PAUL LEVY

Sur les exponentielles de polynômes et sur l'arithmétique des produits de lois de Poisson

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 54 (1937), p. 231-292
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1937_3_54__231_0>

SUR LES

EXPONENTIELLES DE POLYNOMES

ET SUR

L'ARITHMÉTIQUE DES PRODUITS DE LOIS DE POISSON

PAR M. PAUL LÉVY.

Introduction. — Le premier Chapitre du présent travail a pour objet l'étude des séries entières représentant les fonctions de la forme $F(x)=e^{P(x)}$, $P(x)$ étant un polynome. Nous montrerons que, même en dehors du cas trivial où tous les coefficients de $P(x)$, sauf peut-être le terme constant, sont non négatifs, il est possible que la série entière qui représente $F(x)$ ait tous ses coefficients non négatifs.

Nous n'avons pas cherché à arriver aussi vite que possible à ce résultat. Notre méthode repose sur une relation de récurrence vérifiée par les coefficients de la série entière $F(x)$. L'étude de cette relation nous a paru assez intéressante par elle-même pour que nous nous proposions d'étudier sa solution générale, en faisant d'abord abstraction aussi bien des propriétés particulières de la solution liée à $F(x)$ que de la possibilité d'utiliser une condition dont nous montrons dès le début qu'elle est nécessaire pour que tous les coefficients de $F(x)$ soient non négatifs.

Le résultat fondamental est le théorème II, qui établit l'existence des polynomes $P(x)$ ayant la propriété indiquée et donne le moyen de les former : deux conditions nécessaires relatives aux signes des coefficients étant supposées vérifiées, il suffit que les coefficients négatifs soient assez petits. Nous terminerons le Chapitre I par quelques remarques sur les polynomes minima, c'est-à-dire ceux dont on ne peut diminuer aucun coefficient sans que la propriété considérée cesse d'être vérifiée.

Le Chapitre II est consacré à l'application des résultats obtenus à l'arithmétique des lois de probabilité, et spécialement des produits de lois de Poisson. Quoiqu'il s'agisse d'une application immédiate, nous l'avons séparée nettement, afin de ne pas détourner de la lecture du premier Chapitre les analystes que le calcul des probabilités pourrait ne pas intéresser. Mais à notre avis c'est cette application qui donne au problème traité dans le Chapitre I un intérêt que n'aurait pas un problème d'analyse artificiellement posé. D'ailleurs il s'agit, même dans le Chapitre II, de questions dans lesquelles, si l'on ne craint pas d'exagérer ce caractère artificiel et de masquer l'intérêt véritable du problème, on peut parler le langage de l'analyse pure et oublier l'application au calcul des probabilités.

Les principaux résultats établis dans le présent travail ont été énoncés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences le 22 mars et le 19 avril 1937.

CHAPITRE I.

LES SÉRIES ENTIÈRES REPRÉSENTANT LES EXPONENTIELLES DE POLYNOMES.

1. Énoncés des problèmes étudiés et remarques préliminaires. — Le problème dont l'étude est l'objet de ce chapitre, et que nous appellerons *problème fondamental*, est le suivant : *définir les conditions que doit vérifier un polynome réel* $P(x)$ *pour que la série entière*

$$F(x) = e^{P(x)} = A_0 + A_1 x + \ldots + A_n x^n + \ldots \tag{1}$$

ait tous ses coefficients non négatifs.

L'addition d'une constante à $P(x)$ étant sans effet sur les signes des A_n, nous pouvons supposer ce polynome sans terme constant (donc $A_0 = 1$). S'il contient au moins un terme non constant, il est donc de la forme

$$P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p \qquad (p \text{ entier } > 0;\ a_p \neq 0). \tag{2}$$

Une condition évidemment nécessaire (mais non suffisante) pour notre problème est que a_p soit positif; il faut en effet que $F(x)$ augmente indéfiniment avec x. Une condition suffisante (mais qui, comme nous le verrons, n'est pas nécessaire, si $p > 3$) est que tous les a_m soient non négatifs. Notre théorème II donnera la solution de ce problème fondamental; sa démonstration repose sur la résolution d'un *problème préliminaire : définir les conditions que doit vérifier* $P(x)$ *pour que la série* (1) *ait au plus un nombre fini de coefficients négatifs*. La solution de ce nouveau problème repose elle-même sur l'étude des propriétés asymptotiques de la suite des A_n; une fois qu'il sera résolu, et que nous aurons montré comment on peut déterminer, lorsque les conditions trouvées sont réalisées, un nombre N tel que pour $n > N$ on ait $A_n \geqq 0$, la résolution du problème fondamental ne présentera plus de difficulté.

Nous désignerons par $P_m(x)$ la somme des termes de $P(x)$ dont les degrés ne dépassent pas m; par $\overline{P}(x)$ et $\overline{P}_m(x)$ les sommes des termes à coefficients positifs de $P(x)$ et de $P_m(x)$; par δ, δ_m et δ'_m (pour $m < p$) les plus grands communs diviseurs des degrés des termes non nuls de $P(x)$, $P(x) - P_m(x)$ et $\overline{P}(x) - \overline{P}_m(x)$.

Nous appellerons *condition* $\mathfrak{A}$ la condition suivante : *pour tout entier* m *tel que* a_m *soit négatif*, δ_m *existe et divise* m; *la condition* $\mathfrak{A}'$ sera définie de la même manière, δ_m étant seulement remplacé par δ'_m [1].

Les conditions $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{A}'$, *bien que la seconde soit en apparence plus restrictive, sont équivalentes*. En effet, δ_m divisant δ'_m, si m est multiple de δ'_m, il l'est *a fortiori* de δ_m; donc $\mathfrak{A}'$ entraîne $\mathfrak{A}$. La réciproque résulte de ce que, si $\mathfrak{A}$ est vérifié, on a $\delta_m = \delta'_m$, pour $m = 1, 2, \ldots, p-1$. En effet, en partant de $\delta_{p-1} = p$, $\delta_{p-2}, \ldots, \delta_1$ sont définis successivement par la règle suivante : si $a_m = 0$, $\delta_{m-1} = \delta_m$; si $a_m \neq 0$,

---

[1] Nous précisons que δ_m (ou δ'_m) existe pour écarter toute ambiguïté relativement au cas où $m = p$, cas où les définitions de δ_m et δ'_m sont dépourvues de sens. Les conditions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{A}'$ ainsi énoncées impliquent donc que a_p soit positif, condition évidemment nécessaire, non seulement, comme nous l'avons déjà indiqué, pour le problème fondamental, mais pour le problème préliminaire.

Pour conserver à notre exposé un caractère aussi élémentaire que possible, nous avons évité d'employer le langage de la théorie des idéaux. Les lecteurs qui connaissent cette théorie verront aisément les avantages qu'aurait présentés l'emploi de ce langage.

δ_{m-1} est le p. g. c. d. de m et δ_m. Or, si $a_{m-1} < 0$, d'après la condition $\mathfrak{A}$, ce p. g. c. d. n'est autre que δ_m et la définition donnée équivaut à : si $a_m \leqq 0$, $\delta_{m-1} = \delta_m$; si $a_m > 0$, δ_{m-1} est le p. g. c. d. de m et δ_m; c'est précisément la règle qui définit successivement les δ'_m, en partant de $\delta'_{p-1} = \delta_{p-1} = p$ (car $a_p > 0$); on a donc toujours $\delta'_m = \delta_m$,

C. Q. F. D.

Cette condition $\mathfrak{A}$, dont on remarque qu'elle ne dépend que de la répartition des a_m en trois groupes, contenant respectivement ceux qui sont positifs, nuls et négatifs, est la condition nécessaire et suffisante pour notre problème préliminaire. D'une manière plus précise, nous établirons le résultat suivant :

Théorème I. — *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe un nombre* N *tel que l'on ait* $A_n \geqq 0$ *pour* $n > N$ (et même $A_n > 0$ si de plus n est multiple de δ) *est que, pour tout m tel que a_m soit négatif, δ_m existe et divise m* (c'est notre condition $\mathfrak{A}$). *Si cette condition est vérifiée, et si l'on fait varier les coefficients non nuls de* $P(x)$, *pourvu que tous leurs modules soient bornés supérieurement, et que l'on connaisse des bornes inférieures positives pour un ensemble de coefficients comprenant a_p et suffisant pour la condition* $\mathfrak{A}$ (¹), *on peut déterminer* N *de manière que la propriété indiquée* ($A_n \geqq 0$ pour $n > N$) *soit vérifiée d'une manière uniforme pour l'ensemble des polynomes* $P(x)$ *ainsi obtenus.*

La démonstration du fait que la condition $\mathfrak{A}$ soit nécessaire est bien simple. Nous avons déjà observé qu'il faut que a_p soit positif. Cette première condition étant supposée vérifiée, si la condition $\mathfrak{A}$ ne l'est pas, cela signifie qu'il existe au moins un entier m compris entre 0 et p, tel que $a_m < 0$, et que δ_m ne divise pas m. Soit alors ρ une racine primitive de $\rho^{\delta_m} = 1$; on a $\rho^m \neq 1$. Les polynomes $P(x)$ et $P(\rho x)$ ayant les mêmes termes de degrés supérieurs à m (puisque ces degrés sont multiples de δ_m), on a, pour x infini positif,

$$\log \frac{F(x)}{F(\rho x)} = P(x) - P(\rho x) \sim a_m(1 - \rho^m) x^m,$$

(¹) Nous entendons par là qu'on peut annuler les autres coefficients positifs sans que cette condition cesse d'être vérifiée.

et, a_m étant négatif, et la partie réelle de $1-\rho^m$ étant positive

$$F(x)=o[F(\rho x)],$$

ce qui implique que la suite des coefficients A_n ait une infinité de changements de signes. La condition $\mathfrak{A}$ est donc bien une condition nécessaire pour notre problème.

Nous allons maintenant entreprendre l'étude asymptotique des A_n, qui nous permettra de montrer que cette condition est aussi suffisante.

2. **Les formules de récurrence.** — Observons d'abord que, a_p étant positif (si la condition nécessaire $\mathfrak{A}$ est vérifiée), le changement de x en cx permet de supposer $a_p=1$; de même le remplacement de x^δ par x permet de supposer $\delta=1$. Nous ferons ces hypothèses. Nous ne reviendrons qu'incidemment sur celle relative à δ; il est évident que, si $\delta>1$, $F(x)$ est une série entière en x^δ; les coefficients des puissances dont les exposants ne sont pas multiples de δ sont nuls et les propriétés établies dans le cas où $\delta=1$ s'appliquent sans difficulté aux autres. Quant à l'hypothèse $a_p=1$, elle ne sert qu'à simplifier quelques formules; dans tout théorème établissant une propriété invariante par le changement de x en $cx (c>0)$, elle peut être remplacée par $a_p>0$, condition comprise dans notre condition $\mathfrak{A}$.

On a évidemment

$$F'(x)=F(x)P'(x); \tag{3}$$

d'où, en égalant les termes en x^{p+n-1} dans les deux membres

$$(n+p)A_{n+p}=pa_pA_n+(p-1)a_{p-1}A_{n-1}+\ldots+a_1A_{n+p-1} \tag{4}$$
$$(n=0,1,\ldots).$$

Comme nous n'avons pas tenu compte des termes de degrés inférieurs à $p-1$, cette relation de récurrence ne suffit pas à définir les coefficients de la série entière représentant $F(x)$. Si $p>1$ (ce qu'on peut supposer, le cas $p=1$ étant trivial), elle exprime seulement que les A_n sont les coefficients de la série entière représentant une solution d'une quelconque des équations différentielles

$$\frac{dy}{dx}-yP'(x)=Q(x), \tag{5}$$

où $Q(x)$ est un polynome de degré $p-2$. Cette équation s'intègre par la formule

$$y = e^{P(x)}\left[c + \int_{x}^{x} e^{-P(t)}Q(t)\,dt\right], \tag{6}$$

qui définit des fonctions entières dépendant linéairement de p paramètres, c et les coefficients de $Q(x)$. On remarque que celles qui correspondent à une valeur nulle de c, qui dépendent donc encore de $p-1$ paramètres, s'annulent pour x infini positif.

Nous allons maintenant étudier les propriétés asymptotiques de la suite des A_n déduites de la formule de récurrence (3). Ces propriétés, complétées ensuite par la remarque que $F(x)$ augmente indéfiniment avec x, ce qui distingue cette fonction des solutions de l'équation (5) pour lesquelles $c=0$, nous permettront de démontrer le théorème I.

Transformons d'abord la formule (4). En posant

$$B_n = A_n\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right), \tag{7}$$

$$\lambda_h = \lambda_h^{(n)} = a_{p-h}\varphi_h(n) = a_{p-h}\frac{p-h}{p}\,\frac{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)}{\Gamma\left(\frac{n+h}{p}+1\right)} \quad (^1) \tag{8}$$

$$(h=1,\,2,\,\ldots,\,p-1),$$

multipliant les deux membres de la formule (4) par $\frac{1}{p}\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)$, et faisant l'hypothèse $a_p=1$, on obtient la relation de récurrence transformée

$$B_{n+p} - B_p = \lambda_1 B_{n+1} + \lambda_2 B_{n+2} + \ldots + \lambda_{p-1}B_{n+p-1}. \tag{9}$$

Les propriétés des fonctions $\varphi_h(n)$, déduites du développement asymptotique bien connu de la fonction eulérienne, dont nous aurons besoin, sont les suivantes : $\varphi_h(n)$ est, pour n infini, développable en série suivant les puissances croissantes de l'infiniment petit $n^{-\alpha}\left(\alpha=\frac{1}{p}\right)$; la divergence de cette série est sans importance; il suffit pour la suite d'écrire les premiers termes, jusqu'au terme en $\frac{1}{n^2}$, et

(1) Pour $\lambda_h^{(n)}$, et plus loin pour $q_h^{(n)}$, nous supprimerons l'indice supérieur quand il n'y aura aucune ambiguïté à craindre.

d'observer que l'erreur commise peut être majorée par une expression telle que $\frac{K}{n^2}$, terme général d'une série convergente. Les valeurs principales de $\varphi_h(n)$ et de $\varphi_h(n+1)-\varphi_h(n)$ sont d'ailleurs

$$\varphi_h(n) \sim \frac{p-h}{p}\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{h}{p}}, \tag{10}$$

$$\Delta\varphi_h(n) = \varphi_h(n+1) - \varphi_h(n) \sim -\frac{h(p-h)}{p^2 n}\left(\frac{p}{n}\right)^{\frac{h}{p}}. \tag{11}$$

Cette dernière expression est donc le terme général d'une série absolument convergente. Sans utiliser les développements asymptotiques dont nous venons de parler, la formule (10) et cette conséquence de la formule (11) se déduisent aisément de la relation bien connue $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ et du fait que, pour x positif, $\log\Gamma(x)$ est une fonction convexe, de sorte que $\varphi_h(n)$ est une fonction décroissante de n.

On remarque que les fonctions $\varphi_h(n)$, et par suite ceux des λ_h dans lesquels le premier facteur a_{p-h} n'est pas nul, sont des infiniment petits dont l'ordre croît avec h.

3. **L'équation caractéristique.** — Considérons l'équation (9), *pour une valeur déterminée de n*; il n'importe alors pas que les coefficients λ_h varient ou non avec n, et l'on peut lui appliquer les méthodes connues de la théorie des équations de récurrence linéaires et à coefficients constants. On est ainsi conduit à chercher les solutions de la forme

$$B_{n+\nu} = q^\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p). \tag{12}$$

En portant cette expression des $B_{n+\nu}$ dans l'équation (9), on obtient *l'équation caractéristique*

$$q^p - 1 = \lambda_1 q + \lambda_2 q^2 + \ldots + \lambda_{p-1} q^{p-1}. \tag{13}$$

Les λ_h tendant vers zéro, cette équation admet p racines, distinctes pour n assez grand, et tendant respectivement, pour n infini, vers les limites

$$r_k = r^k = e^{\frac{2k\pi i}{p}} \qquad (r = r_1;\ k \text{ défini mod } p).$$

Supposons alors n supérieur à un nombre assez grand n_0, et désignons par $q_k = q_k^{(n)}$ la racine de l'équation (13) la plus voisine de r_k; il y a dans ces conditions une racine réelle positive, q_0, et une seule; si p est pair, il y a une racine réelle négative, et une seule; les autres racines sont distinctes, et imaginaires conjuguées deux à deux, q_k et q_l étant conjugués si $k + l = 0 \pmod p$.

Il nous faut, avant de pousser plus loin l'étude de l'équation (9), étudier certaines propriétés asymptotiques (pour n infini) des racines de l'équation caractéristique, et des produits

$$(14) \qquad Q_k = Q_k^{(n)} = q_k^{(n_0+1)} q_k^{(n_0+2)} \dots q_k^{(n)} \qquad (n > n_0),$$

qui joueront un grand rôle dans la suite; Q_0 est réel et positif, et Q_k et Q_{-k} sont toujours, soit réels et égaux [si $2k = 0 \pmod p$], soit imaginaires conjugués.

1° Chacun des q_k est une fonction algébrique de $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{p-1}$, holomorphe lorsque ces paramètres sont assez petits; il est donc développable en série suivant les puissances croissantes de $n^{-\alpha}$ $\left(\alpha \text{ désignant toujours } \frac{1}{p}\right)$. Les expressions $|q_k| - 1$ et $\log |q_k| = \mathcal{R}(\log q_k)$ ont donc des développements de la même forme, sans termes constants, et, pour chacun des produits (14) on trouve un développement de la forme

$$(15) \quad \log |Q_k| = \beta_1 n^{1-\alpha} + \beta_2 n^{1-2\alpha} + \dots + \beta_{p-1} n^{\alpha} + \beta_p \log n + \beta' + o(1);$$

β_h et β' dépendent naturellement de k; on peut remarquer que $\sum_k \beta_h = 0$; c'est une conséquence évidente de la relation $|q_1 q_2 \dots q_p| = 1$.

En posant alors

$$(14') \qquad |Q_k^{(n)}| = R(n, k, l) \, |Q_l^{(n)}|,$$

on voit que les différents rapports $R(n, k, l)$ peuvent être infiniment grands, ou infiniment petits, ou avoir des limites positives; ils ne sont jamais indéterminés.

Les p racines de l'équation caractéristique se répartissent donc en groupes, caractérisés chacun par un système de valeurs des coefficients $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_p$ (mais non β'); nous parlerons indifféremment d'un groupe de racines q_k ou du groupe des indices k qui leur correspondent. Si k et l appartiennent au même groupe, le rapport $R(n, k, l)$ tend vers une limite positive; dans le cas contraire il est infiniment petit ou infiniment grand.

Deux racines imaginaires conjuguées, q_k et $q_{-k} = \overline{q_k}$, appartiennent évidemment à un même groupe; les produits $Q_k^{(n)}$ et $Q_{-k}^{(n)}$, étant imaginaires conjugués, ont même module. Il est évident aussi que, si $\delta > 1$, l'équation (13) est une équation en q^δ, de sorte que, si $\delta(k-l) = 0 \pmod p$, q_k et q_l correspondent à une même valeur de q^δ, et ont même module. On pourrait se demander s'il est possible que deux indices entre lesquels n'existe aucune des relations $\delta(k+l) = 0$ et $\delta(k-l) = 0 \pmod p$ appartiennent à un même groupe. Nous verrons que la réponse est affirmative, et d'autre part que, si $\delta = 1$, le groupe contenant une racine réelle n'en contient aucune autre (le changement de x en $-x$ ramène évidemment le cas de la racine négative, quand elle existe, à celui de la racine positive; il nous suffira de considérer ce dernier cas).

