ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER
CHARLES H. ROWE

Lieu des points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants : biquadratiques, cubiques gauches et dégénérescences

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 53 (1936), p. 329-386
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1936_3_53__329_0>

LIEU DES POINTS

DONT LES

RAPPORTS DES DISTANCES A TROIS DROITES FIXES

RESTENT CONSTANTS :

BIQUADRATIQUES, CUBIQUES GAUCHES ET DÉGÉNÉRESCENCES

PAR

MM. BERTRAND GAMBIER (Lille) ET CHARLES H. ROWE (Dublin).

1. **Introduction.** — Le présent travail est dû à la collaboration de M. Gambier et de M. Charles H. Rowe. Ce dernier avait remarqué que, *si l'on choisit arbitrairement trois droites de l'espace euclidien à trois dimensions, il existe quatre cubiques gauches telles que, pour chacune, les rapports mutuels des distances aux trois droites d'un point variable de cette courbe restent constants;* l'ensemble constitué par une telle cubique et les trois droites, droites qu'il sera commode d'appeler *directrices*, dépend de *douze paramètres;* il restait à voir si, inversement, une cubique gauche Γ étant donnée, il lui correspond *un nombre fini ou infini de tels systèmes de trois directrices*. M. Rowe avait signalé ce résultat particulièrement élégant que, pour une cubique gauche *horopter*, il existe ∞^2 *systèmes, non seulement de trois directrices, mais même de quatre directrices*. M. Gambier a imaginé de considérer les quadriques *orthogonales* qui passent par une cubique gauche, puis de considérer les cubiques comme la dégénérescence d'une biquadratique

décomposée en cette cubique et une sécante double de la cubique et enfin d'étudier les biquadratiques spéciales susceptibles d'être définies comme lieux de points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants.

A partir de ce stade, le problème a été résolu complètement, grâce à la collaboration étroite des deux auteurs qui n'ont plus eu qu'un but, à savoir, non pas d'essayer de se devancer l'un l'autre, mais de réunir leurs efforts pour surmonter les obstacles. C'est ainsi que deux lettres se sont croisées pour communiquer le résultat relatif *aux biquadratiques (à dix paramètres) qui admettent* ∞^2 *générations avec quatre directrices :* M. Rowe faisait remarquer qu'elles étaient l'*intersection de deux cylindres de révolution arbitraires,* M. Gambier faisait remarquer que, *seules admettent* ∞^2 *générations avec quatre directrices les biquadratiques ayant un axe de symétrie et de plus ayant leurs points à l'infini aux sommets d'un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale.*

Inutile d'indiquer désormais à quel auteur les résultats isolés sont dus; la question se trouve exposée synthétiquement, la rédaction étant due à M. Gambier.

Nous commençons par l'étude des biquadratiques spéciales (à 14 paramètres au lieu de 16) qui admettent une génération à trois directrices : cette propriété est appelée *propriété* A ; la biquadratique *générale* admet simplement la *propriété* A′ qui peut s'énoncer ainsi : *on peut trouver (de huit façons différentes) trois couples de droites* (D_2, D_3), $(\overline{D}_3, \overline{D}_1)$, $(\overline{\overline{D}}_1, \overline{\overline{D}}_2)$, *telles que les droites de même indice soient parallèles et que la biquadratique soit commune aux quadriques orthogonales*

$$(\mathrm{A}') \quad m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0, \qquad m_3^2 \overline{D}_3^2 - m_1^2 \overline{D}_1^2 = 0, \qquad m_1^2 \overline{\overline{D}}_1^2 - m_2^2 \overline{\overline{D}}_2^2 = 0,$$

où m_1, m_2, m_3 *sont trois constantes numériques définies à un facteur près de proportionnalité.* (D_2, par exemple, signifie, dans cet énoncé, la distance d'un point à la droite D_2.)

On passe aux biquadratiques spéciales ayant la propriété A en supposant que $\overline{D}_3$ coïncide avec D_3, auquel cas, automatiquement, D_2 et $\overline{\overline{D}}_2$ coïncident, ainsi que $\overline{D}_1$ et $\overline{\overline{D}}_1$, de sorte que les équations (A′) sont remplacées par les équations (A)

$$(\mathrm{A}) \quad m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0, \qquad m_3^2 D_3^2 - m_1^2 D_1^2 = 0, \qquad m_1^2 D_1^2 - m_2^2 D_2^2 = 0.$$

La biquadratique la plus générale parmi celles qui admettent la propriété A *n'admet qu'une génération par le moyen de trois directrices.*

Les biquadratiques, dont les quatre points à l'infini sont aux sommets d'un quadrilatère circonscrit au cercle de l'infini, sont bases d'un faisceau de quadriques orthogonales; les diagonales du quadrilatère indiqué définissent, par leur point commun, une direction d'axe commune aux quadriques du faisceau; si les axes en jeu sont, pour les diverses quadriques, simplement parallèles, mais non confondus, on obtient ∞^1 *générations et la courbe est l'intersection de deux paraboloïdes de révolution; si les axes sont confondus, on a* ∞^2 *générations à quatre directrices, la courbe étant l'intersection de deux cylindres de révolution arbitraires et réciproquement.*

Une autre particularisation consiste à supposer que les deux paraboloïdes tendent à se confondre; autrement dit on supposera que l'on étudie une famille de paraboloïdes à un paramètre, tous de révolution et l'on prend la caractéristique de l'un d'eux; *elle a deux directions infinies isotropes et une branche parabolique dans la direction infinie perpendiculaire aux deux précédentes : toutes ces courbes ont* ∞^1 *générations. De même, la courbe d'intersection de deux cylindres de révolution confondus a deux directions infinies isotropes et un point double dans la direction infinie perpendiculaire aux deux précédentes : elle admet* ∞^2 *générations.* Mais il existe des biquadratiques dont les points à l'infini offrent la configuration citée en dernier lieu et *qui ne peuvent être considérées comme intersection de deux cylindres de révolution infiniment voisins : ces courbes n'admettent aucune génération de l'espèce étudiée ici* (ou plutôt elles admettent ∞^1 générations dégénérées où deux directrices se sont réunies en une seule).

Toutes ces propriétés seront obtenues aisément, en remplaçant d'abord la biquadratique par les *droites parallèles aux directions asymptotiques issues d'un même point.*

Pour une *cubique gauche* Γ, on étudie d'abord les ∞^2 quadriques contenant Γ et, parmi celles-ci, les ∞^1 quadriques orthogonales. On voit ainsi que la *cubique gauche générale admet un nombre fini de générations à trois directrices;* pour chacun de ces modes, la cubique est complétée par une sécante double particulière de façon que le total donne une biquadratique (décomposée) admettant la propriété A.

Certaines cubiques gauches admettent ∞^1 *générations à trois directrices; la cubique gauche « horopter » admet* ∞^2 *générations à quatre directrices.*

Nous donnerons ensuite quelques précisions rapides sur le cas des autres dégénérescences d'une biquadratique ou sur le cas des courbes, telles les coniques, qui sont une portion de biquadratique dégénérée.

2. **Quadriques orthogonales.** — Le lieu des points dont le rapport des distances à deux droites fixes D_1, D_2 est constant est une quadrique Q dite *orthogonale*. Cette dénomination, qui n'est peut-être pas très heureuse, est due aux géomètres allemands qui ont les premiers signalé les propriétés de ces quadriques. Cette dénomination est quelquefois remplacée en France par *quadrique de Hachette* (nous appellerons *axe de Hachette*, pour une telle quadrique, celui qui correspond à la racine de l'équation en S égale à la somme des deux autres).

X et X′ étant les premiers membres des équations des plans isotropes issus de D_1, on peut disposer des facteurs de proportionnalité, intervenant pour définir X ou X′ d'une façon précise, pour que le produit XX′ représente le carré de la distance du point général de l'espace à D_1 et que, de plus, si D_1 est réelle, X et X′ soient imaginaires conjugués ; la quadrique Q a une équation de la forme

$$m_1^2\,XX' - m_2^2\,YY' = 0,$$

en supposant que Y et Y′ sont les éléments analogues pour D_2.

Nous avons engagé neuf paramètres pour obtenir Q : à savoir 4 pour D_1, 4 pour D_2, puis le rapport numérique $m_1 : m_2$; mais il faut remarquer que la quadrique Q obtenue ici n'est pas *quelconque*, qu'elle ne dépend, *elle toute seule*, que de *huit paramètres* et que pour chaque quadrique Q *orthogonale*, il existe ∞^1 systèmes D_1, D_2 correspondants, de sorte que c'est l'*ensemble* (Q, D_1, D_2) qui fait intervenir neuf paramètres. *La propriété concernant* Q *ne fait d'ailleurs intervenir que le cône asymptote; si nous coupons par un même plan le cône q des directions asymptotiques de sommet* O *et le cône isotrope* I, $x^2+y^2+z^2=0$, *nous obtenons deux coniques dont la première est circonscrite à* ∞^1 *quadrilatères circonscrits à la seconde* (¹). Il est commode de prendre comme

(¹) Il est naturel d'appeler *droite focale* d'une quadrique Q toute droite D telle que plan de section le plan $z = 1$, de sorte que dans l'équation homogène du cône asymptote étudié $q = 0$ de la quadrique $Q = 0$, en regardant z comme une variable d'homogénéité, l'équation de la conique, dans le plan $z = 1$, sera encore $q = 0$; ξ, ξ', η, η' étant les plans isotropes parallèles à X, X', Y, Y', issus de l'origine, l'équation de q est

$$m_1^2 \xi\xi' - m_2^2 \eta\eta' = 0,$$

de sorte que $\xi = 0$ et $\xi' = 0$ sont deux côtés opposés d'un *quadrilatère de Poncelet* annoncé, $\eta = 0$ et $\eta' = 0$ les deux autres côtés; les diagonales de ce quadrilatère joignent les points $m_1(\xi = \eta = 0)$, $m_3(\xi' = \eta' = 0)$ pour l'une, $m_2(\xi = \eta' = 0)$, $m_4(\xi' = \eta = 0)$ pour l'autre, et se coupent en un point p qui a même polaire par rapport aux deux coniques et cette polaire est la droite réunissant les points communs aux couples de côtés opposés; *le point p est fixe pour tous les quadrilatères* et la droite Op donne l'une des directions principales de la quadrique Q; *c'est la direction obtenue comme droite double du cône dégénéré $q + \lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 0$ obtenu pour la racine de l'équation en λ égale à la somme des deux autres*, ou, si l'on préfère, *égale à la demi-somme des racines;* l'axe correspondant est l'axe de Hachette; c'est là la condition analytique obtenue pour Q; avec les notations classiques, l'équation en λ s'écrit :

$$\Delta + \lambda(a + a' + a'') + \lambda^2(A + A' + A'') + \lambda^3 = 0,$$

et l'*équation de condition satisfaite par* Q *est*

$$\text{(E)} \qquad 8\Delta - 4(A + A' + A'')(a + a' + a'') + (A + A' + A'')^3 = 0.$$

[Il est intéressant de signaler que $A + A' + A'' = 0$, joint à cette relation, entraîne $\Delta = 0$; si donc le cône asymptote est équilatère, il se décompose et la quadrique est un paraboloïde équilatère; $\Delta = 0$ entraîne

---

les deux plans tangents menés de D à Q soient isotropes; les focales d'une quadrique forment une congruence; *si la conjuguée d'une focale est elle-même droite focale, la quadrique est orthogonale et admet ∞^1 couples de focales conjuguées.* Quand les deux droites focales D_1, D_2 sont réelles ainsi que m_1, m_2, la quadrique est réglée (au point de vue réel).

soit $A + A' + A' = 0$, ce qui est le cas précédent, soit

$$(A + A' + A'')^2 = 4(a + a' + a''),$$

ce qui donne le paraboloïde de révolution [1]].

Pour tout quadrilatère de Poncelet relatif à q et I, on trouve deux réductions de Q à la forme

$$m_1^2 D_1^2 - m_2^2 D_2^2 = 0$$

obtenues en remplaçant le couple D_1, D_2 de l'une par le couple symétrique relativement au centre (si Q est un paraboloïde équilatère, il n'y a qu'une réduction); il suffit de déterminer les génératrices de Q parallèles à Om_1, Om_2, Om_3, Om_4 et d'associer celles qui sont alternativement du premier et du second système de façon à obtenir deux quadrilatères gauches tracés sur Q, dont les faces sont isotropes; les diagonales d'un tel quadrilatère donnent les droites D_1, D_2 dont chacune rencontre à angle droit l'axe P de Q parallèle à Op; D_1 et D_2 sont conjuguées par rapport à Q. Quand on passe d'un système (D_1, D_2) à un autre système (D'_1, D'_2) le rapport $m_1 : m_2$, s'il s'agit d'un paraboloïde équilatère reste égal à *un*; s'il s'agit d'une quadrique qui n'est pas un paraboloïde équilatère, il varie et prend toutes les valeurs autres que l'unité.

On peut remarquer encore que, si l'on prend un point A arbitraire sur l'axe P, il passe en A une quadrique homofocale à Q, non dégénérée en un plan double; elle admet A pour sommet et possède deux génératrices issues de A : on peut prendre pour D_1 l'une d'elles (D_2 étant alors la conjuguée de D_1 vis-à-vis de Q); le lieu des droites D_1 est donc un conoïde droit C de degré 4, dont P est droite double, ainsi que la droite à l'infini dans le plan perpendiculaire sur P. Il est inté-

---

[1] En réalité, si l'on n'exclut pas les quadriques imaginaires, et si

$$q \equiv (ux + vy + wz)(u'x + v'y + w'z),$$

l'expression $(A + A' + A'')^2 - 4(a + a' + a'')$ se réduit à $(u^2 + v^2 + w^2)(u'^2 + v'^2 + w'^2)$ de sorte que l'un des plans directeurs est isotrope. Nous verrons certains cas où nous ne pouvons éliminer certaines quadriques imaginaires. Dans le cas où l'un des plans directeurs seul est isotrope, les quadrilatères de Poncelet ont deux côtés consécutifs confondus avec celle des deux droites, formant q, qui est tangente au cercle de l'infini.

ressant de signaler que le *paraboloïde de révolution* est une *quadrique orthogonale* qui n'admet *aucune* génération comme lieu de points dont le rapport des distances à deux droites fixes reste constant; même remarque pour le *cylindre hyperbolique équilatère;* mais un *cylindre de révolution* ou un *couple de deux plans rectangulaires* admettent ∞^2 générations et non seulement ∞^1.

3. **Biquadratiques gauches. Propriété A′, propriété A.** — Le lieu des points dont les distances à trois droites directrices D_1, D_2, D_3 sont entre elles comme les inverses de trois nombres donnés m_1, m_2, m_3 est défini par les équations

$$m_1^2 D_1^2 = m_2^2 D_2^2 = m_3^2 D_3^2.$$

C'est donc une biquadratique définie comme courbe commune aux trois quadriques orthogonales Q_1, Q_2, Q_3 :

$$\begin{array}{lll}
(Q_1) & m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0, & \\
(Q_2) & m_3^2 D_3^2 - m_1^2 D_1^2 = 0, & (Q_1 + Q_2 + Q_3 \equiv 0), \\
(Q_3) & m_1^2 D_1^2 - m_2^2 D_2^2 = 0. &
\end{array}$$

Une telle biquadratique $\mathcal{B}$ ne dépend que de 14 paramètres *au plus*, car D_1, D_2, D_3 font intervenir 4 paramètres chacune; on a ensuite à indiquer les rapports mutuels de m_1, m_2, m_3; *a priori*, on peut simplement affirmer que $\mathcal{B}$ dépend de $(14 - h)$ paramètres où h est un entier positif ou nul, l'ensemble (D_1, D_2, D_3) dépendant, quand $\mathcal{B}$ est connue, de h paramètres. La discussion va montrer que l'*entier inconnu h est nul.* Or la biquadratique *générale* dépend de 16 paramètres, donc celles qui possèdent la propriété A sont des biquadratiques *spéciales*.

Nous savons construire toutes les biquadratiques spéciales en jeu, puisqu'il suffit de donner D_1, D_2, D_3 et les rapports $m_1 : m_2 : m_3$. Il s'agit donc désormais d'indiquer comment on peut *reconnaître si une biquadratique $\mathcal{B}$ donnée possède ou non la propriété* A. Cette question inverse entraîne manifestement la recherche des quadriques orthogonales contenant $\mathcal{B}$. Or la relation E du numéro précédent, appliquée aux quadriques du faisceau $Q + \mu Q' = 0$ fournit une équation de degré 3 en μ : supposons d'abord que cette équation ne soit pas *identique*, ce qui revient à dire que *les points à l'infini de la biquadratique* (Q, Q′) *ne sont pas aux sommets d'un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale.*

Si les trois racines en μ ne sont pas distinctes, nous ne pouvons évidemment pas avoir la propriété A; nous les supposerons donc *distinctes*. Nous avons trois quadriques orthogonales Q_1, Q_2, Q_3 contenant $\mathcal{B}$. (Remarquons en passant que nous pouvons choisir *au hasard* deux quadriques orthogonales Q_1, Q_2 pour définir une biquadratique $\mathcal{B}$, qui se trouve, par comparaison avec ce qui précède, être la biquadratique générale, dépendant des $(8+8)$ paramètres nécessaires pour définir Q_1, Q_2; on n'a plus qu'une équation de degré 1 à résoudre pour avoir Q_3. Les axes *de Hachette* déjà signalés, P_1, P_2, P_3 de Q_1, Q_2, Q_3 *ne sont pas parallèles* (nous verrons que si P_1 et P_2 sont parallèles, la biquadratique est base d'un faisceau orthogonal); de la sorte, *si la propriété* A *existe*, D_1 est la perpendiculaire commune à (P_2, P_3), D_2 à (P_3, P_1) et D_3 à (P_1, P_2); les rapports $m_1 : m_2 : m_3$ s'obtiendraient ensuite en prenant un point de la biquadratique et prenant les rapports des distances de ce point à D_1, D_2, D_3; ceci prouve qu'en cas de succès, si effectivement P_1, P_2, P_3 ne sont pas parallèles, l'entier inconnu h est nul et même que le *nombre fini de générations* est égal à *un* [1] (en cas de possibilité, bien entendu). Il n'y a donc que deux conditions à réaliser pour que $\mathcal{B}$ possède la propriété A : il est, d'après ce qui précède, *nécessaire et suffisant que l'un des plans isotropes issus de* D_3 (*perpendiculaire commune à* P_1 *et* P_2) *soit tangent à* Q_1 *et* Q_2 (en vertu de la symétrie autour de P_1 pour Q_1 et D_3, le second plan isotrope issu de D_3 est tangent à Q_1, si le premier est tangent). Bien entendu on pourrait exprimer le résultat de bien d'autres façons : ce qui vient d'être expliqué, prouve que cela revient à dire que D_3 est génératrice du conoïde $\mathcal{C}_1$ et du conoïde $\mathcal{C}_2$; mais peu importe.

