);$$

et en faisant $r^2 = Rr_0$, nous obtenons

$$\frac{1}{2}S(r_0)\log\frac{R}{r_0} < (2\nu-1)\,T(r_0) - \log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2 + \frac{8\pi^2\nu\, h^2(2\nu-1)^2}{\log 2}.$$

Prenons maintenant pour r_0 la quantité définie [1] par $S(r_0) = \frac{1}{2}$.

---

[1] Ceci suppose que l'on n'a pas $S(R) < \frac{1}{2}$. S'il en était ainsi l'inégalité (11) nous donnerait $\dfrac{R}{r_1} < \left(\dfrac{2\pi\sqrt{e}}{\delta_1}\right)^\nu$ et les conséquences ne seraient pas changées.

Pour $r < r_0$ nous avons (*cf.* § 40)

$$S(r) < \frac{r^{\frac{2}{\nu}}}{r^{\frac{2}{\nu}} + r_0^{\frac{2}{\nu}}},$$

d'où

$$T(r_0) = \int_0^{r_0} S(r)\frac{dr}{r} < \int_0^{r_0} \frac{r^{\frac{2}{\nu}-1}\,dr}{r^{\frac{2}{\nu}} + r_0^{\frac{2}{\nu}}} = \frac{\nu}{2}\log 2.$$

L'inégalité limitant R prend donc la forme

$$(10)\quad \log\frac{R}{r_0} < 4\left[\frac{8\pi^2\nu(2\nu-1)^2}{\log 2}h^2 - \log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2 + \frac{\nu(2\nu-1)}{2}\log 2\right].$$

45. Si nous voulons obtenir un théorème du type de celui de Landau, nous n'introduirons pas ici les dérivées des branches à l'origine, car le lemme sur l'aire sphérique couverte par une algébroïde ne permet pas immédiatement un passage à la limite. Nous supposerons connus r_1 et δ_1 tels que, dans le cercle $|z| \leqq r_1$, l'oscillation sphérique de l'une des branches de l'algébroïde soit supérieure à δ_1. Dans ces conditions, nous allons montrer que r_0 satisfait à l'inégalité

$$(11)\qquad \frac{r_0}{r_1} < \left(\frac{2\pi\sqrt{e}}{\delta_1}\right)^{\nu}.$$

En effet, s'il n'en est pas ainsi, on a $r_0 > r_1$ et $L(r) > 2\delta_1$ pour $r_1 \leqq r \leqq r_0$; d'où, en utilisant (1'),

$$4\delta_1^2 < 8\pi^2\nu r\frac{dS}{dr},$$

et, en intégrant entre r_1 et $r_1 e^{\frac{\nu}{2}} < r_0$,

$$\frac{\delta_1^2}{4\pi^2} < S\left(r_1 e^{\frac{\nu}{2}}\right) - S(r_1) < S\left(r_1 e^{\frac{\nu}{2}}\right).$$

Appliquons maintenant le lemme sur l'aire sphérique entre $r_1 e^{\frac{\nu}{2}}$ et r_0; il vient

$$S\left(r_1 e^{\frac{\nu}{2}}\right) < \frac{\left(r_1 e^{\frac{\nu}{2}}\right)^{\frac{2}{\nu}}}{r_0^{\frac{2}{\nu}} + \left(r_1 e^{\frac{\nu}{2}}\right)^{\frac{2}{\nu}}} < e\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2}{\nu}},$$

d'où

$$\frac{\delta_1^2}{4\pi^2} < e\left(\frac{r_1}{r_0}\right)^{\frac{2}{\nu}};$$

ce qui est contraire à notre hypothèse. Remarquons que l'on aurait pu, plus simplement, effectuer la première intégration entre r_1 et r_0; mais l'inégalité que l'on aurait ainsi obtenue est beaucoup moins précise. Des inégalités (10) et (11) nous déduisons le théorème :

