Annales scientifiques de l'É.N.S.

Paul Vincensini

Étude des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe se correspondent avec équivalence ou applicabilité et problèmes de déformation associés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 41-82
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__41_0>

ÉTUDE

DES

CONGRUENCES DE SPHÈRES

DONT LES DEUX NAPPES DE L'ENVELOPPE SE CORRESPONDENT AVEC ÉQUIVALENCE OU APPLICABILITÉ

ET

PROBLÈMES DE DÉFORMATION ASSOCIÉS

PAR M. P. VINCENSINI.

Introduction.

Considérons une sphère variable (Σ) dépendant de deux paramètres, dont le centre $P(x, y, z)$ décrit une surface (S), et dont le rayon R est une fonction déterminée des deux variables u, v fixant P sur (S).

L'enveloppe de (Σ) lorsque P varie se compose, en général, de deux nappes distinctes (σ) et (σ'), les points de contact M et M' de la sphère avec son enveloppe étant symétriques par rapport au plan tangent en P à (S).

L'étude de la correspondance que les points P, M et M' établissent entre les trois surfaces (S), (σ) et (σ') a déjà donné lieu à d'importants travaux, et de nombreux résultats ont été obtenus principalement par Ribaucour, Bianchi et M. Drach. Mais le sujet est loin d'être épuisé.

Dans ce Mémoire j'étudie les congruences de sphères pour lesquelles la correspondance que les points M et M' établissent sur (σ) et (σ') est une équivalence (conserve les aires des éléments superficiels) ou une applicabilité.

Le premier problème me semble nouveau. L'application des méthodes régulières systématiquement employées dans les ouvrages classiques de G. Darboux ou L. Bianchi peut conduire à sa solution, mais les développements auxquels on est ainsi conduit, outre qu'ils exigent des calculs souvent très laborieux, ne mettent pas en évidence certains résultats géométriques importants, telle par exemple la différence profonde qui existe entre les cas où la correspondance entre les points M, M′ est *directe* ou *inverse* (¹).

J'applique à la mise en équation du problème quelques-unes de mes recherches antérieures sur les congruences rectilignes, à l'origine desquelles se trouve la formule bien connue de Kummer, relative à la *densité* d'un pinceau infiniment délié de ∞^2 rayons en un point quelconque du rayon moyen.

Le second problème (nappes de l'enveloppe applicables) peut être considéré comme un cas particulier du problème général (étudié par Darboux) de la recherche des congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe sont en correspondance *conforme*. M. Lebel (²) en a fait une étude directe et a indiqué une solution particulière. En considérant l'application de deux surfaces comme une *transformation conforme conservant les aires*, je traite la question dans toute sa généralité et je suis ainsi amené à conclure que la solution de M. Lebel est la plus générale.

Je donne ici un résumé du contenu du Mémoire.

Au paragraphe 1 je rappelle les propriétés essentielles des pinceaux de rayons, j'en déduis une formule générale [formule (1′)] que j'applique à la détermination des propriétés caractéristiques des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence des éléments superficiels homologues, et j'indique diverses propriétés de ces congruences.

Les paragraphes 2 et 3 sont consacrés à la mise en équation du problème et à l'étude des différences existant entre les deux cas où la

(¹) Pour la définition des correspondances directes et diverses, *voir* le paragraphe 1.
(²) *Journal de Mathématiques*, t. XV, 1936.

correspondance entre les deux nappes est directe ou inverse. Le cas des congruences de sphères de *rayon constant* donnant des correspondances avec équivalence ou, plus généralement, avec *proportionnalité* des éléments superficiels homologues est spécialement examiné.

Les congruences réalisant une correspondance avec équivalence *inverse* des éléments superficiels sont *arbitrairement déformables* avec la surface des centres (déférente); c'est-à-dire que l'on peut déformer arbitrairement cette dernière surface, chacun de ses points entraînant la sphère associée, sans que la nature de la correspondance change. Dans le cas des correspondances *directes*, la déformation arbitraire de la déférente n'est plus possible en général. La recherche, faite au paragraphe 4, des congruences éventuelles pour lesquelles la déformation est possible, conduit à un résultat négatif, et met en évidence des congruences à nappes focales curvilignes, se correspondant avec égalité des arcs, et conservant cette propriété dans une déformation arbitraire de la déférente.

Au paragraphe 5 je donne la solution complète du problème de la recherche des congruences de sphères à nappes de l'enveloppe *applicables*, l'applicabilité ayant lieu par les points de contact correspondants.

Au paragraphe 6 je détermine toutes les congruences de sphères donnant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec égalité des éléments superficiels, dont la déférente est une développable. Revenant ensuite au cas général, je montre comment des considérations purement géométriques permettent d'expliquer des cas analytiques de réduction bien connus des équations aux dérivées partielles linéaires du second ordre (du type elliptique ou hyperbolique) dont dépend le problème des correspondances directes auquel je me limite dans la suite. Le problème des correspondances inverses, en général plus difficile, dépend d'une équation de *Monge-Ampère*, trés analogue à l'équation générale du problème de la déformation des surfaces.

Le paragraphe 7 traite du cas où la déférente est une surface minima. L'équation du problème affecte alors la forme de Laplace, et peut toujours être ramenée à avoir ses invariants égaux. Je montre que cette circonstance analytique est liée au fait que les lignes asymptotiques des surfaces minima forment un système orthogonal isotherme, et j'étudie un cas d'intégrabilité complète.

Au paragraphe 8 j'étudie les congruences dont la déférente est à courbure totale constante. Ici l'intégration complète est toujours possible dès que la déférente est connue. Dans le cas où la déférente est une sphère, je ramène le problème à la détermination des surfaces que Weingarten, dans la méthode qu'il a proposée pour la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée, a associées au paraboloïde de révolution.

Enfin, au paragraphe 9, j'établis deux relations métriques remarquables, liant le rayon de la sphère variable et les rayons de courbure principaux des deux nappes de l'enveloppe en deux points correspondants, *caractéristiques* des deux types distincts qui font l'objet de ce Mémoire.

1. **Formule de Kummer et conséquences.** — Soient (C) une congruence rectiligne quelconque, D l'un quelconque de ses rayons. Envisageons un pinceau infiniment délié, constitué par un ensemble de ∞^2 rayons de la congruence voisins de D et contenant D à son intérieur (D sera dit le rayon moyen du pinceau), et le cône infiniment délié formé par les parallèles issues d'un point fixe O aux rayons du pinceau précédent (dont le rayon moyen est la parallèle $O\delta$ à D).

M étant un point quelconque de D, considérons le plan perpendiculaire en M à D et soit ds l'aire de la section faite par ce plan dans le pinceau de rayon moyen D. Soit de même $d\varepsilon$ l'aire de la section du cône de rayon moyen δ par la sphère unité de centre O. Le rapport $\frac{d\varepsilon}{ds}$ est ce qu'on appelle la *densité* du pinceau considéré au point M.

Les droites D et δ étant orientées positivement dans le même sens (quelconque d'ailleurs), convenons de dire que le rapport des éléments d'aire $d\varepsilon$ et ds est positif si, lorsque le point où le rayon générateur de la surface réglée qui limite le pinceau envisagé coupe le contour de ds décrit ce contour en tournant dans un certain sens autour de D, le point homologue de la sphère unité décrit le contour de $d\varepsilon$ en tournant dans le même sens autour de δ.

Dans le cas contraire, le rapport sera considéré comme négatif.

Si, dans ces conditions, on désigne par r_1 et r_2 les distances algébriques $\overline{\text{MF}}$ et $\overline{\text{MF}'}$ du point M de D aux deux foyers situés sur D, on a

$$r_1 r_2 = \frac{ds}{d\varepsilon}.$$

M' étant un autre point quelconque de D et ds', r'_1, r'_2 les quantités analogues à ds, r_1, r_2, on peut écrire la relation (de Kummer)

$$\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2} = \frac{ds'}{ds}. \tag{1}$$

Considérons maintenant deux surfaces quelconques (σ) et (σ') coupant tous les rayons de la congruence (C), et faisons se correspondre deux à deux les points M et M' où un même rayon de (C) coupe (σ) et (σ'); nous établissons ainsi une correspondance ponctuelle entre les deux surfaces. Un pinceau infiniment délié quelconque de la congruence, de rayon moyen D, détermine sur (σ) et (σ') deux contours fermés infiniment petits limitant deux aires infiniment petites $d\sigma$ et $d\sigma'$.

Si, lorsque M décrit dans un sens déterminé le contour de $d\sigma$, M et M' tournent dans le même sens autour de D, nous dirons que la correspondance établie par (C) entre les deux surfaces (σ) et (σ') est *directe*; la correspondance sera dite *inverse* dans le cas contraire.

Dans les deux cas, ds et ds' étant les aires des sections du pinceau considéré par les plans perpendiculaires en M et M' à D, θ et θ' les angles aigus formés par les normales en M et M' à (σ) et (σ') avec D, nous aurons

$$ds = d\sigma \cos\theta, \qquad ds' = d\sigma' \cos\theta',$$

d'où, d'après (1),

$$\frac{d\sigma'}{d\sigma}\,\frac{\cos\theta'}{\cos\theta} = \frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2}. \tag{1'}$$

Appliquons la formule précédente au cas où (σ) et (σ') sont les deux nappes de l'enveloppe d'une congruence de sphères, (C) étant la congruence formée par les droites joignant les points de contact M et M' d'une même sphère (Σ) avec (σ) et (σ').

On a alors

$$\theta = \theta'$$

et par suite

$$\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2} = \frac{d\sigma'}{d\sigma}.$$

Si la congruence est l'une de celles dont nous nous proposons de faire l'étude, c'est-à-dire pour lesquelles la correspondance établie par les points M, M′ sur les deux surfaces (σ) et (σ') est une équivalence superficielle ou, d'une façon plus particulière, une applicabilité, on aura

$$\frac{r'_1 r'_2}{r_1 r_2} = \frac{d\sigma'}{d\sigma} = \pm 1.$$

Si alors on désigne par I le milieu de MM′ [point d'intersection du plan tangent de la déférente (S) au centre P de la sphère (Σ), avec la droite des contacts M, M′], et par ρ_1, ρ_2 les abscisses (comptées à partir du point I) des deux foyers de la congruence des cordes de contact situés sur MM′, on a

$$\begin{aligned} r'_1 &= \overline{FM'} = \overline{IM'} - \overline{IF} = \overline{IM'} - \rho_1, \\ r'_2 &= \overline{F'M'} = \overline{IM'} - \overline{IF'} = \overline{IM'} - \rho_2, \\ r_1 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{IM} - \rho_1, \\ r_2 &= \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = \overline{IM} - \rho_2, \end{aligned}$$

et par suite

$$\frac{(\overline{IM'} - \rho_1)(\overline{IM'} - \rho_2)}{(\overline{IM} - \rho_1)(\overline{IM} - \rho_2)} = \pm 1, \tag{2}$$

+ si la correspondance entre les deux nappes est directe — si elle inverse.

