ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur les fonctions localement univalentes ou multivalentes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 39-54

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__39_0>

SUR LES

FONCTIONS LOCALEMENT UNIVALENTES
OU MULTIVALENTES

Par M. Paul MONTEL.

1. La classification des fonctions de variable complexe d'après leur ordre de multivalence dans un domaine a permis de découvrir d'importantes propriétés des fonctions appartenant aux familles ainsi obtenues. Ce sont les fonctions univalentes qui ont été le plus étudiées parce que ce sont les plus simples et parce que leur étude est étroitement liée à celle de la représentation conforme. Les fonctions multivalentes d'ordre supérieur à l'unité ont été aussi, dans ces dernières années, l'objet d'intéressantes recherches.

La multivalence d'un ordre donné p n'est pas une propriété locale. Une fonction multivalente d'ordre p dans un domaine le demeure assurément autour de chaque point du domaine, mais la réciproque n'est pas vraie. Je me propose, dans ce travail, d'étudier les fonctions localement multivalentes d'ordre p. Nous les classerons en familles de fonctions également multivalentes d'ordre p autour de chaque point, et nous verrons que de telles familles ont beaucoup de propriétés communes avec les familles de fonctions globalement multivalentes d'ordre p. Nous supposerons souvent, comme on peut toujours le faire à l'aide d'une représentation conforme, que le domaine simplement connexe dans lequel la fonction est définie est le cercle-unité : $|z| < 1$, et nous examinerons d'abord les fonctions localement univalentes.

2. Soit $f(z)$ une fonction holomorphe dans un domaine : nous dirons qu'elle est *localement univalente* dans ce domaine si elle est univalente dans tout cercle de rayon ρ intérieur au domaine. On peut remplacer ρ par un nombre plus petit, mais, même si la fonction est univalente dans le domaine, il existe une valeur maximum ρ_0 pour le nombre ρ. Ce nombre ρ est appelé un *module d'univalence locale* et ρ_0 est le *module maximum*. Nous dirons qu'une fonction est localement univalente « dans l'intérieur d'un domaine » si elle est localement univalente dans tout domaine complètement intérieur au premier.

Si une fonction $f(z)$ est localement univalente dans l'intérieur du cercle-unité (C), sa dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas dans ce domaine. Réciproquement, si $f'(z)$ n'a aucun zéro intérieur à (C), la fonction est localement univalente dans l'intérieur de (C). En effet, $f(z)$ est univalente autour de chaque point de (C) et son rayon d'univalence en ce point est un nombre positif ρ'. Soit (C') un cercle intérieur à (C), je dis que ρ' admet dans (C') un minimum positif ρ. Dans le cas contraire, en effet, on pourrait trouver dans (C') une suite de points P_1, $P_2, \ldots, P_n, \ldots$ pour lesquels les rayons d'univalence auraient pour limite zéro. Soit P_0 un point limite de la suite P_n, il est intérieur à (C) et admet un rayon d'univalence positif ρ'_0. Dans le cercle concentrique au cercle d'univalence et de rayon $\frac{\rho'_0}{2}$ tous les points ont un rayon d'univalence au moins égal à $\frac{\rho'_0}{2}$; donc, pour les points P_n en nombre infini contenus dans ce dernier cercle, les rayons ρ' ne pourraient tendre vers zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse, Donc :

Pour qu'une fonction soit localement univalente dans l'intérieur d'un domaine, il faut et il suffit que sa dérivée première ne s'annule pas dans ce domaine.

Une fonction localement univalente dans un domaine, est multivalente dans le domaine d'un ordre arbitraire aussi élevé qu'on le veut, comme le montre l'exemple des fonctions $(z+2)^n$ ou e^{nz}, n désignant un entier, pour $|z| < 1$.

Considérons des fonctions localement univalentes dans un domaine et admettant un module commun ρ. Nous dirons que ces fonctions sont *également localement univalentes*. Nous grouperons les fonctions localement univalentes en familles de fonctions admettant un même module.