Soit, dans $|z| < \mathrm{R}$, une algébroïde $w = f(z)$ à ν branches dont toutes les déterminations à l'origine sont distinctes et dont une branche a une oscillation sphérique supérieure à δ_1 dans le cercle $|z| \leqq r_1$; si la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ ne présente aucun disque sur $2\nu + 1$ domaines D_i simplement connexes et disjoints, on a $\mathrm{R} < \infty$ et

$$\log \mathrm{R}\frac{\delta_1^\nu}{r_1} < -4\log\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)^2 + \frac{32\pi^2\nu(2\nu-1)^2}{\log 2}h^2 + 2\nu(2\nu-1)\log 2 + \nu\log 2\pi\sqrt{e},$$

où h est une constante dépendant uniquement des domaines D_i.

46. En conservant cette forme au théorème, on peut se demander s'il n'est pas possible de se débarrasser du terme $\Pi\delta_{ij}(0)$ de l'inégalité en même temps que de la condition des déterminations distinctes à l'origine; nous montrerons plus loin qu'il en est ainsi dans le cas des algébroïdes à deux branches lorsque les domaines D_i sont réduits à des points.

Inversement, si nous continuons à supposer que les déterminations à l'origine sont distinctes, nous allons pouvoir introduire la dérivée à l'origine de l'une où de plusieurs des branches. Montrons que l'on a

$$\frac{r_0}{r_2} < \left(\frac{2\pi\sqrt{e}}{\delta}\right)^\nu \qquad \text{avec} \qquad r_2 = \frac{\delta}{2\pi\sqrt{\sum\left(\frac{|f_i'(0)|}{1+|f_i(0)|^2}\right)^2}},$$

où δ désigne la plus petite distance sphérique des déterminations à l'origine. En effet, ou bien il n'y a pas de points de ramification de l'algébroïde dans $r < r_2$, et alors, chaque branche constituant une fonction méromorphe, on a

$$S(r_2) > \sum_i \frac{r_2^2 \left(\frac{|f_i'(0)|}{1+|f_i(0)|^2}\right)^2}{1 + r_2^2 \left(\frac{|f_i'(0)|}{1+|f_i(0)|^2}\right)^2} > \frac{\frac{\delta^2}{4\pi^2}}{1 + \frac{\delta^2}{4\pi^2}};$$

d'où

$$\frac{S\left(r_2 e^{\frac{\nu}{2}}\right)}{1 - S\left(r_2 e^{\frac{\nu}{2}}\right)} > e \frac{\delta^2}{4\pi^2} \quad \text{et} \quad S\left(r_2 e^{\frac{\nu}{2}}\right) > \frac{\delta^2}{4\pi^2};$$

ou bien il y a un point de ramification au moins et l'une des branches a alors une oscillation sphérique supérieure à δ. Dans les deux cas, la démonstration se termine comme au paragraphe précédent.

D'où le théorème $\left[\text{en remarquant que } \delta > 2 \prod \left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right)\right]$:

Soit, dans $|z| < R$, *une algébroïde* $w = f(z)$ *a* ν *branches dont toutes les déterminations à l'origine sont distinctes et dont une branche au moins a une dérivée sphérique non nulle à l'origine; si la surface de Riemann décrite par* $w = f(z)$ *ne présente aucun disque sur* $2\nu + 1$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints, on a*

$$\log R \sqrt{\sum \left(\frac{|f_i'(0)|}{1+|f_i(0)|^2}\right)^2} < -(\nu+7)\log \prod \left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right) + \frac{32\pi^2\nu(2\nu-1)^2}{\log 2} h^2 + F(\nu),$$

où $F(\nu)$ *est un polynome du second degré en* ν *à coefficients numériques, et* h *une constante dépendant uniquement des domaines* D_i.