2° Désignons par ρ le plus petit entier positif tel que $a_{p-\rho}$ ne soit pas nul; $\lambda_\rho q^\rho$ est alors le terme principal au second membre de l'équation (13), et, pour chacune des racines q_k de cette équation, définit la valeur principale de $q_k^p - 1$. Posons

$$q_k = r_k(1 + \varepsilon_k). \tag{16}$$

Comme ε_k tend vers zéro, pour n infini, en remplaçant q par cette expression dans l'équation (13), égalant les valeurs principales des deux membres, et tenant compte de l'expression (8) de λ_h, on trouve

$$p\varepsilon_k \sim a_{p-\rho}\, \varphi_\rho(n) r_k^\rho, \tag{17}$$

et par suite

$$\log(1 + \varepsilon_k) = \frac{1}{p} a_{p-\rho} \varphi_\rho(n) r_k^\rho + o(n^{-\alpha\rho});$$

d'où, en égalant les parties réelles des deux membres,

$$\log|q_k| \sim |q_k| - 1 = \frac{1}{p} a_{p-\rho} \varphi_\rho(n) \cos\frac{2k\rho\pi}{p} + o(n^{-\alpha\rho}). \tag{18}$$

Si alors $\frac{4k\rho}{p}$ n'est pas un entier impair, le premier terme non nul du développement (15), compte tenu de la formule (10), s'écrit

$$a_{p-\rho}\left(\frac{n}{p}\right)^{1-\rho\alpha} \cos\frac{2k\rho\pi}{p}. \tag{19}$$

Si $\rho = 1$ [cas général, si l'on considère $P(x)$ comme un polynome de degré donné à coefficients arbitraires, puisque cette hypothèse équivaut à $a_{p-1} \neq 0$] ou si ρ est premier avec p, cette formule suffit à définir la répartition des indices k entre les différents groupes dont nous parlions tout à l'heure. Les développements (15) relatifs à deux indices différents k et l se différencient en effet par les premiers termes non nuls, sauf si $l = -k \pmod p$, cas où $Q_k^{(n)}$ et $Q_l^{(n)}$ sont imaginaires conjugués.

Si ρ et p ont un diviseur commun, le premier terme du développement (15) ne suffit pas pour définir les ordres de grandeur relatifs des $|Q_k^{(n)}|$. Il faut considérer les termes suivants.

3° Ce qui est essentiel pour la suite est le classement relatif du produit $Q_0^{(n)}$, correspondant à la racine réelle positive de l'équation caractéristique, et de $Q_k^{(n)}$ $(0 < k < p)$. Si, pour comparer d'abord q_0 et q_k, dans chacun des termes $\lambda_h q^h$ de l'équation caractéristique, nous substituons successivement les valeurs q_0 et q_k de q, nous pouvons trouver d'abord des termes nuls, ou dont les valeurs principales λ_h et $\lambda_h r_k^h$ soient égales. Le terme qui va jouer le rôle essentiel est le premier terme pour lequel ces deux valeurs principales soient différentes. Ce sera donc le terme $\lambda_\sigma q^\sigma$, $\sigma = \sigma_k$ étant le plus petit entier positif tel qu'on ait à la fois

$$(20) \qquad a_{p-\sigma} \neq 0, \qquad r_k^\sigma \neq 1 \qquad \left(\text{donc } \cos\frac{2k\sigma\pi}{p} < 1\right).$$

Il existe un tel terme, si $\delta = 1$ (hypothèse que nous pouvons faire, comme nous l'avons fait remarquer plus haut); en effet, $r_k^h = 1$, pour tous les h tels que $a_{p-h} \neq 0$, entraînerait $r_k^\delta = r_k = 1$, ce qui est contraire à l'hypothèse $0 < k < p$.

Retranchons maintenant l'une de l'autre les deux égalités obtenues en substituant $q_0 = 1 + \varepsilon_0$ et $q_k = r_k(1 + \varepsilon_k)$ dans l'équation caractéristique. Compte tenu de ce que $r_k^h = 1$ entraîne

$$(21) \qquad q_0^h - q_k^h = (1 + \varepsilon_0)^h - (1 + \varepsilon_k)^h \sim h(\varepsilon_0 - \varepsilon_k) \qquad (n \to \infty),$$

nous voyons d'abord que la valeur principale du premier membre est $p(\varepsilon_0 - \varepsilon_k)$, tandis qu'au second membre la valeur principale des termes auxquels s'applique la formule (21) est $o(\varepsilon_0 - \varepsilon_k)$; on ne change pas la valeur principale du premier membre en retranchant ces termes des deux membres. La valeur principale du second membre est alors

$$\lambda_\sigma(q_0^\sigma - q_k^\sigma) \sim \lambda_k^\sigma(1 - r_k^\sigma),$$

et il vient

$$(22) \qquad \varepsilon_0 - \varepsilon_k \sim \frac{1}{p} a_{p-\sigma}\, \varphi_\sigma(n)\,(1 - r_k^\sigma),$$

et par suite, en tenant compte de ce que la partie réelle du second membre n'est pas nulle,

$$(23) \qquad \begin{aligned} \log q_0 - \log|q_k| &= \mathcal{R}[\log(1+\varepsilon_0) - \log(1+\varepsilon_k)] \\ &= \mathcal{R}(\varepsilon_0 - \varepsilon_k) + o(\varepsilon_0 - \varepsilon_k) \\ &\sim \frac{1}{p} a_{p-\sigma}\, \varphi_\sigma(n)\left(1 - \cos\frac{2k\sigma\pi}{p}\right). \end{aligned}$$

Cette différence, et par suite l'infiniment petit équivalent $|q_0 - q_k|$, sont donc du signe de $a_{p-\sigma}$, et leur ordre par rapport à l'infiniment petit principal $\frac{1}{n}$ est $\alpha\sigma < 1$. En introduisant les produits $Q_0^{(n)}$ et $Q_k^{(n)}$, et tenant compte de la formule (10), on trouve

$$(24) \qquad \log Q_0^{(n)} - \log|Q_k^{(n)}| \sim a_{p-\sigma}\left(\frac{n}{p}\right)^{1-\sigma\alpha}\left(1 - \cos\frac{2k\sigma\pi}{p}\right).$$

Cette expression est toujours infinie avec n, et du signe de $a_{p-\sigma}$. Donc $Q_0^{(n)}$ et $Q_k^{(n)}$ ne sont jamais du même ordre de grandeur, c'est-à-dire que dans le groupement des racines q_k de l'équation caractéristique définie plus haut, si $\delta = 1$, la racine réelle positive q_0 n'est groupée avec aucune autre; la plus grande des expressions considérées est $Q_0^{(n)}$, si $a_{p-\sigma} > 0$, et $Q_k^{(n)}$, si $a_{p-\sigma} < 0$. Naturellement, si $\delta > 1$, les modules des racines q_k correspondant à une même valeur de q_k^δ sont égaux, et, pour la comparaison des différentes valeurs de q_k^δ, le résultat précédent subsiste.

On en déduit aisément le résultat suivant :

Lemme I. — *Si la condition $\mathcal{A}$ est vérifiée, et si $\delta = 1$, q_0 est, pour n assez grand, la racine de plus grand module de l'équation caractéristique, et tous les $Q_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ sont $o[Q_0^{(n)}]$; si la condition $\mathcal{A}$ n'est pas vérifiée, il y a au moins un indice k tel que $|q_k|$ soit pour n assez grand supérieur à q_0, et $Q_0^{(n)} = o[Q_k^{(n)}]$; comme dans le cas* *précédent, si* $\delta = 1$, *le groupe de racines comprenant la racine réelle positive* q_0 *n'en comprend aucune autre.*

D'après ce qui précède, pour démontrer ce lemme, il suffit de démontrer que, a_p étant supposé positif, la condition $\mathcal{A}$ équivaut à la condition $\mathcal{A}''$ définie comme suit : tous les coefficients $a_{p-\sigma}$ obtenus en donnant successivement à k les valeurs $1, 2, \ldots, p-1$ ($\sigma = \sigma_k$ dépendant de k), sont positifs.

Pour le montrer, supposons d'abord la condition $\mathcal{A}''$ en défaut pour un certain indice k; $a_{p-\sigma}$ est alors négatif. D'après la définition de σ, si un entier $p' = p - h$ vérifie les conditions

$$0 \leqq h < \sigma, \qquad a_{p'} \neq 0,$$

c'est-à-dire s'il est le degré d'un terme non nul de $P(x) - P_m(x)$ $(m = p - \sigma)$, on a $r_k^h = 1$; d'où $r_k^{p'} = 1$. Par suite, δ_m étant le p.g.c.d. de tous les nombres p' vérifiant ces conditions, on a

$$r_k^{\delta_m} = 1, \tag{25}$$

et la seconde formule (20) montre que σ, et par suite m, ne sont pas multiples de δ_m; la condition $\mathcal{A}$ n'est donc pas vérifiée. Réciproquement, si δ_m ne divise pas m, et si r_k est une racine primitive de l'équation (25), tous les nombres $r_k^{p'}$ sont égaux à l'unité, mais non r_k^m et r_k^σ; si alors a_m n'est pas nul, σ est, pour l'indice k considéré, le plus petit entier positif vérifiant les conditions (20). Il y a donc identité entre l'ensemble $\mathcal{E}''$ des nombres $m_k = p - \sigma_k$ $(k = 1, 2, \ldots, p-1)$ et l'ensemble $\mathcal{E}$ des nombres m inférieurs à p et tels que a_m ne soit pas nul et que δ_m ne divise pas m. Compte tenu de l'hypothèse $a_p > 0$, la condition $\mathcal{A}''$, qui exprime que a_m est positif si m appartient à $\mathcal{E}''$, est donc identique à la condition $\mathcal{A}$, qui exprime la même propriété pour l'ensemble $\mathcal{E}$ complété par le nombre p.

La condition $\mathcal{A}$, qui joue ainsi un rôle essentiel, ne dépend que des signes des coefficients de $P(x)$. Mais la valeur de n à partir de laquelle q_0 est la racine de plus grand module de l'équation caractéristique, dépend de leurs valeurs absolues. Nous allons établir à ce sujet le résultat suivant :

Lemme II. — *Si* $\delta = 1$, *et si la condition* $\mathcal{A}$ *est vérifiée, pour déterminer un nombre* N' *tel que, pour* $n > N'$, *la racine de plus grand module de l'équation caractéristique soit la racine réelle positive* q_0, *il suffit de* *connaître des bornes supérieures des modules de tous les coefficients, et des bornes inférieures positives pour un ensemble de coefficients positifs comprenant a_p et suffisant pour la condition* $\mathfrak{A}$ (c'est-à-dire que cette condition reste vérifiée si on annule les autres coefficients positifs).

Nous pouvons toujours supposer $a_p = 1$; la valeur initiale de ce coefficient étant par hypothèse comprise entre deux nombres positifs connus, si on le ramène à la valeur un (par un changement de x en cx), tous les autres coefficients sont multipliés par des facteurs positifs bornés inférieurement et supérieurement.

Reportons-nous alors à la formule (23); il peut arriver que le coefficient $a_{p-\sigma}$ qui y figure ne soit pas un de ceux dont on connaisse une borne inférieure; dans ce cas, la condition $\mathfrak{A}$ subsistant par hypothèse si on annule ce coefficient, ainsi que tous les autres coefficients positifs non bornés inférieurement, l'aspect de cette formule ne change pas si l'on fait abstraction de ces termes : il reste un terme positif, borné inférieurement, et jouant le même rôle que le terme en $a_{p-\sigma}$ dans la formule (23); les termes négatifs qui le suivent, leurs valeurs absolues ayant des bornes supérieures connues et tendant vers zéro plus rapidement que ce terme positif, on peut déterminer une valeur de n à partir de laquelle le second membre est positif. Quant aux termes que nous avons retranchés du second membre avant d'écrire les formules (22) et (23), ils ont ici des bornes supérieures connues et de la forme $o(\varepsilon_0 - \varepsilon_k)$, de sorte qu'on peut aussi déterminer à partir de quelle valeur de n ils deviennent négligeables par rapport au terme principal du second membre. On peut donc déterminer une valeur de n à partir de laquelle $q_0 > |q_k|$, et la plus grande des valeurs ainsi obtenues, pour $k = 1, 2, \ldots, p-1$, est le nombre N' dont il s'agissait d'établir l'existence.

4° En supposant toujours $a_p = 1$, on pourrait être tenté de croire que la connaissance de bornes supérieures pour les autres coefficients positifs n'est pas essentielle. Elle est intervenue en nous permettant de déterminer à partir de quel moment $q_k - r_k$ est petit; elle nous donne une facilité de calcul; mais on pourrait croire que d'autres méthodes permettent de déterminer N' indépendamment des bornes supérieures considérées. Nous allons d'abord montrer par un exemple qu'il n'en est rien ; nous indiquerons ensuite l'ordre de grandeur de N' dans le cas d'un polynome ayant certains coefficients positifs très grands.

Considérons le polynome

$$P(x) = ax - bx^2 + cx^3 + c'x^4 + x^8 \quad (26)$$ [1],

a, b, c étant des nombres positifs connus, et c' un nombre positif inconnu. L'équation caractéristique prend la forme

$$q^8 - \lambda^4 q^4 - 1 = a\,\varphi_1(n)\,q - b\,\varphi_2(n)\,q^2 + c\,\varphi_3(n)\,q^3,$$

$\lambda^4 = c'\varphi_4(n)$ pouvant être très grand ; si c'est le cas, les coefficients du second membre étant petits, l'équation caractéristique a quatre racines très petites, et quatre racines très grandes, voisines respectivement de λ, $i\lambda$, $-\lambda$, $-i\lambda$. Si nous désignons les deux premières par $q_0 = \lambda(1+\varepsilon_0)$, $q = i\lambda(1+\varepsilon)$, il vient

$$8\lambda^8(\varepsilon_0 - \varepsilon) \sim a\,\varphi_1(n)\,\lambda(1-i) - 2b\,\varphi_2(n)\,\lambda^2 + c\,\varphi_3(n)\,\lambda^3(1+i);$$

d'où, en posant $\alpha = \frac{1}{p} = \frac{1}{8}$, et désignant la valeur principale de $\varphi_h(n)$, donnée par la formule (10), par $C_h n^{-h\alpha}$,

$$8\lambda^8 \mathcal{R}(\varepsilon_0 - \varepsilon) \sim a C_1 \frac{\lambda}{n^\alpha} - 2b C_2 \frac{\lambda^2}{n^{2\alpha}} + c C_3 \frac{\lambda^3}{n^{3\alpha}},$$

de sorte que, si

$$b^2 C_2^2 > ac C_1 C_3,$$

quelque grand que soit n, on peut déterminer k de manière que, pour $\lambda^4 = c'\varphi_4(n) = kC_4\sqrt{n}$, donc pour $n \sim kc'$, $\varepsilon_0 - \varepsilon$ ait sa partie réelle négative, et par suite (les parties imaginaires de ε_0 et ε n'étant pas d'un ordre de grandeur plus élevé), $|q| > q_0$. La plus petite valeur possible pour le nombre N' du lemme II croît ici avec c', et est au moins de l'ordre de grandeur de c' ; on vérifie aisément qu'elle a une valeur principale de la forme $k'c'$.

Plus généralement, considérons un polynome $P(x)$, somme des

---

[1] On remarque qu'il s'agit d'un polynome vérifiant non seulement la condition $\mathcal{A}$ mais aussi la condition $\mathcal{B}$ qui intervient dans la suite ; si l'on ne tient pas à cette seconde condition, on peut supposer $a = 0$, ce qui simplifie l'étude de cet exemple.

deux polynomes

$$P_1(x) = a'_1 x + a'_2 x^2 + \ldots + a'_{p-1} x^{p-1} + x^p,$$
$$P_2(x) = a''_1 x + a''_2 x^2 + \ldots + a''_{p-1} x^{p-1},$$

le premier vérifiant la condition $\mathfrak{A}$, le second ayant tous ses coefficients non négatifs; supposons $P_1(x)$ connu, mais non $P_2(x)$.

Soit q_0 une racine réelle positive de l'équation caractéristique

$$f(q) \equiv q^p - 1 - a_{p-1}\varphi_1(n)\,q - a_{p-2}\varphi_2(n)\,q^2 - \ldots - a_p\,\varphi_{p-1}(n)\,q^{p-1} = 0$$

relative à $P(x)$; comme $f(0) < 0$, il y a au moins une telle racine. Soit $q = q_0 e^{i\theta}$ une valeur de module q_0. On a

$$(27) \qquad e^{-pi\theta} f(q) = e^{-pi\theta} g(q) - g(q_0) \qquad [g(q) \equiv f(q) - q^p];$$

d'où, en égalant les parties réelles des deux membres

$$\begin{aligned}\mathcal{R}[e^{-pi\theta} f(q)] = 1 - \cos p\theta &+ \Sigma a'_{p-h}\,\varphi_h(n)\,q_0^h[1 - \cos(p-h)\theta] \\ &+ \Sigma a''_{p-h}\,\varphi_h(n)\,q_0^h[1 - \cos(p-h)\theta].\end{aligned}$$

Il ne peut y avoir de termes négatifs au second membre que si certains a'_h sont négatifs; la condition $\mathfrak{A}$ étant vérifiée par $P_1(x)$, ils sont précédés par des termes positifs. Comme chacun des produits $n^{h\alpha}\varphi_h(n)\left(\alpha = \frac{1}{p};\ h = 1, 2, \ldots, p-1\right)$ a pour n infini une limite C_h, et reste par suite compris entre deux nombres positifs fixes, nous voyons qu'on peut déterminer un nombre K_1, fonction seulement des a'_m, et tel que, pour

$$(28) \qquad n > K_1 q_0^p,$$

l'expression (27) ait sa partie réelle non négative.

Dans ces conditions, θ variant de 0 à 2π, le point $q^{-p} f(q)$ décrit un contour passant par l'origine, mais ne l'entourant pas. Comme $q^{-p} f(q)$ est un polynome en $\frac{1}{q}$, cela prouve $f(q)$ n'a pas de racine de module supérieur à q_0. Si $\delta = 1$, on voit même aisément que q_0 est la seule racine de module q_0 : c'est la racine de plus grand module [1].

[1] Le raisonnement s'appliquant même si l'on suppose que q_0 est la plus petite racine positive, on voit que, dans les conditions indiquées, il n'y a qu'une racine positive.