3. On sait que la propriété d'univalence dans un domaine se transmet à la limite pour toute suite de fonctions univalentes convergeant uniformément vers une fonction limite non constante; et réciproquement. Ce résultat est applicable à une suite de fonctions également localement univalentes et l'on peut établir le théorème suivant :

Si une suite infinie de fonctions également localement univalentes de module ρ *converge uniformément vers une fonction limite non constante, cette fonction limite est localement univalente de module* ρ; *et réciproquement.*

Soit en effet la suite $f_1(z), f_2(z), \ldots, f_n(z), \ldots$ convergeant uniformément dans l'intérieur du domaine vers une fonction limite $f(z)$. Si cette fonction n'était pas localement univalente de module ρ, il existerait un cercle (γ) intérieur au domaine, de rayon $\rho' < \rho$, contenant deux points P et Q en lesquels la fonction $f(z)$ prend la même valeur a. La suite converge uniformément autour de P et autour de Q et, comme $f(z)$ n'est pas une constante, $f_n(z)$ prend, pour n assez grand, la valeur a en des points P_n et Q_n aussi voisins de P et Q qu'on le veut, donc intérieurs à (γ). Donc, pour n assez grand, $f_n(z)$ n'admettrait pas le module ρ. L'hypothèse est par suite à rejeter et $f(z)$ admet le module ρ.

La réciproque est manifeste : si $f(z)$ admet le module ρ, cette fonction est la limite de la suite infinie de fonctions $f(z) + \frac{1}{n}$ qui admettent le module ρ.

Mais la proposition comporte une autre réciproque plus importante :

Si une suite de fonctions holomorphes

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

converge uniformément vers la fonction localement univalente $f(z)$ *de module* ρ, *cette suite, à partir d'un certain rang, est formée de fonctions également localement univalentes de module* ρ.

Comme la dérivée $f'(z)$ ne s'annule pas, les fonctions $f'_n(z)$ n'ont plus de zéro pour n assez grand. Si la proposition n'était pas vraie, il existerait une infinité de fonctions $f_n(z)$, qui sont localement univalentes à partir du rang où $f'_n(z)$ ne s'annule plus, pour lesquelles le module serait inférieur à ρ. Désignons encore les fonctions de cette suite par $f_n(z)$. A la fonction $f_n(z)$, correspondrait un cercle (γ_n) de rayon inférieur à ρ, dans lequel $f_n(z)$ prendrait la même valeur en deux points P_n et Q_n. On peut extraire de cette suite, une suite partielle pour laquelle les cercles (γ_n) ont un cercle limite (γ) de rayon au plus égal à ρ et les points P_n et Q_n ont des points limites P et Q situés dans (γ) pour lesquels $f(z)$ a la même valeur. $f(z)$ n'admettrait donc pas le module ρ. Nous supposons ici que ρ a été choisi de manière que $f(z)$ soit univalente dans le cercle fermé (γ) de rayon ρ, ce qui est toujours possible en remplaçant au besoin ρ par un nombre légèrement inférieur.

On voit qu'il existe une espèce de contagion de l'univalence locale dans les suites uniformément convergentes.

Lorsque $\rho = 1$, les théorèmes précédents se confondent avec des théorèmes connus sur les suites de fonctions globalement univalentes.

4. Considérons une famille de fonctions $f(z)$ également localement univalentes et soit ρ un module commun aux fonctions de la famille. Dans chaque cercle (γ) de rayon ρ intérieur au domaine, toutes les fonctions $f(z)$ sont univalentes, donc les dérivées premières $f'(z)$ forment une famille normale dans ce cercle (γ). La famille des fonctions $f'(z)$ est normale autour de chaque point intérieur au domaine : elle est donc normale dans l'intérieur du domaine. Toute suite infinie de fonctions $f'(z)$ de la famille, admet au moins une fonction limite qui est dépourvue de zéros ou qui coïncide avec la constante zéro puisque les fonctions $f'(z)$ ne s'annulent pas dans le domaine. Si aucune fonction limite n'est la constante zéro, les modules de $f'(z)$ admettront un minimum positif dans tout domaine intérieur au premier. Il en sera particulièrement ainsi pour la famille (E) des fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle-unité (C) et admettant un module commun ρ; on a alors, dans tout cercle (C′) concentrique et intérieur à (C),

$$|f'(z)| \geqq \mu,$$

μ désignant un nombre positif qui ne dépend que du rayon du cercle (C′).