Il est naturel de remarquer ici qu'en mettant en évidence, comme plus haut, les plans isotropes X, X' issus de D_1, Y et Y' issus de D_2, Z et Z' issus de D_3, les équations, obtenues en cas de succès,

$$m_1^2\, XX' = m_2^2\, YY' = m_3^2\, ZZ'$$

prouvent que la *donnée des droites* D_1, D_2, D_3 *détermine huit points, bases*

---

(1) Si la quadrique Q_1 est un cylindre de révolution, elle admet ∞^2 axes de Hachette et le raisonnement employé cesse de valoir pour ce cas; si Q_2 est une quadrique orthogonale quelconque, le résultat subsiste néanmoins (*voir* la Note 2 en fin de mémoire).

d'un système ∞^2 de quadriques, définis par $XX' = YY' = ZZ' = 0$ *et communs à toutes les biquadratiques spéciales correspondantes (obtenues en faisant varier les rapports $m_1 : m_2 : m_3$); réciproquement, toute biquadratique passant par ces huit points possède la propriété* A, car elle est l'intersection de deux quadriques

$$\alpha XX' + \beta YY' + \gamma ZZ' = 0, \qquad \alpha_1 XX' + \beta_1 YY' + \gamma_1 ZZ' = 0$$

et par suite les rapports mutuels $XX' : YY' : ZZ'$ restent invariables le long d'une telle courbe. Nous avons ainsi huit points que nous représentons schématiquement par l'intersection de trois plans isotropes

$$\left\{\begin{array}{llll} XZY, & X'YZ, & XY'Z, & XYZ', \\ X'Y'Z', & XY'Z' & X'YZ', & X'Y'Z, \end{array}\right.$$

et il est clair que la corde qui joint deux points *opposés* (XYZ et $X'Y'Z'$, par exemple), réunie à la cubique qui est définie par les six autres, est l'une des biquadratiques (dégénérée, il est vrai) du système ∞^2; si D_1, D_2, D_3 sont réelles, les points *opposés* sont conjugués, de sorte que nous avons ainsi démontré qu'à *tout système de trois droites réelles correspondent quatre cubiques réelles définies comme lieu (partiel) des points dont les rapports des distances à ces droites sont égaux à certaines constantes choisies convenablement.* Nous reviendrons plus loin sur cette propriété.

Cherchons maintenant une biquadratique $\mathcal{B}$ (n'appartenant si possible qu'à trois quadriques orthogonales) et susceptible de plusieurs générations : d'après ce qui a été dit, il faut que P_1 et P_2 soient parallèles (ou confondus), mais alors, puisque Q_1, Q_2, Q_3 font partie d'un même faisceau ponctuel, P_3 est aussi parallèle à P_1 et P_2. Si les axes P_1, P_2, P_3 sont *distincts*, simplement parallèles entre eux, on choisit l'axe des z parallèle à leur direction commune et l'on a pour la biquadratique des équations

$$\begin{aligned} & m_1^2[(z + h_1)^2 + (x\cos\alpha_1 + y\sin\alpha_1 + p_1)^2] \\ = {} & m_2^2[(z + h_2)^2 + (x\cos\alpha_2 + y\sin\alpha_2 + p_2)^2] \\ = {} & m_3^2[(z + h_3)^2 + (x\cos\alpha_3 + y\sin\alpha_3 + p_3)],\end{aligned}$$

puis un système d'équations analogues, où h_i, p_i sont remplacées par h'_i, p'_i et où les m_i sont conservés (comme cela se voit en prenant les points à l'infini)

$$m_1[(z+h'_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p'_1)^2]$$
$$=m_2^2[(z+h'_2)^2+(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2+p'_2)^2]=m_3^2[\ldots].$$

En retranchant terme à terme, on obtient des équations

$$m_1^2[(h'_1-h_1)(2z+h_1+h'_1)+(p'_1-p_1)(2x\cos\alpha_1+2y\sin\alpha_1+p_1+p'_1)]$$
$$=m_2^2[\ldots]=m_3^2[\ldots],$$

vérifiées par tous les points de la courbe : ces dernières équations doivent toutes se réduire à une identité, sinon le lieu serait ou une droite ou un plan; *en supposant* α_1, α_2, α_3 *différents* (¹), on voit aisément que cela entraîne

$$p_1=p'_1,\quad p_2=p'_2,\quad p_3=p'_3,\quad m_1^2(h'_1-h_1)=m_2^2(h'_2-h_2)=m_3^2(h'_3-h_3),$$
$$h_1+h'_1=h_2+h'_2=h_3+h'_3.$$

Il résulte aussitôt de ces dernières équations que, par un transport de O le long de Oz, on peut supposer *nulle* la valeur commune de $h_1+h'_1$, $h_2+h''_2$, $h_3+h'_3$, et on a la biquadratique

$$\frac{(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p_1)^2}{h_1}=\frac{(z+h_2)^2+(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2+p^2)^2}{h_2}$$
$$=\frac{(z+h_3)^2+(x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3+p_3)^2}{h_3}.$$

Changer, aux numérateurs, $(z+h_i)^2$ par $(z-h_i)^2$ revient à retrancher de chaque rapport la quantité $4z$, de sorte que nous obtenons ainsi une nouvelle représentation où les droites D_1, D_2; D_3, parallèles d'ailleurs au plan horizontal, sont remplacées par leur symétrique chacune relativement à ce plan; si l'on retranche simplement $2z$ à chaque rapport, on voit que seuls les termes en z^2 ou indépendants de z subsistent, de sorte que nous reconnaissons la *symétrie de la courbe relativement au plan horizontal.* Or, on voit aisément que *les biquadratiques que nous venons de signaler appartiennent au cas exceptionnel réservé : chacune définit un faisceau de quadriques ortho-*

(¹) On verra plus bas que, pour une courbe intersection d'un cylindre de révolution et d'un paraboloïde de révolution, α_1 et α_2 sont égaux.

gonales; et même, plus généralement, le réseau déjà signalé

$$A[(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p_1)^2] \\ +B[(z+h_2)^2+\ldots]+C[(z+h_3)^2+\ldots]=0$$

donne des *quadriques* d'équation

$$z^2+\rho x^2+(1-\rho)y^2+2\sigma xy+\ldots=0,$$

où nous n'avons écrit que les termes du second degré, *toutes orthogonales*. Cet exemple n'en est pas moins intéressant; nous y reviendrons plus tard.

Supposons maintenant que les axes *spéciaux de Hachette* P_1, P_2, P_3 soient *confondus :* il suffit pour cela que P_1 et P_2 soient confondus, car la courbe $\mathcal{B}$ possède alors comme axe de symétrie cet axe lui-même. Nous écrirons donc les deux équations de la courbe sous la forme

$$ax^2+(1-a)y^2+z^2=b,$$
$$a'(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+(1-a')(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2+(z+h)^2=b'.$$

D'après ce qui a été expliqué, les droites D relatives à la première quadrique sont les génératrices issues des sommets d'une quadrique

$$\frac{x^2}{\dfrac{1}{a}+\rho}+\frac{y^2}{\dfrac{1}{1-a}+\rho}+\frac{z^2}{1+\rho}=b.$$

Nous écrivons donc les équations d'une telle droite sous la forme

$$(C_1)\qquad \frac{x^2}{\dfrac{1}{a}+\dfrac{z_0^2}{b}-1}+\frac{y^2}{\dfrac{1}{1-a}+\dfrac{z_0^2}{b}-1}=0,\qquad z=z_0.$$

Il est suffisant que cette droite appartienne à la famille analogue

$$(C_2)\qquad \frac{(x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2}{\dfrac{1}{a'}+\dfrac{(z_0+h)^2}{b'}-1}+\frac{(x\sin\alpha-y\cos\alpha)^2}{\dfrac{1}{1-a'}+\dfrac{(z_0+h)^2}{b'}-1}=0,\qquad z=z_0.$$

Nous avons mis en évidence les deux conoïdes annoncés plus haut, qui ont ici tous deux Oz pour droite double commune et aussi la droite à l'infini des plans horizontaux [1]. Les équations de ces deux conoïdes sont de la forme

$$z^2(x^2+y^2) = Ax^2 + Cy^2,$$
$$(z+h)^2(x^2+y^2) = A'x^2 + 2B'xy + C'y^2.$$

La seconde équation, tenu compte de la première, peut s'écrire

$$z(x^2+y^2) = A_1x^2 + 2B_1xy + C_1y^2$$

et l'élimination de z donne

$$(Ax^2+Cy^2)(x^2+y^2) = (A_1x^2+2B_1xy+C_1y^2)^2,$$

de sorte que l'on trouve quatre droites D_1 permettant d'écrire l'équation de la première quadrique sous la forme

$$m_1^2 D_1^2 - m_2^2 D_2^2 = 0$$

et celle de la seconde sous la forme

$$m_1^2 D_1^2 - m_3^2 D_3^2 = 0;$$

mais il faut remarquer ici encore que *toutes les quadriques qui contiennent cette biquadratique sont orthogonales*, car les termes du second degré d'une telle quadrique sont encore de la forme

$$z^2 + \rho x^2 + (1-\rho)y^2 + 2\sigma xy.$$

Nous avons obtenu en passant ce fait remarquable que *cette biquadratique admet ∞^2 réductions de l'espèce indiquée dans ce travail*, car les deux quadriques envisagées sont, finalement, deux quadriques *quelconques*, issues de la courbe. Ce résultat sera approfondi au paragraphe suivant.

Le fait remarquable qui résulte de cette discussion est le suivant; *une biquadratique qui n'a pas ses points à l'infini aux sommets d'un*

---

(1) Si $a = \frac{1}{2}$, le conoïde C_1 se réduit à deux plans d'équation $z \pm i\sqrt{b} = 0$, car l'équation de la surface $x^2+y^2+2(z^2-b) = 0$ s'écrit immédiatement sous la forme

$$[(x\cos\omega - y\sin\omega)^2 + (z - i\sqrt{b})^2] + [(x\sin\omega + y\cos\omega)^2 + (z + i\sqrt{b})] = 0.$$

On trouve encore quatre droites D_1.

quadrilatère circonscrit à l'ombilicale admet ou zéro ou une génération comme lieu de points dont les rapports des distances à trois droites fixes restent constants.

Posons-nous donc la question suivante : *une biquadratique* $\mathcal{B}$ *est supposée ne pas admettre cette propriété* A : *quelle propriété peut-on substituer à* A ?

La réponse est bien simple; nous considérons les trois quadriques orthogonales Q_1, Q_2, Q_3 déjà indiquées et leurs sections par le plan de l'infini (ou, si l'on préfère, les cônes asymptotes q_1, q_2, q_3 ayant leur sommet à l'origine, ou encore, et c'est ce que nous adoptons désormais, les sections de ces cônes par le plan $z = 1$, désignées encore par q_1, q_2, q_3).

Les diagonales des divers quadrilatères de Poncelet fournis par q_2 concourent toutes en un point p_2 (pôle double de q_2 et de la section γ du cône isotrope $x^2 + y^2 + z^2 = 0$); de même q_3 donne le point p_3; la droite $p_2 p_3$ a son pôle ω_1, relativement à γ, situé au croisement de la polaire de p_2 par rapport à γ et q_2 et de la polaire de p_3 relativement à γ et q_3, de sorte que les tangentes à γ issues de ω_1 fournissent les deux côtés opposés ξ et ξ' d'un premier quadrilatère circonscrit à γ et inscrit dans q_2, puis d'un second quadrilatère analogue relatif à γ et q_3 : on a donc

$$\rho q_2 \equiv m_1^2 \xi\xi' - m_3^2 \zeta\zeta' = 0, \qquad \sigma q_3 \equiv m_1^2 \xi\xi' - m_2^2 \eta\eta' = 0,$$

d'où il résulte évidemment que la conique

$$\rho q_2 - \sigma q_3 \equiv m_2^2 \eta\eta' - m_3^2 \zeta\zeta'$$

coïncide avec q_1; la figure nous fait considérer les trois coniques q_1, q_2, q_3, les points p_1, p_2, p_3 de concours des diagonales des quadrilatères de Poncelet fournis par γ et ces coniques, les pôles ω_1, ω_2, ω_3 relativement à γ des droites $p_2 p_3$, $p_3 p_1$, $p_1 p_2$; (ξ, ξ'), (η, η'), (ζ, ζ') sont les tangentes issues de ω_1, ω_2, ω_3 à γ (ou encore les tangentes à γ en ses points de rencontre avec $p_2 p_3$, $p_3 p_1$, $p_1 p_2$). Si maintenant nous considérons les quatre droites Om_1, Om_2, Om_3, Om_4 communes aux trois cônes q_1, q_2, q_3, autrement dit *parallèles aux asymptotes de la biquadratique* $\mathcal{B}$ *issues de* D, *elles sont définies par les équations*

$$m_1^2 \xi\xi' = m_2^2 \eta\eta' = m_3^2 \zeta\zeta',$$

donc possèdent la propriété A *pour le système* $O\omega_1$, $O\omega_2$, $O\omega_3$ *et les nombres* m_1, m_2, m_3 (*les droites* $O\omega_1$, $O\omega_2$, $O\omega_3$ *forment un véritable trièdre*).

Ce point établi, en revenant à la courbe $\mathcal{B}$ elle-même, on trouve pour la quadrique orthogonale Q_1 deux systèmes de deux focales associées D_2 et D_3 parallèles à $O\omega_2$ et $O\omega_3$ fournissant pour Q_1 la réduction

$$(Q_1) \qquad m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0,$$

de même sur Q_2, deux focales $\overline{D}_3$, $\overline{D}_1$ parallèles à $O\omega_3$, $O\omega_1$:

$$(Q_2) \qquad m_3^2 \overline{D}_3^2 - m_1^2 \overline{D}_1^2 = 0;$$

de même sur Q_3 deux focales D_1, $\overline{\overline{D}}_2$ parallèles à $O\omega_1$, $O\omega_2$:

$$(Q_3) \qquad m_1^2 \overline{\overline{D}}_1^2 - m_2^2 \overline{\overline{D}}_2^2 = 0.$$

C'est la propriété A' *indiquée au début de ce travail; et il n'y a, pour une biquadratique quelconque* $\mathcal{B}$, *que huit façons de mettre les équations de* $\mathcal{B}$ *sous cette forme, où les droites de même indice sont parallèles.*

Il est bien clair que deux quadriques orthogonales Q_1, Q_2 étant données et le couple (D_2, D_3) étant obtenu pour Q_1, $(\overline{D}_3, \overline{D}_1)$ pour Q_2, si l'on déplace d'un mouvement de translation la quadrique Q_2 sans toucher à Q_1, l'axe $\overline{D}_3$ pourra venir coïncider avec D_3 (et cela donne deux équations manifestement distinctes) : la courbe $\mathcal{B}$ obtenue alors comme intersection de Q_1 et Q_2 a deux équations

$$m_2^2 D_2^2 - m_3^2 D_3^2 = 0, \qquad m_3^2 D_3^2 - m_1^2 D_1^2 = 0$$

(en supprimant le surlignage devenu inutile pour D_1) et nous avons transformé la propriété A' en la propriété A. Ce qui a été dit sur l'unicité de A prouve d'ailleurs que si A est réalisé, il reste sept façons d'obtenir A' relativement à la courbe $\mathcal{B}$.

4. **Quartiques bases d'un faisceau orthogonal.** — *Si la courbe* $\mathcal{B}$ *passe par les sommets* m_1, m_2, m_3, m_4 *d'un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale, toutes les quadriques du faisceau défini par* $\mathcal{B}$ *sont orthogonales.*

Le point p de croisement des diagonales $m_1 m_3$, $m_2 m_4$ donne la direction Op commune pour l'axe *spécial de Hachette* de toutes ces quadriques.

Si donc nous prenons deux des coniques q_1, q_2 du faisceau $(m_1 m_2 m_3 m_4)$, les explications qui ont été données en fin du paragraphe précédent s'appliquent : on peut choisir arbitrairement dans le faisceau q_1, puis q_2; le point p est la réunion des points dénommés antérieurement p_1 et p_2; nous choisissons arbitrairement encore le point ω_3 sur la polaire de p relativement à γ ou aux coniques q et *nous réalisons ainsi* ∞^3 *générations (au lieu d'une) pour les quatre droites* Om_1, Om_2, Om_3, Om_4; car les tangentes ζ, ζ' issues de ω_3 à γ donnent un quadrilatère inscrit dans q_1, circonscrit à γ, complété par le couple $\eta\eta'$ qui concourt en ω_2 et un quadrilatère analogue relatif à q_2, complété par $\xi\xi'$ qui concourent en ω_1; cette fois Oω_1, Oω_2, Oω_3 sont coplanaires, perpendiculaires à la direction Op. *On a ainsi réalisé* ∞^3 *fois la propriété* A' *pour* $\mathcal{B}$: il faut deux conditions pour passer de A' à A; donc, si du moins nous nous bornons à ce dénombrement, *nous avons* ∞^1 *fois la génération* A.

Il y a lieu d'établir ce résultat en toute rigueur, dans une question où il faut manifestement se défier des comparaisons entre le nombre d'inconnues et le nombre d'équations. Une biquadratique générale dépend de 16 paramètres; assujettir successivement chaque côté du quadrilatère $m_1 m_2 m_3 m_4$ à toucher l'ombilicale réduit les paramètres à 12; si p est ensuite le nombre de paramètres en jeu pour la génération A, une biquadratique, base d'un faisceau orthogonal, réunie à sa représentation A générale, mettra en jeu $12 + p$ paramètres. Or les équations

$$(1) \qquad \begin{aligned} & m_1^2[(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p_1)^2] \\ = {} & m_2^2[(z+h_2)^2+(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2+p_2)^2] \\ = {} & m_3^2[(z+h_3)^2+(x\cos\alpha_3+y\sin\alpha_3+p_3)^2] \end{aligned}$$

fournissent manifestement le lieu général des points dont les rapports des distances à trois directrices parallèles au plan horizontal restent constants : il y entre 11 paramètres explicités (à savoir les h_i, p_i, α_i et les deux rapports $m_1 : m_2 : m_3$); il faut y ajouter deux paramètres si on laisse arbitraire la direction du plan parallèle à D_1, D_2, D_3; cela fait un total de 13 paramètres indépendants, que l'on ne peut d'ailleurs augmenter; donc $12+p=13$ et p *est égal à l'unité* (¹). La biquadratique obtenue est bien base d'un faisceau orthogonal : nous l'avions vérifié, au paragraphe précédent, par le calcul, et nous avons, au début de ce paragraphe, vérifié géométriquement que le parallélisme des droites D_1, D_2, D_3 entraîne bien cette propriété. La courbe générale dont il s'agit dans ce paragraphe est celle pour lesquelles le *le plan diamétral principal, conjugué de la direction* Op, *varie d'une quadrique à l'autre et où l'axe parallèle à* Op *varie aussi.*

Étudions de plus près une telle courbe; sur le plan de l'infini, la conique dégénérée $(m_1 m_3 p, m_2 m_4 p)$ fournit un paraboloïde équilatère (qui pourra, en particularisant la courbe, se réduire à un cylindre hyperbolique équilatère ou à deux plans rectangulaires); la conique dégénérée $(m_1 m_2, m_3 m_4)$ fournit un paraboloïde de révolution (accidentellement un cylindre de révolution), de même $(m_1 m_4, m_2 m_3)$; donc nous pouvons définir notre courbe actuelle comme l'*intersection de deux paraboloïdes de révolution quelconques*, et nous retrouvons bien les 12 paramètres annoncés. On peut prendre les équations canoniques d'une telle courbe sous la forme

$$(2)\quad \begin{cases} (x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+(z+h)^2+2a\,(x\sin\alpha-y\cos\alpha)+b=0, \\ (x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2+(z-h)^2+2a'(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+b'=0, \end{cases}$$

qui, en dehors des 6 paramètres généraux de déplacement, utilise 6 paramètres α, h, a, a', b, b' (on peut encore définir la courbe comme intersection de deux paraboloïdes, l'un de révolution, l'autre équilatère, dont les axes sont rectangulaires).