Supposons maintenant que, les coefficients de $P_1(x)$, qui bornent inférieurement ceux de $P(x)$, restant constants, ceux de $P_2(x)$, donc ceux de la somme $P(x)$ varient, l'un au moins des a_m augmentant indéfiniment. L'ordre de grandeur de la plus grande racine de l'équation caractéristique est en tout cas, pour $a_p = 1$, celui de la plus grande des quantités

$$(29) \qquad \sqrt[h]{|a_h|\,\varphi_{p-h}(n)} \qquad [h = 1, 2, \ldots, p;\ \varphi_0(n) = 1],$$

de sorte qu'on peut déterminer une constante K_2, fonction de p seulement, dont le produit par la plus grande des expressions (29) borne supérieurement toutes les racines de l'équation caractéristique, et en particulier q_0. Pour que la condition (28) soit vérifiée, il suffit donc que

$$n^h > K_1^h K_2^{hp}\,|a_h^p|\,\varphi_{p-h}^p(n) \qquad (h = 1, 2, \ldots, p-1),$$

ou encore, compte tenu de la formule (10), que

$$(30) \qquad n > K\,\mathrm{Max}\,|a_m| \qquad (m = 1, 2, \ldots, p-1),$$

K étant un coefficient qui ne dépend que des a'_m, c'est-à-dire de bornes inférieures, supposées connues des a_m [1].

Cette condition (30) *est donc suffisante pour que la racine de plus grand module de l'équation caractéristique soit la racine réelle positive. L'exemple du polynome* (26) *montre que, sans cette condition, au moins pour certains types de polynomes et pour certains systèmes de valeurs des a'_m, on ne peut pas remplacer le second membre par une fonction moins rapidement croissante de* $\mathrm{Max}\,a_m$.

5° La comparaison de q_0 et $|q_k|$ est seule utile pour la suite. Il peut toutefois être intéressant d'indiquer succinctement comment les calculs qui conduisent à la formule (23) doivent être modifiés si l'on veut comparer les modules de deux racines quelconques q_k et q_l; le lecteur que cela n'intéresserait pas peut ne pas lire la fin du présent paragraphe.

Les racines conjuguées q_l et $\overline{q}_l$ jouent le même rôle dans cette étude. Il est donc naturel d'introduire à la fois les nombres entiers σ et σ'

---

[1] Compte tenu de ce que les a'_m sont connus, on peut, en augmentant au besoin K, remplacer, dans la condition (30), $\mathrm{Max}\,|a_m|$ par $\mathrm{Max}\,a_m$.

vérifiant les conditions

$$(31)\qquad \begin{cases} a_{p-\sigma} \neq 0, & r_k^\sigma \neq r_l^\sigma, \\ a_{p-\sigma'} \neq 0, & r_{\sigma'} \neq \bar{r}_l^{\sigma'}, \end{cases}$$

et qui de plus soient aussi petits que possible; ils existent sûrement, si $\delta = 1$; on arrive aisément aux formules

$$(32)\qquad \begin{cases} \varepsilon_k - \varepsilon_l \sim \dfrac{1}{p} a_{p-\sigma}\, \varphi_\sigma(n)\,(r_k^\sigma - r_l^\sigma), \\ \varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_l \sim \dfrac{1}{p} a_{p-\sigma'}\, \varphi_{\sigma'}(n)\,(r_k^{\sigma'} - \bar{r}_l^{\sigma'}), \end{cases}$$

qui généralisent la formule (22), et les formules (23) et (24) se généralisent aussi sans difficulté si, dans l'une au moins de ces expressions, le second membre n'est pas une imaginaire pure. Si c'est le cas pour la première, par exemple (ce qui implique $\sigma \geqq \sigma'$, car autrement σ serait un nombre inférieur à σ' et tel que $r_k^\sigma \neq \bar{r}_l^\sigma$), on trouve ainsi que

$$(33)\qquad |q_k| - |q_l| \sim \frac{1}{p} a_{p-\sigma}\, \varphi_\sigma(n) \left(\cos\frac{2k\sigma\pi}{p} - \cos\frac{2l\sigma\pi}{p}\right).$$

Mais si $\sigma \neq \sigma'$, il peut arriver que l'on ait à la fois

$$\cos\frac{2k\sigma\pi}{p} = \cos\frac{2l\sigma\pi}{p}, \qquad \cos\frac{2k\sigma'\pi}{p} = \cos\frac{2l\sigma'\pi}{p};$$

d'où, compte tenu des formules (31),

$$(34)\qquad r_k^\sigma = \bar{r}_l^\sigma, \qquad r_k^{\sigma'} = r_l^{\sigma'}.$$

Dans ce cas il peut arriver que, pour tous les nombres h qui sont des degrés de termes non nuls au second membre de l'équation caractéristique, on ait

$$(35)\qquad \cos\frac{2hk\pi}{p} = \cos\frac{2hl\pi}{p},$$

ou qu'au contraire il existe des termes, de degrés supérieurs à la fois à σ et σ', ne vérifiant pas cette égalité; soit dans ce cas $\lambda_\tau q^\tau$ le premier de ces termes; dans le précédent, nous n'avons qu'à donner arbitrairement à τ une valeur supérieure à $2p$ et convenir que $a_{p-\tau}$ représente zéro (donc $\lambda_\tau = 0$), pour que le calcul qui suit soit applicable dans les deux cas.

Substituons alors à q, dans l'équation caractéristique, les valeurs $q_k = r_k(1+\varepsilon_k)$ et $q_l = r_l(1+\varepsilon_l)$, et retranchons les deux équations obtenues. Les termes linéaires en ε_k et ε_l, en n'écrivant pas ceux qui sont sûrement négligeables par rapport à un de ceux écrits, sont respectivement, dans les deux membres,

$$(36) \qquad p(\varepsilon_k - \varepsilon_l), \quad 2i\lambda_\sigma \sin\frac{2k\sigma\pi}{p} + \lambda_\tau(r_k^\tau - r_l^\tau).$$

La partie principale étant imaginaire, puisque $\sigma < \tau$, on retrouve la première formule (32); la partie réelle de $\varepsilon_k - \varepsilon_l$ est d'un ordre plus élevé. Pour la calculer, il faut tenir compte des termes non linéaires, et parmi ces termes, le terme principal est le terme du second degré au premier membre

$$\frac{p(p-1)}{2}(\varepsilon_k^2 - \varepsilon_l^2),$$

dont la partie réelle, en posant

$$\varepsilon_k = \varepsilon'_k + i\varepsilon''_k, \qquad \varepsilon_l = \varepsilon'_l + i\varepsilon''_l$$

et en négligeant les termes qui sont o $(\varepsilon'_k - \varepsilon'_l)$, est

$$-\frac{p(p-1)}{2}(\varepsilon''_k - \varepsilon''_l)(\varepsilon_k + \varepsilon_l) \sim \frac{p(p-1)}{2}(\varepsilon_k - \varepsilon_l)(\varepsilon_k - \bar{\varepsilon}_l),$$

c'est-à-dire, d'après les formules (32),

$$-2\frac{p-1}{p}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}\sin\frac{2k\sigma\pi}{p}\sin\frac{2k\sigma'\pi}{p}.$$

Il vient ainsi, en tenant compte de ce terme et de la partie réelle des termes (36),

$$(37) \qquad \begin{aligned} \varepsilon'_k - \varepsilon'_l \sim 2\frac{p-1}{p^2}\lambda_\sigma\lambda_{\sigma'}\sin\frac{2k\sigma\pi}{p}\sin\frac{2k\sigma'\pi}{p} \\ + \frac{1}{p}\lambda_\tau\left(\cos\frac{2k\sigma\pi}{p} - \cos\frac{2k\sigma'\pi}{p}\right), \end{aligned}$$

sauf peut-être si $\sigma + \sigma' = \tau$, cas où les deux termes écrits sont du même ordre, et où il peut arriver qu'ils se détruisent; il faudrait alors considérer des termes de degrés plus élevés.

Tenant compte d'autre part de

$$|q_k| - |q_l| \sim \frac{1}{2}(|q_k^2| - |q_l|^2) = (\varepsilon'_k - \varepsilon'_l) + \frac{1}{2}(\varepsilon''^2_k - \varepsilon''^2_l) + o(\varepsilon'_k - \varepsilon'_l),$$

il vient, sauf peut-être si $\sigma + \sigma' = \tau$,

$$(38) \qquad |q_k| - |q_l| \sim \frac{2}{p}\lambda_\sigma \lambda_{\sigma'} \sin\frac{2k\sigma\pi}{p} \sin\frac{2k\sigma'\pi}{p} + \frac{1}{p}\lambda_\tau\left(\cos\frac{2k\sigma\pi}{p} - \cos\frac{2k\sigma'\pi}{p}\right),$$

de sorte que l'ordre infinitésimal de cette expression par rapport à $\frac{1}{n}$ est le plus petit des nombres $\frac{\sigma+\sigma'}{p}$ et $\frac{\tau}{p}$. Si alors l'équation caractéristique a au moins un terme non nul et dont le degré h ne vérifie pas la relation (35), $\tau < p$, et cet ordre est inférieur à l'unité. Mais s'il n'existe aucun terme de cette nature, l'ordre de la différence étudiée est $\frac{\sigma+\sigma'}{p}$; il est inférieur à 2, mais peut dépasser l'unité. Ainsi, pour le polynome

$$(39) \qquad P(x) = x^3 + x^4 + x^{24},$$

$k = 1$, $l = 7$, on a $\sigma = 21$, $\sigma' = 20$, de sorte que l'ordre infinitésimal de $|q_7| - |q_1|$ par rapport à $\frac{1}{n}$ est $\frac{41}{24} > 1$. Alors

$$\log|Q_7^{(n)}| - \log|Q_1^{(n)}|$$

a une limite finie, pour n infini; les indices 1, 7, $24 - 7 = 17$, $24 - 1 = 23$ appartiennent donc au même groupe, c'est-à-dire que

$$Q_1^{(n)}, \quad Q_7^{(n)}, \quad Q_{17}^{(n)} = \overline{Q}_7^{(n)}, \quad Q_{23}^{(n)} = \overline{Q}_1^{(n)}$$

sont du même ordre de grandeur; *un même groupe peut donc contenir plus de deux indices*, comme nous l'avons annoncé plus haut ([1]).

Il resterait à étudier le cas où $\sigma + \sigma' = \tau$; on peut se demander si dans ce cas l'ordre de grandeur de $|q_k| - |q_l|$ peut atteindre ou

([1]) Pour le polynome (39), on a deux groupes de quatre indices (1, 7, 17, 23 et 5, 11, 13, 19), sept groupes de deux indices et deux groupes contenant chacun un indice (ceux qui correspondent aux racines réelles).

dépasser 2, et, si oui, chercher quelle est la borne supérieure de ses valeurs possibles. Nous n'insisterons pas sur cette question.

4. **La variation des constantes.** — D'après la signification même de l'équation caractéristique, la solution générale de l'équation (9), pour une valeur déterminée de n, est de la forme

$$B_{n+\nu} = \sum_{k=1}^{p} c_k^{(n)} [q_k^{(n)}]^\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p). \tag{40}$$

Si l'on connaît $B_n, B_{n+1}, \ldots, B_{n+p-1}$, cela revient au même d'utiliser directement l'équation (9) pour le calcul de B_{n+p}, ou d'utiliser les équations (40), pour tirer d'abord des p premières les coefficients $c_k^{(n)}$, puis B_{n+p} de la dernière. Observons que le déterminant D_n des équations qui définissent ainsi les $c_k^{(n)}$ tend, pour n infini, vers la limite

$$D = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ r_1 & r_2 & \ldots & r_p \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ r_1^{p-1} & r_2^{p-1} & \ldots & r_p^{p-1} \end{vmatrix} \neq 0,$$

de sorte que les deux quantités

$$\left\{ \begin{array}{ll} M_n = \operatorname{Max} | c_k^{(n)} | & (k = 1, 2, \ldots, p), \\ M'_n = \operatorname{Max} | B_{n+\nu} | & (\nu = 0, 1, \ldots, p-1) \end{array} \right. \tag{41}$$

sont du même ordre de grandeur. Leur rapport, à partir du moment où n est assez grand pour que $|D_n|$ puisse être borné inférieurement, est compris entre deux nombres positifs fixes.

Une fois B_{n+p} connu, on peut de même calculer les coefficients $c_k^{(n+1)}$ à l'aide des formules

$$B_{n+\nu+1} = \Sigma c_k^{(n+1)} [q_k^{(n+1)}]^\nu \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p-1) \quad (^1),$$

qui comparées aux expressions de $B_{n+1}, B_{n+2}, \ldots, B_{n+p}$ que l'on

---

(1) k étant défini mod p, le signe Σ indique une sommation étendue aux p valeurs possibles.

déduit des formules (40), (en remplaçant ν par $\nu+1$), donnent

$$\Sigma c_k^{(n)}[q_k^{(n)}]^{\nu+1} = \Sigma c_k^{(n+1)}[q_k^{(n+1)}]^{\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p-1).$$

Il est commode de transformer ces équations en posant

$$(42) \qquad c_k^{(n)} = \gamma_k^{(n)} Q_k^{(n)}, \qquad \Delta\varphi(n) = \varphi(n+1) - \varphi(n).$$

On obtient ainsi les formules

$$(43) \quad \Sigma Q_k^{(n)} \Delta\gamma_k^{(n)}[q_k^{(n+1)}]^{\nu+1} + \Sigma c_k^{(n)} \Delta[q_k^{(n)}]^{\nu+1} = 0 \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, p-1),$$

qui définissent les variations des coefficients $\Delta\gamma_k^{(n)}$.

Dans ces équations, considérons comme inconnues les quantités $Q_k^{(n)}\Delta\gamma_k^{(n)}$. Leur déterminant D_{n+1} (¹), qui tend vers D, est borné inférieurement, pour n assez grand. Chacune des inconnues, à un facteur constant près, est alors bornée supérieurement en module par le plus grand des termes connus, c'est-à-dire, compte tenu de ce que $q_k^{(n)}$ tend vers r_k, par

$$KM_n \operatorname{Max}|\Delta q_k^{(n)}|,$$

K étant un coefficient constant. Or les $q_k^{(n)}$ sont des fonctions des λ_h dont les dérivées sont faciles à borner supérieurement, pour n assez grand $\left(\text{pour } n \text{ infini, leurs modules tendent vers } \alpha = \frac{1}{p}\right)$, et, d'après les formules (8) et (11), on a

$$\Delta\lambda_h^{(n)} = a_{p-h}\,\Delta\varphi_h(n) = O\left(\frac{1}{n^{1+\alpha}}\right) \qquad (n \to \infty),$$

de sorte que les $\Delta q_k^{(n)}$ sont aussi des infiniment petits d'ordre au moins égal à $1+\alpha$. Il vient donc

$$(44) \qquad |Q^{(n)}\Delta\gamma_k^{(n)}| < \frac{K_1 M_n}{n^{1+\alpha}} \qquad (n > N_1;\ k = 1, 2, \ldots, p),$$

K_1 et N_1 ne dépendant que des coefficients de $P(x)$ (²); on peut déter-

(¹) Comme $q_1 q_2 \ldots q_p = (-1)^{p+1}$, on ne change pas la valeur absolue de ce déterminant en remplaçant $\nu+1$ par ν; il se déduit donc du déterminant D_n considéré plus haut sans autre changement que le remplacement de n par $n+1$, et, si p est pair, un changement de signe.

(²) Nous avons utilisé le fait que $|q_k| = |1+\varepsilon_k|$ est voisin de 1; ε étant arbitrairement petit, on peut déterminer $\mathfrak{N}_0(\varepsilon)$ de manière que $n > \mathfrak{N}_0$ entraîne $|\varepsilon_k| < \varepsilon$, quel que soit k. On peut fixer ε, et, pour le calcul de K_1 et N_1, utiliser par exemple une détermination de $\mathfrak{N}_0\left(\frac{1}{10}\right)$; ils ne dépendent donc que des coefficients de $P(x)$.

miner ces constantes en connaissant seulement des bornes supérieures des $|a_m|$ (pour $0 < m < p$; nous supposons $a_p = 1$).

Posons maintenant

$$|c_k^{(n)}| = |\gamma_k^{(n)} Q_k^{(n)}| = \eta_k^{(n)} M_n. \tag{45}$$

D'après la définition même de M_n, pour chaque valeur de n, le plus grand des $\eta_k^{(n)}$ est égal à l'unité. Donnons-nous un nombre η compris entre zéro et un, et un nombre positif assez petit ε $\left(\text{on peut le fixer sans inconvénient, rien n'empêche dans la suite de supposer } \varepsilon = \frac{1}{10}\right)$. Si l'on a $\eta_k^{(n)} > \eta$, c'est-à-dire

$$|\gamma_k^{(n)} Q_k^{(n)}| > \eta M_n, \tag{46}$$

(et, pour n'importe quelle valeur de n, il en sera toujours ainsi pour au moins un indice k), on a aussi, d'après l'inégalité (44),

$$\left|\frac{\Delta \gamma_k^{(n)}}{\gamma_k^{(n)}}\right| < \frac{K_1}{\eta\, n^{1+\alpha}}, \tag{47}$$

de sorte que $\Delta \log \gamma_k^{(n)}$ est majoré par le terme général d'une série convergente. Si donc l'inégalité (46) reste indéfiniment vérifiée pour un même indice k, $\gamma_k^{(n)}$ tend pour n infini vers une limite non nulle γ_k, et en tout cas, tant qu'elle est vérifiée et à partir du moment où le reste de cette série est inférieure à ε [soit pour $n > \mathfrak{N}_1 = \mathfrak{N}_1(\varepsilon, \eta)$ (¹)], la variation de $\log \gamma_k^{(n)}$ est en valeur absolue inférieure à ε; à une erreur relative près inférieure à $\varepsilon' = e^{\varepsilon} - 1$, $c_k^{(n)}$ varie proportionnellement à $Q_k^{(n)}$.

D'après le 1° du paragraphe 3, il existe un nombre N_2 tel que, si k et l n'appartiennent pas au même groupe d'indices, $|q_k^{(n)}| - |q_l^{(n)}|$ ait un signe constant pour $n > N_2$, de sorte que le rapport

$$\left|\frac{Q_k^{(n)}}{Q_l^{(n)}}\right| = R(n, k, l) \tag{48}$$

(¹) Nous employons les lettres N_1 et N_2 pour désigner des nombres qui peuvent être fixés en fonction seulement des coefficients de $P(x)$; au contraire $\mathfrak{N}_1$ dépend de ε et η, et η est provisoirement indéterminé.

varie d'une manière monotone, et qu'à une erreur relative près inférieure à $2\varepsilon'$, il en est de même, si la condition (46) est vérifiée pour les deux indices k et l du rapport

$$\left|\frac{c_k^{(n)}}{c_l^{(n)}}\right|. \tag{49}$$

Le rapport (48) étant d'ailleurs infiniment petit ou infiniment grand, tandis que le rapport (49) est compris, si l'inégalité (46) est vérifiée, entre deux nombres positifs fixes $\left(\text{égaux respectivement à } \eta \text{ et } \frac{1}{\eta}\right)$, il est nécessaire que l'inégalité (46), quand n croît indéfiniment, cesse à un certain moment d'être vérifiée pour l'un au moins des indices k et l.

