

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Tétraèdres dont les sommets sont sur une quadrique Σ et dont les arêtes touchent une quadrique S

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 52 (1935), p. 1-38

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__1_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

TÉTRAÈDRES
DONT LES SOMMETS SONT SUR UNE QUADRIQUE Σ
ET DONT LES ARÊTES TOUCHENT UNE QUADRIQUE S

PAR M. BERTRAND GAMBIER.

1. **Introduction.** — Étant donné deux quadriques Σ , S , on peut chercher un tétraèdre offrant, par rapport à elles, une certaine disposition (inscrit, circonscrit, conjugué, d'arêtes tangentes). Les divers problèmes ainsi obtenus n'obéissent pas à une loi générale : les uns (tétraèdre inscrit dans Σ , conjugué à S , par exemple) exigent que Σ , S vérifient une certaine condition relative ; d'autres, tels que celui de ce mémoire : *tétraèdre dont les sommets sont sur Σ et dont les arêtes touchent S* n'exigent aucune condition préalable entre S et Σ . Nous allons voir qu'il existe ∞^2 tétraèdres de cette espèce, que les faces de ces tétraèdres enveloppent une surface W de classe 4, que chaque point de Σ donne 8 tétraèdres, que chaque plan tangent de W en donne 4, en supposant bien entendu S et Σ quelconques. Nous signalerons de nombreux cas particuliers, sans les discuter tous. Nous reconnaitrons qu'il est nécessaire de savoir, par une méthode appropriée, simplifier les calculs, sinon ils deviendraient inextricables. Cette méthode consiste en particulier à étudier au préalable trois coniques c , c' , c'' d'un même plan,

telles que c' et c'' soient circonscrites à un même triangle de côtés tangents à c . J'ai eu besoin d'une étude analogue pour un autre problème qui est imprimé au *Journal de Mathématiques* : tétraèdre conjugué à S , d'arêtes tangentes à Σ ; en étudiant un système de trois coniques c , c' , c'' telles qu'il existe un triangle inscrit dans c , circonscrit à c' et conjugué à c'' , j'ai pu supprimer presque en totalité les calculs d'un autre auteur. Au point de vue de la réalité, il est bon de signaler dès maintenant que toute quadrique *réelle* tangente aux arêtes d'un tétraèdre *réel* est une quadrique non *réglée* ou à la rigueur un cône ou un cylindre.

2. Étude des coniques c' , c'' circonscrites à un même triangle circonscrit à une conique c . — J'écris

$$(1) \quad \begin{cases} c \equiv A x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B yz + 2 B' zx + 2 B'' xy, \\ c' \equiv A_1 x^2 + \dots + 2 B_1'' xy, \\ c'' \equiv A_2 x^2 + \dots + 2 B_2'' xy. \end{cases}$$

J'appelle Δ , Δ' , Δ'' les discriminants de c , c' , c'' ; puis

$$(2) \quad \begin{cases} a_i = A_i A_i'' - B_i^2, & a_i' = A_i' A_i - B_i'^2, & a_i'' = A_i A_i' - B_i''^2 \\ b_i = B_i' B_i'' - A_i B_i, & b_i' = B_i' B_i - A_i' B_i', & b_i'' = B_i B_i' - A_i'' B_i'' \end{cases} \quad (i = 0, 1, 2),$$

$$(3) \quad \Theta_{ij} = a_i A_j + a_i' A_j' + a_i'' A_j'' + 2 b_i B_j + 2 b_i' B_j' + 2 b_i'' B_j'' \quad (i \neq j).$$

Le discriminant de la conique $\lambda c + \mu c' + c''$ est

$$(4) \quad \delta \equiv \Delta \lambda^3 + (\Theta_{01} \mu + \Theta_{02}) \lambda^2 + (\Theta_{10} \mu^2 + \Theta_{012} \mu + \Theta_{20}) \lambda + \Delta' \mu^3 + \Theta_{12} \mu^2 + \Theta_{21} \mu + \Delta''.$$

Avec ces notations on aurait $3\Delta_i = \Theta_{ii}$; le coefficient Θ_{012} est linéaire par rapport aux coefficients de chaque conique; nous n'aurons pas besoin de son expression, car trois coniques n'ont que sept invariants projectifs; il existe donc entre les dix coefficients (homogènes) entrant dans δ deux relations homogènes qui permettent d'exprimer en particulier Θ_{012} au moyen des autres coefficients (¹).

(¹) On peut, en effet, réduire les équations c , c' , c'' à la forme

$$c \equiv x^2 + y^2 + z^2, \quad c' \equiv A_1 x^2 + A_1' y^2 + A_1'' z^2, \quad c'' \equiv A_2 x^2 + \dots + 2 B_2'' xy,$$

de sorte que les coefficients A_1 , A_1' , A_1'' sont complètement arbitraires ainsi que les coefficients A_2 , A_2' , \dots , $2 B_2''$.

Cela posé on sait que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il existe *un* (et par suite ∞^1), triangles inscrits dans c' et circonscrits à c est que le trinôme $\Delta\lambda^2 + \Theta_{01}\mu\lambda + \Theta_{10}\mu^2$, déduit d'une façon évidente du discriminant $\Delta\lambda^3 + \Theta_{01}\mu\lambda^2 + \Theta_{10}\mu^2\lambda + \Delta'\mu^3$ de $\lambda c + \mu c'$, soit carré parfait : $\Theta_{01}^2 - 4\Delta\Theta_{10} = 0$.

Si la conique c' dégénère en deux droites, le discriminant de $\lambda c + \mu c'$ se réduit à $\lambda(\Delta\lambda^2 + \Theta_{01}\mu\lambda + \Theta_{10}\mu^2)$ et le fait, qu'en l'égalant à zéro, l'équation obtenue a une racine double, exprime que l'une des deux droites est tangente à c , de sorte que les triangles ont un côté porté par cette droite, et un sommet variable sur l'autre. Si la conique c dégénère en deux droites, les deux relations $\Delta = 0$, $\Theta_{01} = 0$ expriment que ces deux droites se coupent sur la conique c' .

On se rappellera aussi que, si l'on étudie le faisceau *tangentiel* $\lambda\bar{c} + \mu\bar{c}'$, c'est le trinôme $\bar{\Theta}_{01}\lambda^2 + \bar{\Theta}_{10}\mu\lambda + \bar{\Delta}'\mu^2$ qui doit être carré parfait, les racines de chaque discriminant pour $\lambda c + \mu c'$ ou $\lambda\bar{c} + \mu\bar{c}'$ étant proportionnelles aux inverses de l'autre.

On sait aussi que si la relation $\Theta_{01}^2 - 4\Delta\Theta_{10} = 0$ est vérifiée, en prenant une tangente *quelconque* de c recoupant c' en P, Q, les tangentes *autres que* PQ menées de P et Q à c se recoupent en R sur c' .

Si l'on suppose maintenant c' , c'' toutes deux circonscrites à un triangle BCD dont les côtés touchent c , la conique $\mu c' + c''$ possède, quel que soit μ , cette propriété, de sorte que le trinôme

$$\Delta\lambda^2 + (\Theta_{01}\mu + \Theta_{02})\lambda + \Theta_{10}\mu^2 + \Theta_{012}\mu + \Theta_{20}$$

est carré parfait en λ et μ ; on a :

$$(5) \quad \Theta_{01}^2 - 4\Delta\Theta_{10} = 0, \quad \Theta_{02}^2 - 4\Delta\Theta_{20} = 0, \quad \Theta_{01}\Theta_{02} - 2\Delta\Theta_{012} = 0.$$

Ces trois conditions nécessaires sont en même temps suffisantes. En effet, prenons μ égal à une racine μ_1 du discriminant de $\mu c' + c''$; la conique $\mu_1 c' + c''$ se décompose en deux droites dont l'une est tangente à c ; cette droite est en même temps sécante commune aux coniques du faisceau $\mu c' + c'' = 0$; si donc elle recoupe en B, C la conique $\mu c' + c'' = 0$, les points B et C sont indépendants de μ et les nouvelles tangentes issues de B et C à c se recoupent en A, situé, quel que soit μ , sur la conique $\mu c' + c'' = 0$, donc point de base nouveau de ce faisceau; le triangle ABC est circonscrit à c , et inscrit dans

toutes les coniques $\mu c' + c''$; il est unique (sauf cas où c' et c'' coïncideraient) ⁽¹⁾.

Or, dans le cas qui va être fourni par nos tétraèdres, *les coniques c , c' sont bitangentes*; les résultats qui précèdent subsistent, mais le double contact de c et c' permet de simplifier beaucoup le résultat. Si nous songeons aux formes réduites

$$(6) \quad \begin{cases} c \equiv x^2 + y^2 + z^2 - 2yz - 2zx - 2xy \\ c' \equiv 4yz + 4zx + 4xy \\ c'' \equiv 2Byz + 2B'zx + 2B''xy \end{cases} \quad [c + c' \equiv (x + y + z)^2],$$

le discriminant, changé de signe, donne

$$(7) \quad 4\lambda^2 - 4\lambda^2[6\mu + B + B' + B''] \\ + \lambda[6\mu + B + B' + B'']^2 - 2(2\mu + B)(2\mu + B')(2\mu + B''),$$

de sorte que le trinôme

$$4\lambda^2 - 4\lambda(6\mu + B + B' + B'') + (6\mu + B + B' + B'')^2$$

est carré parfait; nous apercevons que la racine de $\Theta_{01}\mu + \Theta_{02}$, à savoir $-\frac{1}{6}(B + B' + B'')$ est le tiers de celle de $\Delta'\mu + \Theta_{12}$; *cette relation, en raison de l'invariance des coefficients et des précautions prises pour respecter l'homogénéité par rapport aux coefficients de chaque conique séparée, est vraie quel que soit le système de référence.* On peut donc la substituer à l'équation $\Theta_{01}\Theta_{02} - 2\Delta\Theta_{012} = 0$; mais il reste à vérifier que cette substitution n'introduit pas de solutions étrangères (c , c' étant bien entendu bitangentes). Pour le voir, nous n'avons qu'à prendre pour c , c' les formes réduites (6) déjà données, et nous écrivons, pour c'' ,

$$(6') \quad c'' \equiv Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy.$$

⁽¹⁾ Il est intéressant de signaler la propriété du quatrième point D de base du faisceau ponctuel $\mu c' + c''$; menons de D les tangentes Dx, Dy à c ; la droite Dx perce la conique $\mu c' + c''$ en un point X correspondant homographiquement à μ ; de même Dy perce la même conique au point Y; la droite XY enveloppe une conique qui est précisément c .

Le discriminant, changé de signe, de $\lambda c + \mu c' + c''$ donne

$$(7') \quad \left\{ \begin{array}{l} 4\lambda^3 - 4\lambda^2[6\mu + B + B' + B''] \\ \quad + \lambda(6\mu + B + B' + B'')^2 - 2(2\mu + B)(2\mu + B')(2\mu + B''), \\ - \lambda[A'A'' + A''A + AA' + 2A(2\mu + B) + 2A'(2\mu + B') + 2A''(2\mu + B'')] \\ \quad + A[2\mu - B]^2 + A'[2\mu - B']^2 + A''[2\mu - B'']^2. \end{array} \right.$$

Les équations (5) font écrire

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} A'A'' + A''A + AA' + 2AB + 2A'B' + 2A''B'' = 0, \\ A + A' + A'' = 0. \end{array} \right.$$

Avec la nouvelle méthode, nous avons toujours la première équation (8); ensuite nous devons écrire que le triple de la racine de $6\mu + B + B' + B''$ est égal à la racine de

$$-16\mu - 8(B + B' + B'') + 4(A + A' + A'')$$

et nous retrouvons ainsi $A + A' + A'' = 0$, de sorte que le second procédé est *strictement équivalent* au premier.