Réciproquement, si $|f'(z)|$ a un module supérieur à un nombre positif μ dans tout cercle (C′), la famille (E) est formée de fonctions également localement univalentes. Il suffit, pour l'établir, de montrer que ces fonctions ont un module commun ρ dans chaque cercle (C′).

La famille des fonctions $f'(z)$ est normale dans (C) puisque $f'(z)$ admet un cercle lacunaire dans chaque domaine (C′). Cette famille est bornée dans (C′) puisque $f'(0) = 1$. Il en résulte que la famille des fonctions $f(z)$ est normale et bornée. Elle est formée de fonctions localement univalentes puisque $f'(z)$ ne s'annule pas. Si elle n'admettait pas dans (C′) un module commun ρ, on pourrait trouver une suite de ces fonctions

$$f_1(z), \quad f_2(z), \quad \ldots, \quad f_n(z), \quad \ldots$$

telle que le module d'univalence de $f_n(z)$ soit inférieur à $\frac{1}{n}$. Soit alors $f_0(z)$ une fonction limite de cette suite normale. Comme $f'_0(z)$, limite de $f'_n(z)$, ne s'annule pas, $f_0(z)$ est localement univalente avec un module ρ_0. Les fonctions de la suite $f_n(z)$ qui convergent vers $f_0(z)$ ont donc le module ρ_0 à partir d'un certain rang, ce qui contredit l'hypothèse que leur module d'univalence tend vers zéro quand le rang augmente indéfiniment. Ainsi :

Pour que la famille (E) *des fonctions*

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle-unité, soit formée de fonctions également localement univalentes dans l'intérieur de (C), *il faut et il suffit que le module de* $f'(z)$ *soit borné inférieurement par un nombre positif dans tout cercle concentrique intérieur.*

En particulier, il en sera ainsi lorsqu'on a

$$|f'(z)| \geqq \mu > 0$$

en tout point du cercle (C).

Si l'on suppose seulement que la condition $|f'(z)| \geqq \mu > 0$ est remplie dans tout cercle (C′) sans ajouter la condition que $f'(z)$ est fixe, ou borné supérieurement, en un point, on ne peut plus affirmer l'exactitude du résultat. L'exemple de la suite

$$f_n(z) = (z+2)^n - 2^n$$

pour laquelle $|f'_n(z)| \geqq 1$ dans (C), montre que la conclusion ne subsiste plus. La fonction $f_n(z)$ s'annule en effet en tous les points intérieurs à (C) d'affixes $2\left(e^{\frac{2ik\pi}{n}} - 1\right)$. La distance de deux points consécutifs tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$.

5. On peut cependant arriver à la même conclusion pour d'autres familles que la précédente, au moins en ce qui concerne le caractère nécessaire de la condition imposée à $f'(z)$.

Dans chaque cercle (γ), les fonctions $f(z)$ sont univalentes et forment, par conséquent, une famille quasi normale d'ordre *un*. Comme on peut recouvrir entièrement (C′) au moyen de cercles (γ) en nombre fini de façon à former une chaîne (γ_1), (γ_2), ..., (γ_m) telle que deux cercles consécutifs de cette chaîne aient une partie commune, on en déduit que toute famille des fonctions $f(z)$ également localement univalentes dans (C) est une famille quasi normale dans l'intérieur de (C).

En effet, toute suite infinie de fonctions $f(z)$ contient une suite partielle convergeant uniformément dans (γ_1) vers une fonction finie ou vers l'infini avec un point irrégulier au plus. Dans le premier cas, la suite converge uniformément dans (γ_2), (γ_3), ..., (γ_m) vers une fonction holomorphe : dans le second cas, elle converge uniformément dans (γ_1), (γ_2), (γ_3), . . . , (γ_m) vers la constante infinie, sauf peut-être en un point irrégulier au plus dans chaque cercle (γ).

L'ordre de cette famille est arbitraire et peut être aussi grand qu'on le veut comme le montre l'exemple de la suite des fonctions

$$f_n(z) = n\,[(z+2)^p - 2^p],$$

p désignant un entier.