47. Au lieu de supposer que l'algébroïde ne présente aucun disque sur $2\nu + 1$ domaines, nous allons maintenant supposer qu'il existe q domaines D_i à chacun desquels est associé un nombre μ_i avec

$$\sum \left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2\nu$$

et tels que tous les disques situés sur le domaine D_i aient μ_i feuillets au moins. Nous opérerons de même que pour les fonctions méromorphes. Après avoir agrandi les domaines, si cela est utile, on applique le théorème du recouvrement à chacun d'eux et la relation (5) nous donne alors

$$\left[\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)-2\right]S-(q-2)\,h'L-n(r,\Delta)<0.$$

Et l'on peut recommencer sur cette équation rigoureusement les mêmes considérations que précédemment. On pourra calculer des bornes. Pour alléger l'écriture nous ne les expliciterons pas. On obtient le théorème suivant, qui généralise celui du paragraphe 45 :

THÉORÈME I'. — *Soit, dans* $|z|<R$, *une algébroïde* $w=f(z)$ *à* ν *branches dont toutes les déterminations à l'origine sont distinctes et dont une branche a une oscillation sphérique supérieure à* δ_1 *dans le cercle* $|z|\leqq r_1$ *; si cette algébroïde satisfait à la condition suivante :*

(Condition C'), *il existe* $q\geqq 2\nu+1$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints dont certains peuvent être réduits à des points et à chacun desquels est associé un entier* μ_i *avec* $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)>2\nu$, *tels que tous les disques de la surface de Riemann décrite par* $w=f(z)$ *et situés sur* D_i *aient* μ_i *feuillets au moins;*
alors on a $R<\infty$ *et*

$$\log R\frac{\delta_1^\nu}{r_1}<\mathcal{F}\left[\prod\left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2}\right),\ h',\ \sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right),\ \nu\right],$$

où h' *est une constante dépendant seulement des domaines* D_i.

Dans ce théorème la condition C' peut être remplacée par l'une quelconque des conditions suivantes plus restrictives :

(Condition C'_1), *l'algébroïde ne prend pas* $2\nu+1$ *valeurs distinctes;*

(Condition C'_2), *l'algébroïde présente* $4\nu+1$ *valeurs complètement ramifiées;*

(Condition C'_3), *la surface de Riemann décrite par* $w=f(z)$ *ne présente aucun disque sur aucun de* $2\nu+1$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints* (*cf.* § 45);

(Condition C'_4), *cette surface de Riemann ne présente aucun disque simple sur aucun de* $4\nu+1$ *domaines* D_i *simplement connexes et disjoints.*

Nous montrerons, par un exemple simple d'algébroïde à deux branches, qu'il est certainement impossible d'obtenir une inégalité analogue à celle du théorème I′, mais dans laquelle ne figure pas la quantité $\Pi\,\delta_{ij}(0)$.

Dans le théorème I′, *on peut remplacer la donnée de* r_1 *et* δ_1, *par celle des dérivées à l'origine des différentes branches* (ou d'un certain nombre d'entre elles). *On obtient*

$$\log R \sqrt{\sum \left(\frac{|f'_i(0)|}{1+|f_i(0)|^2} \right)^2} < \mathcal{F}_1 \left[\prod \left(\frac{\delta_{ij}(0)}{2} \right), h', \sum \left(1 - \frac{1}{\mu_i} \right), \nu \right].$$

La démonstration est identique à celle du paragraphe 46.

Étude particulière des algébroïdes à deux branches.

48. Nous nous sommes demandé si, dans le théorème I′, il était essentiel de supposer distinctes les déterminations à l'origine et de se donner $\Pi\,\delta_{ij}(0)$, ou si cela était simplement une conséquence de la technique suivie dans la démonstration. A cet effet, nous avons étudié les algébroïdes à deux branches. Les résultats obtenus montrent les améliorations que l'on peut espérer apporter au théorème I′.