3. Mise en équation du problème. — Nous supposons S, Σ quelconques; elles ont un tétraèdre conjugué commun, unique; nous écrivons donc

$$\begin{aligned} \Sigma &\equiv ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2, \\ S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2. \end{aligned}$$

Nous imaginons un tétraèdre $A_1A_2A_3A_4$ inscrit dans Σ , d'arêtes tangentes à S . J'appelle x_1, y_1, z_1, t_1 les coordonnées de A_1 , de sorte que l'on a

$$(9) \quad ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2 = 0.$$

J'appelle u_1, v_1, w_1, h_1 les coefficients du plan Q déterminé par $A_2A_3A_4$ et j'envisage trois cônes C, C', C'' de sommet commun A_1 ; C et C'' ont pour bases respectives les coniques (S, Q) et (Σ, Q) ; C' est le cône circonscrit de A_1 à S ; il est clair que les coniques c, c', c'' de section de ces cônes par Q (ou tout autre plan) ont la disposition étudiée au

numéro précédent. Je pose donc

$$(10) \quad \begin{cases} P \equiv xx_1 + yy_1 + zz_1 + tt_1, \\ P_1 = S_1 = x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2, \\ Q \equiv u_1x + v_1y + w_1z + h_1t, \\ Q_1 = u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + h_1t_1. \end{cases}$$

On trouve aisément les équations

$$(11) \quad \begin{cases} C \equiv S_1 Q^2 - 2 Q_1 Q P + Q_1^2 S = 0, & C' \equiv SS_1 - P^2 = 0, \\ C'' \equiv Q \Sigma_1 - 2 Q (ax_1x + by_1y + cz_1z + dt_1t) = 0. \end{cases}$$

Dans l'équation de C'' , on a tenu compte de l'équation (9) ou $\Sigma_1 = 0$. Les cônes C et C' sont tangents le long des génératrices joignant A , aux points M, M' où S est coupée par la droite $P = 0, Q = 0$. Le discriminant de $\lambda C + \mu C'$ a donc une racine double $\lambda : \mu = -S_1 : Q_1^2$ et, en effet, on a

$$S_1 C - Q_1^2 C' \equiv (S_1 Q - P Q_1)^2.$$

Donc, pour que C soit inscrit dans ∞^1 angles trièdres inscrits dans C' , il faut que l'autre racine du discriminant soit égale à 4 fois la racine double, donc à $-4S_1 : Q_1^2$. Donc la quadrique d'équation

$$(12) \quad 4S_1 C - Q_1^2 C' \equiv 4(S_1 Q - P Q_1)^2 + 3Q_1^2 (SS_1 - P^2) = 0$$

doit se décomposer en deux plans qui sont les plans tangents communs aux deux cônes C, C' , c'est-à-dire les plans tangents à S en M, M' ; donc le cône (12) a une ligne de points doubles, qui est la conjuguée de MM' relativement à S ; comme la droite MM' est l'intersection des plans $(x_1, y_1, z_1, t_1), (u_1, v_1, w_1, h_1)$, la droite conjuguée joint les points qui ont ces mêmes coordonnées; le premier est automatiquement point double du cône; il suffit donc d'exprimer que le second est point double; les dérivées en x, y, z, t du premier membre de (12) s'annulent donc pour u_1, v_1, w_1, h_1 , ce qui donne

$$4[S_1(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) - (u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + h_1t_1)^2] + 3(u_1x_1 + \dots)^2 = 0.$$

La condition cherchée est

$$(12') \quad \begin{aligned} &4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) \\ &- (u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + h_1t_1)^2 = 0. \end{aligned}$$

Quand A_1 est fixé, cette équation est l'équation tangentielle d'une quadrique se raccordant à S tout le long de la conique de contact (S, C') . Le calcul qui a été fait montre que l'équation exprimant que $\lambda C + \mu C'$ dégénère en deux plans est

$$(13) \quad (\lambda Q_1^2 + \mu S_1)^2 (\lambda Q_1^2 + 4\mu S_1) \\ \equiv 4S_1^3 [4\lambda(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) + \mu]^2 [\lambda(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) + \mu] = 0.$$

En coupant C et C' par un plan quelconque, nous avons donc deux coniques c' , c'' dont le discriminant est, à un facteur près, le premier membre de (13); nous aurons besoin de ce discriminant exact; il suffit donc, d'après (13), d'avoir le discriminant de c' ; prenons pour plan de section le plan $t = 0$, d'où

$$(14) \quad c' \equiv (x^2 + y^2 + z^2)S_1 - (xx_1 + yy_1 + zz_1)^2.$$

On calcule aisément

$$(15) \quad \left\{ \begin{array}{lll} A_1 = S_1 - x_1^2, & A'_1 = S_1 - y_1^2, & A''_1 = S_1 - z_1^2, \\ B_1 = -y_1 z_1, & B'_1 = -z_1 x_1, & B''_1 = -x_1 y_1, \\ a_1 = (S_1 - y_1^2)(S_1 - z_1^2) - y_1^2 z_1^2 = S_1(x_1^2 + t_1^2), \\ a'_1 = S_1(y_1^2 + t_1^2), & a''_1 = S_1(z_1^2 + t_1^2), \\ b_1 = S_1 y_1 z_1, & b'_1 = S_1 z_1 x_1, & b''_1 = S_1 x_1 y_1. \end{array} \right.$$

on en déduit

$$\Delta_1 = A_1 a_1 + B''_1 b'_1 + B'_1 b''_1 = S_1^2 t_1^2.$$

On en conclut que le discriminant de $\lambda c + \mu c'$ est

$$(16) \quad S_1^2 t_1^2 [4\lambda(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) + \mu]^2 [\lambda(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) + \mu].$$

Nous avons besoin maintenant de calculer le discriminant de la conique $\mu c' + c''$, dont le terme en μ^3 est $\mu^3 S_1^2 t_1^2$; nous écrivons

$$(17) \quad c'' \equiv (u_1 x_1 + v_1 y_1 + w_1 z_1 + h_1 t_1)(ax^2 + by^2 + cz^2) \\ - 2(xu_1 + yv_1 + zw_1)(ax_1 x + by_1 y + cz_1 z),$$

de sorte que l'on a

$$(18) \left\{ \begin{array}{l} A_2 = a(Q_1 - 2u_1x_1), \quad A'_2 = b(Q_1 - 2v_1y_1), \quad A''_2 = c(Q_1 - 2w_1z_1), \\ B_2 = -(by_1w_1 + cz_1v_1), \quad B'_2 = -(cz_1u_1 + ax_1w_1), \\ B''_2 = -(ax_1v_1 + by_1u_1), \\ a_2 = bc[(u_1x_1 + h_1t_1)^2 - v_1^2y_1^2 - w_1^2z_1^2] - b^2y_1^2w_1^2 - c^2z_1^2v_1^2 \\ \quad = bc(u_1x_1 + h_1t_1)^2 + bw_1^2(ax_1^2 + dt_1^2) + cv_1^2(ax_1^2 + dt_1^2), \\ b_2 = a^2x_1^2v_1w_1 + bcu_1^2y_1z_1 + a[v_1y_1 + w_1z_1 + h_1t_1][by_1w_1 + cz_1v_1] \\ \quad = -adv_1w_1t_1^2 + bcu_1^2y_1z_1 \\ \quad \quad + abw_1^2y_1z_1 + abh_1w_1y_1t_1 + acv_1^2y_1z_1 + ach_1v_1z_1t_1. \end{array} \right.$$

L'équation de c'' est écrite en tenant compte de la relation $ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2 = 0$ (qui n'intervient ni pour c ni pour c'); de la sorte, dans l'expression de a_2 et b_2 , on a éliminé les termes qui contiennent les carrés a^2, b^2, c^2 en écrivant $b^2y_1^2 = -b(ax_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2)$ par exemple; on a ensuite, par un calcul qui n'exige plus que la réduction des termes semblables, pour discriminant de $\mu c' + c''$,

$$(19) \quad \mu^2 S_1^2 t_1^2 + \mu^2 S_1 t_1^2 [(b+c+d-a)u_1x_1 + (c+d+a-b)v_1y_1 \\ + (d+a+b-c)w_1z_1 + (a+b+c-d)h_1t_1] \\ + \mu t_1^2 \Sigma bc [(u_1x_1 + h_1t_1)^2 + (h_1^2 + u_1^2)(y_1^2 + z_1^2)] \\ + Q_1 t_1^2 abcd \left(\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{t_1^2}{d} \right).$$

On a ainsi mis en évidence le facteur t_1^2 et rétabli, ce facteur supprimé, la symétrie entre les quatre coordonnées. Mais il faut remarquer que l'artifice, si simple qu'il soit, d'écrire $b^2y_1^2 = -b(ax_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2)$..., n'est pas évident *a priori*, qu'il y a bien d'autres combinaisons qui se présentent à l'esprit avec un aspect aussi simple, mais que c'est le seul qui permette, sans effort considérable, de mettre partout t_1^2 en facteur.

Je signale donc une autre méthode qui réussit plus aisément pour ce calcul et qui, une fois achevée, suggère aussitôt de se débarrasser des termes a^2, b^2, c^2, d^2 dans le calcul de la première méthode. Cette nouvelle méthode a aussi l'avantage d'effectuer une vérification précieuse des résultats.

Nous avons envisagé le faisceau *ponctuel* déterminé par C' et C'' ; nous avons remarqué au paragraphe précédent que le faisceau *tangentiel* de ces deux cônes peut être utilisé. Écrivons donc les équations tangentielles de la quadrique S et de la conique (Σ, Q)

$$\begin{aligned} (S) \quad & u^2 + v^2 + w^2 + h^2 = 0, \\ (\Sigma, Q) \quad & \left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} + \frac{h^2}{d} \right) \left(\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{h_1^2}{d} \right) \\ & - \left(\frac{uu_1}{a} + \frac{vv_1}{b} + \frac{ww_1}{c} + \frac{hh_1}{d} \right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Le cône circonscrit de A_1 à la quadrique du faisceau tangentiel $MS + (\Sigma, Q)$ engendre le faisceau tangentiel de cônes en question et dégénère en deux droites quand la quadrique passe en A_1 ; exprimant ce fait, on a une équation de degré 3 en M qui a pour racines des quantités proportionnelles aux inverses des racines du discriminant de $\mu c' + c''$. Écrivons donc l'équation

$$\begin{aligned} (20) \quad & M(u^2 + v^2 + w^2 + h^2) \\ & + \left(\frac{u^2}{a} + \frac{v^2}{b} + \frac{w^2}{c} + \frac{h^2}{d} \right) \left(\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{h_1^2}{d} \right) \\ & - \left(\frac{uu_1}{a} + \frac{vv_1}{b} + \frac{ww_1}{c} + \frac{hh_1}{d} \right)^2 = 0, \end{aligned}$$

en posant pour abréger

$$(21) \quad r \equiv \frac{uu_1}{a} + \frac{vv_1}{b} + \frac{ww_1}{c} + \frac{hh_1}{d}, \quad r_1 \equiv \frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{h_1^2}{d}.$$

L'équation ponctuelle des quadriques (20) s'obtient en éliminant u, v, w, h, r, ρ entre les équations

$$(22) \quad \left\{ \begin{aligned} & \frac{x}{Mu + \frac{u}{a}r_1 - \frac{u_1}{a}r} = \frac{y}{Mv + \frac{v}{b}r_1 - \frac{v_1}{b}r} \\ & = \frac{z}{Mw + \frac{w}{c}r_1 - \frac{w_1}{c}r} = \frac{t}{Mh + \frac{h}{d}r_1 - \frac{h_1}{d}r} = \frac{1}{\rho}, \\ & ux + vy + wz + ht = 0, \\ & \frac{uu_1}{a} + \frac{vv_1}{b} + \frac{ww_1}{c} + \frac{hh_1}{d} - r = 0. \end{aligned} \right.$$

Les rapports de tête donnent u, v, w, h sous forme d'expressions linéaires et homogènes en r et ρ ; portant dans les deux dernières équations, on a aussitôt l'équation cherchée (où nous remplaçons x, y, z, t par x_1, y_1, z_1, t_1)

$$(23) \quad \left[\Sigma \left(\frac{\frac{u_1^2}{a^2}}{M + \frac{r_1}{a}} \right) - 1 \right] \Sigma \left(\frac{x_1^2}{M + \frac{r_1}{a}} \right) - \left[\Sigma \left(\frac{\frac{u_1 x_1}{a}}{M + \frac{r_1}{a}} \right) \right]^2 = 0.$$

Cette équation, en chassant le dénominateur, devient

$$(24) \quad x_1^2 \left[\left(M + \frac{r_1}{b} \right) \left(M + \frac{r_1}{c} \right) \left(M + \frac{r_1}{d} \right) - \frac{v_1^2}{b^2} \left(M + \frac{r_1}{c} \right) \left(M + \frac{r_1}{d} \right) - \frac{w_1^2}{c^2} \left(M + \frac{r_1}{b} \right) \left(M + \frac{r_1}{d} \right) - \frac{t_1^2}{d^2} \left(M + \frac{r_1}{b} \right) \left(M + \frac{r_1}{c} \right) \right] + \dots + \frac{2 u_1 v_1}{ab} x y \left(M + \frac{r_1}{c} \right) \left(M + \frac{r_1}{d} \right) + \dots = 0$$

ou encore

$$M^3 S_1 + M^2 [\dots] + \frac{r_1}{abcd} Q_1 [(b+c+d-a)u_1 x_1 + \dots] M + \frac{r_1^2}{abcd} Q_1^2 = 0$$

et l'on voit, par comparaison avec (19), que l'on peut poser

$$M = \frac{k}{\mu}, \quad k = \frac{r_1 Q_1}{S_1}.$$

Le calcul est sensiblement plus aisé que celui de la première méthode.