Une *particularisation* consiste à supposer que le *plan diamétral conjugué de* Op *est le même pour toutes les quadriques* (*autrement dit, que les axes des deux paraboloïdes de révolution, qui sont perpendiculaires à la direction* Op *sont concourants*); dans les équations (2) on

(¹) En réalité, pour être tout à fait rigoureux, il faudrait dire : la biquadratique $\mathcal{B}$ représentée par les équations (1) dépend de $12-p'$ paramètres, quand on l'étudie seule; jointe à l'ensemble d'un système de trois directrices associées, elle fait intervenir 13 paramètres; donc le système des directrices fait intervenir $(1+p')$ paramètres; or, nous verrons plus bas que le nombre $1+p'$ est égal à *un;* donc p' est nul.

ferait donc $h = 0$; dans les équations (1) on prend

$$m_1^2 h_1 = m_2^2 h_2 = m_3^2 h_3;$$

cela prouve que pour toute réduction avec trois droites *réelles*, les trois droites sont *d'un même côté par rapport au plan de symétrie de la courbe;* la courbe dépend de 11 paramètres essentiels [dans la représentation (1), on a introduit deux relations entre m_1, m_2, m_3 parce que l'on a fixé la cote, à savoir *zéro*, du plan de symétrie, de sorte qu'il faut ajouter maintenant 3 paramètres de déplacement et non plus seulement 2]; *elle admet toujours* ∞^1 *représentations* A; on le voit en répétant le même raisonnement.

Une autre particularisation consiste à supposer que la *courbe a un axe de symétrie parallèle à* Op, autrement dit que les quadriques du faisceau ont le même axe *spécial de Hachette :* dans les équations (2) on fait $a = a' = 0$; dans les équations (1) on fait $p_1 = p_2 = p_3 = 0$. Les équations (2) représentent cette fois des cylindres de révolution *quelconques;* la courbe dépend de 10 paramètres; la représentation (1) fait intervenir explicitement 8 paramètres, au lieu de 11, puisque l'on a annulé trois quantités; mais d'autre part, puisque l'axe Oz a été pris en coïncidence avec l'axe de symétrie, il y a à ajouter 4 paramètres de déplacement, en rendant à l'axe de symétrie (perpendiculaire commune aux axes des deux cylindres) une position spatiale quelconque; *cela fait donc* 12 *paramètres pour le total de la courbe et de sa représentation* A; *on a donc cette fois* ∞^2 *représentations* A; *nous allons voir que nous trouvons en réalité quatre directrices.*

Nous allons obtenir le résultat synthétiquement : imaginons une quadrique orthogonale quelconque Q (8 paramètres), un couple associé D_1, D_2 relatif à Q (1 paramètre), un autre couple (D_3, D_4) (1 paramètre). En identifiant les deux formes d'équation de Q fournies par D_1 et D_2 ou D_3 et D_4, on a une identité

$$a D_1^2 + b D_2^2 + c D_3^2 + d D_4^2 \equiv 0. \tag{3}$$

Choisissons quatre nombres homogènes α, β, γ, δ liés par la relation $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0$ (2 paramètres nouveaux); les équations

$$\frac{a D_1^2}{\alpha} = \frac{b D_2^2}{\beta} = \frac{c D_3^2}{\gamma} = \frac{d D_4^2}{\delta} \tag{4}$$

se réduisent à deux comme on le voit en additionnant terme à terme les rapports (4); nous avons retrouvé les courbes intersection de deux cylindres de révolution; cela tient à ce que les droites D_1, D_2, D_3, D_4 sont parallèles à un même plan et perpendiculaires à une même droite A (axe spécial de Q) de sorte que A est axe de symétrie de la courbe. Réciproquement, il est bien clair que trois équations

$$m_1^2 D_1^2 = m_2^2 D_2^2 = m_3^2 D_3^2 = m_4^2 D_4^2$$

ne peuvent se réduire à deux que s'il existe une certaine relation de la forme (3) et nous retrouvons le procédé indiqué. Nous avions déjà obtenu, au paragraphe précédent, ces courbes à axe de symétrie : cela nous avait permis de prévoir une grande partie des résultats de ce paragraphe et de trouver les méthodes les plus simples de démonstration.

Il y a lieu de signaler une particularisation des courbes que nous étudions depuis le début de ce paragraphe. La courbe *générale* de cette espèce est déterminée comme *intersection de deux paraboloïdes de révolution : elle dépend de* 12 *paramètres*. Nous allons obtenir comme première particularisation une courbe *à* 11 *paramètres* que nous pourrons regarder comme *intersection de deux paraboloïdes de révolution infiniment voisins*. Pour cela imaginons une famille de paraboloïdes de révolution à un paramètre, représentés par l'équation

$$(5)\qquad (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2,$$

où x_0, y_0, z_0, α, β, γ, δ sont des fonctions d'un paramètre t, et vérifient l'identité $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$; les paraboloïdes t_1, t_2 donnent par leur intersection une courbe de la famille indiquée; si t_2 tend vers t_1, on a une dégénérescence de la courbe générale. Cela revient à associer à l'équation (5) l'équation dérivée en t

$$(6)\qquad \begin{aligned}&(x-x_0)x'_0+(y-y_0)y'_0+(z-z_0)z'_0\\&\qquad+(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')=0.\end{aligned}$$

Finalement, puisque nous donnons ensuite à t une valeur numérique, nous obtenons une courbe unique définie par les valeurs numériques des paramètres x_0, y_0, z_0, α, β, γ, δ; x'_0, y'_0, z'_0, α', β', γ', δ' assujettis simplement aux relations $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=1$, $\alpha\alpha'+\beta\beta'+\gamma\gamma'=0$; d'autre part x'_0, y'_0, z'_0, α', β', γ', δ' entrent d'une façon homogène, de sorte qu'il n'y a que 11 paramètres. *L'équation* (6) *représente un paraboloïde hyperbolique équilatère, dont les plans directeurs sont respectivement perpendiculaire et parallèle à l'axe du paraboloïde* (5) *:* un tel paraboloïde, *a priori,* ne dépend que de 5 paramètres et il importe de voir qu'effectivement le paraboloïde (6) dépend bien de 5 paramètres [autrement dit qu'il n'y a pas de réduction entre les paramètres explicités x'_0, y'_0, z'_0, α', β', γ', δ', liés par $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$, et homogènes]. On le voit, par changement d'axes, écrivant

$$(x_0 = y_0 = z_0 = 0,\ \alpha = 1,\ \beta = \gamma = 0),$$

$$(5') \qquad x^2 + y^2 + z^2 = (x + \delta)^2,$$

$$(6') \qquad xx'_0 + yy'_0 + zz'_0 + (x + \delta)(\beta' y + \gamma' z + \delta') = 0.$$

L'équation (6′) peut s'écrire, en faisant $\beta' = 1$,

$$(6'') \qquad x(y + \gamma' z) + x(x'_0 + \delta') + y(y'_0 + \delta) + z(z'_0 + \delta\gamma') + \delta\delta' = 0$$

et l'on voit que l'on peut avoir ainsi le paraboloïde équilatère le plus général satisfaisant aux conditions énoncées. En étudiant les points à l'infini de cette biquadratique spéciale, il suffira donc de considérer la variation du quadrilatère $m_1 m_2 m_3 m_4$ quand, les tangentes opposées $\mathrm{T}(m_1 m_2)$ et $\mathrm{T}'(m_3 m_4)$ restent fixes (elles définissent les plans directeurs de l'un des paraboloïdes de révolution), tandis que la tangente $m_1 m_4$ tend à se confondre avec $m_1 m_2$, et que de même la tangente $m_3 m_2$ se confond avec la tangente $m_3 m_4$; de la sorte m_1 tend vers le point de contact de T avec l'ombilicale, m_4 tend vers le point TT′; de même m_3 tend vers le point de contact de γ et T′ et m_2 tend aussi vers le point TT′; *la biquadratique obtenue a deux directions infinies isotropes simples et une direction infinie double perpendiculaire aux deux précédentes; du moment qu'il s'agit de deux paraboloïdes de révolution confondus et non de deux cylindres, cette direction infinie double donne un point simple à l'infini, avec branche parabolique;* on s'en assure aisément par l'exemple numérique

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x + 1)^2, \qquad z + (x + 1)y = 0.$$

Ici cette courbe a un axe de symétrie Ox, non parallèle à la direction *spéciale* Oz d'axe commune à toutes les quadriques du faisceau déterminé par la courbe; la biquadratique en jeu peut être représentée par les équations

$$y^2 = \frac{1+2x}{2+2x+x^2}, \qquad z = -(x+1)y$$

qui mettent en évidence le genre de la courbe, à savoir *un*. *La courbe admet* ∞^1 *générations à trois directrices.*

De même, pour les courbes à 10 paramètres, *intersection de deux cylindres de révolution*, on a une dégénérescence par le même procédé. Au lieu de l'équation (5) on écrit l'équation d'un cylindre de révolution

$$(7) \quad x^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2 = [\alpha x + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)]^2 + R^2$$

avec $\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$. On associe à cette équation l'équation

$$(8) \quad \begin{aligned} &(y-y_0)y'_0 + (z-z_0)z'_0 + [\alpha x + \beta(y-y_0) + \gamma(z-z_0)] \\ &\quad [\alpha' x + \beta'(y-y_0) + \gamma'(z-z_0) - \beta y'_0 - \gamma z'_0] + RR' = 0 \end{aligned}$$

qui fait intervenir les constantes homogènes nouvelles y'_0, z'_0, α', β', γ', R' et nous supposerons $\alpha\alpha' + \beta\beta' + \gamma\gamma' = 0$; la nouvelle équation représente un paraboloïde hyperbolique équilatère dont les plans directeurs sont, l'un parallèle à l'axe du cylindre, l'autre perpendiculaire; de plus l'axe du paraboloïde équilatère *rencontre* (*à angle droit*) l'axe du cylindre, de sorte que la *biquadratique obtenue continue à avoir un axe de symétrie qui est celui du paraboloïde équilatère; la courbe admet cette fois un point double à l'infini sur l'axe du cylindre, et les deux directions infinies complémentaires sont isotropes et perpendiculaires à la direction infinie double; nous avons une courbe à* 9 *paramètres continuant à avoir* ∞^2 *représentations à quatre directrices.*

Pour justifier le résultat en jeu, il suffit de remarquer que le cylindre (7) peut, par choix convenable du trièdre de coordonnées, recevoir pour équation

$$x^2 + y^2 + z^2 = (x)^2 + R^2;$$

on a alors

$$y_0 = z_0 = 0, \qquad \alpha = 1, \qquad \beta = 0, \qquad \gamma = 0.$$

L'équation (8) prend la forme

$$yy'_0 + zz'_0 + x(\beta' y + \gamma' z) + RR' = 0;$$

une rotation autour de Oz réduit encore à

$$yy'_0 + zz'_0 + xy + RR' = 0,$$

équation que l'on peut écrire

$$(x + y'_0)y + zz'_0 + RR' = 0$$

et un transport des axes parallèlement à Ox réduit les équations de la courbe à la forme, qui met les résultats en évidence :

$$(9) \qquad y^2 + z^2 = R^2, \qquad xy + zz'_0 + RR' = 0.$$

Ces considérations résultent aussi, si l'on veut, d'un passage à la limite quand on considère les cylindres de révolution dont l'un se rapproche indéfiniment du premier. Mais elles nous mettent en garde contre les *biquadratiques intersection d'un cylindre de révolution et d'un paraboloïde équilatère dont les axes sont perpendiculaires en direction, mais non sécants; de plus l'un des plans directeurs du paraboloïde est supposé perpendiculaire à l'axe du cylindre.* Ces biquadratiques dépendent de 10 paramètres, mais non de 9 comme les précédentes; *leurs points à l'infini offrent les mêmes caractères que pour les courbes précédentes et elles n'admettent aucune génération à trois droites* : nous le constaterons sur un exemple simple.

Il y a lieu maintenant de citer un cas singulier au point de vue de cette étude, fourni par *les biquadratiques dont deux directions infinies* Om_1, Om_2 *sont isotropes, une troisième* Om_3 *perpendiculaire aux deux premières et la quatrième* Om_4 *quelconque* (pour les courbes intersections de deux paraboloïdes de révolution confondus ou de deux cylindres de révolution confondus les directions Om_3 et Om_4 étaient de plus confondues). Sur le plan de l'infini, les coniques q du faisceau $m_1 m_2 m_3 m_4$ admettent chacune ∞^1 quadrilatères de Poncelet inscrits dans cette conique et circonscrits à l'ombilicale γ : c'est le critérium bien connu signalé par Halphen, puisque les tangentes à γ en m_1 et m_2 concourent en m_3 sur la conique q; le point p, qui a servi au paragraphe 3 (propriété A′), pôle double de q et de γ, et point d'intersection des diagonales des quadrilatères de Poncelet relatifs à q et γ, est l'intersection de la droite $m_1 m_2$ avec la tangente à q au point m_3; du moment que m_4 n'est plus confondu avec m_3, ce point p

varie avec la conique q du faisceau; si donc nous essayons la construction indiquée au paragraphe 3 pour trois coniques q_1, q_2, q_3 du faisceau, la droite p_2p_3 n'est autre que m_1m_2 et le pôle ω_1 de p_2p_3 vis-à-vis de γ n'est autre que m_3; les tangentes issues de m_3 à γ sont m_3m_1 et m_3m_2, mais le quadrilatère de Poncelet qu'elles fournissent pour q_2 est *replié*, de sorte que notre théorie fondée sur la réduction de q_2 à la forme $m_1^2\xi\xi' - m_3^2\zeta\zeta' = 0$ est ici en défaut, car le couple (ξ, ξ') et le couple $(\zeta\zeta')$ devraient être distincts et non pas confondus; *les biquadratiques en question n'ont donc pas de génération de l'espèce indiquée* (¹).

Il y a lieu de résumer cette discussion :

a. Quand les quatre points à l'infini de la biquadratique $\mathcal{B}$ sont distincts et répartis aux sommets d'un quadrilatère circonscrit à l'ombilicale, la courbe est l'intersection de deux paraboloïdes de révolution (pouvant être l'un ou tous deux réduits à un cylindre de révolution) distincts; elle admet ∞^1 générations à trois directrices parallèles au plan parallèle aux axes des deux paraboloïdes; la courbe dépend de 12 paramètres. Si les deux paraboloïdes sont tous deux dégénérés en cylindres de révolution, la courbe admet pour axe la perpendiculaire commune aux axes des deux cylindres et admet ∞^2 générations à quatre directrices rencontrant toutes, et à angle droit, l'axe de symétrie de la courbe.

b. Si deux directions infinies de la courbe $\mathcal{B}$ sont isotropes, une troisième étant perpendiculaire aux deux précédentes, et la quatrième étant quelconque, la courbe n'admet aucune des générations étudiées ici.

c. Si deux directions infinies de la courbe $\mathcal{B}$ sont isotropes et si les deux autres directions infinies sont confondues avec la direction perpendiculaire aux précédentes, le point à l'infini sur cette direction double étant simple, la courbe peut être considérée comme l'intersection de deux

---

(¹) Un cas particulier de l'hypothèse qui vient d'être étudié est celui-ci : le point m_4, au lieu d'être absolument quelconque, est situé sur la droite m_1m_2, de sorte que nous avons un faisceau de paraboloïdes équilatères ayant un plan directeur constant en direction (de trace $m_1m_2m_4$ sur le plan de l'infini). La biquadratique de base du faisceau se réduit à une cubique gauche, complétée par la droite $m_1m_2m_4$ et n'admet aucune génération.

paraboloïdes de révolution confondus et admet ∞^1 *générations à trois droites.*

d. Si les directions infinies offrent la même disposition que précédemment, et de plus, si le point relatif à la direction infinie double est lui-même double, il faudra distinguer deux cas suivant que la courbe ne peut pas ou peut être considérée comme l'intersection de deux cylindres de révolution confondus; dans la première hypothèse, elle n'admet aucune génération de l'espèce étudiée ici; dans le second cas, elle admet un axe de symétrie et ∞^2 *générations à quatre directrices;* il y a un paraboloïde équilatère qui contient la courbe, et suivant *que l'axe de ce paraboloïde ne coupe pas ou coupe l'axe du cylindre de révolution contenant la courbe, la courbe n'est pas ou est l'intersection de deux cylindres de révolution confondus.*

Pour être tout à fait complet, il y a lieu de vérifier par un calcul (convenablement dirigé) nos conclusions.

Songeons aux courbes intersection de deux paraboloïdes de révolution; nous pouvons identifier l'équation

$$(10)\qquad \begin{aligned} &m_1^2[(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p_1)^2] \\ &\quad - m_2^2[(z+h_2)^2+(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2+p_2)^2]=0, \end{aligned}$$

avec l'équation de la quadrique générale du faisceau

$$(11)\qquad \begin{aligned} 0 &= (x\cos\alpha+y\sin\alpha)^2+(z+h)^2+2a(x\sin\alpha-y\cos\alpha) \\ &\quad + b+\lambda[(x\cos\alpha-y\sin\alpha)^2+(z-h)^2+2a'(x\sin\alpha+y\cos\alpha)+b']. \end{aligned}$$

Les valeurs 0 et ∞ de λ donnent des paraboloïdes de révolution dégénérant l'un ou l'autre en cylindre si a ou a' est nul.