On voit que la distance de deux points irréguliers ne peut être inférieure à ρ, car, dans le cercle (γ) ayant pour centre l'un des points irréguliers, il ne peut y en avoir d'autre puisque la famille est quasi normale d'ordre *un* dans ce cercle. Il résulte de là que si l'on fixe les valeurs de $f(z)$ en deux points dont la distance est inférieure à ρ, la famille est normale et bornée dans l'intérieur de (C), et il en est de même de la famille des dérivées premières. On en déduit comme précédemment que, dans (C'), on a

$$|f'(z)| \geqq \mu > 0,$$

si les valeurs fixées pour $f(z)$ sont différentes, car dans ce cas aucune fonction limite n'est une constante. On peut d'ailleurs toujours supposer que $f(0) = 0$.

Mais la réciproque n'est plus vraie. On peut fixer les valeurs de $f(z)$ en un nombre arbitraire de points, la condition relative à $f'(z)$ ne suffit plus à assurer que les fonctions sont également localement univalentes. On le voit aussitôt au moyen des fonctions extraites de la suite

$$f_n(z) = (z+2)^n - 2^n,$$

en prenant pour n les différentes puissances de 2. Pour $n = 2^m$, $f_n(z)$ est nulle aux points

$$2\left(e^{\frac{i\pi}{8}} - 1\right); \quad 2\left(e^{\frac{i\pi}{16}} - 1\right); \quad \ldots; \quad 2\left(e^{\frac{i\pi}{2^h}} - 1\right),$$

si m est assez grand quand h est donné; il suffit d'attribuer à k les valeurs 2^{m-4}, 2^{m-5}, $\ldots$, 2^{m-h-1}. Cependant la famille des fonctions $f_{2^m}(z)$ n'est pas également localement univalente.

Il peut paraître surprenant qu'en fixant les valeurs des fonctions en deux points seulement, la famille quasi normale des fonctions $f(z)$ devienne normale, alors qu'en général il faut fixer les valeurs de $f(z)$ en $p+1$ points si la famille est d'ordre p. Cela tient ici à la configuration particulière des points irréguliers dont les distances mutuelles dépassent ρ.

7. On sait que les fonctions univalentes dans un domaine (D) possèdent un « théorème de contraction » établi par M. Kœbe : dans tout domaine intérieur (D_1), on a l'inégalité double

$$\frac{1}{k} \leqq \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqq k,$$

z_1 et z_2 étant deux points du domaine. Il n'y a en réalité qu'une seule inégalité, la seconde se déduisant de la première. Nous allons voir que toute famille de fonctions également localement univalentes admet aussi un théorème de contraction. Cela tient au fait qu'on peut donner, du théorème de M. Kœbe, une démonstration ne faisant intervenir que les seules hypothèses suivantes : 1° la famille des dérivées premières est normale; 2° les dérivées ne s'annulent pas; 3° on peut remplacer $f(z)$ par $Cf(z)$, C désignant une constante.

Rappelons en effet cette démonstration : soit z_1 un point quelconque d'un domaine fixe (D_1) intérieur au premier, la famille $\frac{f'(z)}{f'(z_1)}$ est normale dans le domaine (D') intérieur à (D) et contenant (D_1); comme elle est bornée au point z_1, elle l'est dans (D_1) tout entier par un nombre k, on a donc, en un point quelconque z_2 de (D_1),

$$\left|\frac{f'(z_2)}{f'(z_1)}\right| \leqq k.$$

Il n'y a rien à changer à la démonstration si les fonctions $f(z)$ sont également localement univalentes dans un domaine puisque : 1° les dérivées premières forment une famille normale; 2° ces dérivées ne s'annulent pas; 3° on peut remplacer $f(z)$ par $Cf(z)$, la famille reste également localement univalente. Donc :

Toute famille de fonctions $f(z)$ également localement univalentes dans un domaine (D) *admet un théorème de contraction : dans tout domaine* (D_1) *intérieur à* (D), *on a les inégalités*

$$\frac{1}{k} \leqq \left|\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)}\right| \leqq k,$$

k désignant un nombre fixe qui ne dépend que de (D_1), *z_1 et z_2 désignant les affixes de deux points de* (D_1).