Il reste, maintenant, à trouver le discriminant de $\lambda c + c''$; il suffit de faire intervenir le faisceau ponctuel des quadriques $LS + \Sigma$; la section d'une telle quadrique par le plan Q se décompose, quand la quadrique est tangente au plan; cette section n'est d'ailleurs autre que la conique $L(hc) + kc''$ où h, k sont certains facteurs numériques à déterminer. On a l'équation de degré 3 en L

$$\frac{u_1^2}{a+L} + \frac{v_1^2}{b+L} + \frac{w_1^2}{c+L} + \frac{h_1^2}{d+L} = 0$$

ou rendant entier et ordonnant

$$(25) \quad L^3(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) + L^2[u_1^2(b + c + d) + \dots] \\ + L[u_1^2(bc + cd + db) + \dots] + abcd\left(\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{h_1^2}{d}\right) = 0.$$

La condition pour que la conique c'' ou (Σ, Q) soit circonscrite à ∞^1 triangles circonscrits à c ou (S, Q) est donc, d'après la règle indiquée,

$$(26) \quad [u_1^2(b + c + d) + \dots]^2 \\ - 4(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2)[u_1^2(bc + cd + db) + \dots] = 0.$$

C'est l'équation tangentielle d'une surface W de classe 4 à laquelle sont tangents les plans des faces des tétraèdres cherchés. Il est important d'avoir les plans tangents communs à W et S ou à W et Σ . Pour les premiers, la forme même d'équation de W prouve qu'elle se raccorde à S tout le long de la courbe de contact de S et de la développable définie par les équations

$$(27) \quad \begin{cases} u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2 = 0, \\ (b + c + d)u_1^2 + \dots = 0, \end{cases}$$

équations qui se remplacent aussitôt par

$$(27') \quad \begin{cases} u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2 = 0, \\ au_1^2 + bv_1^2 + cw_1^2 + dh_1^2 = 0. \end{cases}$$

On a ainsi à envisager les plans tangents communs à S et à la réciproque de Σ vis-à-vis de S : les points de contact de S et de la développable sont manifestement les points communs à S et Σ . Ceci est bien d'accord avec nos prévisions; un tel plan donne une conique c ou (S, Q) décomposée en deux droites, qui doivent se couper en un point de c'' ; ce point est celui qui a été choisi sur la quadrique (S, Σ) .

D'autre part les plans tangents communs à W et Σ coupent Σ suivant deux droites, dont l'une est tangente à S; la réciproque est évidente, d'après nos explications du paragraphe précédent : *la surface W contient donc les génératrices de Σ tangentes à S, génératrices dont on sait qu'il en existe quatre dans chaque système (S et Σ étant quelconques).*

Ces résultats prouvent que si S et Σ sont *quelconques*, W ne se décompose pas; car elle se décomposerait en deux morceaux se croisant suivant la biquadratique (S, Σ) indécomposée; chaque morceau serait de classe 2, donc une quadrique; cette quadrique devrait contenir une des 8 génératrices indiquées sur Σ , donc coïncider avec Σ , ce qui n'a pas lieu.

Si Σ se raccorde avec S tout le long d'une conique, toute génératrice de Σ est tangente à S , donc tout plan tangent à Σ est aussi tangent à W qui se décompose alors en Σ et une quadrique du faisceau (ponctuel et tangentiel) S, Σ . Ce cas est caractérisé par $a = b = c$, et l'on voit aussitôt que l'équation tangentielle de W est homogène et du second degré en $(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$ et (h_1^2) .

Si Σ et S ont quatre génératrices communes ($a = b, c = d$), W se décompose en deux quadriques du faisceau ponctuel tangentiel S, Σ ; car l'équation de W est homogène et de degré 2 en $(u_1^2 + v_1^2)$ et $(w_1^2 + h_1^2)$.

Si maintenant nous revenons à l'équation (25), le premier membre est le discriminant de la conique $L(hc) + kc''$, c'est-à-dire

$$(28) \quad L^3 h^3 \Delta + L^2 h^2 k \Theta_{02} + L h k^2 \Theta_{20} + k^3 \Delta''$$

Nous connaissons déjà Δ et Δ'' d'après les calculs antérieurs : les formules (16) et (19) donnent

$$\Delta = 16 S_1^2 t_1^2 (u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2)^3,$$

$$\Delta'' = Q_1 t_1^2 abcd \left(\frac{u_1^2}{a} + \frac{v_1^2}{b} + \frac{w_1^2}{c} + \frac{h_1^2}{d} \right).$$

On a donc, en comparant (25) et (28) et tenant compte de (12),

$$(29) \quad \begin{cases} h^3 = \frac{1}{16 S_1^2 t_1^2 (u_1^2 + \dots)^2} = \frac{1}{Q_1^3 t_1^2}, & k^3 = \frac{1}{Q_1 t_1^2}, \\ h^2 k \Theta_{02} = u_1^2 (b + c + d) + \dots, & h^6 k^3 = \frac{1}{Q_1^3 t_1^6}, \\ h k^2 \Theta_{20} = u_1^2 (bc + cd + db) + \dots & h^3 k^6 = \frac{1}{Q_1^6 t_1^6}. \end{cases}$$

On en déduit

$$(30) \quad \begin{cases} \Theta_{02} = [u_1^2 (b + c + d) + \dots] [u_1 x_1 + \dots]^3 t_1^2, \\ \Theta_{20} = [u_1^2 (bc + cd + db) + \dots] [u_1 x_1 + \dots]^2 t_1^2. \end{cases}$$

Nous avons trouvé d'autre part (formules 16 et 19)

$$(31) \quad \begin{cases} \Theta_{12} = S_1[(b+c+d-a)u_1x_1+\dots]t_1^2, & \Delta' = S_1^2t_1^2, \\ \Theta_{01} = 24S_1^2t_1^2[u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2]^2. \end{cases}$$

Nous devons écrire

$$3\Theta_{02} : \Theta_{01} = \Theta_{12} : \Delta'.$$

Cela donne, toujours tenant compte de l'équation (12),

$$(32) \quad \begin{aligned} & 2[(b+c+d-a)u_1x_1+\dots][u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2] \\ & - [u_1^2(b+c+d)+\dots][u_1x_1+\dots] = 0. \end{aligned}$$

Pour la clarté, je récapitule les équations *nécessaires et suffisantes*

$$(E) \quad \left\{ \begin{aligned} & ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2 = 0, \\ & [u_1^2(b+c+d)+\dots]^2 \\ & \quad - 4[u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2][u_1^2(cd+db+bc)+\dots] = 0, \\ & 2[(b+c+d-a)u_1x_1+\dots][u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2] \\ & \quad - [u_1^2(b+c+d)+\dots][u_1x_1+\dots] = 0, \\ & [u_1x_1+v_1y_1+w_1z_1+h_1t_1]^2 \\ & \quad - 4(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)(u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2) = 0. \end{aligned} \right.$$

Cette forme est commode pour trouver les points (x_1, y_1, z_1, t_1) correspondant à un plan tangent (u_1, v_1, w_1, h_1) de W ; on a trois équations en (x_1, y_1, z_1, t_1) dont l'une représente un plan et les deux autres deux quadriques; *il y a donc en général 4 points A_1 et par suite 4 tétraèdres correspondant à ce plan*; comme les équations considérées en x_1, y_1, z_1, t_1 sont manifestement indépendantes *dans le cas général* pour S, Σ , nous avons obtenu le résultat essentiel : S, Σ étant *quelconques*, elles admettent ∞^2 *tétraèdres de l'espèce cherchée*. Les seuls cas particuliers qui puissent arriver c'est que le plan (u_1, v_1, w_1, h_1) donne ∞^1 points A_1 , répartis sur une conique ou une droite (je donnerai l'exemple d'une conique sans avoir poussé jusqu'au bout l'étude analytique de cette question) ou bien que, le plan (u_1, v_1, w_1, h_1) donnant un seul point A_1 , ce couple (A_1, Q) donne ∞^1 tétraèdres; ce cas sera élucidé complètement.

Si, au contraire, on donne A_1 pour chercher le plan (u_1, v_1, w_1, h_1) correspondant, il y a lieu de modifier la forme des équations (E) pour

réduire les trois dernières au degré 2 en u_1, v_1, w_1, h_1 . On peut en effet mettre l'ensemble des deux dernières équations (E) sous la forme

$$(32') \quad \frac{(b+c+d)u_1^2+\dots}{2[(b+c+d-a)u_1x_1+\dots]} = \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2}{u_1x_1+v_1y_1+w_1z_1+h_1t_1} \\ = \frac{u_1x_1+v_1y_1+w_1z_1+h_1t_1}{4(x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2)}.$$

En égalant les rapports extrêmes on a une équation de degré 2 en (u_1, v_1, w_1, h_1) qui peut remplacer l'une de ces deux équations finales de (E). D'autre part, le carré du premier rapport (32) est égal au produit des deux autres, d'où

$$(33) \quad \frac{[(b+c+d)u_1^2+\dots]^2}{[(b+c+d-a)u_1x_1+\dots]^2} = \frac{u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2}{x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2}.$$

Mais alors dans la seconde équation (E) nous remplaçons

$$[u_1^2(b+c+d)+\dots]^2 \quad \text{et} \quad (u_1^2+v_1^2+w_1^2+h_1^2)$$

par des quantités proportionnelles fournies par (33) et nous avons une équation de degré 2 en u_1, v_1, w_1, h_1 . On a ainsi le nouveau système

$$(E_1) \left\{ \begin{array}{l} ax_1^2 + by_1^2 + cz_1^2 + dt_1^2 = 0, \\ (u_1x_1 + v_1y_1 + w_1z_1 + h_1t_1)^2 \\ - 4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) = 0, \\ [(b+c+d-a)u_1x_1+\dots]^2 \\ - 4(x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + t_1^2)[u_1^2(cd+db+bc)+\dots] = 0, \\ 2[(b+c+d)u_1^2+\dots][x_1^2+y_1^2+z_1^2+t_1^2] \\ - [(b+c+d-a)u_1x_1+\dots][u_1x_2+\dots] = 0. \end{array} \right.$$

On vérifie aisément que l'on remonte de (E_1) à (E). Cette forme prouve qu'à un point A_1 choisi arbitrairement sur Σ correspondent huit plans, et par suite huit tétraèdres (S et Σ étant quelconques). Les seuls cas particuliers qui puissent se présenter c'est qu'au point A_1 correspondent ∞^1 plans (enveloppant, soit une développable de classe 4, soit une dégénérescence d'une telle développable) ou que le point A_1 ait un plan correspondant donnant ∞^1 tétraèdres : on voit que ce dernier cas est nécessairement le plus intéressant, puisqu'il s'offre de deux points de vue différents.

4. **Examen a priori des cas particuliers.** — Une autre façon d'envisager le problème serait la suivante : nous choisissons un point A_1 de Σ ; le cône C' recoupe Σ suivant une biquadrique ayant A_1 pour point double, *décomposée ou non*. Si cette courbe n'est pas décomposée, c'est une biquadrique \mathcal{B} unicursale; nous pouvons déterminer sur elle trois points A_2, A_3, A_4 par leurs paramètres t_2, t_3, t_4 et exprimer que chaque corde A_2A_3, A_3A_4, A_2A_4 est tangente à S , ce qui donne trois équations pour trois inconnues et, en général, 8 solutions; la relation entre t_2 et t_3 par exemple, est de degré 4 en t_2 ou t_3 séparément et symétrique; car le cône analogue à C' , de sommet A_2 , coupe \mathcal{B} en A_1 comptant pour 2, en A_3 pour 2 aussi. Il peut arriver qu'un tel système ait une infinité de solutions, mais cela me paraît assez peu probable (\mathcal{B} étant indécomposée).