Dans le premier cas la relation précédente s'écrit

$$\rho_1 + \rho_2 = 0, \tag{3}$$

et elle exprime que les deux foyers F et F′ sont *symétriques par rapport au point* I (par rapport au plan tangent à la déférente).

Dans le deuxième cas on obtient

$$\rho_1 \rho_2 = -\overline{IM}^2. \tag{4}$$

L'un des foyers est *symétrique, par rapport au point* I, *du conjugué harmonique de l'autre par rapport à la corde des contacts* MM′.

Les conditions (3) ou (4) sont *suffisantes* pour que les deux nappes d'une enveloppe de sphère se correspondent avec équivalence des éléments superficiels homologues; mais pour l'*applicabilité*, il faut exprimer en outre que la correspondance entre les deux nappes est *conforme*.

Si, pour une congruence de sphères, les deux relations (3) et (4) sont simultanément vérifiées, il n'existe plus de correspondance superficielle entre les deux nappes de l'enveloppe; celles-ci se réduisent à des courbes.

Les formules (3) et (4) nous permettent de faire, dès à présent, une remarque importante.

Dans un Mémoire antérieur [1] nous avons établi les propositions suivantes :

a. Étant donnée une congruence quelconque (C) dont les rayons sont perpendiculaires aux plans tangents à une surface quelconque (S), si l'on déforme (S) arbitrairement, chaque plan tangent entraînant le rayon associé de (C), le produit $\rho_1\rho_2$ des distances algébriques des foyers situés sur un rayon quelconque de (C), au plan tangent correspondant, reste invariable.

b. La seule relation entre les distances ρ_1, ρ_2 (autre que celle relative à l'invariabilité du produit $\rho_1\rho_2$) susceptible d'être conservée par déformation arbitraire de (S) est $\rho_1+\rho_2=0$. (S) est alors *applicable sur une surface spirale*, et la congruence (C) associée est formée par les perpendiculaires aux plans tangents, menées par les centres de courbure géodésique des trajectoires orthogonales des spirales gauches déformées issues des points de contact.

On sait d'autre part que les points de contact M, M′ d'une sphère quelconque d'une congruence avec les deux nappes de l'envelope, conservent sur la sphère (donc aussi par rapport au plan tangent à la déférente issu du centre) des positions invariables lorsque la déférente se déforme arbitrairement en entraînant les sphères associées.

Cette dernière remarque, jointe à la proposition *a*, montre que si, pour une congruence de sphères, on a

$$\rho_1\rho_2 = -\overline{IM}^2,$$

---

(1) *Sur la déformation des surfaces et sur quelques propriétés des surfaces spirales* (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. LIX, 1931).

cette relation *subsistera lorsqu'on soumettra la déférente à une déformation arbitraire.*

Ainsi : *les congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances inverses avec équivalence des éléments superficiels homologues, restent telles lorsqu'on déforme arbitrairement la déférente.*

Il n'en est plus ainsi si la correspondance entre les deux nappes de l'enveloppe est *directe* ($\rho_1 + \rho_2 = 0$). Si la déférente est quelconque, la conservation de la relation $\rho_1 + \rho_2 = 0$ par déformation arbitraire de cette déférente est impossible; elle ne peut éventuellement avoir lieu [d'après (*b*)] que pour des congruences admettant pour déférentes des déformées de surfaces spirales.

2. Congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères. — En vue de la recherche des équations définissant les congruences de sphères qui font l'objet de ce Mémoire, nous allons former l'équation donnant les abscisses des foyers de la congruence des cordes de contact d'une enveloppe de sphères, l'origine sur chaque corde étant le pied de la corde sur le plan tangent correspondant à la déférente.

Les différents auteurs qui ont eu à utiliser cette équation l'ont établie en particularisant le système de coordonnées curvilignes choisi sur la déférente. Nous laisserons ici à ce système toute sa généralité; l'introduction des dérivées secondes covariantes du rayon et de ses paramètres différentiels des différents ordres relatifs à l'élément linéaire de la déférente, permet de donner aux coefficients de l'équation des formes condensées particulièrement remarquables.

Désignons par $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ les coordonnées d'un point quelconque P de la déférente (S), $R(u, v)$ le rayon de la sphère (Σ) de centre P, M et M' les points où (Σ) touche son enveloppe, I le milieu de MM'. Soient en outre

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2,$$
$$-\mathbf{S}\,dX\,dx = D\,du^2 + 2D'\,du\,dv + D''\,dv^2,$$

les deux formes fondamentales de (S); X, Y, Z désignant les cosinus directeurs de la normale en P à (S), c'est-à-dire du rayon MM' de la congruence des cordes de contact.

Les coordonnées du point I sont (1) :

$$(5)\qquad \begin{cases} \xi = x - R\,\Delta(x, R), \\ \eta = y - R\,\Delta(y, R), \\ \zeta = z - R\,\Delta(z, R), \end{cases}$$

et l'on a

$$(6)\qquad \overline{IM} = -\overline{IM'} = R\sqrt{1 - \Delta R},$$

les paramètres différentiels étant relatifs à la première forme fondamentale de (S).

Les deux nappes de l'enveloppe ne sont réelles et distinctes que si $\Delta R < 1$.

L'équation aux abscisses $\overline{IF} = \rho_1$, $\overline{IF'} = \rho_2$ des foyers de la congruence des cordes de contact est

$$(7)\qquad [\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2]\rho^2 + [\mathcal{E}g - (f + f')\mathcal{F} + e\mathcal{G}]\rho + eg - ff' = 0,$$

où l'on a posé

$$(8)\qquad \begin{cases} e = \mathrm{S}\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad f = \mathrm{S}\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}, \\ f' = \mathrm{S}\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \xi}{\partial u}, \qquad g = \mathrm{S}\dfrac{\partial X}{\partial v}\dfrac{\partial \xi}{\partial v}, \\ \mathcal{E} = \mathrm{S}\left(\dfrac{\partial X}{\partial u}\right)^2, \qquad \mathcal{F} = \mathrm{S}\dfrac{\partial X}{\partial u}\dfrac{\partial X}{\partial v}, \qquad \mathcal{G} = \mathrm{S}\left(\dfrac{\partial X}{\partial v}\right)^2. \end{cases}$$

En posant $H = \sqrt{EG - F^2}$, on a

$$(9)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial X}{\partial u} = \dfrac{1}{H^2}\left[(FD' - GD)\dfrac{\partial x}{\partial u} + (FD - ED')\dfrac{\partial x}{\partial v}\right], \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} = \dfrac{1}{H^2}\left[(FD'' - GD')\dfrac{\partial x}{\partial u} + (FD' - ED'')\dfrac{\partial x}{\partial v}\right], \end{cases}$$

d'où

$$(10)\qquad \begin{cases} \mathcal{E} = \dfrac{1}{H^2}[GD^2 - 2FDD' + ED'^2], \\ \mathcal{G} = \dfrac{1}{H^2}[GD'^2 - 2FD'D'' + ED''^2], \\ \mathcal{F} = \dfrac{1}{H^2}[GDD' + ED'D'' - FDD'' - FD'^2]. \end{cases}$$

(1) *Voir* par exemple L. Bianchi, *Geometria differenziale*, t. II, p. 93.

Calculons e, f, f', g.

$$e = \mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial \xi}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} - \frac{\partial R}{\partial u}\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\Delta(x, R) - R\,\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\Delta(x, R),$$

$$f = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$f' = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$g = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

On a

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial u} = -D,$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial u} = \mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial x}{\partial v} = -D',$$

$$\mathrm{S}\frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial x}{\partial v} = -D'';$$

d'autre part,

$$\Delta(x, R) = \frac{E\dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial R}{\partial v} - F\left(\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial v} + \dfrac{\partial x}{\partial v}\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) + G\dfrac{\partial x}{\partial u}\dfrac{\partial R}{\partial u}}{H^2},$$

$$\Delta(y, R) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$\Delta(z, R) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

En introduisant les dérivées secondes covariantes de R,

$$R_{11} = \frac{\partial^2 R}{\partial u^2} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial v},$$

$$R_{12} = \frac{\partial^2 R}{\partial u\,\partial v} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial v},$$

$$R_{22} = \frac{\partial^2 R}{\partial v^2} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix}\frac{\partial R}{\partial v},$$

où les $\begin{Bmatrix} i & j \\ & k \end{Bmatrix}$ sont les symboles de deuxième espèce de Christoffel,

$$\begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial u} + F\dfrac{\partial E}{\partial v} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial u}}{2H^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial E}{\partial u} + 2E\dfrac{\partial F}{\partial u} - E\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2H^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{G\dfrac{\partial E}{\partial v} - F\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial u} - F\dfrac{\partial E}{\partial v}}{2H^2},$$

$$\begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{-F\dfrac{\partial G}{\partial v} + 2G\dfrac{\partial F}{\partial v} - G\dfrac{\partial G}{\partial u}}{2H^2}, \qquad \begin{Bmatrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{E\dfrac{\partial G}{\partial v} + F\dfrac{\partial G}{\partial u} - 2F\dfrac{\partial F}{\partial v}}{2H^2},$$

on trouve pour les dérivées des paramètres différentiels mixtes, les expressions

$$\frac{\partial}{\partial u}\Delta(x, \mathrm{R}) = \left(\frac{\mathrm{GR}_{11} - \mathrm{FR}_{12}}{\mathrm{H}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\mathrm{ER}_{12} - \mathrm{FR}_{11}}{\mathrm{H}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial v}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left\{\left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)\mathrm{D} + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)\mathrm{D}'\right\}\mathrm{X},$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\Delta(y, \mathrm{R}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial u}\Delta(z, \mathrm{R}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\Delta(x, \mathrm{R}) = \left(\frac{\mathrm{GR}_{21} - \mathrm{FR}_{22}}{\mathrm{H}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial u} + \left(\frac{\mathrm{ER}_{22} - \mathrm{FR}_{21}}{\mathrm{H}^2}\right)\frac{\partial x}{\partial v}$$
$$+ \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left\{\left(\mathrm{G}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)\mathrm{D}' + \left(\mathrm{E}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{F}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)\mathrm{D}''\right\}\mathrm{X},$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\Delta(y, \mathrm{R}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\frac{\partial}{\partial v}\Delta(z, \mathrm{R}) = \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots;$$