Nous pouvons, sans inconvénient, supposer les coefficients homologues *égaux*, ce qui revient à supprimer l'homogénéité pour m_1 et m_2. Nous avons *sept* équations (et non *huit*, car l'égalité des coefficients de x^2 et z^2 entraîne l'égalité aussi pour y^2), équations liant les *neuf* inconnues $m_1, m_2, h_1, h_2, p_1, p_2, \alpha_1, \alpha_2, \lambda$; nous savons que nous avons effectivement *deux* arbitraires, par exemple le choix de λ qui fixe la quadrique du faisceau, et ensuite un paramètre pour le choix du couple de focales associées. Or on constate aisément qu'on peut également prendre comme arbitraires α_1, α_2 [1], de sorte que l'on aura en particulier

$$p_1 = f(\alpha_1, \alpha_2), \qquad h_1 = \varphi(\alpha_1, \alpha_2), \tag{12}$$

où f et φ sont certaines expressions algébriques, mais non nécessairement rationnelles, par rapport à $\operatorname{tang}\alpha_1$, $\operatorname{tang}\alpha_2$. Or la réduction à trois droites exige que l'on ait aussi

$$p_1 = f(\alpha_1, \alpha_3), \qquad h_1 = \varphi(\alpha_1, \alpha_3). \tag{13}$$

Les deux égalités

$$\frac{f(\alpha_1, \alpha_3) - f(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} = 0, \qquad \frac{\varphi(\alpha_1, \alpha_3) - \varphi(\alpha_1, \alpha_2)}{\alpha_3 - \alpha_2} = 0 \tag{14}$$

donnent α_2 et α_3 en fonction de α_1; les deux relations (14) peuvent d'ailleurs être mises sous forme symétrique (et rationnelle) et $\operatorname{tang}\alpha_1$, $\operatorname{tang}\alpha_2$, $\operatorname{tang}\alpha_3$; on a ainsi les trois droites D_1, D_2, D_3.

L'identification des équations (10) et (11) nous fournit les équations suivantes, fournies par les termes en z^2, x^2, xy :

$$m_1^2 - m_2^2 = 1 + \lambda, \tag{15}$$

$$m_1^2 \cos^2\alpha_1 - m_2^2 \cos^2\alpha_2 = (1 + \lambda)\cos^2\alpha, \tag{16}$$

$$m_1^2 \cos\alpha_1 \sin\alpha_1 - m_2^2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_2 = (1 - \lambda)\cos\alpha \sin\alpha. \tag{17}$$

Les deux équations (16), (17) donnent

$$\left\{\begin{aligned} m_1^2 \cos\alpha_1 &= \frac{\cos\alpha[\sin(\alpha_2 - \alpha) + \lambda \sin(\alpha_2 + \alpha)]}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}, \\ m_2^2 \cos\alpha_2 &= \frac{\cos\alpha[\sin(\alpha_1 - \alpha) + \lambda \sin(\alpha_1 + \alpha)]}{\sin(\alpha_2 - \alpha_1)}. \end{aligned}\right. \tag{18}$$

En portant dans (15) on a une équation en λ, du premier degré, qui fournit, en posant

$$\operatorname{tang}\alpha = t, \qquad \operatorname{tang}\alpha_1 = t_1, \qquad \operatorname{tang}\alpha_2 = t_2, \qquad \operatorname{tang}\alpha_3 = t_3 \tag{19}$$

la valeur

$$\lambda = \frac{-(t - t_1)(t - t_2)}{(t + t_1)(t + t_2)}. \tag{20}$$

---

[1] Si l'une des quantités a ou a' est nulle, l'autre étant différente de zéro, α_1, α_2, α_3 ont des valeurs *fixes;* nous verrons plus bas comment la question s'achève dans ce cas.

Les termes en x et y donnent ensuite

$$(21)\qquad \left\{\begin{array}{l}(m_1^2 p_1)\cos\alpha_1 - (m_2^2 p_2)\cos\alpha_2 = \sin\alpha(\quad a + a'\lambda),\\ (m_1^2 p_1)\sin\alpha_1 - (m_2^2 p_2)\sin\alpha_2 = \cos\alpha(-a + a'\lambda).\end{array}\right.$$

On en déduit les valeurs de $m_1^2 p_1$, $m_2^2 p_2$ et, tenant compte de (18), on obtient

$$(22)\quad \frac{p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{a\cos(\alpha_2 - \alpha) - a'\lambda\cos(\alpha_1 + \alpha)}{\cos\alpha[\sin(\alpha_2 - \alpha) + \lambda\sin(\alpha_2 + \alpha)]} = \frac{a(1 + t_2 t) - a'\lambda(1 - t_2 t)}{\cos[t_2 - t + \lambda(t_2 + t)]}.$$

En remplaçant λ par sa valeur, on trouve

$$(22')\quad \frac{p_1}{\cos\alpha_1} = \frac{1}{2\sin\alpha}\cdot\frac{a(1 + tt_2)(t + t_1)(t + t_2) + a'(t - t_1)(t - t_2)(1 - tt_2)}{t_2^2 - t^2}.$$

En appliquant la méthode indiquée, on doit écrire

$$a(t + t_1)\left(\frac{1 + tt_2}{t - t_2} - \frac{1 + tt_3}{t - t_3}\right) + a'(t - t_1)\left(\frac{1 - tt_2}{t + t_2} - \frac{1 - tt_3}{t + t_3}\right) = 0,$$

ce qui se réduit aussitôt, en supprimant le facteur $(t_3 - t_2)$, à

$$(23)\qquad a(t + t_1)(t + t_2)(t + t_3) - a'(t - t_1)(t - t_2)(t - t_3) = 0.$$

Cette relation est précisément symétrique en t_1, t_2, t_3. En remplaçant, dans la valeur de $\frac{p_1}{\cos\alpha_1}$ fournie par (22'), a' par exemple en fonction de a au moyen de (23), on trouve

$$(24)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{p_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{-a(t + t_1)(1 - t_2 t_3)}{\cos\alpha(t - t_2)(t - t_3)},\\[2ex] \dfrac{p_2}{\cos\alpha_2} = \dfrac{-a(t + t_2)(1 - t_3 t_1)}{\cos\alpha(t - t_3)(t - t_1)},\\[2ex] \dfrac{p_3}{\cos\alpha_3} = \dfrac{-a(t + t_3)(1 - t_1 t_2)}{\cos\alpha(t - t_1)(t - t_2)}.\end{array}\right.$$

On pourrait d'ailleurs écrire ces équations sous la forme équivalente

$$(25)\qquad \left\{\begin{array}{l}\dfrac{p_1}{\cos\alpha_1} = \dfrac{-a'(t - t_1)(1 - t_2 t_3)}{\cos\alpha(t + t_2)(t + t_3)},\\[2ex] \dfrac{p_2}{\cos\alpha_2} = \dfrac{-a'(t - t_2)(1 - t_3 t_1)}{\cos\alpha(t + t_3)(t + t_1)},\\[2ex] \dfrac{p_3}{\cos\alpha_3} = \dfrac{-a'(t - t_3)(1 - t_1 t_2)}{\cos\alpha(t + t_1)(t + t_2)}.\end{array}\right.$$

Il y aurait ensuite à résoudre les équations relatives au terme en z et au terme constant, pour avoir h_1 et h_2,

$$m_1^2 h_1 - m_2^2 h_2 = h(1-\lambda), \tag{26}$$

$$m_1^2 h_1^2 - m_2^2 h_2^2 + m_1^2 p_1^2 - m_2^2 p_2^2 = h^2(1+\lambda) + b + \lambda b', \tag{27}$$

et en exprimant que h_1 reste le même quand t_2 est remplacé par t_3, on aurait la nouvelle relation en t_1, t_2, t_3, qui prend la forme symétrique si l'on profite de (23) pour ne garder que a ou a'. Le calcul est assez long; avant de le terminer faisons la remarque suivante :

L'intérêt du calcul réside surtout en ce fait qu'il subsiste *à la limite, même si a ou a' est nul.* Supposons $a = 0$ de sorte que le *premier paraboloïde de révolution est dégénéré en cylindre de révolution;* l'équation (23) montre que t_1, par exemple, est égal à t; *la droite* D_1 *est donc parallèle aux génératrices du cylindre,* et la quantité λ est nulle, de sorte que la quadrique (11) est le cylindre de révolution, donc *la droite* D_2 *est aussi parallèle aux génératrices du cylindre;* la droite D_3, associée à D_1, forme un couple focal relatif à une certaine quadrique du faisceau, et l'on voit aussitôt que D_3 est parallèle à l'axe du paraboloïde de révolution effectif qui reste; c'est évident si l'on remarque que les sections q par le plan de l'infini des quadriques du faisceau sont circonscrites au quadrilatère $m_1 m_2 m_3 m_4$: les diagonales $m_1 m_3$ et $m_2 m_4$ donnent, par leur point p commun, la direction de l'axe de Hachette commune à toutes les quadriques; les côtés opposés $m_1 m_2$, $m_3 m_4$ fournissent, par leur intersection ω_1, la direction d'axe du cylindre de révolution, et les côtés $m_1 m_4$, $m_2 m_3$, par leur intersection ω_2, la direction d'axe du paraboloïde effectif; or le triangle $p\omega_1\omega_2$ est conjugué par rapport à toutes les coniques q, donc fournit les directions d'un trièdre conjugué relatif à tous les cônes asymptotiques; ici t_1 et t_2 sont égaux à t, t_3 est constant, égal à $(-t)$. D'ailleurs tous ces résultats sont faciles à obtenir directement : considérons en effet une biquadratique $\mathcal{B}$ intersection d'un paraboloïde effectif de révolution et d'un cylindre de révolution (dont l'axe n'est pas parallèle à celui du paraboloïde); la direction P perpendiculaire aux axes de révolution du paraboloïde et du cylindre est une direction de Hachette commune à toutes les quadriques du faisceau déterminé par $\mathcal{B}$; *si nous considérons une quadrique arbitraire* Q_2 *de ce* *faisceau, elle admet un couple focal* $D_1 D_3$ *où* D_1 *est parallèle à l'axe du cylindre et* D_3 *à l'axe du paraboloïde; alors la droite* D_2, *conjuguée de* D_1 *par rapport au cylindre, constitue avec* D_1 *un couple focal* (D_1, D_2) *pour ce cylindre (qui joue le rôle de* Q_3) *et nous avons ainsi obtenu des équations s'appliquant à* $\mathcal{B}$:

$$m_1^2 D_1^2 = m_2^2 D_2^2 = m_3^2 D_3^2. \tag{28}$$

Nous avons donc retrouvé les ∞^1 générations annoncées.

Inversement, en écrivant *a priori* les équations (28) où D_1 et D_2 sont deux droites parallèles, nous faisons intervenir : 4 paramètres pour D_1, 2 pour D_2, 4 pour D_3 et 2 pour les rapports $m_1 : m_2 : m_3$, soit un total de 12 paramètres; c'est une vérification, car la courbe $\mathcal{B}$, *seule*, dépend de 11 paramètres, et, *une fois* $\mathcal{B}$ *donnée*, la représentation fait intervenir un nouveau paramètre.

Revenons maintenant aux courbes d'intersection de deux paraboloïdes de révolution effectifs; les formules (18) et (20) permettent d'écrire

$$\left\{\begin{aligned} m_1^2 &= \frac{\cos^2\alpha}{\cos^2\alpha_1}\,\frac{t_2 - t + \lambda(t_2 + t)}{t_2 - t_1} = \frac{2\cos^2\alpha(t_2^2 - t^2)t}{\cos^2\alpha_1(t_2 - t_1)(t + t_1)(t + t_2)},\\ m_2^2 &= \frac{2\cos^2\alpha(t_1^2 - t^2)t}{\cos^2\alpha_2(t_2 - t_1)(t + t_1)(t + t_2)}, \qquad 1 - \lambda = \frac{2(t^2 + t_1 t_2)}{(t + t_1)(t + t_2)}. \end{aligned}\right. \tag{18'}$$

L'équation (26) se ramène alors aisément à la forme

$$\frac{1 + t_1^2}{t^2 - t_1^2}h_1 - \frac{t_1(1 + t^2)h}{t(t^2 - t_1^2)} = \frac{1 + t_2^2}{t^2 - t_2^2}h_2 - \frac{t_2(1 + t^2)h}{t(t^2 - t_2^2)} = \frac{1 + t_3^2}{t^2 - t_3^2}h_3 - \frac{t_3(1 + t^2)h}{t(t^2 - t_3^2)} \tag{29}$$

(où le troisième membre est écrit en vertu de la symétrie manifestée par les deux premiers). L'équation (27) s'écrit ensuite

$$\begin{aligned} &\frac{(1 + t_1^2)th_1^2}{(1 + t^2)(t^2 - t_1^2)} - \frac{(1 + t_2^2)th_2^2}{(1 + t^2)(t^2 - t_2^2)}\\ &\qquad + \frac{ta^2(t + t_1)(1 - t_2 t_3)^2}{(t - t_1)(t - t_2)^2(t - t_3)^2} - \frac{ta^2(t + t_2)(1 - t_1 t_3)^2}{(t - t_1)^2(t - t_2)(t - t_3)^2}\\ &= \frac{t(t_1^2 - t_2^2)h^2}{(t^2 - t_1^2)(t^2 - t_2^2)} + \frac{b(t_1 - t_2)}{(t - t_1)(t - t_2)} - \frac{b'(t_1 - t_2)}{2(t + t_1)(t + t_2)}. \end{aligned}$$

Nous pouvons, puisque nous avons écarté désormais le cas où a est nul, remplacer $\frac{ta^2(t + t_1)(1 - t_2 t_3)^2}{(t - t_1)(t - t_2)^2(t - t_3)^2}$ par $\frac{taa'(1 - t_2 t_3)^2}{(t^2 - t_2^2)(t^2 - t_3^2)}$ et par suite écrire

$$
(30)\left\{\begin{aligned}
&\frac{t(1+t_1^2)}{(1+t^2)(t^2-t_1^2)}h_1^2+\frac{taa'(1-t_2t_3)^2}{(t^2-t_2^2)(t^2-t_3^2)}-\frac{th^2}{t^2-t_1^2}-\frac{b}{2}\frac{1}{t-t_1}-\frac{b'}{2}\frac{1}{t+t_1}\\
&=\frac{t(1+t_2^2)}{(1+t^2)(t^2-t_2^2)}h_2^2+\frac{taa'(1-t_3t_1)^2}{(t^2-t_3^2)(t^2-t_1^2)}-\frac{th^2}{t^2-t_2^2}-\frac{b}{2}\frac{1}{t-t_2}-\frac{b'}{2}\frac{1}{t+t_2}\\
&=\frac{t(1+t_3^2)}{(1+t^2)(t^2-t_3^2)}h_3^2+\frac{taa'(1-t_1t_2)^2}{(t^2-t_1^2)(t^2-t_2^2)}-\frac{th^2}{t^2-t_3^2}-\frac{b}{2}\frac{1}{t-t_3}-\frac{b'}{2}\frac{1}{t+t_3}
\end{aligned}\right.
$$

(le dernier membre est encore écrit en vertu de la symétrie manifestée par les deux premiers).

Si donc nous introduisons une inconnue auxiliaire ρ égale à la valeur commune des expressions (29), nous obtenons finalement les équations, au nombre de deux,

$$
(31)\qquad A_1\rho^2+B_1\rho+C_1=A_2\rho^2+B_2\rho+C_2=A_3\rho^2+B_3\rho+C_3,
$$

où le calcul fait pour (A_1, B_1, C_1) au moyen de t_1, t_2, t_3 fournit (A_2, B_2, C_2), puis (A_3, B_3, C_3) en permutant circulairement t_1, t_2, t_3 sans toucher à t. L'élimination de ρ entre (31) est facile; pour obtenir le résultat d'une façon symétrique, il suffit de représenter par σ la valeur commune des expressions (31), de façon à avoir *trois* équations en ρ et σ, que l'on peut considérer comme trois équations *linéaires* en ρ^2, ρ, σ; écrivant ensuite que la valeur trouvée pour ρ^2 est le carré de celle trouvée pour ρ, on a le résultat

$$
(32)\left\{\begin{aligned}
&\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & 1\\ A_2 & C_2 & 1\\ A_3 & C_3 & 1\end{vmatrix}^2=\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 1\\ A_2 & B_2 & 1\\ A_3 & B_3 & 1\end{vmatrix}\times\begin{vmatrix} B_1 & C_1 & 1\\ B_2 & C_2 & 1\\ B_3 & C_3 & 1\end{vmatrix},\\
&\rho=\frac{-\begin{vmatrix} A_1 & C_1 & 1\\ A_2 & C_2 & 1\\ A_3 & C_3 & 1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & 1\\ A_2 & B_2 & 1\\ A_3 & B_3 & 1\end{vmatrix}}.
\end{aligned}\right.
$$

Or chacun des déterminants figurant dans (32) est égal au produit de $(t_2-t_3)(t_3-t_2)(t_1-t_2)$ par une fonction symétrique de t_1, t_2, t_3, de sorte que nous avons trouvé les deux relations, symétriques en (t_1, t_2, t_3), qui lient les trois paramètres t_1, t_2, t_3 et permettent de prendre l'un d'eux arbitrairement, de façon à obtenir les ∞^1 représentations annoncées pour la courbe. Une assez grosse simplification a lieu si l'on suppose $h = 0$, de sorte que les axes des deux paraboloïdes sont sécants et que la courbe a un plan de symétrie; c'est le cas que nous avions déjà trouvé directement; les fonctions B_1, B_2, B_3 sont alors nulles; les équations (31) sont du premier degré en ρ^2 et la condition devient

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} A_1 & C_1 & 1 \\ A_2 & C_2 & 1 \\ A_3 & C_3 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

La surface engendrée par les directrices D_1, D_2, D_3 est une surface réglée à plan directeur, sur laquelle on peut grouper les génératrices par systèmes de trois directrices associées. Il est inutile d'expliciter davantage les calculs, bien que cela nous donnerait le degré de la surface.

Au cas où a, a' sont nulles toutes deux, le calcul fait pour m_1, m_2, λ s'applique [formules (18), (20) et (18')], les quantités p_1, p_2 ou p_3 sont nulles et il suffit d'écrire les équations déjà envisagées

$$(26) \qquad m_1^2 h_1 - m_2^2 h_2 = 1 - \lambda,$$

$$(27) \qquad m_1^2 h_1^2 - m_2^2 h_2^2 = h^2(1+\lambda) + b + \lambda b',$$

de sorte que nous retrouvons purement et simplement les équations (29), et ensuite les équations (30) où l'on fait simplement $aa' = 0$. On trouve donc uniquement l'équation (32), ou (33) suivant le cas [avec $a = a' = 0$]. On constate alors que t_1 et t_2, par exemple, peuvent être choisies arbitrairement; t_3 est fournie par une équation algébrique, dont les racines s'associent par couples t_3, t_4 se correspondant involutivement de sorte que t_1, t_2, t_3, t_4 donnent un système de quatre directrices associées.