Il peut exister certains indices k pour lesquels $c_k^{(n)} = o(M_n)$; nous les désignerons par la lettre j, et les autres (il en existe sûrement, d'après la définition de M_n) par les lettres $l, l_1, \ldots$ ou $l'_1, l'_2, \ldots$, les lettres non accentuées indiquant les indices du groupe pour lequel $Q_l^{(n)}$ est aussi rapidement croissant que possible; si donc il existe des indices l', on aura

$$Q_{l'}^{(n)} = o[Q_l^{(n)}].$$

Nous pouvons choisir η assez petit pour que chacun des $\eta_l^{(n)}$ ou des $\eta_{l'}^{(n)}$ soit une infinité de fois supérieur à 2η, puis $\mathfrak{N}_2 = \mathfrak{N}_2(\eta)$ assez grand pour que, pour $n > \mathfrak{N}_2$, chacun des $\eta_j^{(n)}$ soit inférieur à η [1]. Choisissons n_0 supérieur à la fois à N_1, N_2, $\mathfrak{N}_1$ et $\mathfrak{N}_2$, et tel que, pour $n = n_0$ et pour l'indice désigné par l, $\eta_l^{(n)}$ soit supérieur à 2η, et faisons varier n à partir de cette valeur n_0. En substituant à k, dans le rapport (49), successivement les valeurs $l_1, l_2, \ldots$ et $l'_1, l'_2, \ldots$, nous avons deux sortes de rapports, les premiers tendant vers des limites positives, les seconds très peu différents de nombres qui décroissent et devraient tendre vers zéro si l'inégalité (46) ne cessait pas auparavant d'être vérifiée. Les $c_{l'}^{(n)}$ doivent donc nécessairement devenir très

---

(1) On remarque que dans ces conditions η, $\mathfrak{N}_1(\varepsilon, \eta)$ et $\mathfrak{N}_2(\eta)$ ne dépendent pas seulement des coefficients de la relation de récurrence (9), mais varient avec la solution que l'on considère.

petits par rapport aux $c_l^{(n)}$. Comme il faut que la condition (46) cesse d'être vérifiée pour l'un au moins des indices l et l', ce ne peut être que pour l'indice l', et $|\eta_{l'}^{(n)}|$ devient inférieur à η, et ne peut pas croître ultérieurement de η à 2η (¹). Donc la définition des indices l' implique contradiction : les indices que l'on aurait pu prendre pour des indices l' parce que $\eta_k^{(n)} > 2\eta$, ne conservent pas ce caractère et sont en réalité des indices j. *Tous les indices pour lesquels* $c_k^{(n)}$ *n'est pas* $o(M_n)$ *appartiennent donc au même groupe* (ce qui ne veut pas dire qu'ils constituent tous les indices de ce groupe). Alors, les rapports des différents $|c_l^{(n)}|$ étant presque constants, aucun de ces coefficients ne saurait devenir très petit par rapport au plus grand; la condition (46) reste indéfiniment vérifiée, et les $\gamma_l^{(n)}$ tendent vers des limites non nulles γ_l; si d'ailleurs un indice j pour lequel $c_j^{(n)} = o(M_n)$ appartient au même groupe, $\gamma_j^{(n)}$ tend vers zéro.

En définitive, nous avons obtenu le résultat suivant :

Lemme III. — *N'importe quelle solution de l'équation de récurrence* (9) *est de la forme*

$$B_n = \Sigma' \gamma_l Q_l^{(n)} + o[Q_l^{(n)}], \tag{50}$$

Σ' désignant une sommation étendue aux indices $l_1, l_2, \ldots, l_h$ d'un même groupe (²).

(¹) Une variation brusque de $|\eta_{l'}^{(n)}|$, depuis une valeur inférieure à η jusqu'à une valeur supérieure par exemple à $\frac{3}{2}\eta$, est évidemment impossible; une telle variation ne pourrait résulter en effet que d'un accroissement brusque de $|\gamma_{l'}^{(n)}|$, non très petit rapport à $\frac{M_n}{|Q_{l'}^{(n)}|}$, qui est impossible, d'après (45), si n est grand, ou d'un accroissement brusque de $\frac{|Q_{l'}^{(n)}|}{M_n}$, c'est-à-dire [compte tenu de ce que $\gamma_l^{(n)}$ varie aussi très peu] d'un des rapports (49), pour $k = l'$; un tel accroissement est impossible, comme on vient de le voir. Si donc $|\eta_{l'}^{(n)}|$ dépasse η, c'est d'abord d'une quantité très petite, et l'on peut ensuite appliquer les formules (46) et (47) d'après lesquelles $\gamma_{l'}^{(n)}$ varie très peu; $|\eta_{l'}^{(n)}|$ apparaît donc comme le produit d'un facteur décroissant par un facteur presque constant, et ne peut atteindre $2l$.

(²) On remarque que, si k appartient à un groupe tel que $Q_l^{(n)} = o[Q_k^{(n)}]$, il est nécessaire que $\gamma_k^{(n)}$ tende vers zéro assez rapidement pour que $\gamma_k^{(n)} Q_k^{(n)} = o[Q_l^{(n)}]$. Si au contraire $Q_k^{(n)} = o[Q_l^{(n)}]$, on ne peut à première vue rien dire au sujet de $\gamma_k^{(n)}$.

Considérons alors un groupe d'indices contenant en tout h indices, et désignons par h' le nombre des solutions linéairement indépendantes correspondant à ce groupe au sens du lemme III. Si $h' > h$, des combinaisons linéaires de ces h' solutions permettent d'en former au moins $h'-h$, linéairement indépendantes, et qui soient $o[Q_l^{(n)}]$. Si donc on range les groupes d'indices d'après la rapidité de la croissance de $Q_l^{(n)}$, en commençant par les croissances les moins rapides, un groupe de h racines conduit à former au plus h solutions de l'équation (9) linéairement indépendantes de celles antérieurement obtenues. Comme il faut bien trouver en tout p solutions linéairement indépendantes, à chaque groupe de h racines correspondent exactement h solutions indépendantes aussi bien les unes des autres que de celles précédemment obtenues. C'est donc que les constantes γ_l sont quelconques; en désignant par $B_{n,k}$ une solution pour laquelle on ait $\gamma_k = 1$, $\gamma_l = 0$ si $l \neq k$ (il en existe au moins une), on obtient enfin le résultat suivant :

Lemme IV. — *A chaque indice* k (défini mod$p$) *correpond une solution* $B_{n,k}$ *de l'équation de récurrence* (9) *pour laquelle on a*

$$B_{n,k} \sim Q_k^{(n)} \qquad (n \to \infty).$$

La solution générale est une combinaison

$$B_n = \Sigma \gamma_k B_{n,k} \tag{51}$$

des p *solutions particulières ainsi définies.*

Remarquons que $B_{n,k}$, sauf si k appartient au groupe pour lequel $Q_k^{(n)}$ tend vers zéro aussi rapidement que possible, n'est pas complètement déterminé par les conditions que nous lui avons imposées. Nous supposerons de plus $B_{n,0}$ réel, et par suite positif pour n assez grand; cette condition est compatible avec les précédentes, car, si l'on avait pris une valeur imaginaire, on pourrait prendre aussi bien son imaginaire conjuguée, et par suite sa partie réelle.

5. **Démonstration du théorème I.** — 1° Il s'agit maintenant d'étudier les conséquences des lemmes III et IV relativement aux signes des B_n,

qui sont aussi ceux des A_n, d'abord dans le cas d'une solution quelconque de l'équation de récurrence (9), ensuite dans le cas particulier de la fonction (1). Établissons d'abord le lemme suivant :

Lemme V. — *Si* $\delta = 1$, *la condition nécessaire et suffisante pour que, pour une solution quelconque de l'équation* (9), *la suite des* B_n *n'admette qu'un nombre fini de changements de signes, est que sa valeur principale soit de la forme* $\gamma_0 Q_0^{(n)}$, γ_0 *étant une constante différente de zéro.*

C'est une conséquence immédiate du lemme II, et de ce que la racine q_0 de l'équation caractéristique constitue à elle seule un groupe, d'après le lemme I. La condition indiquée est évidemment suffisante. Si d'autre part elle n'est pas vérifiée, c'est que la formule (50) s'applique, le groupe des indices l qui y interviennent ne comprenant pas l'indice zéro. On a alors, pour tous ces indices,

$$\sum_0^{p-1} r_l^\nu = 0,$$

et par suite

$$\sum_0^{p-1} B_{n-\nu} = \sum_{\nu=0}^{p-1} \sum{}' \gamma_l Q_l^{(n)} r_l^\nu + o[Q_l^{(n)}] = o(M_n) = o(M'_n),$$

ce qui prouve bien que la suite des B_n a une infinité de changements de signes.

Le lemme V est ainsi démontré. Il est facile aussi de montrer que, si $\delta > 1$, la condition indiquée cesse d'être nécessaire; on peut en effet définir une solution pour laquelle

$$B_n \sim \gamma'_n Q_0^{(n)},$$

les γ'_n étant des coefficients qui se reproduisent périodiquement avec la période δ (donc $\gamma'_{n+\delta} = \gamma'_n$), mais à cela près quelconques. Naturellement, comme nous l'avons déjà remarqué, s'il s'agit des nombres B_n définis par les formules (1) et (7), ceux pour lesquels n est multiple de δ sont seuls à considérer, et en ce qui les concerne les résultats obtenus si $\delta = 1$ s'appliquent sans difficulté.

Revenons au cas où $\delta = 1$. Le lemme V s'applique dans des conditions bien différentes suivant que la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée ou non.

La condition que γ_0 ne soit pas nul est de toute façon nécessaire. Mais si la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée, $Q_0^{(n)}$ croît plus rapidement que tous les autres $|Q_k^{(n)}|$, et il suffit que γ_0 ne soit pas nul pour que la condition du lemme V soit vérifiée. Dans le cas contraire, il faut en outre vérifier que ceux des γ_k qui correspondent aux produits $|Q_k^{(n)}|$ croissant plus vite que $Q_0^{(n)}$ sont nuls. Ainsi, dans le premier cas on n'a qu'une condition d'inégalité à vérifier; dans le second on a aussi des conditions d'égalité. *Si l'on considère la solution de l'équation* (9) *définie par la donnée de p coefficients* B_n *consécutifs, la connaissance de valeurs approchées suffit dans le premier cas, mais non dans le second.*

2° Occupons-nous maintenant de la suite particulière de coefficients B_n définie par les formules (1) et (7). Nous savons déjà que la condition $\mathfrak{A}$ est nécessaire; montrons qu'elle est suffisante pour le problème préliminaire.

Si, dans les formules (1) et (7), nous remplaçons B_n par son expression (51), nous trouvons pour $F(x)$ l'expression

$$y = \Sigma \gamma_k y_k \tag{52}$$

en posant

$$y_k = \sum_0^\infty \frac{B_{n,k}}{\Gamma\left(\frac{n}{p}+1\right)} x^n.$$

D'après le paragraphe 2, si les coefficients γ_k étaient quelconques, on obtiendrait ainsi, non la fonction (1), mais une quelconque des fonctions y définies par la formule (6); les p constantes γ_k sont donc liées linéairement aux p paramètres qui interviennent dans cette formule, c et les coefficients de $Q(x)$. Or $c = 0$ définit des fonctions qui tendent vers zéro pour x infini positif, ce qui implique une infinité de changements de signes dans la suite des coefficients A_n (ou B_n); il n'en saurait être ainsi si γ_0 n'était pas nul. Donc $c=0$ entraîne $\gamma_0=0$, ce qui prouve que ces coefficients sont proportionnels. Or, pour la fonction $F(x)$, $c = 1$, donc γ_0 n'est pas nul, c'est-à-dire que, pour n assez grand, tous les A_n ont le même signe; comme $F(x)$ augmente indéfiniment avec x, par valeurs positives, ils sont positifs. *La condition $\mathfrak{A}$ est donc bien nécessaire et suffisante pour le problème préliminaire.*

3° Pour terminer la démonstration du théorème I, il faut s'occuper de questions d'uniformité, importantes pour la solution du problème fondamental. Il s'agit du cas où la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée, et nous pouvons toujours supposer $\delta = 1$; le groupe des indices l de la formule (50) ne comprend ici que la valeur zéro, et $\eta_l^{(n)}$ tend vers un. Le nombre η qui intervenait dans la démonstration de ce lemme, assujetti à la condition que chacun des $\eta_l^{(n)}$ dépasse une infinité de fois 2η, peut donc être fixé; par exemple $\eta = \frac{1}{3}\cdot$ De même le nombre ε dont dépend $\mathfrak{N}_1$, qui n'est intervenu que par le fait qu'une erreur relative inférieure à $2(e^\varepsilon - 1)$ dans le calcul des rapports (48) ne change pas leur ordre de grandeur, peut être fixé. Le nombre $\mathfrak{N}_1(\varepsilon, \eta)$ du paragraphe 4, de même que K_1 et N_1, et le nombre $\mathfrak{N}_0$ tel que $|\varepsilon_k| < \varepsilon$ pour $n > \mathfrak{N}_0$ (p. 251, note 2), ne dépendent donc que des coefficients de $P(x)$; on peut même, comme nous l'avons fait remarquer pour K_1 et N_1, les déterminer, si $a_p = 1$, en ne connaissant que des bornes supérieures de $|a_1|, |a_2|, \ldots, |a_{p-1}|$; si l'on fait varier a_p, les rapports $\frac{a_m^p}{a_p^m}$ étant invariants par le changement de x en cx, il suffit évidemment de connaître une borne supérieure pour tous les $|a_m|$ et une borne inférieure positive pour a_p.

Nous avons ensuite introduit un nombre N_2 tel que, si les indices k et l n'appartiennent pas au même groupe, $|q_k| - |q_l|$ ait un signe constant pour $n > N_2$. Comme ici le groupe des l ne comprend que la valeur zéro, N_2 se réduit au nombre N' du paragraphe 3, 3°; pour le déterminer, il suffit de connaître des bornes supérieures des $|a_m|$, et des bornes inférieures positives pour ceux d'un ensemble comprenant a_p et qui soit suffisant pour la condition $\mathfrak{A}$.

Il reste enfin, pour appliquer les résultats du paragraphe 4, à déterminer un nombre n_0, supérieur à N_1, N_2, $\mathfrak{N}_0$, $\mathfrak{N}_1$, et tel que les $|c_k^{(n)}|$ autres que $c_0^{(n)}$ soient assez petits, inférieurs, pour fixer les idées, à $\frac{1}{2p}c_0^{(n)}$; alors, n croissant, ils restent inférieurs à $\frac{1}{p}c_0^{(n)}$, ce qui implique que le signe de B_n soit celui de $c_0^{(n)}$; B_n est positif pour $n > n_0$. Or les coefficients B_n définis par les formules (1) et (7) sont des fonctions continues des a_m; il en est de même des racines de l'équation caractéristique et des produits $Q_k^{(n)}$; par suite aussi des $c_k^{(n)}$. Si donc, pour un polynome $P_0(x)$, et pour $0 < k < p$, on a $|c_k^{(n)}| < \frac{1}{2p}$, cela reste vrai, pour la valeur n_0 de n, pour tout polynome $P(x)$ déduit de $P_0(x)$ par une variation suffisamment petite de ceux des coefficients qui ne sont pas nuls. Si donc l'on fait varier n à partir de n_0, on est dans les mèmes conditions pour tous ces polynomes $P(x)$ que pour le polynome initial $P_0(x)$; pour tout $n > n_0$, B_n est positif.

Faisons maintenant varier tous les coefficients a_m de $P(x)$ qui ne sont pas nuls pour le polynome initial $P_0(x)$, non de quantités très petites, mais dans le domaine défini par

$$(53) \qquad |a_m| \leqq a'_m, \qquad a_\mu \geqq a''_\mu > 0,$$

m désignant le degré de n'importe quel terme non nul de $P_0(x)$, et μ celui de n'importe quel terme à coefficient positif, et les a'_m et les a''_μ étant donnés. C'est une région fermée, dans un espace à p' dimensions [p' étant le nombre des termes non nuls de $P(x)$], et chaque point de cette région est intérieur à un domaine où l'on peut déterminer un nombre n_0 tel que, pour $n > n_0$, A_n soit positif. D'après le théorème de Borel-Lebesgue, toute la région définie par les inégalités (53) peut être couverte par un nombre fini de tels domaines. On n'a donc qu'à prendre le plus grand des différents nombres n_0 relatifs à ces domaines; si N est ce nombre, on aura $A_n > 0$ pour $n > N$, et cela pour tous les polynomes considérés, ce qui termine la démonstration du théorème I.

4° Il serait pratiquement difficile, même dans le cas d'un polynome bien déterminé, de déterminer N par la méthode qui précède. Il est utile, pour les applications, d'indiquer brièvement le principe d'une autre méthode. Pour simplifier, nous nous placerons dans le cas où a_{p-1} est positif, de sorte que toutes les différences $q_0 - |q_k|$ sont de l'ordre de grandeur de $n^{-\alpha}\left(\alpha = \frac{1}{p}\right)$.

Le principe de cette méthode est de grouper les valeurs de n en groupes de valeurs consécutives dans chacun desquels chacune des fonctions $\varphi_h(n)$ aura une variation relative négligeable; il suffit pour cela que $\nu = o(n)$, ν désignant le nombre des termes du groupe qui contient la valeur n. Si d'autre part $n^{-\alpha}\nu$ est grand, tous les $q_k^\nu (k = 1, 2, \ldots, p-1)$ seront petits par rapport à q_0^ν.

En première approximation, considérons l'équation (9), pour chaque groupe, comme une équation à coefficients constants, c'est-à-dire que chacun des λ_n sera remplacé par une valeur approchée indépendante de n. Si initialement $c_0^{(n)}$ n'est pas négligeable, le terme correspondant à la racine réelle de l'équation caractéristique sera devenu prépondérant vers la fin du groupe, de sorte que les p derniers des B_n seront assimilables ($q_0 - 1$ étant positif et petit) à p termes consécutifs d'une progression géométrique lentement croissante.

Quelle est d'autre part la valeur de cette approximation? On répète ν fois une erreur relative de l'ordre de grandeur de $\frac{\nu}{n}$ au plus, du moins si l'erreur commise dans le calcul de B_{n+p} est comparée, non à B_{n+p}, mais au nombre M'_n défini par la formule (41); l'erreur relative finale est au plus de l'ordre de grandeur de $\frac{\nu^2}{n}$ Il suffit donc que ν soit grand par rapport à n^α mais petit par rapport à $\sqrt{n}$ (ce qui est possible; si la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée et qu'il y ait au moins un terme négatif, c'est que $p > 2$), pour que, l'approximation considérée d'abord étant satisfaisante, la prépondérance du terme en $Q_0^{(n)}$ soit augmentée du commencement à la fin du groupe considéré. Il n'est pas dans ces conditions nécessaire d'étudier la variation des constantes : les rapports $\frac{B_{n+1}}{B_n}$, ou les rapports plus simples $\frac{B_{n+p}}{B_p} = \frac{(n+p)A_{n+p}}{pA_n}$ (que l'on peut calculer sans utiliser les tables des fonctions eulériennes), sont à la fin du groupe peu différents respectivement de q_0 et q_0^p, donc de l'unité, et cette régularisation de la suite des A_n, due à la prépondérance de la racine positive de l'équation caractéristique, ne peut que s'accentuer lorsqu'on passe d'un groupe au suivant. A partir du moment où l'on a constaté ce phénomène, si d'autre part on est assuré que q_0 reste la plus grande racine de l'équation caractéristique, on est assuré que cette régularisation ne peut que s'accentuer, et que les A_n seront définitivement positifs.