d'où l'on déduit

$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\quad \Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}(\mathrm{FD}' - \mathrm{GD}) + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD} - \mathrm{ED}')}{\mathrm{H}^2},$$
$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\quad \Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}(\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}') + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'')}{\mathrm{H}^2},$$
$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial u}\Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{(\mathrm{FR}_{12} - \mathrm{GR}_{11})\mathrm{D} + (\mathrm{FR}_{11} - \mathrm{ER}_{12})\mathrm{D}'}{\mathrm{H}^2},$$
$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{(\mathrm{FR}_{22} - \mathrm{GR}_{21})\mathrm{D} + (\mathrm{FR}_{21} - \mathrm{ER}_{22})\mathrm{D}'}{\mathrm{H}^2},$$
$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}\Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{(\mathrm{FR}_{12} - \mathrm{GR}_{11})\mathrm{D}' + (\mathrm{FR}_{11} - \mathrm{ER}_{12})\mathrm{D}''}{\mathrm{H}^2},$$
$$\mathbf{S}\frac{\partial \mathrm{X}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial v}\Delta(x, \mathrm{R}) = \frac{(\mathrm{FR}_{22} - \mathrm{GR}_{21})\mathrm{D}' + (\mathrm{FR}_{21} - \mathrm{ER}_{22})\mathrm{D}''}{\mathrm{H}^2},$$

et, en portant dans les expressions de e, f, f', g,

$$
(11)\quad \left\{
\begin{aligned}
e &= -\mathrm{D} - \frac{\left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 (\mathrm{FD}' - \mathrm{GD}) + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD} - \mathrm{ED}')}{\mathrm{H}^2} \\
&\quad - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}^2}[\mathrm{FR}_{12} - \mathrm{GR}_{11})\mathrm{D} + (\mathrm{FR}_{11} - \mathrm{ER}_{12})\mathrm{D}'], \\
f &= -\mathrm{D}' - \frac{\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD}' - \mathrm{GD}) + \left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 (\mathrm{FD} - \mathrm{ED}')}{\mathrm{H}^2} \\
&\quad - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}^2}[\mathrm{FR}_{22} - \mathrm{GR}_{21})\mathrm{D} + (\mathrm{FR}_{21} - \mathrm{ER}_{22})\mathrm{D}'], \\
f' &= -\mathrm{D}' - \frac{\left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 (\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}') + \dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'')}{\mathrm{H}^2} \\
&\quad - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}^2}[(\mathrm{FR}_{12} - \mathrm{GR}_{11})\mathrm{D}' + (\mathrm{FR}_{11} - \mathrm{ER}_{12})\mathrm{D}''], \\
g &= -\mathrm{D}'' - \frac{\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}(\mathrm{FD}'' - \mathrm{GD}') + \left(\dfrac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 (\mathrm{FD}' - \mathrm{ED}'')}{\mathrm{H}^2} \\
&\quad - \frac{\mathrm{R}}{\mathrm{H}^2}[(\mathrm{FR}_{22} - \mathrm{GR}_{21})\mathrm{D}' + (\mathrm{FR}_{21} - \mathrm{ER}_{22})\mathrm{D}''].
\end{aligned}
\right.
$$

Nous avons maintenant tous les éléments nécessaires au calcul des coefficients de l'équation (7). Les relations (10) donnent d'abord

$$
\mathcal{E}\mathcal{G} - \mathcal{F}^2 = \frac{1}{\mathrm{H}^2}[\mathrm{DD}'' - \mathrm{D}'^2]^2 = \mathrm{K}^2\mathrm{H}^2,
$$

K désignant la courbure totale de la déférente au point P; (10) et (11) donnent ensuite

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{E}g - (f+f')\mathcal{F} + e\mathcal{G} \\
&\quad = \mathrm{K}\left\{\left[\mathrm{RR}_{22} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 - \mathrm{G}\right]\mathrm{D}\right. \\
&\qquad\qquad \left. - 2\left(\mathrm{RR}_{12} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{F}\right)\mathrm{D}' + \left[\mathrm{RR}_{11} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 - \mathrm{E}\right]\mathrm{D}''\right\}.
\end{aligned}
$$

Enfin, en tenant compte des expressions de $\Delta_2 \mathrm{R}$ et $\Delta_{22}\mathrm{R}$,

$$
\Delta_2 \mathrm{R} = \frac{\mathrm{ER}_{22} - 2\,\mathrm{FR}_{12} + \mathrm{GR}_{11}}{\mathrm{H}^2},
$$

$$
\Delta_{22}\mathrm{R} = \frac{\mathrm{R}_{11}\mathrm{R}_{12} - (\mathrm{R}_{12})^2}{\mathrm{H}^2},
$$

on déduit des expressions (11)

$$eg - ff' = \mathrm{KH}^2 \left\{ 1 - \Delta\mathrm{R} - \mathrm{R}\Delta_2\mathrm{R} \right.$$
$$\left. + \mathrm{R}^2\Delta_{22}\mathrm{R} + \mathrm{R}\frac{\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{R}_{11} - 2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\mathrm{R}_{12} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 \mathrm{R}_{22}}{\mathrm{H}^2} \right\}.$$

L'équation (7) s'écrit donc finalement

$$(12) \quad \mathrm{K}\rho^2 + \frac{1}{\mathrm{H}^2}\left\{ \left[\mathrm{RR}_{22} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 - \mathrm{G}\right]\mathrm{D} \right.$$
$$\left. - 2\left(\mathrm{RR}_{12} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{F}\right)\mathrm{D}' + \left[\mathrm{RR}_{11} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 - \mathrm{E}\right]\mathrm{D}''\right\}\rho$$
$$+ \left\{ \mathrm{R}^2\Delta_{22}\mathrm{R} - \mathrm{R}\Delta_2\mathrm{R} + 1 - \Delta\mathrm{R} \right.$$
$$\left. + \mathrm{R}\frac{\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{R}_{11} - 2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\mathrm{R}_{12} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 \mathrm{R}_{22}}{\mathrm{H}^2} \right\} = 0.$$

La somme et le produit des racines ont pour expressions

$$(13) \quad \rho_1 + \rho_2 = -\frac{1}{\mathrm{KH}^2}\left\{ \left[\mathrm{RR}_{22} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 - \mathrm{G}\right]\mathrm{D} - 2\left(\mathrm{RR}_{12} + \frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v} - \mathrm{F}\right)\mathrm{D}' \right.$$
$$\left. + \left[\mathrm{RR}_{11} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 - \mathrm{E}\right]\mathrm{D}''\right\},$$

$$(14) \quad \rho_1\rho_2 = \frac{1}{\mathrm{K}}\left\{ \mathrm{R}_2\Delta_{22}\mathrm{R} - \mathrm{R}\Delta_2\mathrm{R} + 1 - \Delta\mathrm{R} \right.$$
$$\left. + \mathrm{R}\frac{\left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\right)^2 \mathrm{R}_{11} - 2\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial v}\mathrm{R}_{12} + \left(\frac{\partial \mathrm{R}}{\partial u}\right)^2 \mathrm{R}_{22}}{\mathrm{H}^2} \right\}.$$

Nous constatons, conformément aux propositions générales énoncées à la fin du paragraphe 1, que le produit $\rho_1\rho_2$, ne contenant dans son expression que des quantités indépendantes des coefficients de la deuxième forme fondamentale de la déférente, reste invariant par déformation arbitraire de celle-ci, tandis que la somme $\rho_1 + \rho_2$ dépend de la forme particulière qu'affecte la déférente.

L'invariance du produit $\rho_1 \rho_2$ dans le cas des congruences formées par les cordes de contact des enveloppes de sphères a été signalée, dès 1925, par M. J. Drach dans un Mémoire *Sur les surfaces enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* (*Comptes rendus du Congrès des Sociétés savantes*).

3. **Congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence des éléments superficiels homologues.** — L'équation définissant les congruences de sphères admettant pour déférente une surface donnée (ou, simplement, dont on connaît le ds^2), et qui déterminent sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances *inverses* avec équivalence des éléments superficiels, s'obtient en remplaçant dans l'équation

$$\rho_1 \rho_2 = -\overline{\text{IM}}^2,$$

$\rho_1 \rho_2$ par son expression (14) et $\overline{\text{IM}}$ par son expression (6). On trouve ainsi l'équation aux dérivées partielles du deuxième ordre en R, du type de *Monge-Ampère*,

$$(15) \qquad R^2 \Delta_{22} R - R \Delta_2 R + (KR^2 + 1)(1 - \Delta R) + R \frac{\left(\dfrac{\partial R}{\partial v}\right)^2 R_{11} - 2 \dfrac{\partial R}{\partial u} \dfrac{\partial R}{\partial v} R_{12} + \left(\dfrac{\partial R}{\partial u}\right)^2 R_{22}}{H^2} = 0.$$

Les congruences à nappes focales de l'enveloppe réelles et distinctes correspondent aux solutions de l'équation (15) pour lesquelles $\Delta R < 1$. Si l'on effectue le changement de fonction inconnue $\rho = \frac{1}{2} R^2$, l'équation (15) se simplifie et se transforme en

$$(15') \qquad \Delta_{22} \rho - \Delta_2 \rho - K(\Delta \rho - 2\rho) + 1 = 0.$$

(15') se déduit de la deuxième équation de l'applicabilité pour la déférente en changeant le signe devant K. Avec la fonction ρ, la condition de réalité des deux nappes de l'enveloppe s'écrit $\Delta \rho < 2\rho$.

Si la correspondance entre les deux nappes de l'enveloppe est *directe*, l'équation définissant les conguences de sphères cherchées admettant pour déférente une surface (et non plus seulement un ds^2) donnée, s'obtient en annulant le second membre de la relation (13). On trouve ainsi l'équation du deuxième ordre en R :

$$(16)\qquad \left[RR_{22}+\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2-G\right]D \\ -2\left[RR_{12}+\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}-F\right]D'+\left[RR_{11}+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2-E\right]D''=0.$$

Si l'on pose $\frac{1}{2}R^2=\rho$, l'équation prend la forme

$$(16')\qquad \frac{\rho_{22}D-2\rho_{12}D'+\rho_{11}D''}{H^2}+\mathcal{H}=0,$$

où $\mathcal{H}$ représente la courbure moyenne de la déférente

$$\mathcal{H}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}=-\frac{GD-2FD'+ED''}{H^2},$$

R_1 et R_2 étant les rayons de courbure principaux.

Congruences de sphères de rayon constant. — Avant d'entrer dans le détail de la recherche de congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances par aires équivalentes, nous ferons quelques remarques sur celles de ces congruences dont le rayon de la sphère génératrice est constant.

Exprimons que les équations (15) et (16) sont vérifiées pour $R=a=$ const.; nous obtiendrons ainsi les déférentes des congruences de sphères de rayon constant a déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe (surfaces parallèles) des correspondances par aires équivalentes.

Toutes les dérivées ordinaires et covariantes de R étant nulles, l'équation (15) se réduit à

$$Ka^2+1=0,$$

et prouve que, lorsque la correspondance est *inverse*, la déférente est une *surface quelconque à courbure totale constante négative* $\left(-\frac{1}{a^2}\right)$.

De même, l'équation (16') se réduit à

$$\mathcal{H}=0,$$

et exprime que la déférente des congruences de sphères de rayon constant déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance *directe* par aires équivalentes est *une surface minima arbitraire*.