Naturellement, les calculs analogues s'appliquent aux dégénérescences signalées plus haut, telles que la courbe d'intersection de deux paraboloïdes confondus. Prenons par exemple la biquadratique d'équations

$$(34) \qquad y^2 + z^2 + 2x = 0, \qquad xy + z = 0$$

[avec les notations précédemment employées, on a le paraboloïde

$$(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)^2$$

et l'équation dérivée

$$(x-x_0)x'_0+(y-y_0)y'_0+(z-z_0)z'_0$$
$$+(\alpha x+\beta y+\gamma z+\delta)(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z+\delta')=0;$$

on prend

$$x_0=\delta=-\frac{1}{2}, \qquad \alpha=1, \qquad y'_0=\frac{1}{2}, \qquad z'_0=1, \qquad \beta'=1;$$
$$y_0=z_0=\beta=\gamma=x'_0=\alpha'=\gamma'=\delta'=0\Big].$$

On écrit

$$m_1^2[(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1+p_1)^2]$$
$$-m_2^2[(z+h_2)^2+(x\cos\alpha_2-y\sin\alpha_2+p_2)^2]$$
$$\equiv y^2+z^2+2\lambda xy+2x+2\lambda z.$$

Les termes en z^2, x^2, xy donnent

$$m_1^2=\frac{\cos^2\alpha_2}{\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1}, \qquad m_2^2=\frac{\cos^2\alpha_1}{\cos^2\alpha_2-\cos^2\alpha_1}, \qquad \lambda=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Les termes en x, y donnent, en posant comme plus haut,

$$t_1=\operatorname{tang}\alpha_1, \qquad t_2=\operatorname{tang}\alpha_2, \qquad t_3=\operatorname{tang}\alpha_3,$$
$$\frac{p_1}{\cos\alpha_1}=-t_1t_2-t_2^2, \qquad \frac{p_2}{\cos\alpha_2}=-t_1t_2-t_1^2.$$

On aurait de même

$$\frac{p_1}{\cos\alpha_1}=-t_1t_3-t_3^2,$$

ce qui, par comparaison, fournit $t_1+t_2+t_3=0$ et finalement

$$(35) \qquad \frac{p_1}{\cos\alpha_1}=t_2t_3, \qquad \frac{p_2}{\cos\alpha_2}=t_3t_1, \qquad \frac{p_3}{\cos\alpha_3}=t_1t_2.$$

Les termes en z permettent d'écrire, avec l'inconnue auxiliaire ρ,

$$(36) \qquad \frac{h_1}{\cos^2\alpha_1}-t_1=\frac{h_2}{\cos^2\alpha_2}-t_2=\frac{h_3}{\cos^2\alpha_3}+t_3=\rho.$$

Les termes constants fournissent

$$\frac{h_1^2}{\cos^2\alpha_1}+t_2^2t_3^2=\frac{h_2^2}{\cos^2\alpha_2}+t_3^2t_1^2=\frac{h_3^2}{\cos^2\alpha_3}+t_1^2t_2^2.$$

Avec l'inconnue ρ ceci devient

$$(t_1+\rho)^2\cos^2\alpha_1+t_2^2t_3^2=(t_2+\rho)^2\cos^2\alpha_2+t_3^2t_1^2$$

ou

$$\begin{aligned}\sin^2\alpha_1-\sin^2\alpha_2+\rho(\sin 2\alpha_1-\sin 2\alpha_2)&\\+\rho^2(\cos^2\alpha_1-\cos^2\alpha_2)+\operatorname{tang}^2\alpha_3(\operatorname{tang}^2\alpha_2-\operatorname{tang}^2\alpha_1)&=0\end{aligned}$$

ou

$$\sin(\alpha_1+\alpha_2)+2\rho\cos(\alpha_1+\alpha_2)-\rho^2\sin(\alpha_1+\alpha_2)-\operatorname{tang}^2\alpha_3\frac{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2}=0.$$

Nous écrirons donc

$$(37)\qquad\left\{\begin{aligned}&\rho^2-2\rho\cot(\alpha_1+\alpha_2)-1+t_3^2(1+t_1^2)(1+t_2^2)=0,\\&\rho^2-2\rho\cot(\alpha_1+\alpha_3)-1+t_2^2(1+t_1^2)(1+t_3^2)=0.\end{aligned}\right.$$

La soustraction donne, après quelques réductions,

$$\rho=\frac{(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2)}{2}=-\frac{t_1t_2t_3}{2}$$

et, en remplaçant ρ par cette valeur dans l'une des équations (37), on obtient

$$(38)\qquad\left\{\begin{aligned}&5t_1^2t_2^2t_3^2+4(t_2^2t_3^2+t_3^2t_1^2+t_1^2t_2^2)-4(t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)-4=0\\&\qquad\qquad(t_1+t_2+t_3=0).\end{aligned}\right.$$

On a ensuite

$$(39)\qquad\left\{\begin{aligned}&h_1=\frac{t_1}{1+t_1^2}\left(1-\frac{t_2t_3}{2}\right),\qquad h_2=\frac{t_2}{1+t_2^2}\left(1-\frac{t_3t_1}{2}\right),\\&\qquad\qquad h_3=\frac{t_3}{1+t_3^2}\left(1-\frac{t_1t_2}{2}\right);\\&p_1=t_2t_3\cos\alpha_1,\qquad p_2=t_3t_1\cos\alpha_2,\qquad p_3=t_1t_2\cos\alpha_3;\\&\qquad m_1^2\cos^2\alpha_1=m_2^2\cos^2\alpha_2=m_3^2\cos^2\alpha_3.\end{aligned}\right.$$

Il y a une infinité de systèmes *réels* de trois directrices D_1, D_2, D_3 associées; on peut, en effet, écrivant

$$t_1+t_2=s,\qquad t_1t_2=p,\qquad t_3=-s,$$

résoudre l'équation (38) par rapport à p,

$$p = \frac{2\left[1 + 2s^2 + \sqrt{5}(1+s^2)\sqrt{1-s^2}\right]}{5s^2+4}. \tag{40}$$

Nous prendrons $s = \cos\varphi$ et $\sqrt{1-s^2} = -\sin\varphi$, de sorte que l'équation (40) se simplifie et donne

$$p = \frac{2\left[1 - \sqrt{5}\sin\varphi + \sin^2\varphi\right]}{3 - \sqrt{5}\sin\varphi}. \tag{40'}$$

Pour la réalité de t_1 et t_2, il faut que l'on ait $s^2 - 4p > 0$; or, quand $\sin\varphi$ est compris entre $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$ et 1, p est négatif, de sorte que la condition est automatiquement réalisée; quand $\sin\varphi$ est compris entre -1 et $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$, p est positif et l'inégalité à résoudre équivaut à

$$-5 + 7\sqrt{5}\sin\varphi - 11\sin^2\varphi + \sqrt{5}\sin^3\varphi > 0$$

qui n'est jamais réalisée si $\sin\varphi$ est négatif; d'ailleurs elle s'écrit

$$(\sqrt{5}\sin\varphi - 1)(\sin\varphi - \sqrt{5})^2 > 0$$

et il suffit donc que l'on ait $\frac{1}{\sqrt{5}} < \sin\varphi < 1$.

Les équations de la droite D sont, après quelques réductions,

$$z = \frac{\cos\varphi(3 - \sqrt{5}\sin\varphi)}{5\cos^2\varphi + 4}, \qquad x - y\cos\varphi + \frac{2\left[1 - \sqrt{5}\sin\varphi + \sin^2\varphi\right]}{3 - \sqrt{5}\sin\varphi} = 0. \tag{41}$$

On voit donc que chaque plan horizontal fournit quatre génératrices de la surface lieu des directrices; d'autre part, à une valeur de s correspondent deux valeurs de p, de sorte que la droite à l'infini du plan horizontal est droite double de la surface étudiée, qui est donc de degré *six* (*ce résultat prouve d'ailleurs que, pour la courbe générale, intersection de deux paraboloïdes de révolution distincts, au lieu d'être confondus, le degré de la surface lieu des directrices est au moins égal à six*).

Prenons de même la courbe définie par l'intersection de deux cylindres de révolution confondus

$$(42)\qquad y^2+z^2=1,\qquad xy+z=0.$$

On écrit l'identité

$$m_1^2[(z+h_1)^2+(x\cos\alpha_1+y\sin\alpha_1)^2]-m_2^2[(z+h_2)^2+(x\cos\alpha_2+y\sin\alpha_2)^2]$$
$$\equiv y^2+z^2+2\lambda xy+2\lambda z-1.$$

On a, par les termes en x^2, y^2, xy,

$$m_1^2=\frac{\cos^2\alpha_2}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2)},\qquad m_2^2=\frac{\cos^2\alpha_1}{\sin(\alpha_1-\alpha_2)\sin(\alpha_1+\alpha_2)},$$
$$\lambda=\frac{\cos\alpha_1\cos\alpha_2}{\sin(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Les termes en z permettent d'écrire avec une inconnue auxiliaire

$$h_1=\cos^2\alpha_1[\rho+\operatorname{tang}\alpha_1],\qquad h_2=\cos^2\alpha_2[\rho+\operatorname{tang}\alpha_2],$$

et les termes constants fournissent pour ρ l'équation

$$(43)\qquad \rho^2-2\rho\cot(\alpha_1+\alpha_2)-1-\frac{1}{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_2}=0.$$

On doit y joindre

$$\rho^2-2\rho\cot(\alpha_1+\alpha_3)-1-\frac{1}{\cos^2\alpha_1\cos^2\alpha_3}=0.$$

La soustraction donne, en posant $t_i=\operatorname{tang}\alpha_i$,

$$(44)\qquad 2\rho=(t_2+t_3)(t_3+t_1)(t_1+t_2).$$

En portant dans (43) on trouve l'unique relation

$$(45)\quad (t_2+t_3)^2(t_3+t_1)^2(t_1+t_2)^2-4(t_1^2+t_2^2+t_3^2+t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2)-8=0.$$

Pour un choix arbitraire de t_1, t_2, on a donc quatre valeurs possibles de t_3 : ayant adopté l'une, on a un système de trois droites associées D_1, D_2, D_3; or si nous prenons comme inconnue $(t_3+t_1)(t_3+t_2)=T$, l'équation (45) devient

$$(45')\qquad T^2(t_1+t_2)^2-4[T+t_1^2+t_2^2]-8=0.$$

Quand t_1, t_2 sont données, l'équation (45′) fournit deux valeurs de T : adoptons l'une, de sorte que t_3 est fournie par l'équation du second degré

$$t_3^2+(t_1+t_2)t_3+t_1t_2-T=0$$

dont la somme des racines t_3 et t_4 est égale à $-(t_1+t_2)$; *la relation* $t_1+t_2+t_3+t_4=0$ *est symétrique* et, jointe à la relation (45), fournit le système des quatre directrices associées, ce qui est rendu évident en écrivant (44) sous la forme

$$2\rho=(t_1+t_2)\mathrm{T}. \tag{44'}$$

On a

$$\left\{\begin{aligned}
h_1&=\frac{-(t_1+t_2)(t_1+t_3)(t_1+t_4)+2t_1}{1+t_1^2},\\
h_2&=\frac{-(t_2+t_1)(t_2+t_3)(t_2+t_4)+2t_2}{1+t_2^2},\\
h_3&=\frac{-(t_3+t_1)(t_3+t_2)(t_3+t_4)+2t_3}{1+t_3^2},\\
h_4&=\frac{-(t_4+t_1)(t_4+t_2)(t_4+t_3)+2t_4}{1+t_3^2}.
\end{aligned}\right. \tag{46}$$

On voit aisément que l'on peut avoir une infinité de systèmes D_1, D_2, D_3, D_4 de quatre directrices associées réelles; on a en effet

$$\mathrm{T}=\frac{2\left[1+\varepsilon\sqrt{1+(t_1+t_2)^2(t_1^2+t_2^2+2)}\right]}{(t_1+t_2)^2} \qquad (\varepsilon=\pm 1),$$

de sorte que les deux valeurs de T sont réelles si t_1 et t_2 sont réelles. Ensuite T choisie,

$$t_3=\frac{-(t_1+t_2)+\sqrt{(t_1-t_2)^2+4\mathrm{T}}}{2}, \qquad t_4=\frac{-(t_1+t_2)-\sqrt{(t_1-t_2)^2+4\mathrm{T}}}{2},$$

de la sorte celle des deux valeurs de T qui est positive fournit un couple t_3, t_4 réel. On remarquera que la relation (45) conduit, si l'on veut, à des applications géométriques différentes. Par exemple, si nous considérons la cubique gauche auxiliaire Γ $(x=t, y=t^2, z=t^3)$, le plan des trois points (t_1, t_2, t_3), si l'on pose

$$t_1+t_2+t_3=\mathrm{S}_1, \qquad t_2t_3+t_3t_1+t_1t_2=\mathrm{S}_2, \qquad t_1t_2t_3=\mathrm{S}_3,$$

a pour équation

$$\mathrm{S}_2x-\mathrm{S}_1y+z-\mathrm{S}_3=0;$$

l'équation (45) s'écrit

$$(\mathrm{S}_1\mathrm{S}_2-\mathrm{S}_3)^2-4(\mathrm{S}_1^2-\mathrm{S}_2)-8=0.$$

Elle exprime donc que le plan (t_1, t_2, t_3) reste tangent à la surface Σ de classe 4 (d'ailleurs unicursale),

$$(-uv + hw)^2 - 4(v^2 - uw)w^2 - 8w^4 = 0.$$

Chaque système (t_1, t_2, t_3, t_4) *fournit donc un tétraèdre inscrit dans la cubique* Γ *et circonscrit à la surface* Σ; *il existe* ∞^2 *tétraèdres de cette espèce. Chaque biquadratique intersection de deux cylindres de révolution fournira de même* ∞^2 *tétraèdres inscrits dans* Γ *et circonscrits à une certaine surface algébrique* Σ.

De même chaque biquadratique intersection de deux paraboloïdes de révolution permet de trouver ∞^1 *triangles inscrits dans une conique et circonscrits à une certaine courbe algébrique.*

Nous pouvons maintenant expliquer très simplement *pourquoi les biquadratiques qui ont un point double à l'infini et deux directions infinies isotropes perpendiculaires à la direction infinie double, mais qui n'ont pas d'axe de symétrie, n'admettent aucune génération à trois directrices : pour parler plus exactement, elles admettent* ∞^1 *systèmes de trois directrices dont deux sont confondues*. C'est cette dégénérescence, assez difficile à apercevoir, qui remet de l'unité dans cette théorie, sinon il serait un peu paradoxal de trouver, dans les courbes de ce paragraphe, une famille isolée remplissant toutes les conditions géométriques imposées pour obtenir ∞^1 systèmes de trois directrices associées, et n'en admettant aucun système. Cette courbe est un cas particulier de celles étudiées un peu plus haut, intersection d'un cylindre de révolution et d'un paraboloïde de révolution; sur le plan de l'infini nous marquons les tangentes T_1, T_2 au cercle de l'infini, qui se coupent en p_1 et sont les traces des plans isotropes menés par l'axe du cylindre; de même les traces des plans isotropes menés par l'axe du paraboloïde sont deux tangentes T'_1, T'_2 au cercle de l'infini et se coupent en p'_1 : nous devons, pour chaque quadrique du faisceau, prendre un couple focal associé D_1, D_2, où D_1 est parallèle à la direction p_1 et D_2 parallèle à la direction p'_1; D_3 est ensuite la droite conjuguée de D_1 relativement au cylindre. Si donc T'_1 tend vers T_1 et T'_2 vers T_2, le point p'_1 tend vers p_1, la biquadratique tend vers l'une de celles que nous étudions et *le couple* (D_1, D_2) *se compose de deux focales confondues;* pour chaque quadrique orthogonale, on peut remarquer que chacune des génératrices issues d'un sommet situé sur l'axe de Hachette est précisément la réunion de deux focales confondues et, quand un couple focal vient tendre vers un tel couple confondu, *le rapport* $m_1 : m_2$ *que nous avons introduit, tend vers un :* ceci explique aussi pourquoi cette valeur *un* ne se trouve pas obtenue, pour les quadriques orthogonales autres qu'un paraboloïde hyperbolique, mais que les valeurs voisines de *un* sont obtenues. Le système $(D_1 D_2 D_3)$ obtenu ici comporte donc deux droites D_1 et D_2 confondues et ne peut donc servir pour la détermination de notre biquadratique. *Une telle biquadratique rentre d'ailleurs dans la catégorie des intersections de deux paraboloïdes confondus;* en effet si l'on écrit l'équation

$$(47)\quad x^2+y^2+z^2-(\alpha x+\beta y+\gamma z)^2+2C_1 x+2C_2 y+2C_3 z+D=0,$$

où α, β, γ, C_1, C_2, C_3, D sont des fonctions d'un paramètre t, telles que $\alpha^2+\beta^2+\gamma^2\equiv 1$ et que $C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma$ ne soit pas identiquement nulle, une racine de la fonction $C_1\alpha+C_2\beta+C_3\gamma$ donne *un paraboloïde de révolution réduit, accidentellement, à un cylindre de révolution; le paraboloïde infiniment voisin est un paraboloïde effectif et non un cylindre si* $S(C_1+\Delta C_1)(\alpha+\Delta\alpha)$ *n'est pas nulle*, ce qui revient à dire que $SC_1\Delta\alpha+S\alpha\Delta C_1$ ne l'est pas. Si donc, *numériquement*, on a écrit en même temps que l'équation numérique (47), où l'on suppose $S\alpha^2=1$, $SC_1\alpha=0$, l'équation

$$(48)\quad -(\alpha x+\beta y+\gamma z)(\alpha' x+\beta' y+\gamma' z)+C'_1 x+C'_2 y+C'_3 z+D'=0,$$

où l'on suppose les constantes α', β', γ', C'_1, C'_2, C'_3, D' satisfaisant à $S\alpha\alpha'=0$, $SC_1\alpha'+SC'_1\alpha\neq 0$, on a la courbe générale dont nous venons de nous occuper.

5. **Étude des cubiques gauches.** — Nous avons indiqué que *trois droites* D_1, D_2, D_3 *prises au hasard, donc dépendant dans leur ensemble de* 12 *paramètres, déterminent quatre cubiques gauches dont chacune est lieu (partiel) de points dont les rapports des distances aux directrices* D_1, D_2, D_3 *restent constants*. Or une cubique gauche Γ dépend de 12 paramètres; la confrontation de ces résultats prouve que *la donnée de* D_1, D_2, D_3 *fournit quatre cubiques, et que si* Γ *est l'une d'elles, cette cubique* Γ *dépend de* $12-p$ *paramètres, où* p *est un entier*

positif ou nul et que, à cette cubique Γ, *si* p *n'est pas nul, correspondent* ∞^p *systèmes de trois directrices associées, tandis que si* p *est nul, il n'existe qu'un nombre fini de systèmes* D_1, D_2, D_3 *permettant de retrouver* Γ.