Les points pour lesquels l'intersection de Σ et C' se décompose sont les points situés sur l'une des 8 génératrices de Σ tangentes à S ; si A_1 n'est pas en l'un des 16 points spéciaux où se croisent 2 génératrices de cette sorte, de système différent, on a une intersection réduite à la génératrice G et à une cubique gauche Γ ; les considérations précédentes réapparaissent; mais on peut supposer A_2, A_3, A_4 sur Γ tous les trois, ou un sur G et deux sur Γ et voir si l'on a une infinité de tétraèdres.

Les 16 points qui viennent d'être signalés, points que j'appellerai $\mathcal{A}_1, \mathcal{A}_2, \mathcal{A}_3, \dots, \mathcal{A}_{16}$, sont intéressants parce que la courbe (Σ, C') relative à \mathcal{A}_1 se compose des deux génératrices G', G'' issues de \mathcal{A}_1 , puis d'une conique γ ; nous verrons qu'en *général*, il correspond au point \mathcal{A}_1 huit tétraèdres non dégénérés; deux ont un sommet sur G' et deux sur γ ; deux ont un sommet sur G'' et deux sur γ ; les autres ont en dehors de \mathcal{A}_1 , un sommet sur G' , un autre sur G'' , le dernier sur γ . Mais en *particularisant les quadriques S, Σ* , il peut arriver qu'il y ait ∞^1 tétraèdres ayant trois sommets sur γ : il suffit d'exprimer que le plan de γ touche W ; c'est d'ailleurs comme on le voit aisément, le seul cas où l'on puisse obtenir un couple $(x_1, y_1, z_1, t_1), (u_1, v_1, w_1, h_1)$ fixe donnant ∞^1 tétraèdres. Il peut arriver, *pourvu que S, Σ soient bitangentes et satisfassent encore à une autre relation, que l'on trouve pour \mathcal{A}_1 une infinité de tétraèdres dont un sommet décrit γ , et les deux autres G' et G'' respectivement.*

Enfin il y a à parler des dégénérescences de nos trièdres qui peuvent se présenter, soit si A_1 vient sur la courbe gauche (S, Σ) , soit sur une des génératrices de Σ tangentes à S .

En dernier lieu, les cas particuliers proviennent des dispositions particulières de S, Σ : *double contact, intersection décomposée en quatre droites, conique de raccord* pour rester dans le cas où il y a un tétraèdre conjugué commun (qui n'est plus unique). Et puis il y aurait les cas de contact unique, d'intersection réduite à une génératrice et une cubique, ou à une conique et deux droites concourantes. Nous n'aborderons pas cette étude.

Nous citerons d'autres cas particuliers : *par exemple tétraèdres de l'espèce en jeu construits sur deux génératrices de Σ* , ce qui exige une relation entre S et Σ .

5. Étude des points \mathcal{A}_1 , soit pour un couple S, Σ quelconque soit dans le cas où \mathcal{A}_1 donne ∞^1 tétraèdres. — Au point de vue esthétique, c'est une qualité pour un mémoire de suivre constamment la même méthode ; pourtant, pour éviter des calculs pénibles, nous allons emprunter une autre voie, tout au moins provisoirement.

Si nous considérons un tétraèdre T , une quadrique S tangente aux arêtes de T , une quadrique Σ circonscrite à T , nous pouvons, avec T comme tétraèdre de référence écrire

$$(34) \quad \begin{cases} S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt = 0, \\ \Sigma \equiv 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt + 2C''zt = 0. \end{cases}$$

La forme de l'équation S montre que si T et S sont réels, la quadrique S est une quadrique non réglée. Si nous formons le discriminant Δ de la quadrique $S + \lambda\Sigma$, les racines de Δ s'expriment en fonction de B, B', B'', C, C', C'' ; prouver qu'il n'y a aucune relation nécessaire *a priori* entre S et Σ , revient à prouver qu'il n'y a aucune relation homogène, indépendante de B, B', B'', C, C', C'' entre ces 4 racines. Ce fait résulte des explications du n° 3, mais peut se démontrer aussi de la façon suivante : s'il existait une telle relation entre les racines, cette relation aurait encore lieu même pour $C' = C'' = 0$; si nous montrons que, pour $C' = C'' = 0$, il n'existe aucune relation, la proposition sera établie.

Mais alors nous revenons aux points \mathcal{A}_1 dont nous avons l'air de

nous être écarté; car $C' = C'' = 0$, sont les conditions pour que Σ contienne les deux arêtes $x = y = 0$ et $x = z = 0$ de T. Et alors nous aurons même démontré que, pour un couple Σ, S *quelconque* et pour l'un des 16 points \mathcal{A} de ce couple, *il existe nécessairement au moins un tétraèdre non dégénéré, dont deux arêtes sont les génératrices de Σ issues de \mathcal{A}* ; car si cette propriété n'était pas vraie, il serait impossible d'écrire les équations (34) avec $C' = C'' = 0$.

Nous écrivons donc ($C' = C'' = 0$)

$$(35) \quad S + \lambda \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(\lambda B - 1)yz + 2(\lambda B' - 1)zx \\ + 2(\lambda B'' - 1)xy + 2(\lambda C - 1)xt - 2yt - 2zt \\ \equiv [t + (\lambda C - 1)x - y - z]^2 + (2\lambda C - \lambda^2 C^2)x^2 \\ + 2(\lambda B - 2)yz + 2[\lambda(B' + C) - 2]zx + 2[\lambda(B'' + C) - 2]xy.$$

On obtient donc au signe près le discriminant de $S + \lambda \Sigma$ sous la forme

$$(36) \quad \Delta = 2(\lambda B - 2)[\lambda(B' + C) - 2][\lambda(B'' + C) - 2] \\ - (2\lambda C - \lambda^2 C^2)(\lambda B - 2)^2.$$

Remarquons que l'une des racines de Δ est $\frac{2}{B}$ (et que cette racine serait double si l'on avait $B = B' + C = B'' + C$).

Nous allons montrer que l'on peut identifier le polynôme, de degré 4 en λ , Δ avec un polynôme donné *a priori*

$$(37) \quad \lambda^4 \delta^2 + 2\lambda^3 \gamma - 4\beta \lambda^2 + 8\alpha \lambda - 16.$$

Cela revient à écrire le système

$$(38) \quad \begin{cases} (B' + B'') + B + C = \alpha, & (B + C)(B' + B'') + B'B'' = \beta, \\ B[B'B'' + C(B' + B'') - C^2 - BC] = \gamma, & BC = \delta, \end{cases}$$

où $B, C, B' + B'', B'B''$ sont les 4 inconnues à calculer en fonction de $\alpha, \beta, \gamma, \delta$. On a aussitôt

$$(39) \quad \begin{cases} B' + B'' = \alpha - B - \frac{\delta}{B}, & B'B'' = \beta - \left(B + \frac{\delta}{B}\right)\left(\alpha - B - \frac{\delta}{B}\right), & C = \frac{\delta}{B}, \\ B^4 - \alpha B^3 + \beta B^2 - \gamma B - \delta^2 = 0. \end{cases}$$

La dernière équation est $\Delta\left(\frac{2}{B}\right) = 0$, qui est prévue *a priori*; les autres

inconnues se calculent ensuite en fonctions de $B, \alpha, \beta, \gamma, \delta$. Conclusion : étant donné deux quadriques S, Σ *quelconques*, on commence par rendre le discriminant de S égal à 16 (en multipliant les coefficients de S par un facteur convenable. Le discriminant de $S + \lambda \Sigma$, changé de signe, est un polynome (37); $\frac{2}{B}$ est racine de ce polynome, ce qui donne pour B quatre valeurs possibles; pour chacune les formules de la première ligne (39) donnent $B' + B'', B'B'', C$ et nous avons ainsi huit réductions possibles de S, Σ à la forme (34) (avec $C' = C'' = 0$); on a en effet 4 choix pour B , 2 choix pour δ (donné par une racine carrée); mais ce procédé n'indique pas combien de tétraèdres, sur une même quadrique Σ , peuvent correspondre à une solution du système (39).

Nous savons que le couple Σ, S étant *quelconque*, il existe 16 points \mathcal{A} ; dans chaque face du tétraèdre conjugué commun à S, Σ il existe 4 points \mathcal{A} , interchangeable par les homologies involutives qui ont pour pôle un sommet du tétraèdre conjugué et pour plan directeur la face opposée : de la sorte un tétraèdre de l'espèce étudiée ici s'échange par une telle homologie avec un autre. Modifions donc encore notre méthode; nous avons écrit

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt = 0, \\ \Sigma &\equiv 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt = 0. \end{aligned}$$

Essayons une transformation

$$(40) \quad x = \alpha \bar{x}, \quad y = \alpha' \bar{x} + \beta' \bar{y}, \quad z = \alpha'' \bar{x} + \gamma'' \bar{z}, \quad t = \alpha''' \bar{x} + \beta''' \bar{y} + \gamma''' \bar{z} + \delta''' \bar{t}$$

assujettie à donner les nouvelles équations

$$\begin{aligned} S &\equiv \alpha^2 \bar{x}^2 + \beta^2 \bar{y}^2 + \gamma^2 \bar{z}^2 + \delta^2 \bar{t}^2 - 2\beta\gamma \bar{y}\bar{z} - 2\alpha\gamma \bar{z}\bar{x} \\ &\quad - 2\alpha\beta \bar{x}\bar{y} - 2\alpha\delta \bar{x}\bar{t} - 2\beta\delta \bar{y}\bar{t} - 2\gamma\delta \bar{z}\bar{t}, \\ \Sigma &\equiv 2\bar{B}\bar{y}\bar{z} + 2\bar{B}'\bar{z}\bar{x} + 2\bar{B}''\bar{x}\bar{y} + 2\bar{C}\bar{x}\bar{t}, \end{aligned}$$

de sorte que le nouveau tétraèdre de référence soit encore circonscrit à Σ , d'arêtes tangentes à S et contienne les génératrices $x = y = 0$, $x = z = 0$ de Σ déjà en jeu. Il faut tenir compte de la condition $\alpha\beta'\gamma''\delta''' \neq 0$. On trouve sans peine les équations suivantes ⁽¹⁾, néces-

⁽¹⁾ En faisant ce calcul, il est bon de se rappeler que les quantités a, b, c, d se déter-

saies et suffisantes ($\alpha, \alpha', \alpha'', \alpha'''$ forment un groupe de 4 inconnues homogènes; de même β', β'' , puis γ'', γ''' ; δ''' est arbitraire)

$$(41) \quad \begin{cases} B\alpha'\alpha'' + B'\alpha''\alpha + B''\alpha\alpha' + C\alpha\alpha'' = 0, \\ \beta'''\gamma''' - \beta'\gamma''' - \beta''\gamma'' = 0, \\ \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0, \\ \beta'''(\alpha''' - \alpha - \alpha' - \alpha'') - \beta'(\alpha''' - \alpha') = 0, \\ \gamma'''(\alpha''' - \alpha - \alpha' - \alpha'') - \gamma''(\alpha''' - \alpha'') = 0. \end{cases}$$

On peut donc prendre

$$(42) \quad \beta''' = \alpha''' - \alpha', \quad \gamma''' = \alpha''' - \alpha'', \quad \beta' = \gamma'' = \alpha''' - \alpha - \alpha' - \alpha''.$$

En portant ces valeurs de $\beta''', \gamma''', \beta', \gamma''$ dans la seconde équation (41), on trouve l'équation

$$\alpha'''^2 - 2(\alpha + \alpha' + \alpha'')\alpha''' + \alpha'^2 + \alpha''^2 = 0$$

qui, tenu compte de $\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0$, donne

$$\alpha''' = \alpha' + \alpha'' \quad \text{ou} \quad \alpha''' = 2\alpha + \alpha' + \alpha''.$$

Remarquons que la première équation (41), si l'on en retranche le produit $B(\alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha')$ qui est nul, devient en supprimant le facteur α , qui n'est pas nul, une équation de degré 1 seulement; on a finalement à résoudre l'un ou l'autre des systèmes

$$(e_1) \quad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0, \\ (B' - B)\alpha'' + (B'' - B)\alpha' + C(\alpha' + \alpha'') = 0, \\ \alpha''' = \alpha' + \alpha'', \\ \beta''' = \alpha'', \quad \gamma''' = \alpha', \quad \beta' = \gamma'' = -\alpha; \end{cases}$$

$$(e_2) \quad \begin{cases} \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0, \\ (B' - B)\alpha'' + (B'' - B)\alpha' + C(2\alpha + \alpha' + \alpha'') = 0, \\ \alpha''' = 2\alpha + \alpha' + \alpha'', \\ \beta''' = 2\alpha + \alpha'', \quad \gamma''' = 2\alpha + \alpha', \quad \beta' = \gamma'' = \alpha, \end{cases}$$

et chacun fournit deux tétraèdres (le système e_1 fournit d'abord le

minent de préférence par la considération des termes rectangles en $\overline{x\bar{y}}, \overline{x\bar{z}}, \dots$, plutôt que par les carrés $\overline{x^2}, \overline{y^2}, \dots$, cela afin d'éviter l'extraction de la racine carrée d'une quantité (d'ailleurs carré exact), extraction qui laissè l'incertitude du signe.

tétraèdre de départ, puis un autre; le système e_2 en fournit deux autres).