6. **Solution du problème fondamental.** — Pour résoudre ce problème, il faut introduire une nouvelle condition, ne dépendant, comme la condition $\mathfrak{A}$, que des signes des coefficients a_m. Désignons à cet effet par E_m l'ensemble des nombres $h_1p_1 + h_2p_2 + \ldots + h_\nu p_\nu$,

$p_1, p_2, \ldots, p_\nu$ étant les degrés des termes non nuls de $P_m(x)$, et $h_1, h_2, \ldots, h_\nu$ étant des entiers non négatifs, à cela près arbitraires. Si, au lieu de considérer les degrés de tous les termes de $P_m(x)$, on ne considère que les degrés $p'_1, p'_2, \ldots$ des termes de $\overline{P}_m(x)$ [c'est-à dire des termes de $P_m(x)$ dont les coefficients sont positifs], on obtient, au lieu de E_m, un ensemble E'_m contenu dans E_m. Nous dirons qu'un polynome $P(x)$ vérifie la condition $\mathcal{B}$ (ou $\mathcal{B}'$) si, pour tout m tel que a_m soit négatif, m appartient à l'ensemble E_{m-1} (ou E'_{m-1}).

On remarque une certaine symétrie entre ces conditions $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$, et les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ qui, lorsque $a_m < 0$, établissent des relations nécessaires entre m et les degrés des termes non nuls de $P(x) - P_m(x)$; ici, il s'agit au contraire des termes de $P(x)$ de degrés inférieur à m. En outre, au lieu de l'ensemble des nombres $\sum\limits_1^\nu h_i p_i$ obtenus en prenant pour les h_i des entiers quelconques (dont la considération équivaut à celle du p. g. c. d. des nombres p_i), on considère celui obtenu en ne prenant pour les h_i que des entiers non négatifs. L'analogie reste grande, et, de même que les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A}'$ sont équivalentes nous pouvons montrer que $\mathcal{B}$ et $\mathcal{B}'$ le sont. Le fait que $\mathcal{B}'$ entraîne $\mathcal{B}$ est évident : si m appartient à E'_{m-1}, sous-ensemble de E_{m-1}, il appartient *a fortiori* à E_{m-1}. La réciproque résulte de ce que, si $\mathcal{B}$ est vérifié [1], E_m et E'_m sont identiques; on ne change en effet pas la définition de E_m en supprimant dans la somme $\Sigma h_i p_i$ ceux des p_i qui appartiennent à E_{i-1}; c'est le cas, si la condition $\mathcal{B}$ est vérifiée, de tous ceux qui ne sont pas des p'_i, et la définition de E_m ne se distingue pas, dans ce cas, de celle de E'_m.

Établissons maintenant le lemme suivant :

Lemme VI. — *La condition $\mathcal{B}$ est nécessaire pour que la serie* (1) *ait tous ses coefficients non négatifs.*

Si en effet elle n'est pas vérifiée, on peut choisir m de manière que a_m soit négatif et que m n'appartienne pas à E_{m-1}. Or le dévelop-

---

[1] Et dans ce cas seulement; il n'est donc pas indifférent dans la suite de dire qu'un entier m met en défaut la condition $\mathcal{B}$, ou la condition $\mathcal{B}'$; seul le plus petit entier qui les mette en défaut est le même pour les deux.

pement de $e^{P_{m-1}(x)}$ en série entière ne contient que des termes dont les degrés appartiennent à E_{m-1}; il ne contient donc pas de terme en x^m; par suite, dans le développement de $e^{P(x)}$, le coefficient de x^m est $A_m = a_m < 0$; ce développement contient donc au moins un coefficient négatif, C. Q. F. D.

La solution de notre problème fondamental est maintenant immédiate; elle s'exprime par le théorème suivant :

Théorème II. — *Pour que tous les* A_n *soient non négatifs, les conditions* $\mathfrak{A}$ *et* $\mathfrak{B}$ *sont nécessaires. Si elles sont vérifiées, et si ceux des* a_m *qui sont positifs ou nuls sont connus, la condition nécessaire et suffisante s'exprime par un nombre fini d'inégalités, sûrement vérifiées lorsque les modules de ceux des* a_m *qui sont négatifs sont suffisamment petits.*

Nous savons déjà que les conditions $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont nécessaires. D'autre part, si ceux des a_m qui sont positifs ou nuls sont connus, la condition nécessaire

$$A_m = a_m + \varphi(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}) \geqq 0$$

limite supérieurement les modules de ceux des a_m qui sont négatifs. On peut alors, d'après le théorème I, déterminer un nombre N tel que, pour $n > N$, on ait $A_n \geqq 0$ (et même $A_n > 0$ si n est multiple de δ). Les conditions

$$A_m \geqq 0 \qquad (n = 1, \ldots, N) \tag{54}$$

sont alors nécessaires et suffitantes.

Il reste à montrer qu'elles sont vérifiées si tous les coefficients négatifs sont assez petits. Pour faciliter le langage, nous supposerons que leurs modules soient des fonctions croissantes d'un paramètre λ, et s'annulent avec ce paramètre. D'abord, E désignant la réunion de tous les E_m (ou de tous les E'_m; la condition $\mathfrak{B}$ étant vérifiée, cela revient au même), si n n'appartient pas à E, A_n est nul, et reste nul quand λ varie. Si au contraire n appartient à E, A_n tend, quand λ varie, vers le coefficient $\overline{A}_n$ de la série

$$e^{\overline{P}(x)} = \sum^{\infty} \overline{A}_n x^n.$$

Comme $\overline{A}_n$ est positif, A_n l'est à partir du moment où λ est inférieur à un nombre assez petit λ'_n. Il n'y a à considérer que les valeurs de n au plus égales à N; soit alors λ' le plus petit des λ'_n; pour $\lambda \leqq \lambda'$, tous les A_n sont non négatifs, C. Q. F. D.

7. **Remarques diverses. Étude des polynomes minima.** — 1° Indiquons d'abord quelques conséquences simples des conditions nécessaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$: si un polynome vérifiant ces conditions a au moins un terme négatif, de degré m, il a au moins un terme positif de degré au plus égal à $\frac{m}{2}$, et au moins deux termes positifs de degrés supérieurs à m. Il y a donc au moins quatre termes, et le polynome de plus bas degré vérifiant ces conditions est le polynome du quatrième degré

$$P(x) = ax - \beta x^2 + cx^3 + c'x^4 \qquad (a, \beta, c, c' > 0). \tag{55}$$

Si, les termes étant rangés dans l'ordre des degrés croissants, le premier terme non nul est de degré h, le polynome du plus faible degré possible est

$$P(x) = ax^h - \beta x^{2h} + cx^{2h+1} + c'x^{2h+2}. \tag{56}$$

Le rapport des degrés extrêmes est toujours supérieur à 2, mais peut approcher autant qu'on veut de cette valeur, pourvu que h soit assez grand.

Si, p désignant le degré de $P(x)$, a_1, a_{p-1} et a_p sont positifs, les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vérifiées, quels que soient les signes des autres coefficients. Trois termes positifs suffisent donc pour qu'il puisse y avoir un nombre arbitrairement grand de termes négatifs.

2° Nous considérerons $a_1, a_2, \ldots, a_p$ comme les coordonnées d'un point M dans un espace E_p à p dimensions. Nous nous proposons de préciser la nature de la région, évidemment fermée, de l'espace, définie par les inégalités

$$A_n \geqq 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{57}$$

Nous l'appellerons *région positive* de l'espace E_p; son complément sera la *région négative;* nous désignerons sa frontière par $\mathcal{S}$, par $\mathcal{S}_n$ la surface algébrique $A_n = 0$, et par $\mathcal{P}_m$ le plan $a_m = 0$. Il est bien évident que, le changement de x en λx étant sans influence sur le signe A_n, si λ est positif, on ne change par la région positive ni la variété $\mathfrak{S}$ si l'on remplace simultanément $a_1, a_2, \ldots, a_p$ par $\lambda a_1, \lambda^2 a_2, \ldots, \lambda^p a_p$.

Nous dirons que le polynome $P(x)$ est d'un *type* connu lorsqu'on sait quels sont les coefficients nuls et quels sont les signes des autres. S'il y a des coefficients nuls, le point M est situé dans un espace E_q dont le nombre de dimensions est $q < p$. Comme un grand nombre de raisonnements s'appliquent aussi bien dans l'étude de l'espace entier E_p, ou dans un espace E_q, ou dans la portion de E_q correspondant à un polynome de type donné, pour ne pas avoir à distinguer ces différents cas, nous désignerons toujours par $\mathfrak{S}$ la frontière de la région positive à l'intérieur de l'espace étudié. Il faut remarquer que la variété $\mathfrak{S}$ de E_q ne comprend pas nécessairement toute la section par E_q de la variété $\mathfrak{S}$ de E_p. Ainsi, pour $p > 4$, $a_p = 0$ définit un espace E_{p-1} dans lequel existe une région positive appartenant tout entière à la variété $\mathfrak{S}$ de E_p (puisque dès que a_p devient négatif on entre dans la région négative), mais dont la frontière seule constitue la variété $\mathfrak{S}$ de E_{p-1}.

Il peut arriver que les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ cessent d'être vérifiées, soit lorsque certains coefficients a_m positifs deviennent nuls, soit lorsque certains coefficients nuls deviennent négatifs. Il importe de remarquer que la première de ces circonstances n'est pas en contradiction avec le fait que la région positive soit fermée. Ainsi, pour le polynome (55), les trois coefficients a, c, c' sont ***nécessairement positifs***, c'est-à-dire que si l'un d'eux s'annule, β restant positif, l'une des conditions nécessaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ cesse d'être vérifiée. Cela ne l'empêche pas d'être arbitrairement petit; mais β sera nécessairement d'autant plus petit qu'il est plus petit, et s'il tend vers zéro, β tendra aussi vers zéro. La portion de plan $a = 0$, $\beta > 0$, $c > 0$, $c' > 0$ est donc frontière, non de la région positive de l'espace, mais seulement de la région où les conditions nécessaires $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont vérifiées.

3° Il est évident que tout point M de la variété frontière $\mathfrak{S}$, que ce soit dans E_p ou dans un des E_q, ou bien appartient à une des surfaces $\mathfrak{S}_n$, ou bien peut être considéré comme point d'accumulation des points M_n appartenant chacun à une variété $\mathfrak{S}_n$. Nous allons montrer que, si aucun des a_m n'est nul en M, sauf, s'il s'agit d'un espace E_q, ceux qui sont identiquement nuls dans cet espace, le premier cas est nécessairement réalisé : M appartient à une variété $\mathfrak{S}_n$.

C'est une conséquence immédiate du théorème I. Si dans l'espace E_p ou E_q considéré, nous considérons une sphère de centre M et de rayon inférieur au plus petit de ceux des $|a_m|$ qui ne sont pas nuls (en ne tenant compte, s'il s'agit d'un E_q, que de ceux qui y sont variables) le nombre N de ce théorème peut être défini d'une manière uniforme à l'intérieur de cette sphère. Il suffit alors que les N premières inégalités (57) soient vérifiées en un point M' de cette sphère pour qu'il appartienne à la région positive; il n'y a donc qu'un nombre fini de surfaces $\mathfrak{S}_n$ à considérer pour définir la frontière de cette région, et le point M appartient nécessairement à au moins une de ces surfaces,

C. Q. F. D.

Comme la condition $\mathfrak{A}$ intervenait seule dans le théorème I, la conclusion subsiste si l'on fait varier un des a_n non identiquement nuls dans E_p ou E_q à partir d'un point où il soit nul, pourvu qu'il puisse devenir négatif sans que la condition $\mathfrak{A}$ cesse d'être vérifiée. Il n'y a donc pas à s'occuper de la condition $\mathfrak{B}$; on peut le voir aussi en observant que, si elle cesse d'être vérifiée quand a_m devient négatif, c'est que A_m se réduit à a_m (sinon dans tout E_q, du moins sur la droite passant par M et obtenue en ne faisant varier que a_m); A_m sans être identiquement nul, est nul en M; ce point est sur une des surfaces $\mathfrak{S}_n$.

Donc : *la variété frontière $\mathfrak{S}$ comprend, à l'exclusion de toute autre surface, d'une part des portions des surfaces algébriques $\mathfrak{S}_n$, d'autre part des portions de plans $\mathfrak{T}_m$ sur lesquels la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée, mais cesse de l'être quand a_m devient négatif.*

Quand A_n, sans être identiquement nul dans E_q, s'annule en un point, nous dirons qu'il s'annule accidentellement; de même pour a_m. Donc : *pour tout point de la frontière $\mathfrak{S}$, au moins un des coefficients, soit de* $P(x)$, *soit de* $F(x)$, *s'annule accidentellement.*

4° Étudions maintenant l'influence, sur la variation des A_n, d'un coefficient a_m distingué des autres. Il est d'abord évident que, si la série $F(x)$ a tous ses coefficients non négatifs, cette propriété subsiste, c étant un nombre positif quelconque, lorsqu'on ajoute cx^m à $P(x)$, ce qui revient à multiplier $F(x)$ par exp. cx^m. Si l'on change de région quand a_m croît, cela ne peut donc être que pour passer de la région négative à la région positive, et le point frontière appartient à la région positive puisqu'elle est fermée [1].

D'une manière plus précise, la relation facile à vérifier [d'après les formules relatives à la multiplication des séries entières représentant exp. $P(x)$ et exp. cx]

$$\frac{\partial A_n}{\partial a_m} = A_{n-m} \tag{58}$$

(A_ν représentant zéro si ν est négatif) montre que, si a_m varie en croissant depuis une valeur initiale a'_m jusqu'à l'infini, et si initialement A_{n-m}, A_{n-2m}, ... sont non négatifs et non tous nuls, A_n croît constamment et indéfiniment. L'inégalité $A_n \geqq 0$, si elle n'est pas vérifiée dès le début de l'intervalle considéré, se résout donc par

$$a_m \geqq \alpha_m^{(n)}, \tag{59}$$

$\alpha_m^{(n)}$ étant la plus grande racine de A_n, nécessairement simple si elle est supérieure à a'_m. Si l'on résout successivement les équations (57) par rapport à a_m, il n'y a évidemment à retenir que celles des inégalités (59) qui sont plus restrictives que les précédentes, et elles correspondent toujours à des cas où $\alpha_m^{(n)}$ est racine simple de A_n; une racine d'ordre $h > 1$ aurait été obtenue antérieurement comme racine simple de $A_{n-(h-1)m}$.

Il est d'ailleurs impossible, quelles que soient les valeurs données des autres coefficients, que les inégalités (57) soient toutes vérifiées quel que soit a_m; ainsi A_m varie avec a_m de $-\infty$ à $+\infty$; de même A_{3m}, A_{5m}, ... Il n'y a dès lors que deux cas possibles : ou bien il est impossible de déterminer a_m, sans changer les autres coefficients de $P(x)$, de

(1) Bien entendu, il s'agit d'une propriété de l'ensemble des inégalités (57) qui n'est pas vraie séparément pour chacune d'elles. On peut observer d'autre part que, si la série $F(x)$ n'a qu'un nombre fini de coefficients négatifs, cette propriété subsiste quand a_m augmente. Il ne s'agit pas là d'un théorème général sur les séries entières, comme le montre la multiplication de $1-x$ par exp. $cx^m (m > 1)$. Mais dans le cas qui nous occupe, où $F(x) = \text{exp. } P(x)$, le fait qu'il y ait au plus un nombre fini de coefficients négatifs est lié à la condition $\mathfrak{A}$, qui ne peut pas cesser d'être vérifiée, si elle l'est initialement, quand a_m croît.

manière à vérifier toutes les inégalités (57), ou bien ces inégalités se résolvent par

(60) $$a_m \geqq \alpha_m,$$

α_m désignant la borne supérieure des $\alpha_m^{(n)}$.

Occupons-nous d'abord des conditions de possibilité. *Pour que, sans changer les valeurs données des autres coefficients, on puisse déterminer a_m de manière à vérifier toutes les inégalités* (57), *il est évidemment nécessaire et suffisant, d'abord qu'il n'y ait aucun coefficient indépendant de a_m* (1), *et négatif, ensuite que les $\alpha_m^{(n)}$ soient bornés dans leur ensemble.* Nous dirons que le système des valeurs des coefficients de $P(x)$ autres que a_m est *apparamment acceptable* si la première de ces conditions est vérifiée, et *réellement acceptable* si la seconde l'est aussi.

On peut observer aussi qu'il est nécessaire que, pour a_m positif, les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ soient vérifiées. Ces conditions jouent d'ailleurs des rôles très différents. Si la condition $\mathcal{B}$ n'est pas vérifiée pour a_m positif, a_μ étant un coefficient négatif qui la mette en défaut, $A_\mu = a_\mu$ est indépendant de a_m et négatif; c'est donc la première partie de la condition nécessaire et suffisante ci-dessus qui est en défaut. Au contraire, si l'on a vérifié qu'il n'y a aucun A_n indépendant de a_m et négatif, il est possible que la condition $\mathcal{A}$ ne soit pas vérifiée pour a_m positif; alors l'impossibilité de déterminer a_m se manifestera nécessairement par le fait que les $\alpha_m^{(n)}$ ne seront pas bornés.

Il semble probable que, si tous les A_n indépendants de a_m sont non négatifs, la condition nécessaire $\mathcal{A}$ (pour a_m positif) soit aussi suffisante pour que les $\alpha_m^{(n)}$ soient bornés dans leur ensemble et qu'en conséquence on puisse déterminer a_m. Nous allons seulement établir un résultat moins complet, relatif au cas où l'on fait varier en même temps, non un seul coefficient a_m de $P(x)$, mais un ensemble de coefficients

(1) Dire que A_n est indépendant de a_m, c'est dire que sa dérivée A_{n-m} est nulle. Il importe peu que ce soit identiquement, ou bien accidentellement, c'est-à-dire ici pour a_m quelconque, mais pour les valeurs données des autres coefficients. Dans ce dernier cas, nous dirons que A_n est *accidentellement* indépendant de a_m. Il peut arriver que A_n soit ainsi accidentellement indépendant de a_m, de a_μ, mais non de a_m et a_μ considérés comme susceptibles de varier simultanément.

positifs c, c', ..., comprenant celui du terme de plus haut degré, et suffisant pour la condition $\mathfrak{A}$. Nous allons montrer que : *si les coefficients de* $P(x)$ *autres que* c, c', ... *sont donnés, et tels qu'il n'y ait aucun* A_n *indépendant de* c, c', ... *et négatif, toutes les inégalités* (57) *sont vérifiées simultanément, pour* c, c', ... *assez grands;* en d'autres termes, *si l'ensemble des coefficients de* $P(x)$ *autres que* c, c', ... *est apparemment acceptable, il est aussi réellement acceptable.*

Nous savons en effet qu'on ne change rien aux inégalités (57) en multipliant à la fois $a_1, a_2, \ldots, a_p$ par $\lambda, \lambda^2, \ldots, \lambda^p$. Cela revient donc au même de faire cette opération sur les coefficients choisis c, c', ..., ou de faire l'opération inverse pour les autres. Dans ces conditions, rendre λ très grand revient à rendre ces derniers coefficients très petits; λ variant de un à l'infini, le nombre N du théorème I peut être déterminé indépendamment de λ; les A_n d'indices supérieurs à N sont sûrement positifs, et les N premiers, ou bien sont indépendants de λ et par hypothèse non négatifs, ou bien fonctions de λ et non négatifs pour λ assez grand. C'est d'ailleurs le raisonnement même par lequel, dans le cas où les coefficients choisis c, c', ... sont tous les coefficients positifs, nous avons établi le théorème II.