On peut toujours supposer que (D) désigne le cercle (C). Dans ce cas, pour $\rho = 1$, on retrouve le théorème de M. Kœbe.

Nous allons maintenant établir la réciproque de cette proposition et montrer que *le théorème de contraction caractérise les familles de fonctions également localement univalentes.*

Soit donc une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans le cercle

(C) et telle que dans tout cercle (C_1) on ait la double inégalité

$$\frac{1}{k} \leqq \left| \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \right| \leqq k.$$

Comme on peut remplacer $f(z)$ par $\frac{f(z)-f(0)}{f'(0)}$ sans changer l'hypothèse puisque $f'(z)$ ne peut s'annuler en un point sans s'annuler partout, auquel cas l'inégalité n'aurait pas de sens, on voit qu'on peut toujours supposer $f'(0) = 1$. L'inégalité donne alors

$$|f'(z_1)| \geqq \frac{1}{k};$$

on en conclut, d'après le théorème du paragraphe 4, que la famille est formée de fonctions également localement univalentes. Le module d'univalence est évidemment le même pour deux familles telles que les fonctions de l'une soient des combinaisons du premier degré $af(z) + b$, à coefficients constants, de celles de l'autre.

8. La famille des fonctions univalentes dans un domaine (D) admet un « théorème de rotation » établi par M. Bieberbach. Dans tout domaine intérieur (D_1), la fonction vérifie l'inégalité double

$$-h \leqq \arg \frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \leqq h,$$

l'argument étant convenablement choisi; h désigne une constante qui ne dépend que du domaine (D_1), z_1 et z_2 sont les affixes de deux points de ce domaine.

Ici encore, le théorème est applicable aux familles de fonctions également localement univalentes et caractérise ces familles.

Sa démonstration ne fait en effet intervenir que les hypothèses rappelées au paragraphe précédent, hypothèses qui sont communes à toutes les familles de fonctions d'égale univalence locale. Rappelons cette démonstration.

Considérons les fonctions $\log \frac{f'(z)}{f'(z_1)}$ définies par la condition que leur valeur est nulle au point z_1. Elles forment, comme les fonctions $\frac{f'(z)}{f'(z_1)}$, une famille normale et bornée dans (D_1), on en déduit que la partie réelle $\log\left|\frac{f'(z)}{f'(z_1)}\right|$ est bornée, ce qui établit de nouveau le théorème de contraction, et que la partie imaginaire est aussi bornée, ce qui permet d'écrire

$$-h \leqq \arg\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \leqq h.$$

Réciproquement, soit une famille de fonctions holomorphes $f(z)$ admettant un théorème de rotation. On peut toujours supposer que le domaine est le cercle-unité et que $f'(0)=1$, car $f'(z)$ ne peut s'annuler, sinon on pourrait choisir son argument, en suivant un chemin convenable qui amène z au zéro de $f'(z)$, de manière que l'inégalité ne soit pas vérifiée. On a alors en tout point z de (C') concentrique et intérieur à (C),

$$-\frac{\pi}{2} \leqq \arg[f'(z)]^{\frac{2h}{\pi}} \leqq \frac{\pi}{2};$$

la fonction $[f'(z)]^{\frac{2h}{\pi}}$ est déterminée par la condition d'être égale à l'unité à l'origine.

La famille des fonctions $[f'(z)]^{\frac{2h}{\pi}}$ admet comme espace lacunaire le demi-plan des abscisses négatives. Elle est donc normale dans (C_1) intérieur à (C') et bornée, puisque les fonctions sont bornées à l'origine. Il en est de même de la famille des fonctions $f'(z)$ qui, ne s'annulant pas et prenant en o la valeur 1, vérifient l'inégalité

$$|f'(z)| \geqq \mu > 0.$$

Ainsi : *toute famille de fonctions* $f(z)$ *également localement univalentes dans un domaine admet un théorème de rotation : dans tout domaine* (D_1) *intérieur à* (D), *on a les inégalités*

$$-h \leqq \arg\frac{f'(z_1)}{f'(z_2)} \leqq h,$$

h désignant un nombre fixe qui ne dépend que de (D_1), *z_1 et z_2 désignant les affixes de deux points de* (D_1).