Pour le système (e_1) il se produit une particularité : si l'on n'a pas à la fois $B' = B'' = B - C$, la seconde équation e_1 fournit, soit le premier tétraèdre ($\alpha' = \alpha'' = \alpha''' = \beta''' = \gamma''' = 0$), soit $\alpha' = \beta' - B + C$, $\alpha'' = B - \beta'' - C$, c'est-à-dire un second tétraèdre. Mais si l'on a $\beta' = \beta'' = B - C$, cas prévu *a priori*, (racine double pour Δ), on peut prendre α' , α'' arbitrairement, autrement dit le point $\bar{x} = \bar{1}$, $\bar{y} = \bar{z} = \bar{t} = 0$ sommet du tétraèdre nouveau, ou $x = \alpha$, $y = \alpha'$, $z = \alpha''$, $t = \alpha'''$, est arbitraire sur la conique γ d'équations

$$(43) \quad yz + zx + xy = 0, \quad t - y - z = 0$$

suivant laquelle le cône C' , de sommet $(0, 0, 0, 1)$ ou \mathcal{A}_1 circonscrit à S , recoupe Σ [qui a pour équations ici

$$2B(yz + zx + xy) + 2Cx(t - y - z) = 0].$$

Conformément aux prévisions, on a un cas particulier fournissant ∞^1 tétraèdres de même sommet \mathcal{A} , les sommets complémentaires étant variables, un sur G' , un sur G'' , un sur γ ; ce cas particulier exige deux relations a priori entre S et Σ , et en particulier que S et Σ soient bitangentes

Remarquons que si ce cas très particulier est réalisé, le système (e_2) ne donne plus rien; car la seconde équation (e_2) devient $\alpha = 0$ qui est inacceptable.

Analysons en détail le cas particulier qui vient d'être découvert; on a

$$(44) \quad \left\{ \begin{array}{l} S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt, \\ \Sigma \equiv 2B(yz + zx + xy) + 2Cx(t - y - z), \\ S + \frac{2}{B}\Sigma \equiv (t - x - y - z)^2 + \frac{4C}{B}x(t - y - z). \end{array} \right.$$

L'équation (44) prouve que S et Σ sont bitangentes, puisque, au second membre, nous avons une expression homogène en x et $t - y - z$; en l'égalant à zéro, on a les plans des deux coniques com-

munes à S et Σ

$$t - y - z = x \left[1 - \frac{2C}{B} \pm 2 \sqrt{\frac{C}{B} \left(\frac{C}{B} - 1 \right)} \right].$$

Au cas même où $C = B$ on a une conique de raccord.

Traisons d'abord le cas du double contact; nous allons chercher les deux relations qui lient les racines de l'équation en λ du faisceau $S + \lambda \Sigma = 0$; si $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4$ sont ces racines on a, puisque $B' + C = B'' + C = B$,

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \frac{2}{B}$$

et la forme (36) de Δ donne

$$\Delta = (\lambda B - 2)^2 [\lambda^2 C^2 + 2\lambda(B - C) - 4].$$

Par suite

$$\frac{1}{\lambda_3} + \frac{1}{\lambda_4} = \frac{1}{2}(B - C) = \frac{1}{\lambda_1} - \frac{C}{2}, \quad \frac{1}{\lambda_3 \lambda_4} = -\frac{C^2}{4}.$$

L'élimination de C est immédiate et donne

$$(45) \quad \left(\frac{1}{\lambda_1} - \frac{1}{\lambda_3} - \frac{1}{\lambda_4} \right)^2 + \frac{1}{\lambda_3 \lambda_4} = 0.$$

Or avec les notations du paragraphe 3, a, b, c, d sont les nombres $\frac{-1}{\lambda_1}, \frac{-1}{\lambda_2}, \frac{-1}{\lambda_3}, \frac{-1}{\lambda_4}$. On a donc trouvé ainsi, sans difficulté, le cas particulier où S et Σ sont bitangentes et où chacun des points \mathcal{A} possédés par Σ (il y en a, cette fois, deux seulement) donne une infinité de tétraèdres dont deux arêtes sont les génératrices G', G'' issues de \mathcal{A} ; \mathcal{A} est sommet commun à tous ces tétraèdres, et le plan G', G'' supporte une face de tous ces tétraèdres; un sommet variable est sur G' , un autre sur G'' , un autre sur γ . Le plan de la face opposée à \mathcal{A} enveloppe un cône, et le sommet opposé à la face $G'G''$ décrit la conique γ . Ce dernier résultat a été déjà établi [formule (43)]; quant au plan opposé à \mathcal{A} , il a pour équation, avec les coordonnées de ce paragraphe

$$(\alpha' + \alpha'')^2 x + \alpha''(\alpha' + \alpha'')y + \alpha'(\alpha' + \alpha'')z - \alpha'\alpha''t = 0$$

ou, plus simplement,

$$(46) \quad (1 + m)^2 x + m(1 + m)y + (1 + m)z - mt = 0.$$

Le cône enveloppe a pour équation

$$(47) \quad (2x + y + z + t)^2 - 4(x + y)(x + z) = 0$$

et a pour sommet $(1, -1, -1, 0)$.

[Si l'on rapporte les quadriques S, Σ de cas spécial à un de leurs tétraèdres communs (qui sont ici en nombre infini) on peut écrire

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + cz^2 + dt^2 = 0 \end{aligned}$$

et la condition entre c, d est

$$(48) \quad (1 - c - d)^2 + cd = 0.$$

Nous aurons besoin de cette relation plus tard.]

Les résultats qui précèdent subsistent même si l'on a $B = C$, de sorte que l'on a une conique de raccord; on a dans ce cas

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2zt = 0, \\ \Sigma &\equiv 2(yz + xt) = 0, \\ S + 2\Sigma &\equiv (x + t - y - z)^2. \end{aligned}$$

Tous les points de Σ (sauf ceux qui sont sur la conique de raccord) sont interchangeables entre eux, S et Σ restant invariables, dans leur ensemble, par une homographie convenable (qui laisse même la possibilité de laisser invariable un point de Σ , et c'est ce qui explique pourquoi chaque point de Σ en cas de tétraèdres *non dégénérés*, donne ∞^1 tétraèdres).

Nous écrivons ici si l'on prend un tétraèdre conjugué commun pour tétraèdre de référence

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2. \end{aligned}$$

Nous avons remarqué qu'avec un tétraèdre réel et des quadriques réelles, S doit être non réglée; ici nous avons supposé Σ réglée; donc, pour être dans le cas réel que nous venons d'étudier, il suffit de rem-

placer z par iz et l'on a

$$S \equiv x^2 + y^2 - z^2 + t^2,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 - z^2 - t^2.$$

Ce cas sera analysé à part un peu plus loin.

Revenons maintenant au cas S, Σ *quelconques*; il y a sur Σ 16 points \mathcal{A} ; pour chacun d'eux nous avons manifesté l'existence de 4 tétraèdres inscrits dans Σ , d'arêtes tangentes à Σ , deux de ces arêtes étant les génératrices G' et G'' . Il est facile de voir qu'il y a nécessairement pour compléter les 8 tétraèdres (relatifs à tout point de Σ , donc aussi à \mathcal{A}), quatre autres tétraèdres : deux ont pour arête G' et non G'' , les deux autres G'' et non G' ; il n'est pas inutile de donner la démonstration (car il aurait pu se faire par exemple que les quatre tétraèdres dont G' et G'' sont arêtes comptassent chacun pour deux). Il suffit de montrer que l'on peut, sans condition spéciale pour le couple S, Σ , réaliser ce cas *a priori*. Écrivons

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt = 0,$$

$$(\Sigma) \quad 2Byz + 2B'zx + 2B''xy + 2Cxt + 2C'yt = 0,$$

Σ contient l'arête $x = y = 0$ tangente à S ; la seconde génératrice issue du sommet $(0, 0, 0, 1)$ sur Σ a pour équations (C et C' sont tous deux non nuls)

$$(49) \quad \frac{x'}{C'} = \frac{y}{-C} = \frac{z(B'C' - BC)}{B''CC'},$$

et elle est tangente à S si l'on a

$$(50) \quad (B' - B'')C' = (B - B'')C.$$

On vérifie qu'il n'y a aucune relation entre les racines de l'équation en λ relative au faisceau $S + \lambda\Sigma$ (ceci est d'ailleurs prouvé par le calcul du paragraphe 11).

6. **Tétraèdres dont deux arêtes opposées sont génératrices de Σ .** — Un faible effort d'imagination suffit pour envisager un tétraèdre T d'arêtes tangentes à une quadrique S et une quadrique Σ admettant deux arêtes opposées de ce tétraèdre comme génératrices. Un tel système (T, S, Σ) dépend de : 12 paramètres pour T , 3 pour S , 3 pour Σ ;

soit 18 au total; mais le système (S, Σ) seul ne dépend que de 17 paramètres. Écrivons en effet

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt = 0, \\ \Sigma &\equiv 2Byz + 2B'zx + 2Cxt + 2C'yt = 0, \end{aligned}$$

Σ contient les arêtes $x = y = 0, z = t = 0$. On a

$$\begin{aligned} S + \lambda \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 + 2(\lambda B - 1)yz + 2(\lambda B' - 1)zx - 2xy \\ &\quad + 2(\lambda C - 1)xt + 2(\lambda C' - 1)yt - 2zt \\ &\equiv [x - y + (\lambda B' - 1)z + (\lambda C - 1)t]^2 + z^2 [2\lambda B' - \lambda^2 B'^2] \\ &\quad + t^2 [2\lambda C - \lambda^2 C^2] + 2[\lambda(B + B') - 2]yz \\ &\quad + 2[\lambda(C + C') - 2]yt - 2zt[\lambda^2 B'C - \lambda(B' + C) + 2]. \end{aligned}$$

On a donc aisément Δ (à un facteur numérique près)

$$\begin{aligned} \Delta &= 2[\lambda(B + B') - 2][\lambda(C + C') - 2][\lambda^2 B'C - \lambda(B' + C) + 2] \\ &\quad + (2\lambda B' - \lambda^2 B'^2)[\lambda(C + C') - 2]^2 \\ &\quad + (2\lambda C' - \lambda^2 C'^2)[\lambda(B + B') - 2]^2 \\ &= -(BC - B'C')^2 \lambda^4 + 2\lambda^3(BC - B'C')(B + C - B' - C') \\ &\quad + 4(B + C)(B' + C')\lambda^2 - 8(B + B' + C + C')\lambda + 16. \end{aligned}$$

Si l'on pose $B + C = s, B' + C' = s', BC = p, B'C' = p'$, on a, en appelant

$$\begin{aligned} S_1 &= \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4, & S_2 &= \lambda_1 \lambda_2 + \dots, \\ S_3 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 + \dots, & S_4 &= \lambda_1 \lambda_2 \lambda_3 \lambda_4. \end{aligned}$$

$$S_1 = \frac{2(s - s')}{p - p'}, \quad S_2 = \frac{-4ss'}{(p - p')^2}, \quad S_3 = \frac{-8(s + s')}{(p - p')^2}, \quad S_4 = \frac{-16}{(p - p')^2}.$$

L'élimination de $p - p'$ fournit

$$S_1^2 : S_4 = -(s - s')^2 : 4, \quad S_2 : S_4 = ss' : 4, \quad S_3 : S_4 = (s + s') : 2.$$

L'élimination de s et s' fournit l'unique relation

$$S_3^2 + (S_1^2 - 4S_2)S_4 = 0.$$

Soient G_1, G_2 les deux génératrices de Σ qui portent les sommets du tétraèdre; si l'on considère l'homologie involutive qui a pour pôle l'un des sommets du tétraèdre conjugué commun et pour plan directeur la face opposée, cette homologie transforme G_1 en une génératrice de même nature, tangente à S , arête d'un nouveau tétraèdre de

la même espèce; en prenant successivement chaque sommet du tétraèdre conjugué, G_1 devient successivement l'une des quatre génératrices de système opposé tangentes à S ; d'après cela, il est clair que s'il existe pour S, Σ un tétraèdre de l'espèce indiquée, il en existe d'autres ayant pour une de leurs arêtes une *quelconque* des huit génératrices de Σ tangentes à S ; mais une fois choisie cette génératrice, il faut choisir convenablement la génératrice (de même système) qui constitue l'arête opposée d'un de ces tétraèdres spéciaux. Dans le cas étudié il y a ∞^1 tétraèdres pour un couple G_1, G_2 associé : on peut prendre un sommet arbitrairement sur G_1 .