49. *Algébroïdes à deux branches définies dans* $|z| < R$ *et ne prenant pas cinq valeurs.* — Faisons d'abord sur l'algébroïde une transformation homographique qui amènera aux points 0 et ∞ deux de ces cinq valeurs; et soit δ_0 la plus petite distance sphérique des cinq nouvelles valeurs non prises. Nous allons étudier simultanément l'algébroïde et les deux fonctions holomorphes $w = \pm\sqrt{f_1(z) f_2(z)}$. Considérons autour de chaque point non couvert, distinct de 0 et ∞, un domaine D_i constitué par une calotte centrée au point considéré et ayant pour rayon sphérique $\frac{\delta_0}{3}$. Une fonction méromorphe ayant une oscillation sphérique supérieure à $\frac{\delta_1}{2}$ dans le cercle $|z| \leqq r_1$ aura au moins un disque sur l'un de ces domaines si son rayon d'existence est supérieur ou égal à R′ avec

$$\log R' \frac{\delta_1}{2 r_1} = \frac{32\pi^2 h^2}{\log 2} + 2 \log 2 + \log 2\pi\sqrt{e},$$

h dépendant uniquement des domaines D_i ou, si l'on veut, de δ_0.

Désignons par m le minimum des deux quantités $\frac{\delta_0}{4}$ et $\frac{\delta_1}{4}$. Deux cas peuvent se présenter :

1° Dans $|z| < R'$ il existe un point en lequel $\delta_{12}(z) > m$. Prenons ce point pour origine et appliquons le théorème I' à l'algébroïde et aux cinq points interdits; il vient

$$\log \frac{R - R'}{R' + r_1} \delta_1^2 < -4 \log \frac{m^2}{4} + \mathcal{F}_2\left(\frac{1}{\delta_0}\right),$$

qui nous donne, finalement, une borne supérieure de R en fonction de r_1, δ_1 et δ_0.

2° Dans tout le cercle $|z| < R'$, on a $\delta_{12}(z) < m$. Considérons alors les parallèles et les méridiens passant par les deux déterminations f_1 et f_2 de l'algébroïde; ils définissent un *petit* quadrilatère curviligne à l'intérieur duquel se trouve l'une des deux fonctions holomorphes $w = \pm\sqrt{f_1 f_2}$, dont la distance sphérique à f_1 et f_2 est donc inférieure à m. C'est toujours la même de ces deux fonctions qui jouit de cette propriété; en effet, il ne pourrait y avoir échange qu'en franchissant une valeur de z pour laquelle le *petit* quadrilatère n'est plus défini, ce qui n'est possible que si f_1 et f_2 pénètrent dans une petite calotte ayant pour centre o ou ∞ et une circonférence frontière de longueur $2m$. Écartons les régions du plan des z pour lesquelles il en est ainsi; il reste, dans ce plan, un domaine connexe (en vertu du principe du maximum et du minimum du module d'une fonction analytique), dans lequel la propriété a donc toujours lieu avec la même fonction holomorphe. Il est clair que la propriété subsiste encore dans les régions que nous venons d'écarter.

Cette fonction holomorphe f a, dans le cercle $|z| \leqq r_1$, une oscillation sphérique supérieure à $\frac{\delta_1}{2}$. Dans le cercle $|z| < R'$ elle présente donc un disque au moins sur l'un des domaines D_i et l'algébroïde prend deux fois au moins la valeur correspondant au centre du domaine D_i (1).

---

(1) En effet, au disque correspond un domaine du plan des z. Lorsque la variable z parcourt le contour de ce domaine, f fait le tour de D_i (un nombre de fois égal à la multiplicité du disque), donc f_1 et f_2 tournent, *dans le même sens*, autour du centre de D_i. Le théorème sur l'argument démontre alors la propriété anoncée.

Si nous remarquons enfin, qu'à la condition de choisir convenablement la transformation homographique initiale, δ_0 peut être évalué à partir de la seule distance sphérique minima des cinq valeurs quelconques non prises, nous arrivons au théorème suivant ([1]) :

Une algébroïde à deux branches, ne prenant pas cinq valeurs, et dont l'une des branches a une oscillation sphérique supérieure à δ_1 dans le cercle $|z| \leqq r_1$, a un rayon d'existence R *inférieur à une quantité dépendant de r_1, δ_1 et de la distance sphérique minima des cinq valeurs non prises.*

Nous aurions pu expliciter la borne supérieure de R; mais le calcul est assez long et sans grand intérêt. Il serait par contre intéressant de savoir si ce théorème peut être étendu à une algébroïde à ν branches ne prenant pas $2\nu + 1$ valeurs. Cela est vraisemblable.