Dans ce deuxième cas, le rayon constant de la sphère centrée en chaque point de la déférente est *quelconque*.

Les deux types de congruences de sphères précédents sont des cas particuliers des congruences de sphères de rayon constant déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances *par aires proportionnelles*.

L'équation aux dérivées partielles des congruences de sphères (de rayon variable) ayant pour déférente une surface (S) donnée, déterminant sur les deux nappes (σ) et (σ') des correspondances par aires proportionnelles $\left[\frac{d\sigma'}{d\sigma} = m = \text{const.}\right]$, s'obtient en remplaçant le second membre de l'équation (2) du paragraphe 1 par m. On obtient ainsi

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 + \left(\frac{1+m}{1-m}\right)(\rho_1+\rho_2)\overline{\mathrm{IM}} + \rho_1\rho_2 = 0, \tag{17}$$

où $\overline{\mathrm{IM}}$, $\rho_1+\rho_2$ et $\rho_1\rho_2$ ont les expressions (6), (13) et (14).

L'équation définissant les déférentes des congruences de sphères de rayon constant a appartenant au type actuel, s'obtient en remplaçant dans (17) R par a; on trouve

$$a^2 + \frac{a}{\mathrm{K}}\left(\frac{1+m}{1-m}\right)\left(\frac{\mathrm{GD} - 2\mathrm{FD}' + \mathrm{ED}''}{\mathrm{H}^2}\right) + \frac{1}{\mathrm{K}} = 0.$$

K est la courbure totale et $-\frac{\mathrm{GD} - 2\mathrm{FD}' + \mathrm{ED}''}{\mathrm{H}^2}$ la courbure moyenne de la déférente; en désignant par R_1, R_2 les rayons de courbure principaux de cette dernière, l'équation ci-dessus peut s'écrire

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 - a\left(\frac{1+m}{1-m}\right)(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2) + a^2 = 0.$$

Les déférentes des congruences de sphères de rayon constant déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances par aires proportionnelles sont définies par les équations de la forme

$$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2 + \lambda(\mathrm{R}_1+\mathrm{R}_2) + a^2 = 0, \tag{18}$$

où λ et a sont deux constantes.

a est le rayon des sphères de la congruence; le rapport m des aires homologues, défini par l'équation

$$-a\left(\frac{1+m}{1-m}\right)=\lambda,$$

a pour valeur

$$m=-\frac{a+\lambda}{a-\lambda};$$

il est positif (correspondance directe) si $\lambda^2 > a^2$, négatif (correspondance inverse) si $\lambda^2 < a^2$.

Pour $\lambda = \pm a$ (pour m infini ou nul) la relation (18) s'écrit

$$(R_1 \pm a)(R_2 \pm a)=0,$$

et l'on obtient le cas banal où la déférente est une surface canal de rayon a.

Pour $\lambda = 0$ ou $\lambda = \infty$ ($m = \mp 1$) on retrouve les déférentes à courbure totale constante négative $\left(-\frac{1}{a^2}\right)$ ou minima.

Eu égard aux deux nappes de l'enveloppe de l'une des congruences de sphères qui viennent d'être déterminées, nous énoncerons le résultat suivant, facile à vérifier :

Considérons l'ensemble formé par une surface réelle (S) à courbure totale constante quelconque $\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)$, et les deux surfaces parallèles (Σ_1) et (Σ_2) à courbure moyenne constante $\left(\frac{1}{2\alpha}\right)$ que le théorème bien connu d'O. Bonnet lui associe [(Σ_1) et (Σ_2) sont équidistantes de (S), réelles si la courbure de (S) est positive, imaginaires si elle est négative].

Tout couple de surfaces parallèles à (S), (Σ_1) et (Σ_2), partageant harmoniquement les portions de normales communes à (Σ_1), (Σ_2) limitées aux deux surfaces, fournit les deux nappes de l'enveloppe d'une famille de sphères de rayon constant déterminant sur ces deux nappes une correspondance par aires proportionnelles.

On obtient ainsi les enveloppes de *toutes* les congruences de sphères du type envisagé. La correspondance entre les deux nappes est directe ou inverse suivant que la courbure totale de la surface initiale (S) est positive ou négative.

Nous avons déjà fait observer que la seule relation entre ρ_1 et ρ_2 (en dehors de la relation obligatoire traduisant l'invariance du produit $\rho_1\rho_2$) susceptible d'être conservée par déformation arbitraire de la déférente est $\rho_1+\rho_2=0$. Il résulte de là et de la forme de l'équation (17), que si $m\neq\pm 1$, il est impossible de déformer arbitrairement la déférente en conservant la proportionnalité des éléments d'aire homologues.

Pour $m=-1$ (correspondance inverse par aires équivalentes) la déformation est possible, quelle que soit la déférente, et quelle que soit la congruence de sphères associée.

Pour $m=1$, la déformation arbitraire de la déférente n'est possible que pour les congruences, que nous allons rechercher au numéro suivant, pour lesquelles, par déformation arbitraire de la déférente, on a constamment $\rho_1+\rho_2=0$ sur chaque corde de contact.

4. **Congruences de sphères arbitrairement déformables avec conservation de la relation** $\rho_1+\rho_2=0$. — Ces congruences, que l'on obtient en annulant les coefficients de D, D′, D″ dans l'expression (13) de $\rho_1+\rho_2$, sont définies par le système suivant, vérifié par les coefficients de la première forme fondamentale de la déférente (S) et le rayon $R(u, v)$ de la sphère génératrice :

$$(19)\qquad \left\{\begin{aligned} &RR_{11}+\left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2-E=0,\\ &RR_{12}+\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v}-F=0,\\ &RR_{22}+\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2-G=0.\end{aligned}\right.$$

Rapportons (S) à un système orthogonal (u, v), choisi de telle façon que les courbes (v) $[u=\text{const.}]$ soient orthogonales aux rayons de la sphère variable aboutissant aux deux points de contact. On a dans ces conditions

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2,$$

et R, devant rester constant lorsque le centre de la sphère décrit une courbe (v), sera uniquement fonction de u. Le système (19), développé en tenant compte des expressions des R_{ij} rappelées au paragraphe 2, s'écrit alors

$$R\frac{\partial^2 R}{\partial u^2} - \frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial u} R \frac{\partial R}{\partial u} + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 - E = 0,$$

$$\frac{1}{2E}\frac{\partial E}{\partial v}\frac{\partial R}{\partial u} = 0,$$

$$\frac{1}{2E}\frac{\partial G}{\partial u} R \frac{\partial R}{\partial u} - G = 0.$$

La deuxième équation donne (R ne pouvant être constant)

$$\frac{\partial E}{\partial v} = 0;$$

E est donc une fonction de u que, moyennant un changement sur le paramètre u, on peut réduire à l'unité. On a alors

$$ds^2 = du^2 + G\, dv^2,$$

et le système à résoudre se réduit à

$$(20) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial}{\partial u}\left(R\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) - 1 = 0, \\ \dfrac{1}{2G}\dfrac{\partial G}{\partial u}\left(R\dfrac{\partial R}{\partial u}\right) - 1 = 0. \end{cases}$$

La première équation (20) donne

$$R^2 = u^2 + 2au + b \qquad (a,\ b = \text{const.}),$$

d'où, d'après la seconde, et en disposant du paramètre v,

$$G = (u + a)^2.$$

En ajoutant une constante à u, on peut prendre

$$G = u^2, \qquad R^2 = u^2 + b.$$

Le ds^2 de (S) $[ds^2 = du^2 + u^2\, dv^2]$ est alors celui du plan rapporté à un système de coordonnées polaires, et l'expression de R^2 montre que lorsque (S) a la forme plane, toutes les sphères de l'une des congruences cherchées passent par deux points, symétriques par rapport au plan des centres et situés sur la perpendiculaire à ce plan issue du pôle des coordonnées à une distance du plan égale à $\sqrt{b}$.

Les congruences de sphères cherchées sont donc celles que l'on obtient en considérant un réseau quelconque de sphères passant par deux points fixes M, M', et en déformant arbitrairement le plan (π) des centres.

Les deux nappes de l'enveloppe pour une configuration non plane de (S) sont les lieux des points M et M' lorsqu'on fait rouler sans glisser le plan (π) sur (S), de façon que la courbe du plan (π) déformée de l'arête de rebroussement de (S) roule sans glisser sur l'arête de rebroussement.

Ces deux nappes se réduisent comme l'on voit à deux courbes (γ) et (γ'), et l'on ne peut plus dire que la correspondance établie par les deux points de contact M, M' sur les deux nappes de l'enveloppe soit une équivalence superficielle.

Si l'on observe que lorsqu'on fait rouler (π) sur (S) le milieu I de MM' décrit une développante [1] de (S), et que les lieux (γ) et (γ') de M et M' s'obtiennent en portant sur la tangente en I à cette développante des longueurs égales $IM = IM'$, on voit aussitôt que la correspondance établie par M et M' sur les courbes (γ) et (γ') *conserve les arcs*. En ce sens, on peut dire que le problème que l'on vient de traiter donne une solution particulière du problème général de la détermination des congruences de sphères, telles que la correspondance établie par les points de contact sur les deux nappes de l'enveloppe soit une applicabilité, dont il sera question dans la suite.

Nous pouvons maintenant compléter les résultats énoncés à la fin du paragraphe 1 par la proposition suivante :

Les seules congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec proportionnalité des éléments superficiels homologues, que l'on peut arbitrairement déformer sans altérer la relation précédente, sont les congruences pour lesquelles la correspondance est une équivalence inverse, définies par l'équation (15) *du paragraphe* 3.

Le problème de la détermination des congruences de sphères établissant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances

[1] Nous entendons ici par développante une trajectoire orthogonale des plans tangents.

avec équivalence (ou proportionnalité) des aires homologues, rentre dans le type suivant :

Déterminer les congruences de sphères telles qu'il y ait une relation déterminée $f(\rho_1, \rho_2, \overline{\mathrm{IM}}) = 0$ entre les positions relatives des deux foyers et des deux points de contact sur chaque corde de contact.

Eu égard à ce problème général, l'étude qui précède nous conduit à énoncer le résultat suivant :

Parmi les propriétés que l'on peut imposer à une congruence de sphères, se traduisant par une relation de la forme $f(\rho_1, \rho_2, \overline{\mathrm{IM}}) = 0$, *les seules qui soient conservées dans une déformation arbitraire de la déférente sont celles pour lesquelles la relation précédente est de la forme*

$$\rho_1 \rho_2 = f(\overline{\mathrm{IM}}).$$

Nous excluons la relation $\rho_1 + \rho_2 = 0$, qui ne conduit qu'aux congruences singulières à nappes de l'enveloppe curvilignes étudiées plus haut.

Ainsi, par exemple, les congruences de sphères (de Darboux) établissant une correspondance *conforme* entre les deux nappes de l'enveloppe, définies par la relation $\rho_1 \rho_2 = \overline{\mathrm{IM}}^2$, dont il sera question au numéro suivant, sont arbitrairement déformables avec la déférente.