Le théorème de rotation caractérise les familles de fonctions également localement univalentes.

En d'autres termes, pour qu'une famille de fonctions soit composée de fonctions également localement univalentes, il faut et il suffit que les fonctions de cette famille admettent un théorème de contraction ou un théorème de rotation.

9. Bien d'autres propriétés rapprochent les familles de fonctions également localement univalentes des familles de fonctions univalentes. Je me bornerai à en indiquer une.

Reprenons la famille (E) des fonctions

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle-unité où elles sont localement univalentes avec le module ρ. La famille de ces fonctions est normale et bornée et il en est de même des familles formées par les dérivées des divers ordres. Si l'on désigne par $M(r)$, $M_1(r)$, ..., $M_n(r)$, ..., les modules maxima de $f(z)$, $f'(z)$, ..., $f^{(n)}(z)$ ..., dans le cercle $|z| \leqq r$, ces nombres sont bornés par des fonctions de r et du module d'univalence ρ. En particulier, pour $r = 0$, on voit que les coefficients a_2, a_3, ..., a_n ... sont bornés par des nombres qui ne dépendent que de leur rang et du module ρ.

On aurait obtenu aussi ce dernier résultat en observant que les fonctions $f(z)$ sont toutes univalentes dans le cercle $|z| < \rho$ et que, par suite, les fonctions $f(\rho z)$ sont univalentes dans le cercle-unité. Comme

$$\frac{f(\rho z)}{\rho} = z + a_2 \rho z^2 + a_3 \rho^2 z^3 + \ldots + a_n \rho^{n-1} z^n + \ldots$$

est univalente dans ce cercle, on sait que ses coefficients sont bornés par des nombres $\varphi(n)$ et que, en particulier, $\varphi(2) = 2$, $\varphi(3) = 3$. On a donc

$$|a_2| \leqq \frac{2}{\rho}; \qquad |a_3| \leqq \frac{3}{\rho^2}; \qquad \ldots \qquad |a_n| \leqq \frac{\varphi(n)}{\rho^{n-1}}, \qquad \ldots,$$

mais il est facile de voir que ces limites ne sont pas atteintes. Par exemple, pour a_2, la limite ne peut être atteinte, comme on sait, que pour

$$\frac{f(\rho z)}{\rho} = \frac{z}{(1 - z)^2}$$

ou

$$f(z) = \frac{\rho^2 z}{(z - \rho)^2},$$

mais cette fonction n'est pas holomorphe dans le cercle-unité. La limite supérieure de $|a_2|$ est donc inférieure à $\frac{2}{\rho}$.

10. La définition des fonctions localement multivalentes d'ordre p découle naturellement de celle des fonctions univalentes localement : nous dirons qu'une fonction holomorphe dans un domaine (D) est *localement multivalente d'ordre p*, dans ce domaine, si elle est multivalente d'ordre p dans tout cercle (γ) de rayon ρ intérieur à (D). Nous dirons que cette fonction est localement multivalente d'ordre *p dans l'intérieur du domaine* (D), si elle est localement multivalente d'ordre p dans tout domaine (D_1) intérieur à (D). Le nombre ρ est appelé *module de multivalence :* il peut varier avec le domaine (D_1).

Pour qu'une fonction $f(z)$, holomorphe dans un domaine (D), *soit localement multivalente d'ordre p dans l'intérieur de ce domaine, il faut et il suffit que les dérivées*

$$f'(z), \quad f''(z), \quad \ldots, \quad f^{(p)}(z)$$

ne s'annulent pas simultanément en un point de (D).

La condition est nécessaire car, si ces dérivées s'annulaient toutes au point z_0, on aurait autour de ce point le développement

$$f(z) = f(z_0) + \frac{(z-z_0)^{p+q}}{(p+q)!} f^{p+q}(z_0) + \ldots \qquad (q \geqq 1)$$

et la fonction $f(z)$ prendrait, dans le voisinage de z_0, $p+q$ fois les valeurs voisines de $f(z_0)$.