50. *Remarque.* — Si, au lieu de l'hypothèse de cinq valeurs non prises, on fait l'hypothèse plus générale exprimée par la condition C' du théorème I', on ne peut plus alors se débarrasser de $\delta_{12}(0)$. Montrons-le sur un exemple. Donnons-nous, $r_1 = 1$ et $\delta_1 = \frac{1}{2}$ Il est impossible de fixer le maximum de R pour une algébroïde à deux branches satisfaisant à cette condition d'oscillation et ne présentant aucun disque simple sur neuf domaines D_i simplement connexes et disjoints. En effet, donnons-nous R arbitrairement grand et prenons une valeur z_i dans chacun de ces domaines. Considérons l'algébroïde

$$w = z \pm \varepsilon\sqrt{\Pi(z - z_i)},$$

dans le cercle $|z| < \mathrm{R}$. Nous choisirons la constante ε de telle sorte que

---

([1]) *Cf.* G. Valiron, *Sur le domaine couvert par les valeurs d'une algébroïde finie* (*Bull. des Sciences math.*, 64, 1940, p. 199-206).

Notre théorème contient celui de G. Valiron sur les algébroïdes à deux branches. Remarquons encore que le théorème I *bis* constitue une réponse affirmative à la présomption énoncée par G. Valiron à la fin de son article, le module du discriminant étant remplacé par le produit des distances sphériques cordales des différentes branches de l'algébroïde et la conclusion du théorème de Bloch étant remplacée par l'existence d'un disque simple sur l'un des $4\nu + 1$ domaines simplement connexes et disjoints; *cf.* aussi : *Proceedings of the Physico-Math. Society of Japan*, 3e série, 12, 1930, p. 64.

le module de $\sqrt{\Pi(z-z_i)}$ soit inférieur à R lorsque $|z| < 2R$ et à $\frac{1}{4}$ lorsque $|z| < 1$. Cette algébroïde satisfait bien à la condition d'oscillation et recouvre deux fois exactement le cercle $|w| < R$. D'autre part la surface de Riemann décrite par w présente des points de ramification pour

$$1 \pm \frac{\varepsilon}{2}\sqrt{\Pi(z-z_i)}\sum \frac{1}{z-z_i} = 0,$$

soit

$$\prod_i (z-z_i) - \frac{\varepsilon^2}{4}\left[\sum_j \frac{\prod_i (z-z_i)}{z-z_j}\right]^2 = 0,$$

équation du 16^e degré dont 9 racines tendent respectivement vers les valeurs z_i et 7 vers l'infini quand ε tend vers zéro. Il leur correspond 16 valeurs de w dont 9 tendent respectivement vers les valeurs z_i. Nous choisirons ε assez petit pour que ces valeurs soient intérieures aux domaines D_i. Dans ces conditions il n'y aura bien, sur ceux-ci, aucun disque simple (mais seulement des disques doubles).

51. *Algébroïdes de la forme $w = \pm\sqrt{f(z)}$, où $f(z)$ est méromorphe.* — Supposons connue la dérivée sphérique à l'origine $\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} \neq 0$. La quantité $\delta_{12}(z)$ atteint certainement la valeur 2 en un point du cercle de rayon $r_0 = \frac{1+|f(0)|^2}{|f'(0)|}$. En effet, s'il n'en était pas ainsi, $|f(z)|$ ne prendrait pas la valeur 1 dans ce cercle; si nous supposons $|f(0)| < 1$, nous aurions alors $|f(z)| < 1$ dans le cercle $|z| \leqq \frac{1+|f(0)|^2}{|f'(0)|}$, ce qui est absurde puisque, d'après le lemme de Schwarz, il n'en peut être ainsi dans le cercle plus petit $|z| \leqq \frac{1-|f(0)|^2}{|f'(0)|}$; en changeant f en $\frac{1}{f}$ on voit que le résultat est encore valable si $|f(0)| > 1$.