5. **Congruences de sphères pour lesquelles la correspondance établie par les points de contact sur les deux nappes de l'enveloppe est une applicabilité.** — Conformément à ce que nous avons dit dans l'Introduction, ces congruences, si elles existent, constituent les solutions communes au problème de la détermination des congruences de sphères établissant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance par aires équivalentes, et à celui de la détermination des congruences pour lesquelles la correspondance entre les deux nappes est conforme.

Rappelons d'abord quelques résultats relatifs au deuxième problème.

G. Darboux a effectué [1] la recherche des congruences de sphères,

---

[1] *Sur la déformation des surfaces du second degré et sur les surfaces isothermiques* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 128, 1899 et *Annales de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. XVI).

telles que les points de contact de la sphère variable avec les deux nappes de l'enveloppe, établissent entre ces deux nappes une correspondance conforme.

Les solutions de ce problème sont constituées par :

1° Les congruences de sphères dont les deux nappes de l'enveloppe sont des surfaces *isothermiques* transformées de Ribaucour l'une de l'autre (c'est-à-dire avec correspondance des lignes de courbure);

2° Les congruences de sphères orthogonales à une sphère fixe.

Toutes les solutions du deuxième type, relativement banal, sont connues. Il n'en est pas de même de celles du premier, qui a fait l'objet d'études approfondies de la part de Darboux, Bianchi, Cosserat et de M. Eisenhart.

En particulier, E. Cosserat a identifié les congruences de sphères de ce premier type avec celles *dont les foyers de la congruence rectiligne des cordes de contact divisent harmoniquement les extrémités de la corde*.

Il sera essentiel pour nous d'observer que cette dernière remarque de E. Cosserat entraîne que la correspondance superficielle établie par les deux points de contact sur les deux nappes de l'enveloppe est *inverse* (au sens du § 1). Pour les correspondances du deuxième type, la correspondance est évidemment *directe*.

Le problème de Darboux, comme celui relatif à l'équivalence ou à la proportionnalité des aires dont il a été question dans les numéros précédents, est susceptible de deux solutions nettement distinctes suivant que l'on exige que la correspondance entre les deux nappes de l'enveloppe soit directe ou inverse. Cette remarque est d'ordre général. Tout problème relatif à la détermination de couples de surfaces liées par une correspondance ponctuelle de nature géométrique déterminée, comporte généralement deux types de solutions relatifs, l'un aux correspondances directes, l'autre aux correspondances inverses.

La différence est souvent très profonde, au point que l'on puisse effectuer la détermination complète des solutions dans un cas, alors que la chose est impossible dans l'autre. Le problème de Darboux fournit un exemple où pareille circonstance se présente; nous en donnerons d'autres dans la suite.

Rappelons aussi que si deux surfaces (σ) et (σ') sont applicables, et si la congruence (MM') des droites joignant les points homologues admet pour surface focale le lieu (Σ) des milieux I des segments MM', (Σ) est *applicable sur une surface de révolution.* Les arêtes de rebroussement des développables de la congruence, portées par (Σ), sont les courbes déformées des parallèles, et les segments $IM = IM'$ sont proportionnels au *module* de la déformation infinitésimale faisant glisser (Σ) sur elle-même.

L'élément linéaire de (Σ) étant mis sous la forme

$$ds^2 = du^2 + r^2\,dv^2 \qquad [r = f(u)],$$

le module de la déformation infinitésimale est égal à r.

Nous sommes maintenant en mesure d'effectuer la recherche complète des congruences de sphères telles que les deux nappes de l'enveloppe soient applicables, les points homologues dans l'application étant les points de contact correspondants.

Étudions successivement les deux cas où la correspondance entre les points de contact M et M' de la sphère variable (Σ) avec les deux nappes (σ) et (σ') de l'enveloppe est directe ou inverse.

Correspondance directe. — Ce cas est immédiat; M et M' doivent établir sur (σ) et (σ') une correspondance *conforme directe;* d'après ce qui précède, (Σ) reste donc orthogonale à une sphère fixe (Ω). L'égalité des aires homologues sur (σ) et (σ') exige en outre (*voir* § 1) que les foyers de la congruence (MM') soient symétriques par rapport au milieu I du segment MM'.

Si (Ω) est une sphère véritable, les foyers de MM' sont confondus au centre de (Ω) et la deuxième circonstance ne peut pas se présenter.

Si (Ω) se réduit à un plan, on obtient la solution, évidente à priori, constituée par une famille quelconque de sphères à deux paramètres centrées dans un plan P. Les deux nappes (σ) et (σ') de l'enveloppe sont symétriques par rapport à P. Cette solution, à première vue banale, est *la seule pour laquelle la correspondance entre les deux nappes est directe,* et cette circonstance, *nullement évidente à priori,* lui enlève un peu de sa banalité.

Correspondance inverse. — Supposons trouvée une congruence de sphères répondant à la question. Soient F et F′ les foyers portés par la corde MM′. La correspondance établie par M et M′ sur (σ) et (σ') étant conforme et inverse, il résulte de la proposition de E. Cosserat rappelée plus haut que F et F′ sont conjugués harmoniques par rapport à M et M′ :

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = \overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}}.$$

En outre, le fait que la correspondance a lieu avec égalité des éléments superficiels homologues s'exprime par la relation (*voir* § 1)

$$\overline{\mathrm{IM}}^2 = -\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF'}}.$$

Les deux conditions précédentes expriment que l'un des foyers F de la congruence des cordes de contact est confondu avec le milieu I de MM′ [est situé dans le plan tangent à la déférente (S)], l'autre foyer F′ étant rejeté à l'infini.

Les deux nappes focales de la congruence (MM′) sont, la surface (Σ) lieu du point I et une courbe située à l'infini. Le plan (π) perpendiculaire en I à (MM′) dépend d'un seul paramètre, et son enveloppe [la déférente (S) de la congruence de sphères] *est une surface développable.*

Les points I situés dans un même plan tangent à (S) forment une courbe (γ) [nous excluons le cas où (γ) se réduit à un point, qui conduit à des enveloppes de sphères pour lesquelles les deux nappes de l'enveloppe sont des courbes].

Le plan (π), orthogonal en chaque point I de (γ) à la corde MM′ correspondante, *coupe orthogonalement la surface* (Σ) *tout le long de* (γ). Il résulte de là que (Σ) est une *surface moulure, engendrée par le roulement sans glissement, du plan* (π) *d'une courbe invariable* (γ), *sur la développable* (S).

La forme de (γ) est facile à déterminer. Les deux nappes (σ) et (σ') de l'enveloppe, lieux des points de contact M et M′, étant applicables, et le milieu I de chaque corde MM′ [situé sur la courbe (γ) correspondante] étant foyer pour la congruence (MM′), il résulte d'une remarque antérieure que la surface moulure (Σ) est *applicable sur une surface de révolution.* Les courbes du réseau focal de la congruence (MM′) porté par (Σ) sont, les différentes positions de (γ) lorsque le plan (π) de (γ) roule sans glisser sur (S) et les trajectoires des différents points de (γ). Ces dernières courbes sont, comme on l'a rappelé plus haut, les déformées des parallèles de la surface de révolution sur laquelle (Σ) est applicable; les courbes (γ) sont les transformées des méridiens.

Or, les seules surfaces moulures applicables sur des surfaces de révolution sont les surfaces de révolution et les surfaces engendrées par une droite d'un plan qui roule sans glisser sur un cône arbitraire, la droite passant par le sommet du cône. Le cône peut d'ailleurs se réduire à un cylindre, la droite entraînée étant parallèle aux génératrices.

Le cas où (Σ) serait de révolution n'est pas à envisager. La déférente de la congruence de sphères se réduit alors à une droite (l'axe de la surface), et la sphère variable n'est plus qu'à un paramètre.

Pour les congruences de sphères cherchées, la déférente (S) est donc nécessairement un cône (ou un cylindre), et la courbe (γ) du plan tangent (π) à (S) dont il est question plus haut, une droite issue du sommet O du cône.

La surface (Σ), lieu de (γ) lorsque (π) roule sur (S), est elle aussi un cône de sommet O.

Le module de la déformation infiniment petite du cône (Σ) en lui-même, en un point quelconque I de (γ), est évidemment OI. Les couples de points de contact associés s'obtiennent donc en portant, sur les perpendiculaires au plan (π) aux différents points I de (γ), de part et d'autre de (π), des longueurs *proportionnelles à* OI. On obtient ainsi deux droites D, D′, issues du point O, symétriques par rapport à (π), situées dans le plan perpendiculaire à (π) le long de (γ) et invariablement liées à (π).

Lorsque (π) roule sur (S), D et D′ engendrent deux cônes (σ) et (σ') de sommet O, qui constituent les deux nappes focales de l'une des congruences de sphères cherchées.

En choisissant arbitrairement le cône (S) et les deux droites D et D′ symétriques par rapport à un plan tangent (π) à (S) [issues du sommet O du cône et invariablement liées à (π)], on obtient, par roulement de (π) sur (S), *la congruence de sphères la plus générale déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance inverse qui soit une applicabilité.*

La déférente est le cône (S), et les deux nappes de l'enveloppe les cônes décrits par D et D'.

L'existence des congruences de sphères précédentes a été établie par M. Lebel par une méthode différente. Notre analyse complète le résultat de M. Lebel en montrant que ces congruences (avec les congruences de sphères centrées dans un plan fixe) constituent *les seules solutions du problème de la recherche des congruences de sphères à nappes enveloppes applicables par les points de contact correspondants.*

Il y a lieu de faire une autre remarque. Étant donnée une congruence de sphères à nappes enveloppes applicables par les points correspondants (correspondance inverse), on peut, sans altérer la nature de la correspondance entre les deux nappes de l'enveloppe, déformer la déférente (conique) *en maintenant ses génératrices rigides*. Une déformation *absolument arbitraire* de la déférente est impossible. Cela tient à ce que, des deux propriétés dont résulte l'applicabilité des deux nappes : correspondance conforme et équivalence inverse des éléments superficiels homologues, propriétés qui, dans le cas général d'une déférente non développable, se conservent séparément pour toute déformation de cette dernière, seule la première se conserve lorsque la déférente est développable.

Lorsqu'on étudie un problème général de déformation, on laisse parfois de côté, en les considérant comme banales, les solutions conduisant à la déformation des surfaces développables. Il conviendrait bien souvent de regarder ces solutions comme des solutions singulières et d'en faire une étude directe en vue d'en rechercher les propriétés spéciales dues à l'évanouissement de la courbure.

6. **Étude des congruences de sphères à déférente développable, déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence des éléments superficiels. Remarques sur le problème général.**

Congruences à déférente développable. Correspondance directe. — Les notations étant toujours les mêmes, la direction des cordes de contact (MM') [chaque corde est perpendiculaire à un plan tangent à la déférente (S) en son milieu I] dépend d'un paramètre au plus. L'un au moins des deux foyers F, F' portés par MM' est rejeté à l'infini.