Il s'agit de montrer que p *est nul; en d'autres termes la donnée de* D_1, D_2, D_3 *conduit à une cubique gauche générale et inversement, une cubique gauche générale n'admet qu'un nombre fini de générations.*

La méthode à suivre est évidente, d'après ce qui précède : nous considérons l'ensemble des quadriques orthogonales contenant Γ; elles sont ∞^1; nous en prenons deux, Q_1, Q_2, et nous leur appliquons la méthode du n° 3 pour obtenir la réduction A′; la substitution de A à A′ exige deux conditions et nous allons montrer que ces deux conditions déterminent effectivement Q_1, Q_2 : on a deux équations à deux inconnues, ayant un nombre fini de solutions. *Si* m_1, m_2, m_3 *sont les traces de* Γ *sur le plan de l'infini, il y aura à réserver le cas où les droites* m_1m_3 *et* m_2m_3 *sont tangentes au cercle de l'infini, et celui, encore plus spécial, où, de plus,* m_1 *et* m_2 *sont les points de contact.*

Donc, Γ étant la cubique *générale*, toutes les quadriques contenant Γ ont une équation de la forme $\alpha Q + \beta Q' + \gamma Q'' = 0$ et la condition pour que cette quadrique soit orthogonale est une relation $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, homogène, algébrique de degré 3, qui représente, dans un plan auxiliaire, une cubique plane C_3; choisissons au hasard deux points μ_1, μ_2 sur C_3; nous en déduisons Q_1, Q_2, et les considérations employées au paragraphe 3 s'appliquent sans modification à la biquadratique (Q_1, Q_2), formée cette fois de Γ et d'une sécante double de Γ; nous obtenons *deux relations indépendantes*, en exprimant que la propriété A′ est remplacée par la propriété A; nous obtenons un nombre fini de générations; *il suffit d'établir ce résultat pour un exemple particulier pour avoir la certitude que ce résultat est vrai dans le cas général.*

La cubique C_3, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, est en général non unicursale. Ainsi la cubique Γ

$$x = t, \qquad y = At^2, \qquad z = Bt^3 \tag{1}$$

conduit au réseau de quadriques

$$2\alpha(Ax^2 - y) + 2\beta(Bxy - Az) + 2\gamma(By^2 - A^2xz) = 0.$$

Nous formons aisément $\varphi(\alpha, \beta, \gamma)$, à savoir

$$\alpha^3 A^3 - A^2 B \alpha^2 \gamma + (A^5 - AB^2)\alpha\gamma^2 + (B^3 - A^4 B)\gamma^3 + \beta^2 B^2 (A\alpha + B\gamma) = 0.$$

Pour $A = 1$, on en déduit

$$(2) \qquad \beta^2 = \frac{(\alpha^2 - B^2\gamma^2 + \gamma^2)(B\gamma - \alpha)}{B\gamma + \alpha}$$

et cette relation n'est unicursale que si B^2 est égal à un. Mais même avec $A = B = 1$, les calculs indiqués par notre méthode sont pénibles.

Un exemple plus simple s'obtient avec la cubique

$$(3) \qquad \frac{x}{1} = \frac{y}{t} = \frac{z}{t^3} = \frac{1}{t^2}.$$

Le réseau de quadriques est alors

$$2\alpha(yz - 1) + 2\beta(xz - y) + \gamma(y^2 - x) = 0.$$

On voit que $\gamma = 0$ donne un faisceau de paraboloïdes équilatères, de sorte que C_3 se décompose en la droite $\gamma = 0$ et une conique C_2 : puisque nous devons prendre trois points en ligne droite sur C_3, ou tout au moins deux de ces trois points, on prendra un point sur la droite $\gamma = 0$ et un point sur C_2, le choix du point sur $\gamma = 0$ plutôt que sur C_2 étant pratiquement avantageux parce que les couples focaux s'obtiennent plus aisément sur un paraboloïde équilatère que sur une quadrique quelconque (on voit aisément que trois points tous les trois sur la droite $\gamma = 0$ ne conduisent à rien). La conique C_2 a ici pour équation

$$(4) \qquad \gamma^2 + 4\alpha^2 - 4\beta^2 = 0,$$

mais, même avec ce résultat simple, les calculs ultérieurs restent pénibles.

Or, la décomposition de C_3, dans l'exemple précédent, tient manifestement à ce que la cubique Γ possède deux directions asymptotiques rectangulaires; *si les directions asymptotiques forment un trièdre trirectangle, la cubique* C_3 *se décompose en trois droites* donnant chacune un faisceau de paraboloïdes équilatères dont l'un des plans directeurs est fixe, parallèle à deux directions asymptotiques de Γ, tandis que l'autre plan directeur pivote autour de la troisième direction asymptotique. Nous allons donc continuer avec cet exemple, qui est le plus simple possible. Nous écrivons les équations

$$\frac{a(x-x_0)}{x} = \frac{b(y-y_0)}{y} = \frac{c(z-z_0)}{z} \tag{5}$$

et nous nous bornerons même à l'exemple purement numérique

$$\frac{x-1}{x} = \frac{2(y-1)}{y} = \frac{3(z-1)}{z}. \tag{6}$$

Trois paraboloïdes définissant le réseau de quadriques sont, par exemple,

$$yz - 3y + 2z = 0, \qquad 2zx - 3x + z = 0, \qquad xy - 2x + y = 0,$$

et nous considérons les quadriques Q_1, Q_2

$$(Q_1) \qquad z(y + 2\lambda x) - 3\lambda x - 3y + (2+\lambda)z = 0,$$
$$(Q_2) \qquad y(z + \mu x) - 2\mu x + (\mu - 3)y + 2z = 0.$$

Nous mettons la première équation sous la forme $XY + CZ = 0$, où X, Y, Z sont les formes *normales* de trois plans deux à deux rectangulaires : il suffit d'écrire

$$\begin{gathered} Q_1 \equiv (z + A)(y + 2\lambda x + B) \\ -(3\lambda + 2A\lambda)x - (3 + A)y + (2 + \lambda - B)z - AB = 0, \\ \frac{-3\lambda - 2A\lambda}{1} = \frac{3+A}{2\lambda}, \qquad 2 + \lambda - B = 0. \end{gathered}$$

On a ainsi

$$(7) \left\{ \begin{aligned} & A = \frac{-(6\lambda^2+3)}{1+4\lambda^2}, \qquad B = \lambda + 2, \qquad X = \frac{y + 2\lambda x + B}{\sqrt{1+4\lambda^2}}, \qquad Y = z + A, \\ & Z = \frac{\lambda x - 2\lambda^2 y + (2\lambda^2+1)(\lambda+2)}{\lambda\sqrt{1+4\lambda^2}}, \\ & Q_1 \equiv (1 + 4\lambda^2)XY + 3\lambda Z = 0. \end{aligned} \right.$$

Comme l'équation $XY + CZ = 0$ équivaut à

$$(X\cos\alpha + Y\sin\alpha)^2 + (Z+p)^2 = (X\cos\alpha - Y\sin\alpha)^2 + (Z-p)^2$$

pourvu que l'on ait $p = C\cos\alpha\sin\alpha$, on voit que l'on peut prendre comme directrice D_3, avec l'arbitraire α,

$$(D_3)\quad \begin{cases} \dfrac{y+2\lambda x+B}{\sqrt{1+4\lambda^2}}\cos\alpha+(z+A)\sin\alpha=0; \\ \dfrac{\lambda x-2\lambda^2 y+(2\lambda^2+1)(\lambda+2)}{\lambda\sqrt{1+4\lambda^2}}+\dfrac{3\lambda}{1+4\lambda^2}\cos\alpha\sin\alpha=0. \end{cases}$$

Un calcul tout semblable avec Q_2 donne

$$Q_2\equiv(y+A_1)(z+\mu x+B_1)$$
$$-(2\mu+A_1\mu)x+(\mu-3-B_1)y+(2-A_1)z-A_1B_1=0,$$

$$(8)\quad \begin{cases} A_1=\dfrac{2(1-\mu^2)}{1+\mu^2}, \quad B_1=\mu-3, \qquad X_1=y+A_1, \qquad Y_1=\dfrac{z+\mu x+B_1}{\sqrt{1+\mu^2}}, \\ Z_1=\dfrac{-2\mu x+2\mu^2 z-(\mu-3)(1-\mu^2)}{2\mu\sqrt{1+\mu^2}}, \\ Q_2\equiv X_1Y_1+\dfrac{4\mu}{1+\mu^2}Z_1=0. \end{cases}$$

On peut prendre pour directrice $\overline{D}_3$

$$(\overline{D}_3)\quad \begin{cases} (y+A_1)\cos\beta+\dfrac{z+\mu x+B_1}{\sqrt{1+\mu^2}}\sin\beta=0, \\ \dfrac{-2\mu x+2\mu^2 z-(\mu-3)(1-\mu^2)}{2\mu\sqrt{1+\mu^2}}+\dfrac{4\mu}{1+\mu^2}\cos\beta\sin\beta=0. \end{cases}$$

En exprimant que D_3 et $\overline{D}_3$ coïncident, on a quatre équations pour déterminer les inconnues λ, μ, α, β; nous commençons par exprimer que D_3 et $\overline{D}_3$ sont parallèles, de sorte que les droites

$$(d_3)\qquad (y+2\lambda x)\cos\alpha+z\sqrt{1+4\lambda^2}\sin\alpha=0, \qquad x-2\lambda y=0,$$
$$(\overline{d}_3)\qquad y\cos\beta\sqrt{1+\mu^2}+(z+\mu x)\sin\beta=0, \qquad x-\mu z=0,$$

coïncident. En remplaçant x, y, z par $2\lambda\mu$, μ, 2λ, on obtient

$$(9)\quad \begin{cases} \dfrac{\cos\alpha}{2\lambda}=\dfrac{\sin\alpha}{-\mu\sqrt{1+4\lambda^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+4\lambda^2\mu^2+4\lambda^2}}, \\ \dfrac{\cos\beta}{2\lambda\sqrt{1+\mu^2}}=\dfrac{-\sin\beta}{\mu}=\dfrac{1}{\sqrt{\mu^2+4\lambda^2\mu^2+4\lambda^2}}. \end{cases}$$

On a ainsi pour D_3 et $\bar{D}_3$ les équations nouvelles

$$(D_3)\quad \begin{cases} (y+2\lambda x+B)2\lambda-\mu(1+4\lambda^2)(z+A)=0, \\ \lambda x-2\lambda^2 y+(2\lambda^2+1)(\lambda+2)-\dfrac{6\lambda^3\mu}{\mu^2+4\lambda^2\mu^2+4\lambda^2}=0; \end{cases}$$

$$(\bar{D}_3)\quad \begin{cases} (y+A_1)2\lambda(1+\mu^2)-\mu(z+\mu x+B_1)=0, \\ -2\mu x+2\mu^2 z-(\mu-3)(1-\mu^2)-\dfrac{16\lambda\mu^3}{\mu^2+4\lambda^2+4\lambda^2\mu^2}=0. \end{cases}$$

En tirant y de la seconde équation D_3, z de la seconde $\bar{D}_3$, et portant ces valeurs dans les deux premières équations D_3 ou $\bar{D}_3$, le terme en x disparaît comme vérification des calculs précédents et il reste les deux relations

$$(10)\quad \left[\frac{(2\lambda^2+1)(\lambda^2+2)}{\lambda}-\frac{6\lambda^2\mu}{\mu^2+4\lambda^2+4\mu^2\lambda^2}\right] -\left[\frac{(\mu-3)(1-\mu^2)}{2\mu}+\frac{8\lambda\mu^2}{\mu^2+4\lambda^2+4\lambda^2\mu^2}\right](1+4\lambda^2) +2\lambda(\lambda+2)+(6\lambda^2+3)\mu=0,$$

$$(11)\quad \left[\frac{(2\lambda^2+1)(\lambda^2+2)}{\lambda}-\frac{6\lambda^2\mu}{\mu^2+4\lambda^2+4\mu^2\lambda^2}\right](1+\mu^2) -\left[\frac{(\mu-3)(1-\mu^2)}{2\mu}+\frac{8\lambda\mu^2}{\mu^2+4\lambda^2+4\lambda^2\mu^2}\right]+4\lambda(1-\mu^2)-\mu(\mu-3)=0.$$

En formant les résultats que j'indique schématiquement

$$(10)\ \{1+\mu^2\}-(11) \quad \text{et} \quad (11)\ \{1+4\lambda^2\}+(10),$$

on trouve les équations très simples

$$(10')\quad [3(\mu^2+4\lambda^2)+(4\lambda^2+1)\mu^3](1+\mu^2)=0,$$

$$(11')\quad [\mu^2+4\lambda^2+\lambda^3(1+\mu^2)](1+4\lambda^2)=0.$$

On doit rejeter les facteurs $1+\mu^2=0$, $1+4\lambda^2=0$ et il reste un système, qui, en tirant μ^2 de la seconde, tandis que, dans la première, on remplace μ^3 par $\mu^2.\mu$, livre en dernière analyse

$$(12)\quad \begin{cases} \mu=\dfrac{3\lambda(4\lambda^2-1)}{(\lambda+4)(4\lambda^2+1)}, \\ (\lambda+4)^3(4\lambda^2+1)^2+(12\lambda^2-3)^2(\lambda^3+1)=0. \end{cases}$$

L'équation résolvante en λ est de degré 7 : donc, *quelle que soit la* *cubique gauche* Γ (*supposée telle que les traces* m_1, m_2, m_3 *sur le plan de l'infini ne forment pas un triangle dont deux côtés soient tangents à l'ombilicale*), *on trouve au moins sept générations par un système de trois directrices associées*; à ce point de vue, le calcul qui précède nous a fixé sur le premier point : *il existe un nombre fini de générations* et non pas un nombre infini; quant au second point : *nombre exact de modes de générations*, nous ne pouvons que donner *sept* comme *minimum*, car le calcul fait intervenir une cubique plane auxiliaire C_3, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$, et chaque fois que cette cubique aquiert un point double, il peut se faire qu'un certain nombre de solutions deviennent illusoires.

Il y a lieu aussi de répondre à une autre objection : ne pourrait-il arriver que la génération par trois directrices se fasse par trois paraboloïdes du système Q_1, obtenues pour des valeurs λ_1, λ_2, λ_3 du paramètre λ? Or la projection horizontale de D_3 est parallèle à la droite $x - 2\lambda y = 0$, de sorte que deux paraboloïdes de ce système ne peuvent donner la même directrice; donc nous sommes sûrs de ne rien avoir oublié. (Nous avions déjà signalé, par une autre voie, ce cas singulier d'un faisceau de paraboloïdes équilatères ayant un plan directeur commun.)

6. **Cubiques gauches possédant ∞^1 générations.** — Ce qui précède montre que le problème étudié ici pour une cubique Γ revient à lui associer une sécante double Δ telle que le système (Γ, Δ) constitue une biquadratique, dégénérée il est vrai, admettant un nombre fini ou infini de générations. Avec les cubiques qui ne rentrent pas dans le cas réservé, il est clair qu'une sécante double déterminée ne peut donner que *zéro* ou *un* mode de génération; nous avons vu que, *pour le cas général, il y a un nombre fini de sécantes doubles donnant chacune un mode*. Mais la méthode que nous avons suivie *n'exclut pas le cas où, moyennant certaines conditions géométriques, on pourrait trouver* ∞^1 *cordes (et même* ∞^2*) de la cubique, fournissant chacune un mode de génération :* je rappelle en effet que notre méthode consiste à écrire quatre équations

$$(1)\qquad \begin{cases} \varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0, & \varphi(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1) = 0, \\ R[\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1] = 0, & S[\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1] = 0, \end{cases}$$

dont les deux premières expriment que les points (α, β, γ) et $(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ sont chacun sur la cubique plane C_3 auxiliaire et dont les deux dernières expriment que la cubique Γ réunie à la sécante double admet un mode de génération; nous avons montré, par un exemple particulier, que les quatre équations *ne sont pas systématiquement incompatibles*, *ne sont pas systématiquement indéterminées*. Or nous allons précisément indiquer *certaines* relations entre les coefficients des équations (1), c'est-à-dire entre les paramètres dont dépend la cubique Γ, *assurant* ∞^1 *solutions* (*ou* ∞^2); *ces conditions ne font intervenir que les points à l'infini de* Γ : *les points à l'infini* m_1, m_2, m_3 *sont tels que* $m_1 m_2$ *et* $m_1 m_3$ *sont tangentes au cercle de l'infini*. Mais rien ne prouve qu'il n'existe pas certaines relations différentes (n'obligeant pas $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ à être tangentes au cercle de l'infini) assurant soit l'incompatibilité, soit l'indétermination du système (1); la difficulté de former ce système dans le cas général nous a empêché d'élucider ce point : *c'est la seule lacune qui existe dans ce travail et l'honnêteté scientifique exige que le lecteur soit prévenu* (mais il y a peu de chance pour que cette éventualité soit réalisée; *voir* la note 3).