D'autre part, si $f(z)$ décrit une aire, $\pm\sqrt{f(z)}$ décrivent une aire supérieure à la moitié de la précédente, comme le montre la comparaison des éléments différentiels correspondants

$$2\frac{\sqrt{r}\,d(\sqrt{r})\,d\frac{\theta}{2}}{[1+(\sqrt{r})^2]^2} > \frac{1}{2}\,\frac{r\,dr\,d\theta}{(1+r^2)^2},$$

soit

$$\frac{1}{(1+r)^2} > \frac{r}{(1+r^2)^2},$$

ou

$$(1-r)^2(1+r+r^2) > 0,$$

ce qui est bien vérifié. Appliquons maintenant les lemmes sur l'aire sphérique couverte. Dans le cercle de rayon $r_0 = \frac{1+|f(0)|^2}{|f'(0)|}$, l'aire couverte par $f(z)$ est supérieure à 2π; donc l'aire couverte par w est supérieure à π. Par conséquent, dans le cercle de rayon $3r_0$, l'aire couverte par w est supérieure à 2π.

Appliquons alors l'inégalité (10) en prenant comme origine le point z, où $\delta_{12}(z) = 2$. Il vient

$$\log\frac{R-r_0}{4r_0} < 4\left[\frac{8\pi^2\nu(2\nu-1)^2}{\log 2}h^2 + \frac{\nu(2\nu-1)}{2}\log 2\right]_{\nu=2}.$$

D'où le théorème :

Soit une algébroïde $w = \pm\sqrt{f(z)}$, où $f(z)$ est une fonction méromorphe dans le cercle $|z| < R$; si cette algébroïde ne présente aucun disque sur cinq domaines D_i simplement connexes et disjoints, on a

$$R\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < \mathcal{B},$$

la borne $\mathcal{B}$ dépendant uniquement des domaines D_i.

Et l'on obtiendrait de même le théorème plus général :

Soit une algébroïde $w = \pm\sqrt{f(z)}$; s'il existe q domaines D_i à chacun desquels est associé un nombre μ_i avec $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right) > 4$ tels que les disques présentés par l'algébroïde sur le domaine D_i aient μ_i feuillets au moins, on a

$$R\frac{|f'(0)|}{1+|f(0)|^2} < \mathcal{B}_1,$$

la borne $\mathcal{B}_1$ dépendant des domaines D_i et de la quantité $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)$.

Le théorème s'applique en particulier au cas de neuf domaines D_i sur lesquels il n'y a aucun disque simple [1].

52. *Application aux domaines annulaires fendus.* — Dans le plan complexe de la variable w, considérons q couronnes disjointes et fendues; chaque couronne est limitée par deux cercles centrés à l'origine, la fente est faite suivant un rayon issu de l'origine. La transformation $W = \pm\sqrt{w}$ fait correspondre à chaque couronne fendue deux demi-couronnes; nous choisirons, une fois pour toutes, l'une de celles-ci. Nous aurons ainsi q demi-couronnes simplement connexes et disjointes.

Il y a correspondance biunivoque entre les disques présentés sur les couronnes par la surface de Riemann décrite par une fonction méromorphe $w = f(z)$ d'une part et les disques présentés sur les demi-couronnes par la surface de Riemann décrite par l'algébroïde $W = \pm\sqrt{f(z)}$ d'autre part. Deux disques correspondants ont le même nombre de feuillets [2]. En appliquant le théorème du paragraphe précédent nous obtenons aussitôt le

THÉORÈME. — *Soit une fonction $w = f(z)$ méromorphe dans le cercle $|z| < R$; s'il existe q couronnes disjointes et fendues C_i centrées au point $w = 0$ à chacune desquelles est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 4$ telles que les disques présentés par la surface de Riemann décrite par $w = f(z)$ sur la couronne fendue C_i aient μ_i feuillets au moins, on a*

$$R\frac{|f'(0)|}{1 + |f(0)|^2} < \mathcal{B}_1,$$

---

(1) Si $f(z)$ est *holomorphe* (*cf.* § 43, note) on a le même théorème avec q domaines D_i *finis* à chacun desquels est associé un entier μ_i avec $\sum\left(1 - \frac{1}{\mu_i}\right) > 2$. Dans les cas particuliers on a trois domaines, qui ne sont recouverts par aucun disque, ou cinq domaines qui ne sont recouverts par aucun disque simple. Cette même remarque s'applique aux théorèmes du paragraphe suivant.