On peut avoir un cas encore plus particulier : T, S étant donnés, on peut construire ∞^1 quadriques Σ contenant deux couples d'arêtes opposées de T ; un tel système (T, S, Σ) dépend de $12 + 3 + 1$ ou 16 paramètres et comme il est clair qu'il y a, pour S, Σ , un nombre fini de tels tétraèdres, le couple S, Σ dépend de 16 paramètres. Il suffit d'utiliser les calculs qui précèdent en faisant $B' = C' = 0$; on a alors

$$\Delta = -B^2 C^2 \lambda^4 + 2\lambda^3 BC(B+C) - 8(B+C)\lambda + 16$$

et l'on trouve les deux relations entre les racines de $\Delta(\lambda)$, $S_2 = 0$, $S_3^2 + S_1^2 S_4 = 0$; on sait que la relation $S_2 = 0$ exprime qu'il existe ∞^1 tétraèdres conjugués à S (ou Σ) et d'arêtes tangentes à Σ (ou S).

7. Étude des points $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{16}$. — Nous allons revenir au tétraèdre conjugué commun comme tétraèdre de référence; S et Σ sont supposées *quelconques*.

Les génératrices de Σ tangentes à S se projettent, sur le plan $t = 0$, à partir du point $(0, 0, 0, 1)$ suivant les tangentes communes aux deux coniques

$$(51) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 = 0,$$

$$(52) \quad (a-d)x^2 + (b-d)y^2 + (c-d)z^2 = 0.$$

L'une de ces tangentes a pour équation, dans le plan $t = 0$,

$$(53) \quad x\sqrt{a(a-d)(b-c)} + y\sqrt{b(b-d)(c-a)} + z\sqrt{c(c-d)(a-b)} = 0.$$

Cette équation, dans l'espace, représente un plan tangent à Σ en un

point \mathcal{A} , de coordonnées

$$(54) \quad \sqrt{\frac{(a-d)(b-c)}{a}}, \quad \sqrt{\frac{(b-d)(c-a)}{b}}, \quad \sqrt{\frac{(c-d)(a-b)}{c}}, \quad 0,$$

En prenant toutes les déterminations des radicaux, on a au total 4 points \mathcal{A} dans le plan $t = 0$; on aurait de même les autres, dans les plans $x = 0$, ou $y = 0$, ou $z = 0$. Le cône C' circonscrit à S à partir du point \mathcal{A} , donné par (54), a pour équation

$$C' \equiv (x^2 + y^2 + z^2 + t^2) \frac{d(b-c)(c-a)(a-b)}{abc} - \left[x \sqrt{\frac{(a-d)(b-c)}{a}} + y \sqrt{\frac{(b-d)(c-a)}{b}} + z \sqrt{\frac{(c-d)(a-b)}{c}} \right]^2 = 0.$$

L'identité

$$(55) \quad ax^2 + by^2 + cz^2 + dt^2 - \frac{abcC'}{(b-c)(c-a)(a-b)} = \left[x \sqrt{a(a-d)(b-c)} + y \sqrt{b(b-d)(c-a)} + z \sqrt{c(c-d)(a-b)} \right] (ux + vy + wz)$$

donne, par comparaison des termes en x^2 , y^2 , z^2 , les coefficients

$$(56) \quad \begin{cases} u = \frac{(b+c-a)(a-d)}{(c-a)(a-b) \sqrt{\frac{(b-c)(a-d)}{a}}}, \\ v = \frac{(c+a-b)(b-d)}{(a-b)(b-c) \sqrt{\frac{(c-a)(b-d)}{b}}}, \\ w = \frac{(a+b-c)(c-d)}{(b-c)(c-a) \sqrt{\frac{(a-b)(c-d)}{c}}}, \\ h = 0, \end{cases}$$

du plan de la conique γ suivant laquelle C' recoupe Σ .

Nous avons vu qu'en général au point \mathcal{A} correspondent 8 tétraèdres dont nous avons précisé la nature.

Nous avons signalé le cas particulier où il existe ∞^1 tétraèdres dont les sommets nouveaux sont sur γ ; cette circonstance exige simplement que les coordonnées $(u, v, w, 0)$ données par (56) vérifient l'équation de la surface W et comme la relation ainsi obtenue ne contient plus de

radicaux, elle ne peut être vérifiée par l'un de ces quatre points sans être vérifiée par les autres.

Cette relation est assez compliquée; elle est symétrique en a, b, c ; il peut arriver que cette relation et la relation analogue relative au plan $z = 0$ par exemple soient vérifiées simultanément; les trois relations relatives aux plans $t = 0, z = 0, y = 0$ donnent trois équations homogènes en a, b, c, d . Il pourrait être intéressant de voir ce que leur ensemble donne et même de voir si les quatre équations simultanées pour les plans $x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$ sont compatibles. Mais les calculs sont longs.

8. Quadriques S, Σ bitangentes. — Quand S, Σ sont bitangentes, écrivons leurs équations

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2 + \delta^2 t^2, \end{aligned}$$

en remplaçant c par γ^2 et d par δ^2 pour débarrasser l'écriture des signes de racine carrée. Les deux quadriques se touchent en deux points I, J de coordonnées $(1, i, 0, 0), (1, -i, 0, 0)$. Une des génératrices de Σ , issue de I , coupe une génératrice issue de J au point $\alpha (0, 0, \delta, i\gamma)$; les deux autres génératrices issues de I ou J respectivement se coupent au point analogue $(0, 0, \delta, -i\gamma)$. Ici il n'y a que ces deux points, au lieu des 16 du cas précédent, comme intersection de deux génératrices de Σ tangentes à S . Si nous formons les équations fournissant les coordonnées (u_1, v_1, w_1, h_1) d'un plan correspondant à α , nous trouvons les trois équations

$$(57) \left\{ \begin{aligned} &(\omega_1 \delta + h_1 i \gamma)^2 - 4(\delta^2 - \gamma^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + h_1^2) = 0, \\ &[(2 + \delta^2 - \gamma^2)\omega_1 \delta + (2 + \gamma^2 - \delta^2)h_1 i \gamma]^2 \\ &\quad - 4(\delta^2 - \gamma^2)[(u_1^2 + v_1^2)(\delta^2 \gamma^2 + \gamma^2 + \delta^2) + (2\delta^2 + 1)\omega_1^2 + (2\gamma^2 + 1)h_1^2] = 0, \\ &2[(1 + \gamma^2 + \delta^2)(u_1^2 + v_1^2) + (2 + \delta^2)\omega_1^2 + (2 + \gamma^2)h_1^2](\delta^2 - \gamma^2) \\ &\quad - (\omega_1 \delta + h_1 i \gamma)[(2 + \delta^2 - \gamma^2)\omega_1 \delta + (2 + \gamma^2 - \delta^2)h_1 i \gamma] = 0. \end{aligned} \right.$$

On remarque que ces trois équations, si l'on pose $u_1^2 + v_1^2 = \rho^2$, sont homogènes et du second degré en ρ, w_1, h_1 et en général entraînent $\rho = w_1 = h_1 = 0$. L'élimination du groupe $u_1^2 + v_1^2$ est facile; car la première équation fournit le produit $4(\delta^2 - \gamma^2)(u_1^2 + v_1^2)$ que l'on

remplace ensuite dans les deux dernières. On trouve ainsi le système

$$(58) \left\{ \begin{array}{l} (\partial^6 + \gamma^2 \partial^4 - 3\gamma^4 \partial^2 - \partial^4 + 3\gamma^2 \partial^2 - 4\gamma^4 + 4\gamma^2) \omega_1^2 \\ \quad + 2\gamma \partial [-\partial^4 + \partial^2 \gamma^2 - \gamma^4 - \partial^2 - \gamma^2 + 4] i \omega_1 h_1 \\ \quad + (\gamma^6 + \partial^2 \gamma^4 - 3\gamma^2 \partial^4 - \gamma^4 + 3\gamma^2 \partial^2 + 4\partial^4 + 4\partial^2) (i h_1)^2 = 0, \\ (-\partial^6 - \gamma^2 \partial^4 + 4\gamma^4 + \partial^2 - 4\gamma^2) \omega_1^2 \\ \quad + 2\gamma \partial (\gamma^2 + \partial^2 - 3) i \omega_1 h_1 + (-\gamma^4 - \gamma^2 \partial^2 + 4\partial^4 + \gamma^2 - 4\partial^2) (i h_1)^2 = 0. \end{array} \right.$$

En général ce système entraîne bien $h_1 = 0$, $\omega_1 = 0$, $u_1 = \pm i v_1$. Donc, *en général*, on ne trouve pour le point \mathcal{A} que l'un ou l'autre des 2 plans $(1, \varepsilon i, 0, 0)$ qui sont les plans tangents le long de $\mathcal{A}I$ ou $\mathcal{A}J$ au cône C' de sommet \mathcal{A} : *on n'a donc que des tétraèdres dégénérés, dans ce cas de contact double, du moins en général.*

Mais si le résultant des deux polynômes (58) est nul, les circonstances changent; les deux équations (58) se réduisent alors à l'unique équation $\omega_1 = A h_1$; on adjoint à cette équation, la première équation (57) et l'on a ainsi ∞^1 plans. Reste à former ce résultant : le calcul direct est pour ainsi dire impossible; nous allons mettre en évidence les divers facteurs de ce résultant.

Nous avons trouvé directement, au paragraphe 5, la relation $(1 - c - d)^2 + cd = 0$, qui en faisant $c = \gamma^2$, $d = \delta^2$ devient $(1 - \gamma^2 - \delta^2)^2 + \gamma^2 \delta^2 = 0$; on a ainsi un facteur du résultant; nous avons reconnu directement que la face opposée à \mathcal{A} enveloppe un cône et que les trois sommets complémentaires sont sur $\mathcal{A}I$, $\mathcal{A}J$ et γ respectivement.