Si alors on laisse fixe les coefficients autres que c, c', ..., et que ce soient ces coefficients choisis qui varient avec λ (chacun des a_m choisis variant proportionnellement à λ^m), pourvu qu'il n'y ait aucun coefficient indépendant de c, c', ... et négatif, pour λ assez grand, toutes les inégalités (57) seront vérifiées simultanément. Comme ensuite elles restent vérifiées si c, c', ... augmentent d'une manière quelconque, la relation précise établie d'abord entre eux importe peu; pourvu que tous soient assez grands, le résultat subsiste,

C. Q. F. D.

Revenons maintenant au cas où, a_m variant seul, les conditions de possibilité indépendantes de a_m sont vérifiées, de sorte que les inégalités (57) se résolvent par la formule (60). Si α_m n'est pas nul, le nombre N du théorème I reste fini quand a_m varie au voisinage de cette valeur, et l'on n'a à considérer qu'un nombre fini d'inégalités (57), donc un nombre fini de $\alpha_m^{(n)}$, de sorte que la borne supérieure α_m est atteinte par au moins l'un d'eux. Donc un au moins des A_n, s'annule accidentellement pour $a_m = \alpha_m$, et, s'il y en a plusieurs, le premier d'entre eux a une racine simple, c'est-à-dire que

$$A_n = 0, \qquad A_{n-m} > 0.$$

Si $\alpha_m = 0$, le raisonnement et la conclusion subsistent si la condition $\mathfrak{A}$ reste vérifiée quand a_m devient négatif; mais si elle cesse d'être vérifiée dans ces conditions, il peut arriver que les $\alpha_m^{(n)}$ soient tous négatifs, mais n'aient pas de borne supérieure négative.

Nous retrouvons ainsi à peu près les résultats du 3° du présent paragraphe. Mais nous pouvons maintenant les compléter par la réciproque suivante : *si un des* A_n *s'annule accidentellement en un point* M *de la région positive, ce point appartient à la frontière* S *de cette région.*

Si en effet il s'annule accidentellement, il dépend effectivement d'au moins un des coefficients a_m non identiquement nuls pour le type de polynome étudié, et a_m est nécessairement égal à la plus grande racine de ce polynome, désignée ci-dessus par $\alpha_m^{(n)}$. Alors A_n, s'il s'agit d'une racine d'ordre impair, et sa dérivée A_{n-m}, s'il s'agit d'une racine d'ordre pair, changent de signe au voisinage de cette valeur, ce qui prouve que M appartient à la frontière $\mathfrak{S}$.

Nous dirons que le polynome $P(x)$ *est minimum par rapport au coefficient* a_m si, les inégalités (57) étant toutes vérifiées, on ne peut pas diminuer a_m sans qu'elles cessent d'être vérifiées. En introduisant cette définition, les résultats obtenus peuvent s'exprimer comme suit :

Pour qu'un polynome pour lequel les inégalités (57) *sont toutes vérifiées soit minimum par rapport à* a_m, *il faut et il suffit que, ou bien* a_m *soit nul et que la condition* $\mathfrak{A}$ *cesse d'être vérifiée si ce coefficient devient négatif, ou bien qu'un coefficient* A_n, *fonction de* a_n, *s'annule accidentellement pour la valeur considérée de* a_m (s'il y en a plusieurs, il y en au moins un qui ait une racine simple; donc $A_n = 0$, $A_{n-m} > 0$).

D'autre part : *pour qu'un polynome, pour lesquel les inégalités* (57) *sont toutes vérifiées, et dans lequel on considère certains coefficients comme variables, soit minimum par rapport à l'un au moins de ces coefficients, pourvu qu'il n'y en ait aucun qui soit nul et ne puisse pas devenir négatif sans que la condition* $\mathfrak{A}$ *cesse d'être vérifiée, il faut et il suffit qu'un au moins des* A_n (fonction d'un au moins des coefficients variables) *s'annule accidentellement.*

5° Nous dirons qu'un polynome est *absolument minimum*, ou, plus simplement, qu'il est *minimum*, s'il est minimum par rapport à tous ses coefficients, y compris ceux qui, étant nuls, peuvent devenir négatifs sans que les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ cessent d'être vérifiées. Il est inutile de considérer les autres, par rapport auxquels il est sûrement minimum.

Pour savoir si un polynome donné est minimum, il faut ainsi se placer dans un espace E_q bien déterminé, où les coordonnées sont tous les a_m par rapport auxquels il doit être minimum. A chaque point M correspond un q-èdre, lieu des points obtenus en ajoutant aux coordonnées de M des constantes non négatives, à cela près quelconques; nous l'appellerons le q-èdre positif de sommet M. Les points M correspondant aux polynomes minima forment sur $\mathfrak{S}$ une variété $\mathfrak{S}'$ dont la connaissance suffit à définir la région positive; cette région est, en effet, le lieu des q-èdres positifs ayant pour sommets les points de $\mathfrak{S}'$; $\mathfrak{S}'$ est d'ailleurs la partie commune à tous les ensembles à partir de laquelle la région positive peut être définie de cette manière.

$\mathfrak{S}'$ peut se réduire à un point, qui est alors l'origine. C'est le cas si $P(x)$ est un polynome à coefficients tous positifs auquel on ne peut ajouter aucun terme négatif sans que l'une au moins des conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ cesse d'être vérifiée. Comme exemples citons le polynome du troisième degré, et tout polynome dans lequel le degré de chaque terme est multiple du degré du terme précédent.

Le seul cas non trivial est celui d'un type de polynome vérifiant les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ et ayant au moins un terme négatif. Nous verrons que, dans l'espace E_q que l'étude d'un tel polynome conduit à considérer, $\mathfrak{S}'$ est une variété à $q-1$ dimensions.

Les résultats du 4° ci-dessus entraînent immédiatement la conséquence suivante : *les inégalités* (57) *étant vérifiées pour un polynome* $P(x)$, *pour qu'il soit absolument minimum, il faut et il suffit qu'à chacun des q coefficients variables* a_m *on puisse faire correspondre un entier n de manière que* $A_n = 0$, $A_{n-m} > 0$ (de sorte que A_n s'annule accidentellement pour la valeur considérée de ce coefficient).

Cette condition peut être réalisée de deux manières différentes : ou bien un A_n, dépendant effectivement de tous les a_m, s'annule accidentellement; il est alors possible qu'il soit seul à s'annuler; ou bien plusieurs A_n s'annulent accidentellement. Nous montrerons que les deux cas sont réalisés effectivement, et cela pour n'importe quel type de polynome.

Observons d'abord qu'on peut supposer $\delta = 1$. Si en effet $P(x)$ est un polynome en x^δ, avec $\delta > 1$, il est bien évident que si l'on rend négatif le cofficient initialement nul d'un terme dont le degré ne soit pas multiple de δ, les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ cessent toutes les deux d'être vérifiées; $P(x)$ est donc toujours minimum par rapport à un tel coefficient a_m, et il n'y a à s'occuper que de ceux pour lesquels m est multiple de δ. On peut pour cela prendre x^δ comme nouvelle variable, c'est-à-dire se ramener au cas où $\delta = 1$.

Tous les A_n, à l'exception seulement d'un nombre fini, dépendent alors effectivement de tous les a_m. L'arithmétique élémentaire le montre aisément [1]; mais le théorème I va plus loin : on peut, en effet, d'après ce théorème, choisir N de manière que, pour $n > N$, A_n soit positif; donc, pour $n > N + p$, tous les A_{n-m} sont positifs, c'est-à-dire que A_n ne saurait (que ce soit accidentellement ou non) être indépendant d'aucun a_m [2].

Répartissons maintenant les coefficients positifs de $P(x)$ en trois catégories; nous désignons par $a, a', \ldots$ ceux qui précèdent le premier coefficient négatif, par $c, c', \ldots$ ceux qui suivent le dernier coefficient négatif, et par $b, b', \ldots$ les coefficients intermédiaires, s'il y en a. Les modules des coefficients négatifs seront désignés par $\beta, \beta', \ldots$. Les coefficients $a, a', \ldots$ n'interviennent pas dans la condition $\mathcal{A}$, tandis qu'au contraire les coefficients $c, c', \ldots$ jouent un rôle essentiel pour cette condition, qui cesserait d'être vérifiée si on les annulait. Pour la condition $\mathcal{B}$, c'est le contraire. Toute autre répartition des coefficients présentant ces caractères peut pour la suite être substituée à celle définie d'abord.

Nous pouvons d'abord choisir $a, a', \ldots$ et $\beta, \beta', \ldots$ de manière à

---

[1] Cela revient, en effet, à dire que, $m_1, m_2, \ldots$ étant des entiers positifs donnés, premiers entre eux dans leur ensemble, la forme $\Sigma h_i m_i$, les h_i étant des entiers non négatifs, est susceptible de représenter tous les nombres entiers supérieurs à un nombre N convenablement déterminé.

[2] Ce résultat, en un sens plus précis que celui que donne l'arithmétique, est d'autre part moins précis en ce sens que N dépend ici des modules des coefficients de $P(x)$.

rendre non négatifs ceux des A_n (en nombre nécessairement fini) qui ne dépendent pas des autres coefficients de $P(x)$, l'un d'eux au moins, soit A_ν, s'annulant. Comme $b, b', \ldots$ et $c, c', \ldots$ constituent un ensemble de coefficients positifs suffisant pour que la condition $\mathfrak{A}$ reste vérifiée si l'on annule les autres, il suffit ensuite de les prendre assez grands pour que tous les A_n soient non négatifs. Ainsi on peut rendre accidentellement nul au moins un A_n ne dépendant que des coefficients $a, a', \ldots$ et $\beta, \beta', \ldots$, tous les autres A_n étant non négatifs. Il ne suffit donc pas qu'un A_n s'annule accidentellement pour que le polynome soit minimum; pour obtenir un tel polynome en partant de celui formé d'abord, il faut rendre minima successivement tous les coefficients de $P(x)$ qui n'interviennent pas dans le calcul de A_ν, ce qui conduira à annuler d'autres A_n. Plusieurs A_n s'annulent ainsi simultanément. C'est une des circonstances dont nous voulions montrer la possibilité, d'ailleurs presque évidente *a priori*.

Pour réaliser l'autre, choisissons d'abord N arbitrairement grand, et tel en tout cas qu'aucun A_n d'indice supérieur à $N-p$ ne soit identiquement nul, p étant le degré de $P(x)$. Supposant d'abord $c, c', \ldots$ nuls, choisissons arbitrairement $a, a', \ldots$ et $b, b', \ldots$, puis choisissons $\beta, \beta', \ldots$ assez petits pour que les coefficients A_n qui dépendent de ces paramètres et dont l'indice est au plus égal à N soient positifs. Soit $P_0(x)$ le polynome initial ainsi obtenu; comme il ne vérifie pas la condition $\mathfrak{A}$, pour la série (1) liée à ce polynome, il y a, après A_N, une infinité de coefficients négatifs. Donnons-nous d'autre part un polynome $P_1(x)$ formé avec des valeurs positives des coefficients $b, b', \ldots$ et $c, c', \ldots$, tous les autres étant négatifs. Posons

$$P(x) = P_0(x) + \lambda P_1(x). \tag{61}$$

Pour λ positif, tous ceux des coefficients $A_1, A_2, \ldots, A_N$ qui varient avec ce paramètre croissent en partant de valeurs non négatives; ceux qui ne dépendent pas de λ ne sont nuls que s'ils le sont identiquement dans E_q; aucun ne s'annule accidentellement. D'ailleurs, pour λ assez grand, tous les A_n sont non négatifs; il existe donc une valeur limite λ', évidemment positive, telle qu'il en soit ainsi pour $\lambda \geqq \lambda'$, mais non pour $\lambda < \lambda'$. Dans E_q, on peut dire que cette valeur λ' définit le point d'intersection M de la droite (61) avec la frontière $\mathfrak{S}$ de la région positive. En ce point, un au moins des A_n s'annule accidentellement; soit A_ν celui de plus faible indice. Comme $\nu > N$, $A_{\nu-1}$, $A_{\nu-2}$, ..., $A_{\nu-p}$ n'étant ni identiquement ni accidentellement nuls, sont positifs, c'est-à-dire que A_ν dépend effectivement de tous les coefficients de $P(x)$. Donc ce polynome est absolument minimum, et M appartient à $\mathfrak{S}'$.

Donc : *en se donnant arbitrairement des bornes inférieures positives pour* a, a', ... *et* b, b', ..., *puis prenant* β, β', ... *assez petits, nous obtenons une région de* E_q *où la frontière* $\mathfrak{S}$ *de la région positive est constituée uniquement de points de* $\mathfrak{S}'$ *correspondant à des polynomes absolument minima.*

Il en résulte que $\mathfrak{S}'$ est dans cette région une variété à $q-1$ dimensions, composée de portions des surfaces algébriques $\mathfrak{S}_n$. D'ailleurs, N, donc ν, sont arbitrairement grands. Si donc il est possible que certaines des surfaces $\mathfrak{S}_n$ n'interviennent pas dans cette définition de $\mathfrak{S}'$, il y en a une infinité qui interviennent effectivement. Elles ont nécessairement des intersections deux à deux, trois à trois, ..., de sorte qu'il peut arriver que plusieurs A_n s'annulent simultanément. Mais, *tandis que, dans la région de* E_q *obtenue en rendant d'abord* β, β', ... *maxima, c'était le cas général, c'est ici l'exception. Dans la première de ces régions, au moins un* A_ν *ne dépendant que de certains coefficients de* $P(x)$ *s'annule accidentellement sur* $\mathfrak{S}$ *et* $\mathfrak{S}'$, *ici, ceux qui s'annulent accidentellement dépendent de tous les coefficients de* $P(x)$.

On peut dire encore que la frontière $\mathfrak{S}$ de la région positive est constituée, dans certaines de ces parties, par des variétés planes ou cylindriques sur lesquelles certaines coordonnées peuvent varier indépendamment les unes des autres; dans d'autres parties, elle coïncide avec $\mathfrak{S}'$ et il n'y a aucun coefficient qu'on puisse faire varier indépendamment des autres.

Quant au nombre maximum des A_n qui peuvent en même temps s'annuler accidentellement, il est en principe égal à $q-1$ (et non q, car les paramètres a_1, $\sqrt{a_2}$, ..., $\sqrt[p]{a_p}$ n'interviennent que par leurs rapports). Il n'y a du moins pas lieu, à première vue, de s'attendre à ce qu'il puisse y en avoir plus, mais nous ne l'avons pas démontré (1).

(1) Une autre question que nous avons passée sous silence est la suivante : est-il

8. **Cas particuliers.** — 1° *Le cas du polynome du quatrième degré.* — Il peut être utile de préciser les résultats précédents dans le cas du polynome (55). Comme les relations à étudier ne dépendent que de $\frac{\beta}{a^2}, \frac{c}{a^3}, \frac{c'}{a^4}$, on peut supposer $a = 1$. Il vient alors

$$
(62)\quad \begin{cases}
A_2 = \frac{1}{2} - \beta, \\
A_3 = \frac{1}{6} - \beta + c, \\
A_4 = \frac{1}{24} - \frac{\beta}{2} + \frac{\beta^2}{2} + c + c', \\
A_5 = \frac{1}{120} - \frac{\beta}{6} + \frac{\beta^2}{2} + c\left(\frac{1}{2} - \beta\right) + c', \\
A_6 = \frac{1}{720} - \frac{\beta}{24} + \frac{\beta^2}{4} - \frac{\beta^3}{6} + c\left(\frac{1}{6} - \beta\right) + \frac{c^2}{2} + c'\left(\frac{1}{2} - \beta\right),
\end{cases}
$$

et ainsi de suite.

D'après une remarque du 4° du précédent paragraphe, c et c' constituant un ensemble suffisant pour la condition $\mathfrak{A}$, si une valeur de β est apparemment acceptable, elle est aussi réellement acceptable. Il est facile de déterminer les valeurs pour lesquelles il en est ainsi. Le seul des A_n qui ne dépende que de β étant A_2, nous voyons d'abord que β a pour maximum $\frac{1}{2}$; cette valeur maxima est acceptable, et la partie positive du plan $\beta = \frac{1}{2}$ (β, c, c' étant les coordonnées dans un espace E_3, section de E_4 par $a = 1$) appartient à la surface frontière $\mathfrak{S}$.

Dans chaque plan $\beta = \text{const.}$ $\left(\beta \text{ variant de } 0 \text{ à } \frac{1}{2}\right)$, la région positive est limitée par une ligne $\mathcal{L}$, constituée par un certain nombres d'arcs des courbes algébriques $A_n = 0$, sur l'ensemble desquels c croît d'une

---

possible que deux des surfaces $\mathfrak{S}_n$ coïncident, ou aient une nappe commune? Sous cette forme, la réponse est affirmative, puisque, pour un type de polynome sans terme du second degré, $A_1 = a_1$, $A_2 = \frac{a_1^2}{2}$. Mais il semble bien que, dès que A_n dépend effectivement d'au moins deux coefficients non nuls de $P(x)$, une circonstance de ce genre ne soit pas possible.

valeur c_0 à une valeur c_1, pendant que c' décroît de c'_1 à c'_0; on ne sait pas *a priori* si c_1 et c'_1 sont finis ou infinis; si c_1 est fini, la ligne $\mathcal{L}$ se prolonge jusqu'à l'infini sur la droite $c' = c'_0$; de même en intervertissant c et c'.

Pour $\beta = 0$ (comme pour $\beta < 0$), la ligne $\mathcal{L}$ se réduit à la partie positive des axes; la région positive comprend tout l'angle positif des axes; quand β croît, cette région diminue; quand β atteint la valeur limite $\frac{1}{2}$, les formules (62) deviennent

$$(63)\qquad \left\{\begin{aligned} A_3 &= -\frac{1}{3} + c, \\ A_4 &= -\frac{1}{12} + c + c', \\ A_5 &= \frac{1}{20} + c', \\ A_6 &= \frac{1}{45} - \frac{c}{3} + \frac{c^2}{2}, \end{aligned}\right.$$

A_6, dont la dérivée par rapport à c', qui est A_2, est nulle, étant devenu indépendant de c'. On remarque que, après A_2, il n'y a qu'un A_n indépendant de c, sûrement positif; toutes les valeurs positives de c' sont donc apparemment acceptables. Au contraire une valeur de c n'est apparemment acceptable que si elle est au moins égale à un nombre γ égal à la plus grande racine de A_6, et dont la valeur numérique approchée est 0,59153; pour cette valeur, A_3 et A_{10} (A_{10} devenant indépendant de c' quand sa dérivée A_6 est nulle) sont positives. Mais, en ce qui concerne les systèmes de valeurs de β et c, ou de β et c', nous ne sommes pas sûrs que les valeurs apparemment acceptables soient réellement acceptables; du moins, à première vue, nous pouvons seulement affirmer que, pour $\beta = \frac{1}{2}$, on a

$$c_0 \geqq \gamma, \qquad c'_0 \geqq 0,$$

et que, si $c'_0 = 0$, c_1 est infini; car, si $c' = 0$, la condition nécessaire $\mathfrak{A}$ cesse d'être vérifiée, de sorte qu'une valeur finie de c, associée à cette valeur de c', ne peut pas donner un point de la région positive.