La correspondance que les points M et M′ établissent sur les deux nappes (σ) et (σ') de l'enveloppe étant directe, I est le milieu de FF′. Les deux foyers de (MM′) sont donc rejetés à l'infini. Il en résulte que (S) est un plan; (σ) et (σ') sont deux surfaces arbitraires symétriques par rapport au plan. Ainsi :

Les congruences formées de sphères centrées dans un plan fixe exceptées, *il n'existe pas de congruences de sphères ayant pour déférente une développable et déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe une correspondance avec équivalence directe des éléments superficiels.*

Correspondance inverse. — On a ici

$$\overline{\mathrm{IF}} \times \overline{\mathrm{IF}'} = -\overline{\mathrm{IM}}^2;$$

F étant à l'infini sur MM′, F′ est en I. Le lieu des points I est alors (§ 5) une surface moulure engendrée par une courbe plane (γ) dont le plan (π) roule sans glisser sur la déférente (S).

Pour une position déterminée du plan (π), les points M et M′ sont distribués sur deux courbes L et L′ symétriques par rapport à (π). Il est facile de voir que les différents couples de courbes, correspondant aux ∞^1 plans tangents à (S), sont les positions occupées par le couple (L, L′) lorsque (π) roule sans glisser sur (S) [L et L′ sont invariablement liées à (π)].

Déformons en effet (S), en maintenant ses génératrices rigides, et appliquons-la sur un plan $\mathfrak{T}$, chaque point de (S) entraînant la sphère associée. La correspondance entre les points de contact étant une correspondance inverse par aires équivalentes, on a vu qu'elle reste telle au cours de la déformation. Lorsque (S) est réduite au plan $\mathfrak{T}$, les deux nappes (σ) et (σ') de l'enveloppe sont symétriques par rapport au plan, les couples de points de contact correspondants M et M′ étant symétriques.

Si (σ) et (σ') étaient deux surfaces véritables, la correspondance entre M et M′ serait directe et non-inverse. Nous déduisons de là que (σ) et (σ') se réduisent nécessairement à deux courbes L et L′ (éventuellement à deux points), symétriques par rapport à $\mathfrak{T}$ et se projetant sur $\mathfrak{T}$ suivant la courbe unique sur laquelle sont venues s'appliquer les courbes (γ) relatives aux différents plans tangents à (S).

La déformation de (S) conservant, comme l'on sait, la distance de deux points de contact associés M, M' au plan tangent (π) correspondant, on voit que lorsqu'on déformera le plan $\mathfrak{T}$ pour l'appliquer sur (S), les couples M, M' correspondant aux points homologues des courbes (γ) successives se trouveront situés à la même distance des plans tangents correspondants. Il résulte bien de là, comme on l'avait annoncé, que les différents couples (L, L') sont des figures égales, se déduisant de l'une d'elles par le roulement de (π) sur (S). Il est clair, d'ailleurs, que l'on peut se donner arbitrairement le couple (L, L') invariablement lié au plan (π) roulant sur (S).

M étant un point quelconque de la courbe L d'un tel couple, menons le plan normal en M à L; soit O le point où ce plan coupe la génératrice de contact G de (π) et de (S); la sphère (Σ) de centre O et de rayon OM est tangente à L et à l'élément engendré par M lorsque (π) roule sans glisser sur (S) (car le déplacement de M est normal à G); (Σ) est donc tangente en M et M' aux surfaces engendrées par L et L' dans le roulement de (π) sur (S).

La congruence obtenue en construisant les ∞^2 sphères analogues à (Σ) est l'une des congruences du type étudié, et c'est la congruence la plus générale de ce type. Nous pouvons énoncer le résultat suivant :

Les congruences de sphères à déférente développable, déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances inverses par aires équivalentes, sont celles qui admettent comme nappes enveloppes les surfaces engendrées par deux courbes quelconques symétriques par rapport à un plan (π) *lorsque* (π) *roule sans glisser sur la déférente.*

L'équation de Monge-Ampère (15), dont dépend le problème général de la recherche des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence inverse des éléments superficiels homologues, très analogue à celle qui définit les surfaces applicables sur la déférente, n'est susceptible d'une intégration complète que pour des types, en nombre réduit, d'éléments linéaires des surfaces déférentes, qu'il serait intéressant de trouver.

Nous n'aborderons pas ici l'étude de cette question ; nous nous en tiendrons dans la suite au cas des correspondances avec équivalence directe qui, mieux que le premier, semble se prêter à des rapprochements analytiques et géométriqnes conformes à l'esprit du Mémoire actuel.

Développons l'équation (16′) du paragraphe 3 dont dépend le problème, en tenant compte des expressions des dérivées secondes covariantes données au paragarphe 2; nous obtenons

$$(21) \qquad \begin{aligned} &D''\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} - 2D'\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} + D\frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} \\ &\quad -\left\{D\begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} - 2D'\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 1\end{Bmatrix} + D''\begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 1\end{Bmatrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial u} \\ &\quad -\left\{D\begin{Bmatrix}2 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} - 2D'\begin{Bmatrix}1 & 2\\ & 2\end{Bmatrix} + D''\begin{Bmatrix}1 & 1\\ & 2\end{Bmatrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial v} + H^2\mathcal{H} = 0. \end{aligned}$$

Il est bien connu que l'on peut donner à cette équation la forme

$$(22) \qquad \frac{\partial^2\rho}{\partial u'\,\partial v'} + a\frac{\partial\rho}{\partial u'} + b\frac{\partial\rho}{\partial v'} + c = 0;$$

il suffit pour cela de prendre pour nouvelles variables u', v', deux fonctions de u, v satifaisant respectivement aux deux relations

$$(23) \qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u'}{\partial u} + \lambda_1\dfrac{\partial u'}{\partial v} = 0, \\ \dfrac{\partial v'}{\partial u} + \lambda_2\dfrac{\partial v'}{\partial v} = 0, \end{cases}$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation

$$D''\lambda^2 + 2D'\lambda + D = 0.$$

Voyons comment ce résultat analytique s'interprète dans le problème de géométrie actuel.

L'équation des caractéristiques de l'équation (21)

$$D''\,dv^2 + 2D'\,du\,dv + D\,du^2 = 0,$$

est celle qui définit les lignes asymptotiques de la déférente. En remplaçant dans les équations (23) λ_1 et λ_2 par les deux racines de l'équation du second degré

$$D''\left(\frac{dv}{du}\right)^2 + 2D'\frac{dv}{du} + D = 0,$$

ces équations se réduisent respectivement à

$$du' = 0, \qquad dv' = 0.$$

Le changement de variables (23) est donc celui *qui consiste à rapporter la déférente à ses lignes asymptotiques*.

Du point de vue géométrique, la possibilité de réduire l'équation (21) à la forme (22) en rapportant la déférente à ses asymptotiques est évidente. Si le système (u, v) est formé de lignes asymptotiques, la deuxième forme fondamentale de la déférente se réduit à

$$D'\,du\,dv \qquad (D = D'' = 0),$$

et, si l'on remplace $\mathcal{H}$ (courbure moyenne) par son expression

$$\mathcal{H} = \frac{2FD'}{H^2},$$

l'équation (21) s'écrit

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u\,\partial v} - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial u} - \left\{\begin{matrix}1 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\}\frac{\partial\rho}{\partial v} - F = 0. \tag{24}$$

Au point de vue réel, pour que l'on puisse effectivement réduire (21) à la forme (24), il faut que la quantité $DD'' - D'^2$ soit négative (équation du type hyperbolique); c'est-à-dire que les asymptotiques de la déférente soient réelles (que la déférente soit à courbure totale négative). Si l'on a $DD'' - D'^2 > 0$ (équation du type elliptique), c'est-à-dire si la déférente est à courbure totale positive, on sait que l'on peut donner à l'équation (21) la forme

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} + a\frac{\partial\rho}{\partial u} + b\frac{\partial\rho}{\partial v} + c = 0.$$

Géométriquement, cela revient à rapporter la déférente à un *système conjugué isotherme*. La deuxième forme de la surface est alors

$$D(du^2 + dv^2) \qquad (D = D'',\ D' = 0)$$

et l'équation (21) prend la forme

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - \left[\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 1\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 1\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial\rho}{\partial u} - \left[\left\{\begin{matrix}2 & 2\\ & 2\end{matrix}\right\} + \left\{\begin{matrix}1 & 1\\ & 2\end{matrix}\right\}\right]\frac{\partial\rho}{\partial v} - (E + G) = 0. \tag{25}$$

Les propriétés classiques relatives à la réduction ou à l'intégrabilité des équations du type (24) ou (25), jointes à des résultats géométriques bien connus de la théorie des surfaces, conduisent aux observations qui vont suivre.

7. **Congruences à déférentes minima.** — L'équation (24) se simplifie si $F = 0$, c'est-à-dire, d'après l'expression de la courbure moyenne $\left[\mathcal{H} = \frac{2FD'}{H^2}\right]$, si la déférente est une surface minima. Elle prend alors la forme de Laplace

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial u} - \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0.$$

Je dis que l'on peut toujours ramener cette équation à avoir ses *invariants égaux*. Cette propriété analytique résulte du fait que les lignes asymptotiques d'une surface minima forment un système orthogonal isotherme. Il suffit, d'après cela, de changer u et v en des fonctions respectives de u et de v de façon à donner à l'élément linéaire de la surface la forme isométrique

$$ds^2 = \lambda^2 (du^2 + dv^2), \tag{26}$$

pour atteindre le résultat voulu. On a alors

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial v} (\log \lambda), \qquad \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = \frac{\partial}{\partial u} (\log \lambda);$$

l'équation s'écrit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} - \frac{\partial}{\partial v} (\log \lambda) \frac{\partial \rho}{\partial u} - \frac{\partial}{\partial u} (\log \lambda) \frac{\partial \rho}{\partial v} = 0, \tag{27}$$

et l'on voit qu'elle a ses invariants égaux.

On pourra intégrer *complètement* l'équation si les invariants sont nuls; cela a lieu si l'on a

$$\frac{\partial^2}{\partial u\, \partial v} (\log \lambda) = \frac{\partial \log \lambda}{\partial u} \frac{\partial \log \lambda}{\partial v}. \tag{28}$$

Cherchons les surfaces minima dont l'élément linéaire a la forme (26) (u et v sont les paramètres asymptotiques), et pour lesquelles λ vérifie la relation (28). Si ces surfaces existent, on saura déterminer toutes les congruences de sphères, les admettant pour déférentes, et déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence directe des éléments superficiels homologues.