Supposons que les droites $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ du plan de l'infini soient tangentes au cercle de l'infini, m_2 *ni* m_3 *n'étant points de contact*. Le cylindre qui a Γ pour directrice et ses génératrices parallèles à la direction infinie m_1 *est donc de révolution*, car $m_1 m_2$, $m_1 m_3$ sont les traces à l'infini de ce cylindre du second degré. D'autre part, si l'on imagine une quadrique *orthogonale* Q contenant Γ, la section q de Q par le plan de l'infini doit, d'après les propriétés des quadrilatères de Poncelet, contenir le nouveau point m_4 où se coupent les tangentes au cercle de l'infini issues, l'une de m_2 (autre que $m_2 m_1$), l'autre de m_3 (autre que $m_3 m_1$); *donc les* ∞^1 *quadriques orthogonales trouvées ici forment un faisceau*, *la biquadratique de base étant formée de* Γ *et de la sécante double* Δ *fixe issue de* m_4). Or une telle biquadratique admet une *infinité simple de générations à trois directrices*. D'autre part *le cylindre de révolution que nous avons signalé n'appartient pas au faisceau en jeu, car le point* m_4 *n'est ni sur* $m_1 m_2$, *ni sur* $m_1 m_3$; *les directions infinies* m_1, m_4 *sont évidemment symétriques par rapport au plan parallèle à* m_2 *et* m_3. Si nous considérons le cylindre de révolution qui porte notre cubique actuelle et une section plane par un plan parallèle à m_2, m_3, *le grand axe de cette ellipse donne la direction commune d'axe de Hachette des quadriques du faisceau orthogonal découvert*. Les deux paraboloïdes de révolution contenant (Γ, Δ) ont leurs plans directeurs définis, pour l'un par leurs traces $m_1 m_2$ et $m_3 m_4$, pour l'autre par leurs traces $m_1 m_3$ et $m_2 m_4$: *ces deux paraboloïdes sont imaginaires conjugués l'un de l'autre*; le paraboloïde équilatère est réel, il a un plan directeur de trace $m_2 m_3$, l'autre de trace $m_1 m_4$. La cubique Γ dépend de dix paramètres, dont six de déplacement et un d'homothétie; en ne gardant que les trois paramètres supplémentaires, on peut prendre pour équations paramétriques de Γ

$$(2) \qquad x = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \qquad y = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \qquad z = a\theta + bx + cy.$$

Or, les méthodes classiques montrent que la courbe cubique également $(x, y, a\theta)$ conduit au réseau de quadriques

$$\lambda[x^2+y^2-1] + 2\mu[yz + a(x-1)] + 2\nu[z(x+1) - ay] = 0.$$

Ici nous aurons donc le réseau

$$(3) \qquad \begin{aligned} &\lambda[x^2+y^2-1] + 2\mu[y(z-bx-cy) + a(x-1)] \\ &\qquad + 2\nu[(z-bx-cy)(x+1) - ay] = 0. \end{aligned}$$

Il est bon de remarquer que la cubique plane auxiliaire C_3 se décompose en trois droites; en effet l'ensemble des termes du second degré de l'équation (3) est

$$\lambda(x^2+y^2) + 2(\mu y + \nu x)(z - bx - cy),$$

de sorte que, si $\mu^2 + \nu^2 = 0$, l'une ou l'autre des expressions $x + iy$ ou $x - iy$ est en facteur : cela donne une quadrique orthogonale dégénérée (les quadrilatères de Poncelet ont deux côtés consécutifs fixes, d'ailleurs confondus avec une même tangente fixe du cercle de l'infini); la partie utile de C_3 est donc la droite complémentaire, correspondant au faisceau que nous avons signalé; on obtient aisément la relation en λ, μ, ν, en exprimant que le cône asymptote contient la symétrique de Oz relativement au plan $z - bx - cy = 0$; cette droite a pour paramètres directeurs $(2b, 2c, b^2 + c^2 - 1)$ et l'on trouve

$$2\lambda(b^2+c^2) - (\mu c + \nu b)(b^2+c^2+1) = 0.$$

Nous reviendrons un peu plus loin sur l'étude de ce paragraphe.

7. **Cubiques admettant ∞^2 générations.** — C'est le cas, dégénérescence du précédent, où les droites m_1m_2, m_1m_3, tangentes au cercle de l'infini, touchent ce cercle en m_2, m_3. La cubique gauche est dite *horopter. Elle a deux directions infinies isotropes et une troisième, réelle, orthogonale aux précédentes.* Il suffit de faire $b = c = 0$ dans les équations du paragraphe précédent; la cubique dépend de huit paramètres, dont un seul est paramètre de forme. Nous avons ainsi la cubique

$$(1) \qquad x = \frac{1-\theta^2}{1+\theta^2}, \qquad y = \frac{2\theta}{1+\theta^2}, \qquad z = a\theta,$$

puis le réseau de quadriques, *toutes orthogonales*,

$$(2) \qquad \lambda(x^2+y^2-1) + 2\mu[yz + a(x-1)] + 2\nu[z(x+1) - ay] = 0.$$

Ici le point m_4 coïncide précisément avec m_1 qui est à l'infini sur Oz; nous savons, d'après l'étude faite sur les biquadratiques, que nous devons compléter Γ par une sécante parallèle à Oz, choisie de sorte que la biquadratique ainsi formée soit tracée sur un paraboloïde équilatère dont un plan directeur est $z = 0$, l'axe de ce paraboloïde rencontrant à angle droit l'axe des z. Pour que $z = 0$ soit en facteur dans les termes du second degré, il faut que λ soit nul; l'axe du paraboloïde équilatère est alors défini par $z = 0$, $\mu y + \nu(x+1) = 0$: il ne rencontre celui du cylindre que si ν est nul; donc c'est le paraboloïde $yz + a(x-1) = 0$ qui contient *la génératrice du cylindre* ($y = 0$, $x = 1$), *diamétralement opposée à l'asymptote : c'est la sécante double Δ à prendre.* L'axe des x est alors l'axe de Hachette commun aux quadriques du faisceau

$$(3) \qquad \lambda(x^2+y^2-1) + 2\mu[yz + a(x-1)] = 0$$

et nous avons les ∞^2 générations annoncées à quatre directrices.

8. **Intersection de la biquadratique (dégénérée ou non) avec les plans isotropes issus des directrices.** — Nous allons maintenant signaler des résultats de forme géométrique élégante, dus presque tous à M. Rowe. Si nous coupons l'une des biquadratiques $\mathcal{B}$ de ce travail par l'un des deux plans isotropes p_1 issus de la directrice D_1, M étant l'un des points où p_1 coupe $\mathcal{B}$, *la distance de* M *à* D_1 *est nulle : donc* M

est aussi à une distance nulle des autres directrices associées à D_1, *de sorte que chaque plan* (M, D_2), (M, D_3) *est aussi isotrope*. [Et s'il existe une quatrième directrice associée D_4, le plan (M, D_4) est aussi isotrope]. On a ainsi trois couples de deux plans (p_1, p_2) issus de D_1, (q_1, q_2) de D_2 et (r_1, r_2) de D_3; *en associant trois plans (dont un dans chaque couple), nous obtenons un système de huit points situés sur* $\mathcal{B}$; *réciproquement toute biquadratique* $\mathcal{B}$ *passant par ces huit points donne une valeur constante aux rapports* $XX' : YY' : ZZ'$, en appelant X, X', ... les premiers membres des équations des plans p_1, p_2, ...; car, pour une telle biquadratique on peut exprimer au moyen d'un argument elliptique les coordonnées d'un point courant; le rapport $XX' : YY'$ est alors une fonction elliptique qui ne prend ni la valeur : *zéro* ni la valeur : *l'infini*; il est donc égal à une constante. Nous avions déjà signalé ce fait par une autre voie. Adoptons les notations suivantes pour les plans en jeu et leurs points communs

$A(p_1, q_2, r_2)$	$A'(p_2, q_1, r_1)$	$p_1(A, B', C', D)$	D_1
$B(p_2, q_1, r_2)$	$B'(p_1, q_2, r_1)$	$p_2(A', B, C, D')$	
$C(p_2, q_2, r_1)$	$C'(p_1, q_1, r_2)$	$q_1(A', B, C', D)$	D_2
$D(p_1, q_1, r_1)$	$D'(p_2, q_2, r_2)$	$q_2(A, B', C, D')$	
		$r_1(A', B', C, D)$	D_3
		$r_2(A, B, C', D')$	

Avec le paramètre elliptique, dont nous avons parlé, et que l'on peut choisir de façon que quatre points d'un même plan donnent une somme nulle pour leurs arguments (la valeur du paramètre relatif à chaque point n'étant déterminée qu'à une période près) on voit aisément que l'on a

$$a' = a - \frac{a+b+c+d}{2}, \qquad b' = b - \frac{a+b+c+d}{2},$$

$$c' = c - \frac{a+b+c+d}{2}, \qquad d' = d - \frac{a+b+c+d}{2},$$

en exprimant simplement que les huit points sont dans six plans; il reste ensuite à exprimer que ces six plans sont isotropes (ce qui fait bien six équations pour quatre inconnues et exige, en général, deux conditions effectives de possibilité). Si nous négligeons les conditions concernant le contact des six plans avec l'ombilicale, *il est intéressant* *de signaler ce qui arrive quand les points* A, B, C, D *sont eux-mêmes dans un plan :* cette condition entraîne que A′, B′, C′, D′ soient eux-mêmes dans un même plan, puis, que la somme $a+b+c+d$ soit congruente à l'une des valeurs o, ω, ω', $\omega+\omega'$ où 2ω et $2\omega'$ sont deux périodes distinctes de la fonction elliptique introduite; la valeur *zéro* ne donne rien d'intéressant; nous pouvons prendre ω, ω' ou $\omega+\omega'$ et cela prouve que les quatre points A, B, C, D étant choisis au hasard dans un même plan, *l'involution biaxiale, qui a pour axes conjugués deux arêtes opposées du tétraèdre formé par les quatre cônes contenant la biquadratique, remplace* A, B, C, D *par* A′, B′, C′, D′ *respectivement.*

Quand nous avons réalisé une génération à trois directrices, D_1 est l'intersection des plans (p_1, p_2), D_2 de (q_1, q_2), D_3 de (r_1, r_2); pour avoir une génération à quatre directrices, il faut encore que A, B, C, D soient dans un plan (isotrope) et A′B′C′D′ aussi; la courbe étudiée admet alors un axe de symétrie, comme nous l'avons vu, axe de Hachette commun aux quadriques du faisceau.

S'il y a ∞^1 générations, chaque droite telle que D_1 fournit deux plans isotropes et l'enveloppe de ces plans isotropes est une développable isotrope Δ dont la classe est égale au double de la classe ou degré de la surface réglée R lieu de D_1 diminué du nombre de génératrices de R tangentes au cercle de l'infini. D'ailleurs la classe est nécessairement un entier multiple de *trois*, car, par chaque point de la courbe passent trois plans isotropes contenant les trois directrices d'un même mode.

Ce qui précède est intéressant à envisager quand il s'agit d'une cubique : nous avons pris trois droites D_1, D_2, D_3 arbitraires, mené par D_1 les deux plans isotropes (p_1, p_2), de même par D_2 les deux plans (q_1, q_2) et par D_3 les deux plans (r_1, r_2); nous avons déterminé les points communs à trois plans (dont un de chaque couple) et pris les notations du tableau déjà écrit; en supprimant les deux points D et D′, *les six points restants déterminent une cubique* Γ *admettant* D_1, D_2, D_3 *pour directrices, circonscrite à un hexagone gauche* AB′CA′BC′ *tel que les plans de trois sommets consécutifs,* q_2, r_1, p_2, q_1, r_2, p_1 *soient isotropes et, réciproquement, si un tel hexagone est connu, les plans opposés* (p_1, p_2), (q_1, q_2), (r_1, r_2) *donnent trois directrices.* Si les plans ABC, A′B′C′ des sommets alternés de l'hexagone sont eux-mêmes isotropes, on a quatre directrices. Les réciproques sont vraies.

De là on déduit immédiatement que la cubique *horopter* a ∞^2 générations à quatre droites; car les deux points imaginaires à l'infini m_2, m_3 déjà envisagés et le point réel m_1 peuvent être obtenus par les valeurs i, $-i$, ∞ d'un paramètre unicursal convenablement choisi sur la cubique Γ; en appelant α, β, γ les paramètres de trois points A, B, C de Γ, la condition nécessaire et suffisante pour que le plan ABC soit isotrope est une relation entière en α, β, γ de degré 2 par rapport à chacune de ces quantités et de plus symétrique; pour $\alpha = \pm i$, $\beta = \infty$, cette relation est satisfaite identiquement; on en déduit que la relation est nécessairement de la forme

$$(1+\alpha^2)(1+\beta^2)(1+\gamma^2) = k,$$

où k est une constante. Mais alors si A′, B′, C′ sont les points de paramètre $-\alpha$, $-\beta$, $-\gamma$, les huit plans

$$p_1(\mathrm{AB'C'}),\quad p_2(\mathrm{A'BC});\quad q_1(\mathrm{A'BC'}),\quad q_2(\mathrm{AB'C});$$
$$r_1(\mathrm{A'B'C}),\quad r_2(\mathrm{ABC'});\quad s_1(\mathrm{ABC}),\quad s_2(\mathrm{A'B'C'}),$$

sont tous isotropes et les droites $(p_1 p_2)$, $(q_1 q_2)$, $(r_1 r_2)$, (s_1, s_2) sont quatre directrices associées; α et β étant arbitraires, on a ∞^2 générations. On voit combien la méthode est rapide pour démontrer que le fait d'être « *horopter* » pour une cubique *suffit* pour obtenir ∞^2 générations; mais la méthode ne donne pas l'indication que la circonstance en jeu est *nécessaire*.

Passons maintenant aux cubiques qui ont ∞^1 générations : quand D_1, D_2, D_3, directrices associées, varient, les plans p_1, q_2, r_2 que nous avons considérés se recoupent en A sur la cubique Γ et le point A décrit toute la cubique quand le système $D_1 D_2 D_3$ varie; donc D_1 engendrant une surface réglée R de degré ou classe inconnue λ ayant μ génératrices tangentes à l'ombilicale, le plan p_1 enveloppe une développable Δ isotrope de classe $2\lambda - \mu$ circonscrite à R et à l'ombilicale; le nombre $2\lambda - \mu$ est multiple de 3, puisque par chaque point A de Γ, les plans tangents à Δ vont par systèmes de trois plans associés. Si l'on considère le point A, les trois plans AB′C′, AB′C, ABC′ ne jouent pas le même rôle par rapport à A : les côtés de l'hexagone AB′CA′BC′ engendrent en effet une surface réglée algébrique R_1 dont Γ est ligne multiple d'ordre $2h$, si h est le nombre d'hexagones dont un sommet est en A; AB'C' est un plan donnant deux génératrices de R_1 issues de A, tandis que AB'C est un autre plan bitangent de R_1 donnant deux génératrices se croisant en B' et non en A. La relation entre les paramètres t et t' de A et B' est algébrique, de degré $2h$ en t et t' séparément et symétrique : si l'on pose $t+t'=s$, $tt'=p$, on a une relation algébrique entière de degré $2h$ par rapport à p et s dans leur ensemble; *mais il n'est pas impossible que cette relation se décompose* et M. Rowe a précisément envisagé le cas où la relation admet le facteur

$$(1) \qquad Ap^2+2Bps+Cs^2+2Dp+2Es+F=0.$$

Cette relation est facile à interpréter, si, sans changer la cubique Γ étudiée, nous la rapportons au tétraèdre pour lequel on a

$$X=t, \qquad Y=t^2, \qquad Z=t^3, \qquad T=1,$$

la sécante qui joint les points t, t' a pour coordonnées plückériennes (a, b, c, l, m, n) dans ce tétraèdre

$$(2) \qquad 1, \quad s, \quad s^2-p, \quad p^2, \quad -ps, \quad p,$$

de sorte que l'équation (1) peut s'écrire

$$(1') \qquad Al-2Bm+C(c+n)+2Dn+2Eb+Fa=0.$$

La droite AB' appartient donc au complexe linéaire de coefficients (dans le tétraèdre auxiliaire)

$$(3) \qquad A, \quad -2B, \quad C+2D, \quad F, \quad 2E, \quad C$$

et il en est de même de la droite AC', de sorte que le plan AB'C' est le plan polaire de A : *la corrélation obtenue par l'intermédiaire du complexe linéaire* (3) *remplace donc la cubique* Γ *par une développable* Δ_1 *circonscrite au cercle de l'infini : au point* A *correspond le plan* C'AB' *et* Δ_1 *est une fraction de la développable* Δ *du cas général.* Or, au cercle de l'infini correspond, par dualité relativement à un complexe

$$(A_1, B_1, C_1, L_1, M_1, N_1),$$

le cylindre de révolution

$$(4) \quad (L_1-yC_1+zB_1)^2+(M_1-zA_1+xC_1)^2+(N_1-xB_1+yA_1)^2=0,$$

de sorte qu'à la développable Δ_1 circonscrite au cercle de l'infini correspond la *cubique* Γ *tracée sur le cylindre* (4). L'hypothèse de

M. Rowe ne peut donc se réaliser que pour les cubiques déjà rencontrées par une autre voie, tracées sur un cylindre de révolution ; or de la relation (1) qui lie t et t', on déduit entre les paramètres t', t'' de B′ et C′ une relation encore symétrique en t', t'' et du second degré par rapport à t' ou à t'' séparément : donc B′C′ est une corde qui appartient à un nouveau complexe linéaire *qui est spécial*, car le plan A′B′C′ contient trois droites non concourantes, appartenant à ce complexe (il en est de même pour ABC); nous n'avons donc qu'à calculer les coefficients de ce nouveau complexe, à exprimer qu'il est spécial et le résultat donne *la condition de fermeture de l'hexagone gauche* AB′CA′BC′ *dont les sommets sont sur* Γ, *les plans de trois côtés consécutifs étant isotropes et correspondant par dualité au point de* Γ *commun aux deux côtés situés dans ce plan.*

Nous supposons donc qu'il s'agit de la cubique Γ

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y = \frac{2t}{1+t^2}, \qquad z = at + bx + cy. \tag{5}$$

Comme elle est tracée sur le cylindre $x^2+y^2=1$, en confrontant avec l'équation (4), nous prendrons le complexe linéaire défini par

$$A_1 = B_1 = L_1 = M_1 = 0; \qquad C_1 = 1, \qquad N_1 = i;$$

le plan polaire du point t est donc le plan

$$\begin{aligned} -2t\left[x - \frac{1-t^2}{1+t^2}\right] + (1-t^2)\left(y - \frac{2t}{1+t^2}\right) \\ + i(1+t^2)\left[z - at - b\,\frac{1-t^2}{1+t^2} - \frac{2ct}{1+t^2}\right] = 0. \end{aligned} \tag{6}$$

Un calcul simple fournit les valeurs t', t'' correspondant aux nouveaux points d'intersection de ce plan avec Γ : ce sont les racines de l'équation du second degré en t' ou t''

$$\left\{\begin{aligned} a(1+t^2)(1+t'^2) - 2i - 2it't - 2b(t'+t) - 2c(tt'-1) = 0, \\ a(1+t^2)(1+t''^2) - 2i - 2\,t''t - 2b(t''+t) - 2c(tt''-1) = 0. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

L'élimination de t entre ces deux équations conduit à l'équation

$$\begin{vmatrix} a(1+t'^2) & -bt'+c-i \\ a(1+t''^2) & -bt''+c-i \end{vmatrix}^2 - \begin{vmatrix} a(1+t'^2) & (c+i)t'+b \\ a(1+t''^2) & (c+i)t''+b \end{vmatrix}$$
$$\times \begin{vmatrix} (c+i)t'+b & a(1+t'^2)-2bt'+2c-2i \\ (c+i)t''+b & a(1+t''^2)-2bt''+2c-2i \end{vmatrix} = 0,$$

qui se met sous la forme

$$(8)\quad \begin{vmatrix} a(1+t'^2) & -bt'+c-i \\ a(1+t''^2) & -bt''+c-i \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} a(1+t'^2) & (c+i)t'+b \\ a(1+t''^2) & (c+i)t''+b \end{vmatrix}^2$$
$$+2\begin{vmatrix} a(1+t'^2) & (c+i)t'+b \\ a(1+t''^2) & (c+i)t''+b \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} (c+i)t'+b & bt'+i-c \\ (c+i)t''+b & bt''+i-c \end{vmatrix} = 0.$$

Posant donc $t'+t''=s$, $t't''=p$, nous obtenons, après suppression du facteur $a(t'-t'')^2$, la relation définitive

$$(9)\quad Ap^2+2Bps+Cs^2+2Dp+2Es+F=0$$

avec

$$(10)\quad \left\{\begin{array}{l} A=a[b^2+(c+i)^2], \qquad B=2abi, \qquad C=a[b^2+(c-i)^2], \\ D=-a[b^2+(c+i)^2]-(c+i)(b^2+c^2+1), \\ E=-2abi-b(b^2+c^2+i), \\ F=a[b^2+(c+i)^2]+2(c+i)(b^2+c^2+1). \end{array}\right.$$

Nous avons à écrire que le complexe dont les coefficients sont donnés par (3) est spécial, soit

$$AF-4BE+C(C+2D)=0,$$

et, ici, cela donne après réductions, et remarquant que la constante a ne doit pas être nulle,

$$(11)\quad (b^2+c^2+1)(b^2+c^2+ic)+2ai(b^2+c^2)=0.$$

On obtient ainsi une cubique Γ *imaginaire;* la développable Δ dont il a été question se décompose et comprend une développable Δ_1 de classe 3, qui est réciproque de Γ relativement au complexe linéaire indiqué. Si l'on écrit l'équation (11) sous la forme

$$(b^2+c^2)(b^2+c^2+1)+i[c(b^2+c^2+1)+2a(b^2+c^2)]=0,$$

on voit que l'on ne peut réaliser simultanément la nullité du terme indépendant de i et du coefficient de i qu'en supposant $b=c=0$; on obtient alors une cubique Γ *réelle* si a est réel

$$(12)\quad x=\frac{1-t^2}{1+t^2}, \qquad y=\frac{2t}{1+t^2}, \qquad z=at.$$

Mais cette cubique est la cubique gauche *horopter*, qui admet

∞^2 générations à quatre directrices; il n'est pas moins intéressant de trouver, parmi les ∞^2 générations, ∞^1 particulières où les hexagones AB'CA'BC' sont tels que les plans AB'C, BCA', CA'B, A'BC', BC'A, C'AB' correspondent aux sommets B', C, A', B, C', A par dualité relativement au complexe linéaire d'équation $n + ic = 0$ et sont isotropes; les plans ABC, A'B'C' sont aussi isotropes et pivotent autour d'une droite fixe (qui est la même pour les deux plans); cette droite est donc nécessairement une tangente au cercle de l'infini; *on constate aisément que c'est la droite* δ *à l'infini du plan* $z - iy = 0$; *donc, étant donné le point* A *de* Γ, *le plan* Aδ *recoupe* Γ *en* B *et* C; A', B', C' *sont respectivement symétriques de* A, B, C *par rapport à l'axe* Ox. En recommençant ensuite avec le complexe imaginaire conjugué $n - ic = 0$, on trouve une nouvelle série ∞^1 analogue. Cet exemple sert de vérification précieuse à notre théorie.