Mais il est possible d'aller plus loin, et de montrer par exemple que

$c_0 = \gamma$, et que la valeur c'_1 associée à cette valeur de c est comprise entre $\frac{1}{6}$ et $\frac{1}{2}$. La borne inférieure indiquée résulte du calcul de A_{12}, qui est négatif pour $c = \gamma$, $c' = \frac{1}{6}$(1); pour établir à la fois que $c = \gamma$ est acceptable et que $c'_1 < \frac{1}{2}$, il n'y a qu'à montrer que, pour

$$(64) \qquad a = 1, \qquad \beta = \frac{1}{2}, \qquad c = \gamma, \qquad c' = \frac{1}{2},$$

tous les A_n sont positifs, sauf A_2 et A_6 qui sont indépendants de c'.

La relation de récurrence entre les A_n s'écrit ici

$$(65) \qquad (n+4)A_{n+4} = 2A_n + 3\gamma A_{n+1} - A_{n+2} + A_{n+3} \qquad (3\gamma = 1{,}7746).$$

En calculant successivement les A_n à l'aide de cette formule, nous avons obtenu le tableau suivant, où le chiffre inscrit dans la ligne de rang h et dans la colonne de rang k représente $10^3 A_n$, pour

$$n = 4h + k - 2:$$

(I)

258,2	1008,2	550	0
250,8	405,4	139,4	17,91
99,96	128,4	25,92	7,91
27,32	20,13	3,453	2,645
4,713	2,423	0,443	0,531
0,644	0,239	0,057	0,078
0,0642	0,0202	0,0072	0,0086

Voici, présenté sous la même forme, le tableau donnant les valeurs des expressions

$$\frac{B_{n+4}}{B_n} = \frac{n+4}{2}\frac{A_{n+4}}{A_n}$$

[la relation (7) devant être modifiée, parce qu'ici $a_p = a_4$ n'a pas la valeur un; les B_n sont toujours les coefficients dont l'introduction

(1) Je pense que la valeur exacte de c'_1 est la plus grande racine de A_{12}, qui est voisine de 0,18. Je n'ai pas poussé les calculs assez loin pour en être sûr. Le polynome minimum obtenu en rendant successivement minima $-\beta$, puis c, puis c', annulerait donc A_2, A_6 et A_{12}.

permet de mettre la relation de récurrence sous la forme (9)] :

(II)

3,40	1,61	1,14	∞
2,19	1,42	1,24	3,09
2,05	1,29	1,13	3,01
1,64	1,20	1,35	2,21
1,57	1,18	1,60	1,90
1,35	1,18	1,8	1,6

Ces tableaux mettent en évidence le phénomène de régularisation de la suite des A_n dont nous avons parlé au paragraphe 5, 4°. Sans doute voit-on certaines irrégularités se reproduire à peu près périodiquement, mais en s'atténuant. La relation (65) fait prévoir cette circonstance : si A_n est grand, A_{n+2} a chance d'être petit (ou éventuellement négatif), et A_{n+4} d'être de nouveau grand. La régularisation sera donc, et on le voit nettement sur les tableaux qui précèdent, plus rapidement sensible si l'on regarde les nombres d'une même colonne que si on les lit tous dans l'ordre des n croissants.

Le détail des calculs montre d'ailleurs nettement que le terme soustractif de la formule (65) constitue une fraction assez rapidement décroissante de la somme des deux termes précédents.

Pour les raisons sommairement indiquées au 4° du paragraphe 5, cette régularisation de la suite des A_n ne peut que s'accentuer; on ne peut plus dans la suite trouver de coefficients négatifs ou nuls.

Nous n'insistons pas davantage sur cette méthode, que nous nous sommes contenté de présenter sous une forme empirique. Il n'y aurait pas de difficulté essentielle à montrer rigoureusement, à propos de l'exemple particulier indiqué, l'exactitude du résultat annoncé; mais il ne nous semble pas que cela soit utile. Ce qui serait important serait de montrer, d'une manière générale, que, si la condition $\mathfrak{A}$ est vérifiée pour un certain type de polynomes, tout système de valeurs apparemment acceptable pour certains coeffficients est réellement acceptable. Tous les calculs que nous avons faits à propos de cas particuliers nous ont donné l'impression que cet énoncé est exact; il serait intéressant de le démontrer [1].

---

[1] Le 4° du paragraphe 3 peut servir à une telle démonstration. Si certains coefficients sont connus, et que les autres ne soient pas bornés supérieurement, le nombre de termes

Revenons au cas du polynome du quatrième degré. Lorsque β tend vers la valeur maxima $\frac{1}{2}$ se produit une discontinuité qu'il y a lieu de signaler : si petite que soit la différence $\frac{1}{2} - \beta$, A_2 n'est pas nul et A_6 n'est pas indépendant de c'. Une valeur de c, associée à une valeur de β très peu inférieure à $\frac{1}{2}$, est alors apparemment acceptable (et sans doute réellement acceptable) si elle est au moins égale à $\beta - \frac{1}{6}$, valeur qui annule A_3 et rend positif le coefficient A_7, devenu accidentellement indépendant de c'. Le minimum des valeurs de c apparemment acceptables lorsque β est donné tend donc vers $\frac{1}{3}$ quand β tend vers $\frac{1}{2}$, pour devenir brusquement égal, pour $\beta = \frac{1}{2}$, à $\gamma > \frac{1}{3}$.

2° *Autre exemple.* — Remarquons, pour terminer ce chapitre, qu'on peut se donner arbitrairement un polynome $Q(x)$, de degré q, à coefficients non négatifs, et tel que $Q(0) = 1$, et déterminer $P(x)$ de manière que le polynome constitué par les $q+1$ premiers termes de la série (1) soit précisément $Q(x)$. Il n'y a qu'à prendre

$$(66)\qquad P(x) = R(x) + c_1 x^{q+1} + c_2 x^{q+2} + \ldots + c_r x^{q+r},$$

$R(x)$ étant le polynome constitué par les q premiers termes du développement de $\log Q(x)$ en série entière, et $r, c_1, c_2, \ldots, c_r$ étant ensuite pris assez grands. Ainsi, prenons $q = 5$, et $Q(x) = 1 + x$, c'est-à-dire que nous considérons $1 + x$ comme un polynome de degré 5 ayant quatre coefficients nuls. En posant

$$(67)\qquad P(x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \frac{x^5}{5} + c_1 x^6 + c_2 x^7 + c_3 x^8 + c_4 x^9,$$

il vient

$$(68)\qquad \begin{aligned} F(x) &= (1+x)\, e^{\left(c_1 + \frac{1}{6}\right) x^6 + \left(c_2 - \frac{1}{7}\right) x^7 + \ldots} \\ &= 1 + x + \left(c_1 + \frac{1}{6}\right) x^6 + \left(c_1 + c_2 + \frac{1}{42}\right) x^7 + \left(c_2 + c_3 - \frac{1}{56}\right) x^8 + \ldots, \end{aligned}$$

---

qu'il est nécessaire de calculer avant que la racine positive de l'équation caractéristique devienne la racine du plus grand module n'est pas borné non plus; la formule (30) nous montre qu'il est de l'ordre de grandeur du plus grand des coefficients.

et l'on voit aisément qu'on peut déterminer c_1, c_2, c_3, c_4 de manière à rendre tous les coefficients de cette série non négatifs. On peut ainsi annuler à la fois A_2, A_3, A_4 et A_5, et, pour des déterminations convenables de c_1, c_2, c_3 et c_4, on pourra annuler encore d'autres coefficients. On pourra de même, si $P(x)$ est de degré assez élevé, annuler un nombre quelconque de coefficients consécutifs à partir de A_2, tandis que, si $P(x)$ est de degré 4, nous avons vu qu'on ne peut pas annuler simultanément A_2 et A_3.

CHAPITRE II.

L'ARITHMÉTIQUE DES PRODUITS DE LOIS DE POISSON.

9. **Notions générales.** — La *fonction génératrice* d'une variable aléatoire réelle U, introduite et utilisée systématiquement par Laplace, est la fonction $G(x)$ égale à la valeur probable de x^U. Pour l'étude des variables aléatoires dépendant de lois quelconques, on sait qu'il y a intérêt à considérer plutôt la *fonction caractéristique* $\varphi(z) = G(e^{iz})$, toujours bien définie pour z réel, et dont la donnée définit toujours la loi de probabilité; elle a aussi été considérée par Laplace, puis par Cauchy, et a depuis été étudiée d'une manière systématique. Mais la fonction $G(x)$ est utile à considérer dans le cas où U n'a qu'une infinité dénombrable de valeurs possibles, et surtout dans celui où ces valeurs sont toutes des nombres entiers non négatifs. Dans ce dernier cas, $G(x) = \sum_0^\infty \alpha_n x^n$ est une série entière, à coefficients non négatifs et de somme unité; donc elle converge pour $|x| \leqq 1$, et $G(1) = 1$; à cela près elle est quelconque.

On peut évidemment considérer la fonction $G(x)$ comme connue si l'on connaît une série

$$F(x) = \sum_0^\infty A_n x^n \tag{1}$$

qui lui soit proportionnelle; c'est donc une série entière, à coefficients non négatifs, convergente pour $x = 1$ (donc pour $|x| \leqq 1$), à cela près quelconque.

Nous supposerons dans ce qui suit $A_0 = 1$, ce qui implique que la probabilité α_0 de $U = 0$ ne soit pas nulle; le cas où la plus petite valeur possible pour U est un entier positif a se ramène au précédent par un changement d'inconnue; il n'y a qu'à prendre $U - a$ comme nouvelle inconnue. Nous supposerons donc cette réduction effectuée, et, *modifiant un peu la définition de Laplace, appellerons fonction génératrice la fonction* $F(x)$ *liée à celle de Laplace par les formules*

$$F(x) = \frac{G(x)}{G(0)}, \qquad G(x) = \frac{F(x)}{F(1)} \quad (^1).$$

Si U est la somme de deux variables aléatoires indépendantes U_1 et U_2, on a entre $F(x)$ et les fonctions génératrices

$$F_1(x) = \sum_0^\infty A'_n x^n, \qquad F_2(x) = \sum_0^\infty A''_n x^n$$

de U_1 et U_2 la relation connue

$$F(x) = F_1(x) F_2(x), \tag{2}$$

tandis que les relations entre les coefficients s'écrivent

$$A_n = A'_0 A''_n + A'_1 A''_{n-1} + \ldots + A''_n A'_0 ; \tag{3}$$

compte tenu de $A'_0 = A''_0 = 1$, on en déduit

$$A'_n \leqq A_n, \qquad A''_n \leqq A_n. \tag{4}$$

Symboliquement, on représente la relation (2) par la relation

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 \mathcal{L}_2 \tag{5}$$

entre les lois de probabilité dont dépendent respectivement U, U_1 et U_2. Le problème de la décomposition en facteurs de la loi $\mathcal{L}$ définie par la fonction génératrice $F(x)$ est donc lié à celui de la décomposition de $F(x)$ en facteurs qui soient des fonctions génératrices. Il faut d'ailleurs remarquer que l'on ne peut obtenir ainsi que des décompositions telles que U_1 et U_2 soient, comme U, des variables

---

(1) L'utilisation de la fonction de Laplace nous obligerait dans la suite à écrire toujours $P(x) - P(1)$ au lieu de $P(x)$.

entières, dont la plus petite valeur possible soit zéro. Mais il est facile de montrer que, à cela près qu'on peut remplacer U_1 et U_2 par $U_1 - a$ et $U_1 + a$, a étant une constante quelconque, il ne saurait en exister d'autres.

Supposons, en effet, connues deux lois $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ dont le produit soit la loi $\mathcal{L}$ de fonction génératrice $F(x)$; désignons par U_1 et U_2 deux variables aléatoires indépendantes, qui dépendent respectivement des lois $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, par u_1 une valeur possible pour U_1 et par u_2 une valeur possible pour U_2 (1); la somme $u_1 + u_2$ est une valeur possible pour la somme $U = U_1 + U_2$. En fixant u_2 et faisant varier u_1, on voit que les valeurs possibles pour U_1 appartiennent à une progression arithmétique, de raison unité, limitée à gauche; de même pour U_2. De plus, a_1 et a_2 désignant respectivement les plus petites valeurs possibles pour U_1 et U_2, $a_1 + a_2$ est la plus petite valeur possible pour U, c'est-à-dire zéro. Donc, $U_1 - a_1$ et $U_2 - a_2$ sont des variables entières et non négatives de somme U. C. Q. F. D.

Supposons donc $U_1 - a_1$ et $U_2 - a_2$ remplacés par U_1 et U_2. Les lois $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ dont dépendent ces variables peuvent être représentées par leurs fonctions génératrices $F_1(x)$ et $F_2(x)$, les formules (2) à (4) s'appliquent, et la dernière de ces formules montre que les séries $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont majorées par $F(x)$.

Si alors $F(x)$ est une fonction entière, les séries entières $F_1(x)$ et $F_2(x)$ représentent aussi des fonctions entières, dont l'ordre ne peut dépasser celui de $F(x)$. La formule (2) étant alors valable dans tout le plan, si la fonction $F(x)$ est une fonction entière sans racine, il en est de même de $F_1(x)$ et $F_2(x)$. Par suite, si $F(x)$ est de la forme

$$F(x) = e^{P(x)} \tag{6}$$

étudiée au Chapitre I, $F_1(x)$ et $F_2(x)$ sont de la même forme, et l'étude de la décomposition en facteurs de la loi $\mathcal{L}$ se ramène à celle de la représentation de $P(x)$ par une somme de deux polynomes

(1) Une valeur possible de U est une valeur u telle que la probabilité de $|U - u| < \varepsilon$ soit positive pour tout ε positif. L'ensemble des valeurs possibles est un ensemble fermé; toute valeur possible isolée est une valeur à probabilité positive.

$P_1(x)$ et $P_2(x)$, sans termes constants, dont les degrés ne dépassent pas celui de $P(x)$ et qui vérifient les conditions du théorème II (condition qui d'ailleurs comprend la précédente).

Dans le cas simple où $P(x) = ax$ (avec $a > 0$), il résulte immédiatement de ces remarques que $P_1(x)$ et $P_2(x)$ sont de la même forme. Or, cette forme caractérise la *loi de Poisson*. Donc, *tout diviseur d'une loi de Poisson est une loi de Poisson* (à cela près, bien entendu, qu'à la la variable U_1, on peut ajouter une constante). C'est un théorème de M. Raikoff, et la démonstration très simple que nous venons de rappeler est due à M. Khintchine.

Si U dépend de la loi définie par $P(x) = ax$ (1), σU (σ étant une constante réelle) dépend de la *loi générale de Poisson*, définie par $P(x) = ax^\sigma$; si σ n'est pas un nombre entier positif, σU n'est pas une variable entière non négative, et $P(x)$ cesse d'être un polynome. On sait que la loi de Gauss et la loi générale de Poisson sont les éléments constitutifs d'un groupe, le groupe des *lois indéfiniment divisibles*, qui a été depuis quelques années l'objet de nombreux travaux. J'ai démontré en 1934 que la représentation d'une loi indéfiniment divisible en partant des éléments constitutifs du groupe est toujours unique. La question suivante se posait alors tout naturellement : ce théorème d'unicité subsiste-t-il si l'on admet la possibilité d'introduire des diviseurs n'appartenant pas à ce groupe? En d'autres termes, *une loi de ce groupe peut-elle être représentée par un produit de facteurs dont un au moins ne lui appartienne pas ?* En d'autres termes encore : *une loi indéfiniment divisible peut-elle admettre des diviseurs indécomposables* (car une loi qui n'est pas indéfiniment divisible admet au moins un tel diviseur, et, par définition même de ces expressions, une loi indécomposable n'est pas indéfiniment divisible ; les deux questions sont donc équivalentes) ? Le premier résultat, dans cet ordre d'idées, fut obtenu par M. H. Cramer, qui montra en 1936 que tout diviseur de la loi de Gauss était une loi de Gauss généralisée (c'est-à-dire, si U est une variable dépendant de la loi de Gauss réduite, la loi dont dépend

(1) Pour abréger le langage, nous disons « loi définie par $P(x)$ » pour désigner la loi dont la fonction génératrice est $e^{P(x)}$. Nous ne répéterons pas que $P(x)$ est sans terme constant; dans la suite, il ne sera question que de polynomes sans termes constants.

$aU + b$). Puis vint, dans le même sens, le résultat de M. Raikoff relatif à la loi de Poisson. M. Raikoff démontra ensuite, par un exemple très simple, qu'un produit infini de lois de Poisson peut, au contraire, avoir des diviseurs indécomposables : *il peut arriver qu'une même loi soit représentable à la fois par un produit infini de lois de Poisson et par un produit infini de facteurs indécomposables.*

La solution de la question analogue relative aux produits finis de lois de Poisson se déduit immédiatement des résultats du Chapitre I. Si $P_1(x)$ est un des polynomes dont le théorème II établit l'existence, ayant au moins un coefficient négatif, et tel que la série entière qui représente $e^{P_1(x)}$ ait tous ses coefficients non négatifs, il n'y a qu'à écrire

$$P_1(x) = P(x) - P_2(x),$$

en séparant les termes positifs et les termes négatifs, et l'on voit que : $P(x)$ *représente un produit fini de lois de Poisson, que l'on peut aussi obtenir en multipliant la loi non indéfiniment divisible définie par* $P_1(x)$ *et le produit de lois de Poisson défini par* $P_2(x)$.

La suite de ce chapitre a pour objet de préciser ce premier résultat fondamental par quelques remarques sur la recherche systématique des diviseurs indécomposables du produit de lois de Poisson défini par un polynome $P(x)$ à coefficients non négatifs, et sur quelques cas particuliers réalisant des circonstances dont la possibilité n'était pas évidente *a priori.*

On remarque que nous ne traitons ici que le cas où $P(x)$ est un polynome. Le présent Mémoire ne devrait donc être que l'introduction à l'étude plus générale des produits de lois de Poisson obtenus en remplaçant $P(x)$ par une expression de la forme

$$\Sigma a_\nu x^{\sigma_\nu},$$

les σ_ν pouvant n'être pas des multiples d'un même nombre σ (entier ou non), et les a_ν étant positifs. Cette question n'est pas actuellement résolue d'une manière complète ; disons seulement que l'existence de diviseurs indécomposables dépend essentiellement des relations linéaires et homogènes à coefficients entiers qui peuvent exister entre les σ_ν ; seuls importent les coefficients de ces relations; M. Raikoff a démontré le premier qu'il doit y en avoir au moins une. C'est en cherchant à retrouver la démonstration de ce résultat, qui m'avait été communiqué par M. Khintchine, que j'ai été conduit à penser qu'il y avait intérêt à étudier d'abord le cas où les σ_ν sont entiers; cette étude, d'après ce que M. Khintchine m'a écrit depuis, est d'ailleurs sans rapport direct avec les recherches de M. Raikoff.