On sait que si l'on se donne arbitrairement, sur la sphère de rayon 1, un système orthogonal isotherme donnant à l'élément linéaire sphérique la forme

$$ds'^2 = \frac{1}{\lambda^2}(du^2 + dv^2), \tag{29}$$

il existe toujours une surface minima et une seulement (en négligeant une homothétie), que l'on peut déterminer par des quadratures, dont le système sphérique (u, v) est l'image des lignes asymptotiques, et dont l'élément linéaire est (26).

Tout revient donc à chercher les éléments linéaires sphériques de la forme (29), pour lesquels λ vérifie l'équation (28). L'équation (28), symétrique en u et v, donne immédiatement

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{U},$$

$$\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{1}{\lambda}\right) = \mathrm{V},$$

U et V étant des fonctions de u et v respectivement ; on en déduit

$$\frac{1}{\lambda} = \mathrm{U} + \mathrm{V}.$$

Les éléments linéaires sphériques cherchés ont donc nécessairement la forme

$$ds'^2 = (\mathrm{U} + \mathrm{V})^2 (du^2 + dv^2). \tag{30}$$

Nous allons voir qu'il existe exactement *un* élément linéaire sphérique ayant la forme (30). On peut à cet effet résoudre l'équation fonctionnelle obtenue en exprimant que la courbure de la forme (30) est égale à l'unité. Nous préférons raisonner géométriquement de la façon suivante.

Les surfaces minima cherchées rapportées à leurs asymptotiques, ayant la représentation sphérique (30), ont, comme on l'a vu plus haut, l'élément linéaire

$$ds^2 = \frac{du^2 + dv^2}{(\mathrm{U} + \mathrm{V})^2}.$$

Cette dernière forme d'élément linéaire caractérise (¹) les surfaces

(¹) *Voir* par exemple G. Darboux, *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. III, p. 155.

admettant *un système orthogonal isotherme dont les deux familles de courbes sont des cercles géodésiques* (nous appelons ici cercles géodésiques les courbes le long desquelles la courbure géodésique est constante).

Sur les surfaces minima solutions du problème actuel, les deux familles d'asymptotiques sont donc constituées par des *cercles géodésiques*.

Considérons les surfaces minima *adjointes* des précédentes; on passe des premières aux secondes par une déformation continue transformant les lignes asymptotiques des premières surfaces en lignes de courbure des surfaces adjointes. D'autre part, pendant la déformation, les cercles géodésiques *restent cercles géodésiques*. On peut donc dire que les adjointes des surfaces minima cherchées sont des surfaces *admettant pour lignes de courbure des cercles géodésiques*.

On sait, d'après un résultat bien connu d'O. Bonnet, que les seules surfaces dont toutes les lignes de courbure sont des cercles géodésiques sont les surfaces de révolution, les cônes, les cylindres et les transformées de ces surfaces par inversion. Dans ces différents cas, l'une au moins des deux familles de lignes de courbure est formée de lignes planes *circulaires;* sa représentation sphérique est formée de cercles; mais, la représentation sphérique des lignes de courbure d'une surface minima étant un système orthogonal isotherme, la représentation de l'autre famille de lignes de courbure est aussi formée de cercles (formant avec le premier système un réseau orthogonal). Il résulte de là que les adjointes des surfaces minima cherchées, admettant pour représentation sphérique de leurs lignes de courbure un double système de cercles, ont *toutes leurs lignes de courbure planes*.

On connaît toutes les surfaces minima à lignes de courbure planes dans les deux systèmes; ce sont la surface d'Enneper dont les lignes de courbure sont des cubiques rationnelles, et les surfaces d'O. Bonnet d'équations

$$\begin{aligned} x &= au + \sin u \operatorname{ch} v, \\ y &= v + a\cos u \operatorname{sh} v, \\ z &= \sqrt{1-a^2}\cos u \operatorname{ch} v, \end{aligned}$$

où a est un paramètre arbitraire ($a^2 < 1$).

La surface d'Enneper ne peut convenir comme surface adjointe de l'une des surfaces cherchées, car aucun de ses systèmes de lignes de courbure n'est formé de cercles, et cette dernière condition est comme on a vu nécessaire.

Dans la famille des surfaces d'O. Bonnet, la seule valeur que l'on puisse donner à a pour que l'une des familles de lignes de courbure soit circulaire est évidemment $a = 0$. On obtient ainsi le *caténoïde*, dont les deux familles de lignes de courbure (méridiens et parallèles) *sont effectivement des cercles géodésiques*.

La surface adjointe du caténoïde est *l'hélicoïde minima réglé;* d'après l'analyse qui précède, cette surface est *la seule surface minima dont les deux systèmes d'asymptotiques sont formés de cercles géodésiques*. Son élément linéaire est

$$ds^2 = \text{ch}^2 u\,(du^2 + dv^2),$$

u et v étant les paramètres asymptotiques; celui de sa représentation sphérique est par suite

$$ds'^2 = \frac{1}{\text{ch}^2 u}(du^2 + dv^2).$$

Ce dernier est *le seul élément linéaire sphérique de la forme*

$$ds'^2 = (\text{U} + \text{V})^2\,(du^2 + dv^2).$$

En résumé :

La détermination des congruences de sphères à déférente minima déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances directes avec équivalence des éléments superficiels homologues dépendent d'une équation de Laplace à invariants égaux. Les invariants s'annulent dans le seul cas où la déférente est l'hélicoïde minima réglé; *dans ce cas la détermination des congruences de sphères peut être effectuée complètement.*

8. **Déférentes à courbure totale constante.** — Nous examinerons successivement les deux cas où la courbure totale de la déférente est négative ou positive, et nous supposerons, pour simplifier, la valeur absolue de la courbure égale à l'unité

Déférentes pseudo-sphériques. — L'équation (24) définissant les congruences de sphères cherchées attachées aux surfaces pseudo-sphériques, est toujours susceptible d'une *intégration complète* lorsque la surface déférente est connue.

Cette circonstance analytique est liée au fait géométrique suivant :

Les lignes asymptotiques d'une surface pseudo-sphérique *constituent sur la surface un réseau de Tchebychef.*

La déférente (S) étant rapportée à ses lignes asymptotiques (u, v), supposons son ds^2 mis sous la forme (de Tchebychef)

$$ds^2 = du^2 + 2\cos\omega\, du\, dv + dv^2, \tag{31}$$

où ω est une solution de l'équation

$$\frac{\partial^2 \omega}{\partial u\, \partial v} = \sin\omega \tag{32}$$

exprimant que la courbure de (S) est égale à -1.

On sait d'ailleurs que toute solution de l'équation (32) définit une surface pseudo-sphérique rapportée à ses lignes asymptotiques, dont la détermination effective dépend de l'intégration d'une équation de Riccati.

On a ici

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 1 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 & 2 \\ & 2 \end{Bmatrix} = 0, \qquad F = \cos\omega,$$

et l'équation (24) s'écrit

$$\frac{\partial^2 \rho}{\partial u\, \partial v} = \cos\omega. \tag{33}$$

Si la fonction ω [solution de (32)] est connue, (33) donne ρ par deux quadratures

$$\rho = \int du \int \cos\omega\, dv + U + V,$$

U et V étant deux fonctions arbitraires de u et v respectivement. Nous sommes conduits à énoncer le résultat suivant :

Toute solution de l'équation (32) fournit, par l'intégration d'une équation de Riccati, une surface pseudo-sphérique (S), et *une double quadrature ultérieure fait connaître toutes les congruences de sphères admettant* (S) *pour déférente et déterminant sur les deux nappes de* *l'enveloppe une correspondance avec équivalence directe des éléments superficiels.*

Il est à noter que si l'on connaît une solution particulière de l'équation (33), toutes les autres solutions s'en déduisent par addition d'une quantité somme d'une fonction arbitraire de u et d'une fonction arbitraire de v. Cette remarque analytique admet l'interprétation géométrique suivante :

Supposons connue *une* congruence de sphères du type étudié, admettant pour déférente une surface pseudo-sphérique quelconque (S). On en déduira une autre *en ajoutant une même constante arbitraire au carré des rayons de toutes les sphères centrées sur une même ligne asymptotique d'un système déterminé* (la constante variant d'une façon arbitraire lorsqu'on passe d'une ligne asymptotique à une autre).

En poursuivant indéfiniment l'opération précédente avec les lignes asymptotiques de l'un et l'autre système, on obtiendra toutes les congruences de sphères, centrées sur (S), et déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence directe des éléments superficiels homologues.

Déférentes à courbure totale constante positive. — Ici aussi le problème est susceptible d'une solution complète, ce que l'on voit aussitôt en observant que ce cas se déduit du précédent par une homothétie de rapport i. Géométriquement, la possibilité d'intégration de l'équation (25) dont dépend le problème actuel tient à ce que, sur les déformées de la sphère, *les lignes de courbure forment un système conjugué isotherme.*

Considérons une déformée quelconque (S) de la sphère de rayon 1, rapportée à ses lignes de courbure (u, v); son élément linéaire pourra être mis sous la forme

$$ds^2 = \operatorname{sh}^2\omega\, du^2 + \operatorname{ch}^2\omega\, dv^2,$$

où ω vérifie l'équation de Gauss

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\omega}{\partial v^2} + \operatorname{sh}\omega \operatorname{ch}\omega = 0.$$

On a ici

$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 1 \end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ & 1 \end{matrix}\right\} = \coth\omega \frac{\partial\omega}{\partial u},$$
$$\left\{\begin{matrix} 1 & 1 \\ & 2 \end{matrix}\right\} = -\left\{\begin{matrix} 2 & 2 \\ & 2 \end{matrix}\right\} = -\operatorname{th}\omega \frac{\partial\omega}{\partial v},$$

et l'équation (25) prend la forme intégrable

$$\frac{\partial^2\rho}{\partial u^2} + \frac{\partial^2\rho}{\partial v^2} - (\operatorname{sh}^2\omega + \operatorname{ch}^2\omega) = 0. \tag{34}$$

Cas où la déférente est sphérique. — On peut, dans ce cas, donner une interprétation digne d'intérêt au problème de la recherche des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence directe des éléments superficiels homologues.

Supposons que la déférente (S) soit la sphère de rayon 1, centrée à l'origine O d'un système d'axes de coordonnées rectangulaires, et prenons l'équation définissant les congruences associées sous la forme (16′) du paragraphe 3.

Nous aurons ici

$$ds^2 = E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$$

étant l'élément linéaire de la sphère (S),

$$E = -D, \qquad G = -D'', \qquad F = -D';$$

d'autre part, la valeur de la courbure moyenne de (S) est

$$\mathcal{H} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} = 2.$$

L'équation (16′) s'écrit dans ces conditions

$$\frac{E\rho_{22} - 2F\rho_{12} + G\rho_{11}}{H^2} = 2 \qquad \left(\rho = \frac{1}{2}R^2\right);$$

ou, plus simplement,

$$\Delta_2\rho - 2 = 0. \tag{35}$$

$M(u, v)$ étant un point quelconque de la sphère (S), interprétons $\rho(u, v)$ comme la distance algébrique du point O, au plan tangent (normal à OM) à une certaine surface (Σ) définie tangentiellement par l'équation (35).