La condition est suffisante, car, si elle est remplie, tout point d'un domaine (D_1), intérieur à (D) est le centre d'un cercle de rayon ρ' dans lequel la fonction est multivalente de l'un des ordres $1, 2, \ldots, (p-1), p$. On démontrerait, comme au paragraphe 2, que les nombres ρ' ont un minimum positif ρ. On en conclut que la fonction admet, dans chaque domaine intérieur à (D), un module ρ de multivalence locale d'ordre p.

Pour que la multivalence soit effectivement d'ordre p, il suffit qu'il existe un point au moins en lequel les dérivées d'ordres $1, 2, \ldots, (p-1)$ s'annulent simultanément.

Une condition suffisante de multivalence locale d'ordre p est que la dérivée $f^{(p)}(z)$ n'ait pas de zéro intérieur à (D). Mais cette condition n'est pas nécessaire. Par exemple, la fonction $z^2(z-1)$ est localement bivalente et sa dérivée seconde s'annule pour $z = \frac{1}{3}$.

11. Sans pousser plus loin l'étude des fonctions localement multivalentes en général, nous nous bornerons à celles pour lesquelles la dérivée $f^{(p)}(z)$ ne s'annule pas lorsque l'ordre de multivalence est p. De telles fonctions sont absolument multivalentes de classe zéro, au sens donné à ces mots pour les fonctions globalement multivalentes par M. Osaki ([1]).

Cela signifie que la propriété de multivalence locale n'est pas altérée si l'on ajoute à la fonction un polynome arbitraire de degré $(p-1)$ au plus. Nous dirons brièvement que la fonction est complètement multivalente d'ordre p. Pour les fonctions localement univalentes, l'univalence est toujours complète et l'on peut toujours ajouter une constante à la fonction. Il n'en est plus de même lorsque l'ordre de multivalence est supérieur à l'unité.

Pour qu'une fonction $f(z)$ soit multivalente d'ordre p d'une manière complète, il faut et il suffit que $f^{(p)}(z)$ ne s'annule pas.

La condition est, nous le savons, suffisante. Pour montrer qu'elle est nécessaire, supposons que $f^{(p)}(z)$ s'annule en un point z_0 du domaine. La fonction

$$f(z) - \frac{(z-z_0)}{1} f'(z_0) - \ldots - \frac{(z-z_0)^{p-1}}{(p-1)!} f^{(p-1)}(z_0) = g(z)$$

ne sera pas localement multivalente d'ordre p puisque l'on a

$$g'(z_0) = g''(z_0) = \ldots = g^{(p)}(z_0) = 0.$$

La fonction $f(z)$ ne serait donc pas multivalente localement d'ordre p d'une manière complète.

La notion de fonctions *également localement multivalentes d'ordre p* s'introduit de la même manière que celle de fonctions également loca-

---

(1) S. Osaki, *On the theory of multivalent functions* (*Science Reports of the Tokyo Bunrika Daigaku*, A, vol. 2. p. 167-188).

lement univalentes. Il faut seulement distinguer entre la multivalence ordinaire et la multivalence complète.

La multivalence locale d'ordre p se conserve par un passage uniforme à la limite et le module est conservé; si une limite uniforme est localement multivalente d'ordre p, les fonctions de la suite sont également localement multivalentes d'ordre p, sauf peut-être un nombre fini d'entre elles. Il faut toutefois excepter des fonctions limites, les constantes lorsque la multivalence est ordinaire et les polynomes de degré inférieur à p, lorsque la multivalence est complète. Les démonstrations se déduisent *mutatis mutandis* de celles du paragraphe 3.

12. Dans tout ce qui va suivre, nous ne nous occuperons que de multivalence complète. Une famille de fonctions multivalentes d'ordre p dans un domaine est une famille quasi normale d'ordre p. Cette famille devient normale si l'on fixe les valeurs des fonctions en $p+1$ points, où si l'on fixe en un point les valeurs de la fonction et de ses p premières dérivées (¹). De même, une famille de fonctions également localement multivalentes d'ordre p est une famille quasi normale d'ordre quelconque dans l'intérieur du domaine; cette famille est normale si l'on fixe les valeurs des fonctions en $p+1$ points situés dans un même cercle intérieur de rayon ρ, ou si l'on fixe en un point les valeurs de la fonction et de ses p premières dérivées. On le verrait comme au paragraphe 4.