Si nous exprimons que le plan de la conique γ touche la surface W , nous aurons un autre facteur du résultant (car, si le résultant ne s'annule pas, on n'obtient que les plans tangents à C' le long de $\mathcal{A}I$ et $\mathcal{A}J$); d'ailleurs le plan de γ a pour coordonnées $(0, 0, A, 1)$ où A est la constante indiquée plus haut; or la première équation (57), si on remplace, ω_1 par A et h_1 par 1 , devient $u_1^2 + v_1^2 = B$ où B est une constante; comme $u_1 = v_1 = 0$ est solution, B est nulle; donc la solution générale pour $(u_1, v_1, \omega_1, h_1)$ est $(\lambda, \varepsilon i \lambda, \mu A, \mu)$ où λ, μ sont des constantes et $\varepsilon = \pm 1$; le plan $\lambda(x + \varepsilon i y) + \mu(Az + t) = 0$ pivote alors autour de la tangente à γ en I ou J (suivant le choix de ε); la valeur $\lambda = 0$ fournit le plan de γ qui fournit ∞^1 tétraèdres véritables;

mais $\lambda \neq 0$ donne des tétraèdres dégénérés, dont trois arêtes coïncident avec $\mathcal{A}I$ (ou avec $\mathcal{A}J$). En effet un tel plan, supposé correspondre à I, coupe S suivant une conique c , Σ suivant une conique c'' et C suivant une conique c' ; les trois coniques ont la même tangente au point I et, d'autre part, c et c'' sont osculatrices; nous avons vu que les trois sommets à associer à \mathcal{A} sont trois points communs à c' et c'' , tels que les cordes correspondantes soient tangentes à c : ces trois cordes ici sont confondues avec la tangente en I à c , c' , c'' . On détermine aisément le plan de γ , à savoir

$$\gamma z[1 + \delta^2 - \gamma^2] + it\delta[1 + \gamma^2 - \delta^2] = 0.$$

En exprimant qu'il touche W on trouve la relation

$$1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 - \delta^2\gamma^2 + \delta^4 = 0.$$

Un autre facteur du résultant est $(\delta^2 - \gamma^2)^p$, où p est un certain entier; on constate en effet que, si l'on fait $\delta^2 = \gamma^2$, les deux équations (58) se réduisent à $(w + ih)^2$; le cas $\delta^2 = \gamma^2$ ne donne d'ailleurs rien pour le cas actuel (il correspond au cas de quadriques S, Σ ayant quatre génératrices communes, qui sera étudié à part; le point \mathcal{A} , sommet du quadrilatère gauche commun aux deux quadriques, ne donne que des tétraèdres dégénérés). Le résultant est un polynôme de degré 20 en δ et γ , ne contenant que les puissances paires de δ ou de γ , symétrique en δ^2 et γ^2 ; si R est ce résultant, on a

$$(59) \quad R = [1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 - \delta^2\gamma^2 + \delta^4] \\ \times [1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 + 3\delta^2\gamma^2 + \delta^4] (\delta^2 - \gamma^2)^{2p} P(\delta^2, \gamma^2),$$

$P(\delta^2, \gamma^2)$ est un polynôme $P(u, v)$ symétrique en u, v de degré $6 - 2p$. L'ensemble des termes de degré 20 dans R s'obtient en prenant le résultant des deux polynômes

$$(\delta^6 + \gamma^2\delta^4 - 3\gamma^4\delta^2)X^2 + 2\gamma\delta(-\delta^4 + \delta^2\gamma^2 - \gamma^4)X + \gamma^6 + \delta^2\gamma^4 - 3\gamma^2\delta^4, \\ (-\delta^4 - \gamma^2\delta^2 + 4\gamma^4)X^2 + 2\gamma\delta(\delta^2 + \gamma^2)X + (-\gamma^4 - \gamma^2\delta^2 + 4\delta^4).$$

Un peu de patience donne, pour ce résultant auxiliaire,

$$(60) \quad 16(\delta^{20} - 6\gamma^4\delta^{16} + 6\gamma^2\delta^{14} + 5\gamma^8\delta^{12} \\ - 12\gamma^{10}\delta^{10} + 5\gamma^{12}\delta^8 + 6\gamma^{14}\delta^6 - 6\gamma^{16}\delta^4 + \gamma^{20})$$

et l'on trouve aisément, en tenant compte de la forme (59), que le polynome (60) est

$$(60') \quad 16(\delta^4 - \delta^2\gamma^2 + \gamma^4)(\delta^4 + 3\delta^2\gamma^2 + \gamma^4)(\delta^2 - \gamma^2)^4(\delta^2 + \gamma^2)^2.$$

Si maintenant on cherche l'ensemble des termes de plus bas degré de R, c'est le résultant des deux polynomes

$$\begin{aligned} 4\gamma^2 X^2 + 2\gamma\delta(4X) + 4\delta^2, \\ (\delta^2 - 4\gamma^2)X^2 + 2\gamma\delta(-3X) + \gamma^2 - 4\delta^2 \end{aligned}$$

résultant d'ailleurs rigoureusement égal à celui de

$$\begin{aligned} 4\gamma^2 X^2 + 2\gamma\delta(4X) + 4\delta^2 &\equiv 4(\gamma X + \delta)^2, \\ \delta^2 X^2 + 2\gamma\delta X + \gamma^2 &\equiv (\delta X + \gamma)^2. \end{aligned}$$

On trouve ainsi $16(\delta^2 - \gamma^2)^4$; cela ne suffit pas tout à fait pour affirmer qu'on a $p=2$; car il pourrait se faire que le polynome $P(\delta^2, \gamma^2)$ ne soit pas divisible par $\delta^2 - \gamma^2$, mais que l'ensemble des termes de plus haut degré et l'ensemble des termes de plus bas degré soient divisibles l'un par $(\delta^2 - \gamma^2)^{2h}$, l'autre par $(\delta^2 - \gamma^2)^{2k}$; en tous cas le calcul fait montre qu'on a $2p \leq 4$, $p=2$ ou $p=1$.

Si l'on adopte $p=2$, on a nécessairement

$$P \equiv 16[(\delta^2 + \gamma^2)^2 + A(\delta^2 + \gamma^2) + 1].$$

Or le calcul direct du résultant dans le cas $\gamma^2=1$ (quadriques S, Σ ayant une conique de raccord), calcul fait sur les polynomes, *sans suppression de facteur*,

$$\begin{aligned} \delta^6 X^2 + 2\delta(2 - \delta^4)X + 8\delta^2 - 7\delta^4, \\ \delta^4 X^2 + 2\delta(2 - \delta^2)X + (5\delta^2 - 7\delta^4) \end{aligned}$$

donne

$$16\delta^3(\delta^2 - 3)(\delta^2 + 1)(\delta^2 - 1)^4.$$

(Ce résultat ne prouve pas non plus que p est égal à 2, mais le rend plus vraisemblable encore.) Donc on a

$$(\delta^2 + 1)^2 + A(\delta^2 + 1) + 1 \equiv \delta^4, \quad A = -2.$$

On a donc

$$\begin{aligned} (61) \quad R &\equiv [1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 - \delta^2\gamma^2 + \delta^4] \\ &\quad \times [1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 + 3\delta^2\gamma^2 + \delta^4][\delta^2 - \gamma^2]^4(\delta^2 + \gamma^2 - 1)^2. \end{aligned}$$

On constate que l'hypothèse $\delta^2 + \gamma^2 - 1 = 0$ donne effectivement deux équations (57) ayant une racine commune (et une seule)

$$X = \frac{\omega_1}{ih_1} = -\frac{\gamma}{\delta}.$$

Arrivé à ce stade, on voit aisément que $p = 1$ (au lieu de $p = 2$) ne serait pas admissible. Il reste donc à expliquer ce qui arrive pour le couple

$$S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2 + (1 - \gamma^2) t^2$$

et le point $\mathcal{A}(0, \nu, \delta, i\gamma)$. La première équation (57) donne, puisque $\omega_1 \delta + h_1 i\gamma = 0$, le résultat

$$u_1^2 + \nu_1^2 + \omega_1^2 + h_1^2 = 0.$$

Les plans $(u_1, \nu_1, \omega_1, h_1)$ en nombre simplement infini qui correspondent à \mathcal{A} sont précisément les plans tangents menés de A à S ; d'après ce qui a été dit pour les plans tangents communs à S et W , ces plans doivent être tangents à la développable constituée par les plans tangents à S aux points où elle est coupée par Σ : autrement dit le plan polaire $\delta z + it\gamma = 0$ de \mathcal{A} par rapport à S doit coïncider avec le plan de l'une des deux coniques communes à S et Σ ; ces plans ont pour équation d'ensemble $(1 - \gamma^2)z^2 + (1 - \delta^2)t^2 = 0$, c'est-à-dire $\delta^2 z^2 + t^2 \gamma^2 = 0$, de sorte que la vérification est immédiate. La conique c' donnée par un tel plan est la génératrice de contact du plan $(u_1, \nu_1, \omega_1, h_1)$ avec C' , comptée deux fois; M étant le point de contact de ce plan et de S , la conique c'' est une conique passant en M et \mathcal{A} , de sorte que les sécantes communes à c' et c'' sont : la corde $\mathcal{A}M$ prise quatre fois, la tangente en M à c'' , la tangente en A à c'' ; dans le cas général, on prend les trois cordes communes à c' et c'' qui sont tangentes à c ; ici on prendra $\mathcal{A}M$ deux fois et la tangente en M à c'' ; la conique c se compose des deux génératrices de S issues de M . Finalement ce cas particulier donne bien ∞^1 tétraèdres mais ils sont dégénérés (deux sommets confondus en \mathcal{A} , deux en M).

La réalisation géométrique du cas correspondant au facteur

$$1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 - \delta^2\gamma^2 + \delta^4 = 0, \quad \text{ou} \quad 1 - 2(c + d) + c^2 - cd + d^2 = 0,$$

ou encore $(1 - c - d)^2 - 3cd = 0$ est facile à effectuer : en nous bornant au cas de quadriques réelles et de tétraèdres réels, nous réduisons le couple (T, S) à un tétraèdre régulier et la sphère tangente aux arêtes en leur milieu; Σ est une quadrique de révolution circonscrite à T, ayant pour axe de révolution la hauteur issue de A par exemple; A donne manifestement ∞^1 tétraèdres déduits de T par la révolution de T autour de la hauteur en jeu; et c'est un fait remarquable que le second sommet de Σ situé sur l'axe de révolution donne lui aussi une infinité de tétraèdres (qui ne sont pas réguliers).

La réalisation géométrique du cas correspondant au facteur

$$1 - 2(\gamma^2 + \delta^2) + \gamma^4 + 3\gamma^2\delta^2 + \delta^4 = 0 \quad \text{ou} \quad (1 - c - d)^2 + cd = 0$$

est facile à effectuer en donnant l'interprétation géométrique des équations (44); supposons que T soit régulier, que S soit la sphère tangente aux arêtes en leur milieu; appelons A, B, C, D les sommets; β, γ, δ les milieux de AB, AC, AD; b, c, d ceux de CD, DB, BC; le plan $\beta\gamma\delta$ joue le rôle du plan $t - x - y - z = 0$, A celui du sommet (0, 0, 0, 1); le plan $x = 0$ est le plan ABC et le plan $t - y - z = 0$ est le plan $D\beta\gamma$; dans ces conditions Σ est une quadrique *quelconque* du faisceau ponctuel déterminé par C' comme première quadrique (cône circonscrit de A à S) et par l'ensemble des plans ABC, $D\beta\gamma$ comme seconde quadrique. Parmi les quadriques du faisceau Σ , il y en a une et une seule qui se raccorde à S le long d'une conique : le plan de cette conique est le conjugué harmonique du plan $\beta\gamma\delta$ par rapport à ABC et $D\beta\gamma$; autrement dit, c'est le plan mené par $\beta\gamma$ parallèlement à AD, c'est-à-dire le plan $\beta\gamma bc$.

9. **Quadriques ayant une conique de raccord.** — Ce cas rentre dans celui qui précède : cette fois tous les points de Σ sont équivalents, sauf ceux qui sont sur la conique de raccord.

Une propriété importante est que la surface W se décompose en deux portions dont l'une est Σ : nous l'avons expliqué *a priori*. En écrivant

$$(62) \quad \begin{cases} \Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + \delta^2 t^2 = 0, \\ S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \end{cases}$$

on a

$$(63) \quad W \equiv [\delta^2(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + h_1^2] \\ \times [(4 - \delta^2)(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) + 3h_1^2] = 0.$$

Les résultats du numéro précédent s'appliquent; ici, il suffit d'étudier le point $(0, 0, \delta, i)$ pour être renseigné sur tous les points de Σ . On a les équations (57), (58), (59) où il suffit de supposer $\gamma = 1$. En général, c'est-à-dire pour δ quelconque, on a des tétraèdres dégénérés : on trouve $w_1 = h_1 = 0$, $u_1^2 + v_1^2 = 0$ de sorte que pour chaque point A de Σ , on ne trouve que deux plans tangents au cône C' le long de l'une ou l'autre génératrice issue de A sur Σ ; chacun de ces deux plans donne un tétraèdre impropre.