D étant la normale à (Σ) au point N d'image sphérique M, φ_1 et φ_2 les centres de courbure principaux relatifs à N, I la projection de O sur D, on a (1)

$$\overline{I\varphi_1} + \overline{I\varphi_2} = -\Delta_2 \rho,$$

soit, en désignant par h la distance algébrique du point O au plan (π) perpendiculaire à $\varphi_1 \varphi_2$ en son milieu,

$$2h = -\Delta_2 \rho.$$

L'équation (35) peut donc s'écrire

$$h + 1 = 0,$$

et elle exprime que le plan (π) enveloppe la sphère (S). (Σ) est donc une surface *admettant pour enveloppée moyenne la sphère* (S).

Le problème de la recherche des congruences de sphères centrées sur (S) et déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence directe des éléments superficiels homologues, est donc équivalent à celui de la recherche des surfaces (Σ) admettant (S) pour enveloppée moyenne.

Pour avoir la congruence de sphères la plus générale du type envisagé, admettant (S) pour déférente, il suffit de considérer une surface quelconque (Σ) admettant (S) pour enveloppée moyenne, et de centrer en chaque point M de (S) une sphère de rayon $\sqrt{2\rho}$, ρ étant la distance du centre O de (S) au plan tangent à (Σ) au point de représentation sphérique M.

Rappelons que pour la réalité des deux nappes de l'enveloppe on doit avoir

$$\Delta\rho < 2\rho.$$

Les surfaces à enveloppées moyennes sphériques, qui s'introduisent dans le problème actuel, sont celles que la méthode de Weingarten pour la recherche des surfaces applicables sur une surface donnée associe au paraboloïde de révolution.

Le problème sur les congruences de sphères que nous venons de

(1) *Voir*, par exemple, P. VINCENSINI, *Sur certaines congruences normales dans leurs relations avec les surfaces à courbure totale constante* (*Ann. École Norm. sup.*, 3e série, t. 48. 1931).

résoudre est donc, au fond, *équivalent à celui de la déformation du paraboloïde de révolution.*

9. **Propriétés métriques caractéristiques des congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence des éléments superficiels.** — P étant le centre de la sphère variable (Σ) [décrivant la déférente (S)], M et M′ les points de contact de (Σ) avec les deux nappes de l'enveloppe (σ) et (σ'), orientons positivement les droites PM et PM′ de P vers M et de P vers M′. Désignons par R le rayon de (Σ) et par r_1, r_2, r'_1, r'_2 les valeurs algébriques des rayons de courbure principaux de (σ) et (σ') en M et M′, comptés à partir des centres de courbure correspondants.

Dans chacun des deux modes de correspondance entre M et M′ (directe ou inverse), il existe entre les cinq quantités R, r_1, r_2, r'_1, r'_2, une relation finie particulièrement simple, *caractéristique des congruences de sphères du type étudié.*

La relation (1′) du paragraphe 1 appliquée à un pinceau infiniment délié de la congruence (PM) donne ici, en appelant F et F′ les foyers situés sur (PM) [centres de courbure principaux de la surface (σ) au point M], et en désignant par ds et $d\sigma$ deux éléments d'aire homologues sur (S) et (σ) et par θ l'angle aigu que fait la normale à (S) en P avec PM :

$$\frac{d\sigma}{ds} = \frac{\overline{\mathrm{MF}} \times \overline{\mathrm{MF'}}}{\overline{\mathrm{PF}} \times \overline{\mathrm{PF'}}} \sin\theta,$$

soit, avec les notations indiquées,

$$(36) \qquad \frac{d\sigma}{ds} = \frac{r_1 r_2 \sin\theta}{(\mathrm{R} - r_1)(\mathrm{R} - r_2)};$$

et l'on a de même

$$(37) \qquad \frac{d\sigma'}{ds} = \frac{r'_1 r'_2 \sin\theta}{(\mathrm{R} - r'_1)(\mathrm{R} - r'_2)}.$$

Le contour de ds étant décrit dans un sens déterminé, les contours de $d\sigma$ et $d\sigma'$ seront décrits tous deux dans le même sens que $d\sigma$ (autour des rayons moyens des pinceaux correspondants) ou tous deux dans le sens contraire si la correspondance entre M et M′ est directe. Si la correspondance est inverse, l'un des contours de $d\sigma$, $d\sigma'$ sera décrit dans le même sens que ds, l'autre en sens inverse. Il résulte de là que, dans le cas de la correspondance (MM') directe, les deux rapports $\frac{d\sigma}{ds}$ et $\frac{d\sigma'}{ds}$ ont le même signe; les rapports ont des signes contraires dans le cas de la correspondance inverse.

Correspondance avec équivalence directe. — Les congruences de sphères correspondantes sont caractérisées par la relation

$$\frac{ds}{d\sigma} = \frac{ds}{d\sigma'},$$

qui s'écrit, eu égard aux relations (36) et (37),

$$\frac{(R_1 - r)(R - r_2)}{r_1 r_2} = \frac{(R - r'_1)(R - r'_2)}{r'_1 r'_2},$$

ou encore

$$(38) \qquad R\left[\frac{1}{r_1 r_2} - \frac{1}{r'_1 r'_2}\right] - \left[\left(\frac{1}{r_1} + \frac{1}{r_2}\right) - \left(\frac{1}{r'_1} + \frac{1}{r'_2}\right)\right] = 0.$$

En désignant par K et K' les courbures totales des deux nappes de l'enveloppe en deux points correspondants, par $\mathcal{H}$ et $\mathcal{H}'$ leurs courbures moyennes, la relation caractéristique précédente peut s'écrire

$$(38') \qquad \frac{\mathcal{H} - \mathcal{H}'}{K - K'} = R.$$

(38') montre que si sur les deux nappes d'une enveloppe de sphères du type actuel les courbures totales aux points homologues sont les mêmes, il en est de même des courbures moyennes; les rayons de courbure en deux points homologues *sont donc deux à deux égaux.* Il en est ainsi, en particulier, pour les congruences de rayon constant dont la déférente est minima.

Correspondance avec équivalence inverse. — On a ici

$$\frac{ds}{d\sigma} + \frac{ds}{d\sigma'} = 0,$$

soit

$$\frac{(R - r_1)(R - r_2)}{r_1 r_2} + \frac{(R - r'_1)(R - r'_2)}{r'_1 r'_2} = 0,$$

ou encore

$$(39)\qquad R^2\left(\frac{1}{r_1 r_2}+\frac{1}{r'_1 r'_2}\right)-R\left(\frac{1}{r_1}+\frac{1}{r_2}+\frac{1}{r'_1}+\frac{1}{r'_2}\right)+2=0,$$

et, en introduisant les courbures totales et moyennes aux points correspondants

$$(39')\qquad R^2(K+K')-R(\mathcal{H}+\mathcal{H}')+2=0.$$

Dans le cas actuel, la relation (39) est d'autant plus remarquable *qu'elle se conserve au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.*

Le rôle symétrique que jouent, d'une part les points P et M et d'autre part les points P et M′ dans la relation

$$\frac{ds}{d\sigma}+\frac{ds}{d\sigma'}=\frac{1}{\sin\theta}\left(\frac{\overline{PF}\times\overline{PF'}}{\overline{MF}\times\overline{MF'}}+\frac{\overline{PF_1}\times\overline{PF'_1}}{\overline{MF_1}\times\overline{MF'_1}}\right)=0,$$

qui définit les congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence inverse des éléments superficiels, montre que, sans modifier la relation (39), on peut remplacer $r_1=\overline{FM}$ par $R+r_1=\overline{FP}$, et de même r_2, r'_1, r'_2 respectivement par $R+r_2$, $R+r'_1$, $R+r'_2$. (39) prend alors la nouvelle forme

$$(40)\qquad R^2\left[\frac{1}{(R+r_1)(R+r_2)}+\frac{1}{(R+r'_1)(R+r'_2)}\right]$$
$$-R\left[\frac{1}{R+r_1}+\frac{1}{R+r_2}+\frac{1}{R+r'_1}+\frac{1}{R+r'_2}\right]+2=0.$$

Dans la relation (40), non seulement le premier membre est invariant pour toute déformation de la déférente, mais les deux quantités entre crochets sont *séparément invariantes.*

L'invariance de ces deux quantités continue à avoir lieu si la condition relative à l'équivalence des éléments superficiels sur les deux nappes de l'enveloppe cesse d'être remplie; elle constitue une propriété des congruences de sphères les plus générales, mise en évidence par M. J. Drach dans le Mémoire « *Sur les enveloppes de sphères et la déformation des surfaces* » déjà cité.

M. G. Ricci (¹) a donné aux deux invariants précédents les formes

$$(41)\qquad \frac{1}{(R+r_1)(R+r_2)} + \frac{1}{(R+r'_1)(R+r'_2)} = \frac{2\Delta_{22}R}{1-\Delta R} + 2K,$$

$$(42)\qquad \frac{1}{R+r_1} + \frac{1}{R+r_2} + \frac{1}{R+r'_1} + \frac{1}{R+r'_2}$$
$$= \frac{2}{1-\Delta R}\left[\Delta_2 R - \frac{\left(\frac{\partial R}{\partial v}\right)^2 R_{11} - 2\frac{\partial R}{\partial u}\frac{\partial R}{\partial v} R_{12} + \left(\frac{\partial R}{\partial u}\right)^2 R_{22}}{H}\right],$$

et il a montré que si, dans toute déformation de la déférente d'une congruence de sphères (de rayon variable), *les rayons de courbure principaux des deux nappes de l'enveloppe en deux points correspondants sont liés par une relation fixe*

$$(43)\qquad F(r_1, r_2, r'_1, r'_2, u, v) = 0,$$

dont le premier membre n'est pas exclusivement fonction des premiers membres des relations (41) *et* (42), la congruence est une congruence de Ribaucour arbitrairement déformable avec la déférente, la condition précédente étant d'ailleurs caractéristique des congruences de Ribaucour arbitrairement déformables.

Appliquons ces remarques aux congruences de sphères déterminant sur les deux nappes de l'enveloppe des correspondances avec équivalence inverse des éléments superficiels homologues.

Pour ces congruences on a les relations *distinctes* (40), (41), (42). Si, parmi elles, il en existe qui appartiennent au type de Ribaucour, on aura une relation supplémentaire de la forme (43) *distincte* des trois précédentes, et l'ensemble des quatre relations *fixera les quatre rayons de courbure principaux* r_1, r_2, r'_1, r'_2, qui conserveront chacun *une grandeur invariable au cours d'une déformation arbitraire de la déférente.*

Les congruences de sphères jouissant de cette dernière propriété feront l'objet d'une étude ultérieure.

(¹) *Una proprieta caracteristica delle congruenze di sfere di Ribaucour illimitatamente deformabili* (*Actes du Congrès international des Mathématiciens de Zurich*, 1932).