Lorsque la multivalence est complète, la famille des dérivées d'ordre p est toujours normale. Montrons en effet que cette famille est normale autour de chaque point z_0 du domaine. Soit

$$P(z)=f(z_0)+(z-z_0)\,f'(z_0)+\ldots+\frac{(z-z_0)^{p-1}}{(p-1)!}\,f^{(p-1)}(z_0);$$

la famille des fonctions

$$g(z)=p\,!\,\frac{f(z)-P(z)}{f^{(p)}(z_0)}=(z-z_0)^p+\ldots$$

est normale et bornée dans le cercle (γ) de centre z_0 : en effet, les

---

(¹) *Cf.* P. MONTEL, *Sur les familles quasi normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Académie Royale de Belgique*, 2ᵉ série, t. 6, 1922, p. 1-41).

fonctions $g(z)$ forment une famille quasi normale d'ordre p dans ce cercle, et cette famille est normale et bornée, puisque les valeurs $g(z_0)$, $g'(z_0)$, ..., $g^{(p-1)}(z_0)$, $g^{(p)}(z_0)$ sont fixes. Donc, la famille des fonctions $g^{(p)}(z)$ est normale et bornée. Comme on a

$$f^{(p)}(z) = \frac{f^{(p)}(z_0)}{p!} g^{(p)}(z),$$

on voit que la famille des dérivées $f^{(p)}(z)$ est aussi normale.

On en tire des conclusions analogues à celles que l'on a obtenues pour les fonctions localement univalentes. On en déduit en particulier la proposition suivante :

Pour que la famille des fonctions

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle (C), *soit formée de fonctions également localement multivalentes d'ordre p d'une manière complète, il faut et il suffit que, dans tout cercle* (C_1), *on ait l'inégalité*

$$|f^{(p)}(z)| \geqq \mu > 0,$$

μ *désignant une constante.*

13. Les fonctions également localement multivalentes d'ordre p d'une manière complète dans l'intérieur d'un domaine (D) sont caractérisées, à un polynome additif près de degré inférieur à p, par un théorème de contraction ou par un théorème de rotation portant sur la dérivée d'ordre $p - 1$. On démontre, en effet, en suivant la marche indiquée dans les paragraphes 7 et 8, la proposition suivante :

Soit une famille de fonctions $f(z)$ holomorphes dans un domaine (D) *où elles sont également localement multivalentes d'ordre p d'une manière complète. Dans tout domaine* (D_1) *intérieur, la double inégalité*

$$\frac{1}{k_p} \leqq \left| \frac{f^{(p)}(z_1)}{f^{(p)}(z_2)} \right| \leqq k_p$$

est vérifiée; k_p désigne un nombre fixe avec (D_1), *z_1 et z_2 sont les affixes de deux points de* (D_1).

La double inégalité

$$-h_p \leqq \arg \frac{f^{(p)}(z_1)}{f^{(p)}(z_2)} \leqq h_p$$

est aussi vérifiée; h_p désignant un nombre fixe avec (D_1).

Réciproquement, si l'un ou l'autre de ces groupes d'inégalités est vérifié dans tout domaine (D_1), *la famille est formée de fonctions également localement multivalentes d'ordre p d'une manière complète, à un polynome additif près, de degré inférieur à p, qui peut varier avec la fonction.*

On ne considère pas comme distinctes deux familles de fonctions telles que chaque fonction de l'une des familles se déduise d'une fonction de l'autre famille par addition d'une constante et multiplication par une constante.

14. Reprenons la famille des fonctions

$$f(z) = z^p + a_{p+1} z^{p+1} + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$

holomorphes dans le cercle-unité, également localement multivalentes d'ordre p d'une manière complète.

On établit, en suivant la voie indiquée au paragraphe 9, que, dans tout cercle concentrique de rayon $r < 1$, les modules maxima $M(r)$, $M_1(r)$, ..., $M_n(r)$, ..., de la fonction et de ses dérivées sont bornés par des fonctions de r ne dépendant que du module ρ. En particulier, pour $r = 0$, on en déduit que les modules des coefficients a_{p+1}, a_{p+2}, ..., a_n, ... sont bornés par des nombres qui ne dépendent que du rang n et du module ρ.