(2) Ils ont aussi même ordre de ramification, donc même caractéristique.

la borne $\mathcal{B}_1$ *dépendant des couronnes fendues* C_i *et de la quantité* $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)$.

Ce théorème s'applique, en particulier, aux deux cas suivants :

1° *Il n'y a aucun disque sur cinq couronnes fendues;*
2° *Il n'y a aucun disque simple sur neuf couronnes fendues.*

Ce dernier cas se rattache à un théorème de G. Valiron [1], de même que le théorème I (condition C_4) se rattachait au théorème de Bloch.

Notre théorème s'appliquera au cas plus général de q domaines D_i disjoints, fendus et emboités les uns dans les autres à la façon des couronnes C_i. En effet, nous pourrons choisir, sur la sphère Σ_0, deux points A et B qui joueront alors le même rôle que o et ∞ dans le cas des couronnes. Nous effectuerons sur w une transformation homographique qui amènera A et B respectivement en o et ∞ et nous opérerons ensuite comme nous l'avons fait avec les couronnes. En remarquant que la tranformation homographique peut être choisie de telle sorte qu'elle multiplie la dérivée sphérique par une quantité comprise entre deux bornes ne dépendant que de la distance sphérique δ de A à B [2], donc, tous comptes faits, ne dépendant que des domaines D_i, nous pouvons conclure :

Le théorème précédent s'étend au cas de q domaines disjoints et fendus D_i *formant un ensemble topologiquement équivalent à celui des couronnes fendues concentriques* C_i.

Ce résultat apparaît comme une extension du théorème I à des domaines D_i un peu plus généraux; mais ici la borne inférieure

---

(1) *Cf.* G. Valiron, *Lectures on the general theory of integral functions* (Toulouse, 1923) et Bloch, *Les fonctions holomorphes et méromorphes dans le cercle unité* (*Mémorial des Sc. math.*, XX, 1926). Dans ce théorème il s'agit, non seulement de couronnes fendues, mais de couronnes enroulées s fois sur elles-mêmes; on parvient à un résultat analogue par notre méthode à l'aide de l'algébroïde $\sqrt[s+1]{f(z)}$, qui s'étudie exactement comme $\sqrt{f(z)}$.

(2) On fera une rotation de la sphère des w, de façon à amener A et B à être symétriques par rapport au plan équatorial, puis une inversion de cette sphère en elle-même à partir d'un point du plan équatorial et une symétrie par rapport à ce plan. Les bornes sont alors tang $\frac{\delta}{4}$ et cot $\frac{\delta}{4}$.

de $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)$ est 4 au lieu de 2. On peut se demander s'il est possible d'améliorer cette borne.

Enfin, ces conclusions peuvent s'étendre au *cas le plus général des domaines* D_i *disjoints rendus simplement connexes par des coupures*. Dans ce cas il existe, sur la sphère Σ_0, un certain nombre $1+s$ de points qui vont jouer un rôle analogue à celui de A et B pour les couronnes fendues. Par une transformation homographique, nous envoyons l'un de ces points à l'infini et nous étudions l'algébroïde

$$w = \sqrt[s+1]{(f-a_1)(f-a_2)\dots(f-a_s)},$$

formée à partir des nouvelles positions a_i des s autres points. Et l'on peut développer des considérations analogues à celles faites dans les paragraphes 51 et 52. Mais la borne inférieure qu'il faut assigner à $\sum\left(1-\frac{1}{\mu_i}\right)$ est maintenant égale à $2+2s$.