10. **Condition de l'existence des diviseurs indécomposables.** — Donnons-nous le polynome

$$P(x) = a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_p x^p,$$

dont tous les coefficients soient non négatifs et proposons-nous de le représenter par une somme de deux polynomes

$$P_1(x) = \Sigma a'_m x^m, \qquad P_2(x) = \Sigma a''_m x^m \qquad (m = 1, 2, \ldots, p)$$

vérifiant les conditions du théorème II, et notamment les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Il s'agit de savoir s'il existe d'autres solutions que celles pour lesquelles tous les coefficients de ces deux polynomes sont positifs ou nuls.

Soit donc un entier m tel que a'_m, pour fixer les idées, soit négatif. Désignons par m_1, m_2, ... les nombres *supérieurs à m* qui soient des degrés de termes non nuls dans au moins un des polynomes $P_1(x)$ et $P_2(x)$, et par p_1, p_2, ... les nombres définis de la même manière pour le polynome $P(x)$. Le polynome $P_1(x)$ vérifiant la condition $\mathcal{A}$, m est de la forme $\Sigma \bar{h}_i m_i$, les $\bar{h}_i$ étant des entiers (de signes quelconques). Montrons qu'on peut aussi écrire

$$m = \Sigma h_i p_i \tag{7}$$

(les h_i étant aussi des coefficients entiers de signes quelconques). Cela résulte évidemment de ce que si un des m_i, que nous désignerons par μ, n'est pas dans la suite des p_i, on a $a'_\mu + a''_\mu = a_\mu = 0$, et, comme un au moins des nombres a'_μ et a''_μ n'est pas nul, ils sont, l'un positif, l'autre négatif. Le polynome auquel appartient le coefficient négatif vérifiant la condition $\mathcal{A}$, le résultat indiqué pour m s'applique à μ: μ est une combinaison linéaire et à coefficients entiers de ceux des m_i qui dépassent μ, ce qui permet d'éliminer μ de l'expression $\Sigma h_i m_i$ obtenue pour m. On peut ainsi éliminer, en commençant par les plus petits, tous ceux des m_i qui ne sont pas des p_i, ce qui montre que m est nécessairement de la forme (7).

En utilisant la condition $\mathcal{B}$, on démontre exactement de la même manière que

$$(8) \qquad m = \Sigma h'_i p'_i,$$

$p'_1, p'_2, \ldots$ étant les nombres *inférieurs* à m qui sont les degrés de termes non nuls dans $P(x)$, et les h'_i étant des entiers *non négatifs*.

Il importe peu que a_m soit positif ou nul. Les conditions (7) et (8) imposées à m peuvent s'exprimer en disant que, si c est un coefficient positif, le polynome

$$P(x) - (a_m + c)x^m,$$

dont le seul coefficient négatif est celui de x^m, vérifie les conditions $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$. Si c est assez petit, il vérifie donc les conditions du théorème II, de sorte qu'on a une décomposition de la forme cherchée en prenant ce polynome pour $P_1(x)$. Il définit une loi qui n'est pas indéfiniment divisible (puisqu'il a un coefficient négatif), et qui, multipliée par la loi de Poisson définie par $P_2(x) = (a_m + c)x^m$, redonne le produit de lois de Poisson défini par $P(x)$.

On peut donc énoncer le théorème suivant :

Théorème III. — 1° *La condition nécessaire et suffisante pour l'existence d'un diviseur indécomposable* (au moins) *de la loi définie par le polynome* $P(x)$ *est qu'il existe au moins un nombre* m *tel que le polynome* $P(x) - (a_m + c)x^m$ *vérifie les conditions* $\mathcal{A}$ *et* $\mathcal{B}$ *du Chapitre I* [en d'autres termes, m doit être représentable à la fois par la forme (7) et par la forme (8)].

2° *Un diviseur quelconque de la loi considérée est représentée par un polynome qui ne peut avoir d'autres coefficients négatifs que ceux des termes dont les degrés vérifient à la fois les conditions* (7) et (8).

Naturellement, dire que a'_m (ou a''_m) peut être négatif revient à dire que a''_m (ou a'_m) peut être supérieur à a_m. Pour les valeurs de m ne vérifiant pas les conditions (7) et (8), a'_m et a''_m sont nécessairement compris entre zéro et a_m.

Des remarques analogues s'appliquent au cas où le polynome initial $P(x)$ a déjà des termes négatifs. S'il vérifie les conditions du théorème II, il est indécomposable ou admet des diviseurs indécomposables, et pour que l'on puisse, sans que ces conditions cessent d'être vérifiées, rendre négatifs certains termes qui ne le seraient pas initialement, il faut que leurs degrés m, m', ... vérifient à la fois les conditions (7) et (8).

L'existence d'un tel nombre m implique que $P(x)$ ait au moins deux termes positifs de degrés supérieurs à m et un dont le degré soit inférieur à m, donc au moins trois termes. Un produit de trois lois de Poisson peut admettre effectivement des diviseurs indécomposables; tel est le cas pour celui qui correspond au polynome

$$ax^h + cx^{2h+1} + c' x^{2h+2},$$

pour lequel l'entier $m = 2h$ est représentable à la fois par les formules (7) et (8). Mais il peut aussi arriver qu'un polynome à trois termes représente une loi sans diviseurs indécomposables; tel est le cas pour les polynomes $x + x^3 + x^6$ et $x^2 + x^5 + x^9$, par exemple; pour ce dernier polynome, m devrait évidemment être compris entre 2 et 6, multiple de 2 et multiple du p. g. c. d. de 6 et 9, et ces conditions sont incompatibles. Quel que soit le nombre de termes de $P(x)$, si le degré de chaque terme est multiple du précédent, il définit une loi sans diviseur indécomposable; en effet, les degrés des termes de $P(x)$ qui sont supérieurs à un entier quelconque m ont pour p. g. c. d. le plus petit d'entre eux; comme il est supérieur à m, il ne peut diviser m, et la condition nécessaire (7) n'est pas vérifiée.

11. **Lois apparemment indécomposables et lois indécomposables.** — Nous dirons qu'une loi $\mathcal{L}$ définie par un polynome $P(x)$ est *apparemment indécomposable* si $P(x)$ est un polynome minimum. D'après la définition même des polynomes minima, cela revient à dire qu'elle ne peut pas être divisible par une loi de Poisson définie par cx^m ($c > 0$, m entier > 0); comme elle ne peut pas non plus être divisible par une loi de Poisson formée avec un exposant non entier, cela revient à dire qu'elle n'est divisible par aucune loi de Poisson.

La seule décomposition en facteurs possible pour une telle loi correspond alors à une décomposition de $P(x)$ en une somme

$$P(x) = P_1(x) + P_2(x) \tag{9}$$

en deux polynomes qui seraient nécessairement aussi des polynomes minima, puisqu'ils doivent définir deux lois $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ qui ne sont divisible par aucune loi de Poisson (leur produit ne l'étant pas). La question de savoir s'il y a identité, pour les lois $\mathcal{L}$ que nous étudions ici, entre la notion de loi apparemment indécomposable et celle de loi réellement indécomposable se ramène donc à celle de la possibilité d'une décomposition de la forme (9), les trois polynomes $P(x)$, $P_1(x)$ et $P_2(x)$ étant minima.

Nous allons montrer que : *pour un polynome du quatrième degré, une telle décomposition est impossible, de sorte qu'une loi apparemment indécomposable définie par un tel polynome est réellement indécomposable.*

C'est une conséquence immédiate de la formule (3), et de la formule de récurrence (4) du Chapitre I, qui s'écrit ici

$$(n+4)A_{n+4} = 4c'A_n + 3cA_{n+1} - 2\beta A_{n+2} + aA_{n+3},$$

a, β, c, et c' étant les coefficients de $P(x)$ [notations de la formule (55) du Chapitre I]. A_n étant non négatif et c positif, cette formule montre que les formules

$$A_{n+1} > 0, \qquad A_{n+2} = A_{n+3} = 0,$$

entraînent $A_{n+4} > 0$. Donc, dans la suite des A_n, il ne peut pas y avoir plus de deux termes nuls consécutifs; le même résultat s'applique aux A'_n et aux A''_n [notations de la formule (3)].

Appliquons alors la formule (3). Comme $A'_0 = 1$ et $A'_1 > 0$, si A'_2 est positif, elle montre que

$$A_n \geqq A''_n + A'_1 A''_{n-1} + A'_2 A''_{n-2} > 0,$$

ce qui est en contradiction avec l'hypothèse que $P(x)$ soit un polynome minimum; un au moins des A_n doit être nul.

Si au contraire $A'_2 = 0$, nous avons vu que A'_3 doit être positif (les systèmes de valeurs de a, β, c qui annulent A'_2 et A'_3 rendent A'_6 négatif), et, d'après les formules (63), A'_4 et A'_5 sont positifs. Quel que soit $n > 2$, en convenant que A''_ν représente zéro si ν est négatif,

A''_{n-3}, A''_{n-4}, A''_{n-5} ne peuvent pas s'annuler en même temps, de sorte que

$$A_n \geqq A'_3 A''_{n-3} + A'_4 A''_{n-4} + A'_5 A''_{n-5} > 0,$$

et comme $A_2 \geqq A'_1 A''_1 > 0$, ici encore A_n ne peut pas s'annuler. L'impossibilité d'obtenir un polynome minimum du quatrième degré par l'addition de deux polynomes vérifiant les conditions du théorème II est donc établie dans le cas des polynomes du quatrième degré.

Ce résultat est certainement susceptible de généralisation. La formule (3), dans laquelle A_n est une somme de termes non négatifs, montre que ce coefficient ne peut s'annuler que dans des cas exceptionnels. Toutefois le théorème que l'on pourrait être tenté d'énoncer en généralisant sans restriction le résultat précédent est faux.

Désignons en effet par $P_1(x)$ et $P_2(x)$ deux polynomes minima, du quatrième degré, identiques ou non, et tels que dans la suite des A'_n il y ait un seul coefficient nul A'_ν d'indice supérieur à 4 et que de même A''_ν soit le seul coefficient nul dans la suite des A''_n. Prenons pour $P(x)$, non la somme de ces deux polynomes, mais la somme

$$P(x) = P_1(x^p) + P_2(x^q), \tag{10}$$

p et q étant deux nombres premiers supérieurs à 2ν; donc $pq > \nu(p+q)$. La série $F(x)$ correspondant à ce polynome à un grand nombre de coefficients identiquement nuls, et en outre au moins trois coefficients accidentellement nuls, ceux d'indices νp, νq, $\nu(p+q)$; cela résulte évidemment de ce que chacun de ces nombres, étant inférieur à pq, n'a pas d'autre représentation de la forme $hp + h'q$ (h, h' étant des entiers non négatifs) que celle mise en évidence [la même remarque s'applique aux indices $\nu(2p+q)$, $\nu(3p+q)$, ..., s'ils sont inférieurs à pq]. Pour l'indice $\nu(p+q)$, notamment, on a

$$A_{\nu(p+q)} = A_{\nu p} A_{\nu q} = 0.$$

Montrons maintenant que l'on ne peut diminuer aucun coefficient a_m de $P(x)$. D'après la condition (8) on n'a à considérer que les valeurs de m de la forme $hp + h'q$ (h, h' étant des entiers non négatifs).

D'ailleurs, pour que la condition $\mathfrak{A}$ reste vérifiée si l'on diminue a_m, il faut évidemment que $h \leqq 4$, $h' \leqq 4$. Les formules

$$\frac{\partial A_{\nu p}}{\partial a_m} = A_{(\nu-h)p} > 0 \qquad (\text{si } h' = 0),$$

$$\frac{\partial A_{\nu q}}{\partial a_m} = A_{(\nu-h')q} > 0 \qquad (\text{si } h = 0),$$

$$\frac{\partial A_{\nu(p+q)}}{\partial a_m} = A_{(\nu-h)p+(\nu-h')q} > 0 \qquad (\text{si } h > 0,\ h' > 0)$$

montrent alors qu'en tout cas on ne peut pas diminuer a_m sans rendre négatif un au moins des coefficients A_n qui sont accidentellement nuls. *Le polynome* (10) *définit donc une loi apparemment indécomposable*, *mais non réellement indécomposable*.

Cette circonstance n'est évidemment possible que parce que les séries entières correspondant aux polynomes $P_1(x^p)$ et $P_2(x^q)$ ont une infinité de coefficients identiquement nuls. Elle n'apparaît que comme une exception à une règle qui, si elle n'est pas toujours vérifiée, l'est sous certaines conditions assez peu restrictives qu'il serait intéressant de préciser.

12. **Remarques et exemples divers.** — 1° Considérons le produit de lois de Poisson défini par le polynome

$$P(x) = ax + cx^3 + c'x^4,$$

et proposons-nous de chercher ses diviseurs indécomposables. Chacun d'eux est évidemment défini par un polynome de la forme

$$P_1(x) = a_1x - \beta_1x^2 + c_1x^3 + c'_1x^4 \qquad (0 < a_1 \leqq a,\ 0 < c_1 \leqq c,\ 0 < c'_1 \leqq c).$$

Nous savons d'ailleurs que si une fois a_1 choisi, c_1, puis c'_1 sont assez petits, on obtient effectivement un polynome minimum en donnant à β_1 la valeur maxima compatible avec les valeurs choisies de a_1, c_1, c'_1 : elle annulera en effet un coefficient A_n précédé par quatre coefficients positifs, de sorte qu'il dépend effectivement de tous les coefficients de $P_1(x)$. Ce polynome définit donc une loi indécomposable. *Le produit de lois de Poisson défini par* $P(x)$ *admet donc une triple infinité de diviseurs indécomposables.*

On démontre de la même manière que : *si un produit de lois de*

Poisson admet un diviseur non indéfiniment divisible, il admet au moins une triple infinité de diviseurs apparemment indécomposables. La question de savoir si dans cet énoncé on peut supprimer le mot *apparemment* soulève quelques difficultés sur lesquelles nous n'insisterons pas ici.

2° Un polynome minimum du type

$$P(x) = ax + a'x^2 - bx^3 + cx^4 + c'x^5 \qquad \left(a' > 0,\ A_3 = \frac{a^3}{6} + aa' - b = 0\right)$$

(a, c, c' sont nécessairement positifs) correspond nécessairement à une loi $\mathcal{L}$ indécomposable. Soit en effet

$$P_1(x) = a_1 x + a'_1 x^2 - b_1 x^3 + c_1 x^4 + c'_1 x^5$$

un polynome correspondant à une loi $\mathcal{L}_1$ qui divise $\mathcal{L}$. Il doit avoir au moins un coefficient négatif; autrement $\mathcal{L}_1$ serait un produit de lois de Poisson; or, $P(x)$ étant minimum, un tel produit ne peut pas diviser $\mathcal{L}$. Ce coefficient ne peut être que celui de x^2 ou celui de x^3, et, la condition $\mathcal{B}$ devant être vérifiée par $P_1(x)$, a_1 est positif. Donc, dans l'application de la formule (3), $A'_1 = a_1$ est positif; de même A''_1; $A_3 = 0$ implique donc

$$A'_2 = A'_3 = A''_2 = A''_3 = 0,$$

et les coefficients de x^2 seraient négatifs dans $P_1(x)$ et $P_2(x)$, ce qui est impossible, leur somme étant a'.

Nous pouvons d'ailleurs, b étant donné, supposer a' arbitrairement petit (ce coefficient pouvant même devenir nul). Rien n'empêche donc de former avec les mêmes coefficients a' et b, changés de signes, et deux nouveaux coefficients convenablement déterminés, un polynome minimum du quatrième degré

$$Q(x) = a''x - a'x^2 + bx^3 + c''x^4,$$

qui correspond à une loi indécomposable. La formule

$$P(x) + Q(x) = (a + a'')x + (c + c'')x^4 + c'x^5$$

montre alors que : *un produit de trois lois de Poisson peut être le produit de deux lois indécomposables.*

On peut modifier cet exemple de bien des manières; par exemple faire disparaître les termes en x^2 et en x^3, non dans $P(x)+Q(x)$, mais dans $(n'-1)P(x)+Q(x)$. On voit ainsi que : *quels que soient les entiers* $n>2$ *et* $n'>1$, *on peut définir des lois représentables à la fois par le produit de* n *lois de Poisson et par le produit de* n' *lois indécomposables;* les conditions $n>2$ et $n'>1$ sont d'ailleurs nécessaires : pour $n=1$ ou 2, le produit de n lois de Poisson ne peut pas avoir de diviseur indécomposable (nous l'avons démontré s'il s'agit de polynomes; nous ne nous occupons pas dans ce travail des expressions de la forme $ax+a'x^{\sigma}$, σ étant irrationnel).

Le résultat qui précède nous paraît mériter de retenir l'attention. On connaissait déjà des exemples de décompositions multiples; le plus simple est celui qui résulte de l'identité

$$(1+x)(1+x^2+x^4)=(1+x^3)(1+x+x^2)$$

dans laquelle chaque facteur représente une fonction génératrice. Mais, dans ces exemples, les différentes décompositions que l'on connaissait pour une même loi contenaient le même nombre de facteurs indécomposables. On pouvait être tenté de penser qu'un produit de n lois indécomposables ne peut jamais être le produit de plus de n lois (en excluant les lois unités, pour lesquelles il n'y a qu'une valeur possible). *Nous voyons qu'au contraire le produit de deux lois indécomposables peut être indéfiniment divisible.*

3° J'ai montré dans un travail antérieur que n'importe quelle loi de probabilité peut être représentée par le produit d'une loi sans diviseur indécomposable par un produit (fini ou infini) de lois indécomposables (c'est d'ailleurs un complément à un résultat antérieur de M. Khintchine, complément que lui et moi avons établi indépendamment l'un de l'autre). Il y avait lieu de se demander si cette décomposition est toujours unique. Nous allons montrer qu'il n'en est rien.

Considérons un polynome minimum

$$P(x)=ax-\beta x^2+cx^3+c'x^4,$$

pour lequel un seul coefficient A_n, dépendant effectivement de a, β, c, c', est nul. On peut alors faire varier a et β, par exemple, en laissant c et c' constants. Désignons par

$$P_1(x) = a_1 x - \beta_1 x^2 + c x^3 + c' x^4,$$
$$P_2(x) = a_2 x - \beta_2 x^2 + c x^3 + c' x^4$$

deux polynomes ainsi obtenus; a et β variant dans le même sens, supposons pour fixer les idées $a_1 > a_2$, d'où $\beta_1 > \beta_2$. On a alors

$$a_1 x - \beta_2 x^2 + c x^3 + c' x^4 = P_1(x) + (\beta_1 - \beta_2) x^2 = P_2(x) + (a_1 - a_2) x^2$$

ce qui montre que : *une même loi peut être de deux manières différentes le produit d'une loi indécomposable par une loi de Poisson.*

De même, en prenant a compris entre a_1 et a_2, donc β entre β_1 et β_2, la formule

$$a_1 x - \beta_2 x^2 + c x^3 + c' x^4 = P(x) + (a_1 - a) x + (\beta - \beta_2) x^2,$$

montre que : *une même loi peut être d'une infinité de manières différentes le produit d'une loi indécomposable et de deux lois de Poisson.*

La loi de Poisson, ou le produit de deux lois de Poisson qui figure dans cette dernière formule, étant sans diviseurs indécomposables, le résultat annoncé est bien établi par ces exemples.