[J'indique rapidement la justification des résultats : les équations (7) se réduisent ici à

$$a(1+t^2) = \frac{2i(1+tt')}{1+t'^2} = \frac{2i(1+tt'')}{1+t''^2}. \tag{13}$$

Elles donnent

$$t = \frac{t'+t''}{1-t't''}, \tag{14}$$

$$at'^2t''^2 + a(t'^2+t''^2) + 2it't'' + a - 2i = 0. \tag{15}$$

Or l'intersection du plan $z - iy + \lambda = 0$ avec Γ conduit à l'équation

$$at^3 + (a-2i)t + \lambda(1+t^2) = 0,$$

en exprimant que t' et t'' sont racines de cette équation on a

$$\begin{vmatrix} at'^3 + (a-2i)t' & 1+t'^2 \\ at''^3 + (a-2i)t'' & 1+t''^2 \end{vmatrix} = 0$$

et la suppression du facteur $t' - t''$ conduit précisément à (15).]

Les générations trouvées ici pour la cubique *horopter* sont imaginaires (et conjuguées deux à deux dans les deux séries indiquées); elles rentrent dans le cadre des générations à quatre directrices, l'une des directrices (droite commune aux plans ABC, A'B'C') étant rejetée à l'infini et tangente au cercle de l'infini.

Il est intéressant aussi de signaler que, pour ces cubiques (horopter ou non) que nous venons de signaler, *les sommets opposés* A *et* A′, B *et* B′, C *et* C′ *de chaque hexagone se correspondent involutivement. De même les couples de plans* (A′BC), (AB′C′) *se correspondent dans une involution entre les plans tangents de la développable* Δ_1 *de classe* 3 *trouvée;* d'ailleurs la droite AA′ et la directrice intersection de (A′BC) et (AB′C′) sont réciproques par rapport au complexe linéaire; *chacune engendre une quadrique;* la quadrique Q ainsi trouvée pour lieu (partiel) des directrices admet pour développable, circonscrite simultanément à elle-même Q et au cercle de l'infini, une développable Δ_1 de classe 3, de sorte que Q admet une génératrice tangente au cercle de l'infini. Dans le cas de la cubique *horopter*, la quadrique lieu de AA′ est précisément le paraboloïde équilatère

$$z(x+1)-ay=0$$

et la quadrique lieu des directrices spéciales est

$$x(z+iy)-ayt=0.$$

9. **Cas de décomposition.** — Nous nous bornerons à quelques indications rapides.

Une biquadratique peut être décomposée en quatre droites formant un quadrilatère gauche; si les points à l'infini de ces droites sont répartis aux sommets d'un quadrilatère plan circonscrit au cercle de l'infini, il y a ∞^1 systèmes de trois directrices.

Nous avons étudié le cas d'une biquadratique décomposée en une cubique et une droite.

Le cas de décomposition en deux coniques ou une conique et deux droites donne lieu à des remarques analogues. En particulier un cercle et deux génératrices diamétralement opposées du cylindre de révolution déterminé par le cercle donnent ∞^2 systèmes de quatre directrices.

On peut se placer à un autre point de vue et considérer seulement une cubique (question déjà étudiée), trois droites dont l'une coupe les deux autres, une conique, une droite.

Pour une conique C donnons le résultat curieux suivant; donnons-nous une droite D_1 *arbitraire,* d'abord non située dans le plan de la conique; par D_1 nous menons deux plans isotropes dont les traces sur le plan de C sont deux droites (α, β), (γ, δ), α, β, γ, δ étant des points de C; par chacune des deux sécantes $(\alpha\beta)$, $(\gamma\delta)$ on peut mener deux plans isotropes et prendre les droites d'intersection des plans de chaque couple avec les plans de l'autre couple; on obtient ainsi quatre droites D_1, D'_1, D''_1, D'''_1 dont la première est celle qui nous avait servi de point de départ; ces quatre droites sont concourantes au point commun à $\alpha\beta$ et $\gamma\delta$. Les sécantes $(\alpha\gamma)$, $(\beta\delta)$ donnent de même D_2, D'_2, D''_2, D'''_2 et $(\alpha\delta)$, $(\beta\gamma)$ donnent D_3, D'_3, D''_3, D'''_3 : *tout le long de* C *les rapports des distances d'un point variable de* C *aux douze droites indiquées restent constants.* D'ailleurs, si les quatre points α, β, γ, δ sont imaginaires (deux à deux conjugués), six de ces droites sont réelles. Si D_1 est dans le plan de la conique, la droite D_1 absorbe huit des droites indiquées; on peut supposer α et β confondus avec l'un des points communs à C et D_1, la droite $\alpha\beta$ étant la tangente à C en ce point; de même pour γ et δ; on se borne donc à mener les plans isotropes par ces tangentes et l'on trouve quatre directrices à associer à D_1 et deux d'entre elles sont réelles si D_1 perce C en deux points imaginaires. Finalement nous voyons qu'une conique admet ∞^4 systèmes de douze directrices associées, les systèmes dégénérés étant ceux pour lesquels une directrice rencontre la conique en un point ou en deux points.

10. **Notes complémentaires.** — *a.* Il est bon d'indiquer l'origine du mot *horopter*. Quand les deux yeux sont orientés d'une manière *quelconque*, un point arbitraire de l'espace est vu *double;* mais il y a toujours des points qui produisent une sensation simple et qui ne sont pas vus doubles; cela arrive si l'image du point tombe en deux éléments *correspondants* des deux rétines; le lieu des points de cette espèce est une cubique *horopter*. Si O et O′ sont les centres optiques des yeux, la correspondance entre les éléments des rétines donne lieu à une correspondance entre les droites issues de O et O′, qui conserve les angles. On démontre sans peine que la cubique obtenue a effectivement deux directions infinies isotropes et une direction infinie réelle perpendiculaire aux précédentes.

C'est Helmholtz qui semble le premier avoir forgé ce mot « horopter » avec deux racines grecques (*Handbuch der physiolog. Optik*, 3 Aufl., 1910, p. 386). Dans le livre de Staude, *Analytische Geometrie der Kubischen Kegelschnitte*, la courbe est appelée *Kubische Kreis*. Il semblerait que le mot *haplopter* d'origine grecque aussi (ἁπλοος = simple) serait mieux approprié.

b. Une biquadratique (dégénérée ou non, mais *complète*) *tracée sur un cylindre de révolution* C *a zéro*, ∞^1, *ou* ∞^2 *générations, mais jamais une seule.*

En effet, pour n'avoir qu'une génération, il faudrait qu'en dehors du cylindre de révolution C, il n'y ait que deux quadriques orthogonales passant par la courbe, soient Q_1 et Q_2.

Sur les trois directrices supposées existantes, D_1, D_2, D_3, la directrice D_1 est une droite focale commune à C et Q_2 (C jouant le rôle de Q_3), mais alors l'axe de Hachette de Q_2 est perpendiculaire à D_1, *laquelle est parallèle aux génératrices de* C; mais alors D_1 est aussi une direction de Hachette de C, et toutes les quadriques du faisceau (C, Q_2) ont une direction de Hachette commune, sont toutes orthogonales : nous sommes dans le cas de ∞^1 ou ∞^2 générations.

c. Cubique gauche réduite à trois droites (*dont l'une est sécante aux deux autres*). — La droite Δ étant supposée rencontrer les deux droites Δ', Δ'', le système Δ, Δ', Δ'' peut être considéré comme une cubique gauche particulière, car l'adjonction d'une droite Δ_1 s'appuyant sur Δ', Δ'' donne un quadrilatère gauche définissant un faisceau de quadriques. Appelons (Δ, Δ'') la direction normale au plan de Δ, Δ''; *supposons cette direction distincte de celle de* Δ', de sorte qu'il existe un plan P', et un seul, issu de Δ' parallèlement à (Δ, Δ'') ou, si l'on préfère, perpendiculaire au plan Δ, Δ''; construisons de même le plan P'', analogue, obtenu en renversant les rôles de Δ' et Δ'', *en supposant* Δ'' *non perpendiculaire au plan* Δ, Δ'. Les plans P', P'' ne sont pas parallèles et se coupent suivant une droite Δ_1 sécante commune de Δ' et Δ''; les deux plans : Δ', Δ_1 d'une part, Δ, Δ'' de l'autre sont rectangulaires, de sorte que la quadrique dégénérée Q_1, qu'ils forment, admet ∞^2 couples de deux droites associées dont ces plans sont les bissectrices; on choisit l'une de ces deux droites, arbitrairement, perpendiculaire à la droite d'intersection des deux plans; de même pour les deux plans Δ'', Δ_1 et Δ, Δ'; donc, nous prenons la perpendiculaire commune δ aux diagonales du quadrilatère gauche Δ, Δ', Δ_1, Δ''; puis sa symétrique δ' relativement au plan Δ, Δ' et sa symétrique δ'' relativement au plan Δ, Δ''; *l'ensemble* Δ, Δ', Δ_1, Δ'' *est le lieu des points équidistants simultanément de* δ, δ', δ''. *Réciproquement, tout système de trois droites* δ, δ', δ'' *dont la première rencontre les deux autres définit un quadrilatère gauche* Δ, Δ', Δ''_1, Δ'' *lieu des centres des sphères tangentes simultanément à* δ, δ', δ''.

Si Δ' est perpendiculaire au plan Δ, Δ'', on peut prendre un plan P' *quelconque* issu de Δ' et alors la cubique gauche dégénérée Δ, Δ', Δ'' peut de ∞^1 façons être complétée en biquadratique; *cette cubique dégénérée admet* ∞^1 *générations à trois directrices*. La droite Δ_1 pivote autour d'un point fixe de Δ'.

Si les droites Δ, Δ', Δ'' *sont parallèles aux arêtes d'un trièdre trirectangle*, Δ *rencontrant* Δ' *et* Δ'', cette fois les plans P', P'' peuvent être pris arbitrairement autour de Δ' ou Δ'', ou, ce qui revient au même Δ_1 peut être choisie arbitrairement parmi les sécantes communes de Δ' et Δ''; *la cubique dégénérée admet* ∞^2 *générations à trois directrices*.

Nous avons ainsi obtenu une cubique particulière (dégénérée, il est vrai) pouvant être complétée par ∞^1 *ou même* ∞^2 *sécantes doubles de façon à obtenir à chaque fois une biquadratique possédant trois directrices :* c'est la question soulevée au paragraphe 6; il y a peu de chances que la circonstance analogue puisse être obtenue avec une cubique non dégénérée.

d. Quadrilatères gauches admettant un système de trois directrices. — Nous avons obtenu dans la Note précédente des échantillons de tels quadrilatères gauches : ce sont ceux que l'on obtient en construisant un tétraèdre dont les dièdres relatifs à l'une ou l'autre des deux arêtes opposées sont droits et supprimant ces deux arêtes.

(A ce propos, la Note qui précède n'a pas indiqué s'il existe d'autres façons de compléter la cubique dégénérée Δ, Δ', Δ'' : elle donne des constructions *suffisantes*, sans avoir indiqué si ces constructions sont nécessaires. Nous avons indiqué au paragraphe 5 qu'une cubique gauche *quelconque* admet au moins *sept* façons d'être complétée; il peut arriver que, lorsque la cubique admet un point double, donc se décompose, une des solutions du cas général, ou plusieurs, dégénèrent).

Pour un quadrilatère gauche, il existe encore des quadriques orthogonales dans le faisceau qu'il détermine. Si deux de ces quadriques sont dégénérées chacune en deux plans rectangulaires, nous retombons sur le cas de la Note précédente; donc, que le nombre des quadriques orthogonales soit fini (trois) ou infini, nous supposerons qu'il y en a au moins deux, Q_2 et Q_3, qui ne sont pas réduites à deux plans; nous supposons que Q_2 et Q_3 ont une droite focale commune D_1 : alors les plans isotropes issus de D_1 sont tangents simultanément à Q_2 et Q_3 : mais ici la développable formée par les plans tangents communs dégénère en les quatre côtés du quadrilatère gauche (on voit pourquoi cette fois il est important que Q_2 ou Q_3 soient de véritables quadriques et non des couples de deux plans); supposons donc, en appelant G_1, G_2, G_3, G_4 les côtés consécutifs du quadrilatère gauche, que les plans isotropes issus de D_1 contiennent deux côtés *opposés* G_1, G_3; les points de contact des plans (D_1G_1, D_1G_2) avec Q_2 sont d'une part sur G_1 et G_2 et d'autre part sur D_3, focale associée de D_1, vis-à-vis de Q_2, de sorte que D_3 est l'intersection des plans isotropes menés par G_1 (autre que G_1D_1) et par G_2 (autre que G_2D_1); en s'adressant à Q_3 au lieu de Q_2, on obtient pour D_2, au lieu de D_3, exactement le même résultat : donc D_2 et D_3 coïncident, nous avons éliminé systématiquement ce cas.

Il reste donc à examiner le cas où les deux plans isotropes issus de D_1 sont D_1G_1 et D_1G_4 : mais alors le plan G_1G_4 est isotrope et contient les directrices D_2, D_3; si donc on appelle X, X′ les plans isotropes issus de D_1, les plans isotropes issus de D_2 seront Y et Y′ et ceux, issus de D_3, sont Y et Y″ et l'on a à considérer la biquadratique

$$\frac{XX'}{m_1^2} = \frac{YY'}{m_2^2} = \frac{YY''}{m_3^2}.$$

Elle contient les deux droites $X = Y = 0$, $X' = Y = 0$; il faut encore que le plan $\frac{Y'}{m_2^2} = \frac{Y''}{m_3^2}$ coupe suivant deux droites la quadrique $\frac{XX'}{m_1^2} = \frac{YY'}{m_2^2}$; or quand on fait varier le rapport $m_1 : m_2$ pendant que D_1 ni D_2 ne bougent, la quadrique considérée en dernier lieu décrit un faisceau linéaire (ponctuellement ou tangentiellement); prenons $m_2 = 1$, choisissons m_3 arbitrairement, il y a, pour une valeur unique de m_1, une quadrique $\frac{XX'}{m_1^2} = YY'$ qui est tangente au plan donné $Y' = \frac{Y''}{m_3^2}$ et nous avons alors obtenu un quadrilatère gauche à trois directrices D_1, D_2, D_3, les deux directrices D_2, D_3 étant dans un même plan isotrope. Ces quadrilatères sont imaginaires et, par suite, moins intéressants que ceux obtenus dans la Note précédente.

e. Biquadratiques intersection de deux cylindres de révolution. — Les paramètres t_i relatifs aux quatre directrices d'un même système (p. 352 et suiv.) sont liés par deux relations symétriques. Prenons par exemple le cas de deux cylindres *confondus* (p. 361); la relation (45) ne fait intervenir que t_1, t_2, t_3; en écrivant cette même relation, où t_4 remplace t_3, nous avons obtenu $\Sigma t_i = 0$, mais alors l'identité

$$t_1 t_2 t_3 - (t_1 + t_2 + t_3)(t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2) + (t_2 + t_3)(t_3 + t_1)(t_1 + t_2) = 0$$

donne le droit de remplacer $(t_2 + t_3)(t_3 + t_1)(t_1 + t_2)$ par $(-s_3)$, où s_3 est $t_2 t_3 t_4 + t_1 t_3 t_4 + t_1 t_2 t_4 + t_1 t_2 t_3$; de même l'identité

$$t_1^2 + t_2^2 + t_3^2 + t_2 t_3 + t_3 t_1 + t_1 t_2 = (t_1 + t_2 + t_3 + t_4)(t_1 + t_2 + t_3) - s_2$$

permet de remplacer (45) par $s_3^2 + 4 s_2 - 8 = 0$; avec $s_1 = 0$, nous avons les deux relations symétriques annoncées.

f. Nombre de générations d'une cubique gauche arbitraire. — Ce nombre, au moins égal à 7, est rattaché à l'étude d'une cubique plane auxiliaire C_3, $\varphi(\alpha, \beta, \gamma) = 0$ (p. 365). Quand C_3 acquiert un point double, il est probable que h générations disparaissent (h entier positif ou nul). Le nombre exact pour une cubique gauche *quelconque* serait donc $7 + 3h$, c'est-à-dire 7, 10, 13, 16, ...; la valeur la plus probable me paraît 16.