Le résultant (61) ne donne plus ici que les solutions $[\delta^2 = 3; \delta^2 = -1]$. La première correspond (par homographie) à un tétraèdre régulier T, à la sphère S tangente aux arêtes en leur milieu et à la sphère Σ circonscrite; les plans des faces sont tangentes à la sphère concentrique aux deux premières et qui a pour rayon le tiers du rayon de Σ : c'est le second facteur du second membre de (63); ici $\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 + 3t^2$ et le second facteur de W est

$$u_1^2 + v_1^2 + w_1^2 + 3h_1^2 = 0.$$

La seconde solution $\delta^2 = -1$ correspond à un cas qui a déjà été étudié au n° 5, puis à la fin du numéro précédent. Si on écrit

$$\Sigma \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0, \\ S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

les plans (u_1, v_1, w_1, h_1) restent tangents à la quadrique Σ ; mais on n'a pas mis en évidence les éléments possibles réels; nous avons déjà indiqué un moyen de les manifester. Nous pouvons opérer autrement; nous pouvons, en échangeant les noms de x et t , écrire

$$\Sigma \equiv -x^2 + y^2 + z^2 + t^2, \\ S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2.$$

puis nous pouvons remplacer t par it , ce qui donne

$$(64) \quad \begin{cases} \Sigma \equiv -x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0, \\ S \equiv x^2 + y^2 + z^2 - t^2 = 0. \end{cases}$$

On a (par homographie) une sphère réelle S et un hyperboloïde Σ à une nappe d'axe Oz , engendré par la révolution autour de Ox d'une hyperbole équilatère, dont O est le centre, Ox l'axe, le demi-axe transverse ayant pour valeur le rayon de la sphère S . Si nous prenons un point A quelconque de Σ et les deux génératrices G' , G'' qui en partent, le plan (G', G'') coupe S suivant un cercle tangent à G' et G'' ; nous menons à ce cercle une tangente quelconque recoupant G' en B et G'' en C ; les deux génératrices nouvelles issues de B et C se recoupent en D : la droite AD est tangente à S . Si A reste fixe, le plan BCD reste tangent à un cône de révolution; si le plan BCD reste fixe, le point A décrit une conique (BC est alors une tangente variable à la section de S par ce plan fixe).

Les tétraèdres obtenus rentrent, comme cas particuliers, dans ceux étudiés à la fin du n° 6: tétraèdres dont deux couples d'arêtes opposées sont génératrices de Σ .

Remarquons d'ailleurs que le problème étudié dans ce Mémoire conduit par polarité relative à S au problème suivant: tétraèdre d'arêtes tangentes à S , circonscrit à une quadrique Σ' . Or si un tétraèdre a deux couples d'arêtes opposées constitués par des génératrices de Σ , il est à la fois inscrit et circonscrit à Σ .

Dans le cas particulier qui vient d'être signalé [formules (64)] on remarque que Σ et Σ' coïncident.

Il n'y a pas d'autre cas particulier ici puisque le facteur $\delta^2 + \gamma^2 - 1$ se réduit pour $\gamma^2 = 1$ à δ^2 (où du moins nous serions amené à parler du cas où Σ dégénère en un cône).

10. Quadriques S , Σ ayant quatre génératrices communes. — Écrivons

$$\begin{aligned} S &\equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0, \\ \Sigma &\equiv x^2 + y^2 + \gamma^2(z^2 + t^2) = 0. \end{aligned}$$

On vérifie sans peine que

$$\begin{aligned} W &\equiv [2\gamma(u^2 + v^2 + w^2 + h^2) + u^2 + v^2 + \gamma^2(w^2 + h^2)] \\ &\quad \times [2\gamma(u^2 + v^2 + w^2 + h^2) - u^2 - v^2 - \gamma^2(w^2 + h^2)] = 0. \end{aligned}$$

Les deux quadriques, en lesquelles W se décompose, appartiennent au faisceau (tangential et ponctuel simultanément) déterminé par S et par la polaire réciproque de Σ vis-à-vis de S . En tenant compte de

la transformation homographique $(x, y, z, t; x \cos \alpha - y \sin \alpha, x \sin \alpha + y \cos \alpha, z \cos \beta - t \sin \beta, z \sin \beta + t \cos \beta)$ qui ne change ni Σ ni S , on peut se borner à considérer le point $(\gamma i, 0, 1, 0)$ de Σ ; de la sorte, il n'y a aucun point exceptionnel ni aucun plan exceptionnel. Nous prenons donc

$$(65) \quad \begin{cases} x_1 = i\gamma, & y_1 = 0, & z_1 = 1, & t_1 = 0, \\ u_1^2 + v_1^2 = -\frac{\gamma^2 + 2\gamma}{1 + 2\gamma}(\omega_1^2 + h_1^2). \end{cases}$$

La seconde et troisième équation du système (E_1) obtenu au paragraphe 3 donnent,

$$(66) \quad \begin{cases} (u_1 i\gamma + \omega_1)^2 = \frac{4(1 - \gamma^2)^2}{1 + 2\gamma}(\omega_1^2 + h_1^2), \\ (2u_1 i\gamma^3 + 2\omega_1)^2 = \frac{4(1 - \gamma^2)^2}{1 + 2\gamma}(1 + \gamma + \gamma^2)^2(\omega_1^2 + h_1^2). \end{cases}$$

La comparaison de ces deux équations permet d'écrire

$$(67) \quad (1 + \gamma + \gamma^2)(u_1 i\gamma + \omega_1) = \varepsilon(2u_1 i\gamma^3 + 2\omega_1) \quad (\varepsilon = \pm 1)$$

et l'on constate que la dernière équation (E_1) se réduit précisément à cette équation, pourvu que ε soit pris égal à $+1$.

On a (en prenant à volonté les signes des radicaux), le résultat final

$$(68) \quad \begin{cases} u_1 i = \gamma^2 + \gamma - 1, & v_1 = \sqrt{1 - 2\gamma - \gamma^2}, \\ \omega_1 = \gamma^3 - \gamma^2 - \gamma, & h_1 = \gamma^2 \sqrt{1 + 2\gamma - \gamma^2}, \end{cases}$$

soit quatre plans; changeant ensuite γ de signe, ce qui revient à considérer la seconde quadrique, complétant W , quatre nouveaux plans.

On s'aperçoit aussitôt que si l'on suppose γ réel et si l'on remplace x par ix , on a des quadriques réelles et des tétraèdres réels si γ^2 est plus petit que $3 - 2\sqrt{2}$ (ou si l'on veut $|\gamma| < \sqrt{2} - 1$); les génératrices communes à S et Σ sont imaginaires, puisque S est quadrique non réglée, quand T est réel.

11. Indications sur un cas spécial relatif à deux quadriques S, Σ tangentes en un seul point. — Nous avons déclaré que nous n'étudierions pas les cas spéciaux où les quadriques n'ont pas de tétraèdre conju-

gué commun (contact unique; intersection comprenant une cubique gauche; intersection formée d'une conique et de deux génératrices; intersection formée d'une droite de raccord et de deux génératrices).

Pourtant nous allons être amené à parler du cas d'un contact unique en utilisant, comme au paragraphe 5, un tétraèdre T possédant les propriétés suivantes : un sommet est un point A, de Σ où se croisent deux génératrices de Σ tangentes à S et une arête est une des deux génératrices en jeu; un tel tétraèdre a été considéré en fin du paragraphe 5; ici nous désirons trouver un cas de figure où il existe ∞^1 tétraèdres de cette espèce. L'équation (50) permet d'écrire avec une indéterminée ρ

$$B' = B'' + \rho C, \quad B = B' + \rho C'$$

et nous avons ainsi

$$(69) \quad \begin{cases} S \equiv x^2 + y^2 + z^2 + t^2 - 2yz - 2zx - 2xy - 2xt - 2yt - 2zt = 0, \\ \Sigma \equiv 2(yz + zx + xy) + 2(Cx + C'y)(t + \rho z), \end{cases}$$

Σ contient l'arête $x = y = 0$ de T; la seconde génératrice issue du point A (0, 0, 0, 1) est la droite

$$(70) \quad \frac{x}{C'} = \frac{y}{-C} = \frac{z(C' - C)}{CC'},$$

tangente à S. Nous cherchons une substitution homographique

$$(71) \quad \begin{cases} x = \alpha \bar{x} + \beta \bar{y}, \\ y = \alpha' \bar{x} + \beta' \bar{y}, \\ z = \alpha'' \bar{x} + \beta'' \bar{y} + \gamma'' \bar{z}, \\ t = \alpha''' \bar{x} + \beta''' \bar{y} + \gamma''' \bar{z} + \delta''' \bar{t}, \end{cases}$$

qui n'altère pas la forme des équations (69) (c'est-à-dire remplace S par

$$A^2 x^2 + \dots + A'''^2 t^2 - 2A'A''yz - \dots - 2A''A'''t).$$

Nous avons pour inconnues les rapports mutuels des quatre α , ceux des quatre β , le rapport $\gamma'' : \gamma'''$, donc 7 inconnues; de plus $(\alpha\beta' - \beta\alpha')\gamma''\delta'''$ ne doit pas être nul. On trouve aisément, tenant compte de Σ ,

$$\begin{aligned} (C\alpha + C'\alpha')(\alpha''' + \rho\alpha'') &= 0, \\ (C\beta + C'\beta')(\beta''' + \rho\beta'') &= 0 \end{aligned}$$

et comme on ne peut avoir $C\alpha + C'\alpha' = 0$, $C\beta + C'\beta' = 0$, car ni C ni C' ne sont nuls et, d'autre part, $\alpha\beta' - \beta\alpha' \neq 0$, on prendra

$$(72) \quad \alpha''' + \rho\alpha'' = 0, \quad \beta''' + \rho\beta'' = 0.$$

On trouve ensuite les équations complémentaires

$$(73) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0, \quad \beta'\beta'' + \beta''\beta + \beta\beta' = 0, \\ \gamma''\beta''(1 + \rho) = \gamma'''[\beta + \beta' + \beta''(1 + \rho)], \\ \gamma''\alpha''(1 + \rho) = \gamma'''[\alpha + \alpha' + \alpha''(1 + \rho)], \\ \alpha'''(\beta'' - \beta - \beta' - \beta'') + \alpha[\beta - \beta'''] + \alpha'[\beta' - \beta'''] + \alpha''[\beta'' - \beta'''] = 0. \end{array} \right.$$

Les équations (73) ne contiennent plus que les inconnues $\alpha, \alpha', \alpha'', \beta, \beta', \beta'', \gamma'', \gamma'''$ (en nombre effectif 5, en tenant compte des homogénéités déjà signalées). On voit *qu'en général* ⁽¹⁾ on n'obtient que le tétraèdre de départ et un autre. Mais si $\rho = -1$, il y a deux équations, celles de la seconde et de la troisième ligne, qui se réduisent à une seule, à savoir $\gamma''' = 0$. On a alors

$$(74) \quad \left\{ \begin{array}{l} \alpha'\alpha'' + \alpha''\alpha + \alpha\alpha' = 0, \quad \beta'\beta'' + \beta''\beta + \beta\beta' = 0, \\ \gamma''' = 0, \\ \alpha\beta + \alpha'\beta' - \beta''(\alpha + \alpha') - \alpha''(\beta + \beta') = 0. \end{array} \right.$$

On a finalement *quatre inconnues* $\alpha : \alpha' : \alpha''$ et $\beta : \beta' : \beta''$ liées seulement par *trois équations*.

Remarquons que, si ρ est quelconque, on a

$$(75) \quad S + 2\Sigma \equiv (t - x - y - z)^2 + 2(Cx + C'y)(t + \rho z),$$

et ceci prouve que le discriminant de $S + 2\Sigma$ admet la racine $\lambda = 2$; le second membre de (75), égal à zéro, représente un cône véritable [sauf si l'on a $C = C'$, $\rho = -1$ auquel cas l'équation $S + 2\Sigma = 0$ représente deux plans, mais l'équation $\Sigma = 0$ représente dans ce cas un cône, car on a alors

$$2\Sigma \equiv (x + y) \{ 4z + 4C(t - z) + x + y \} - (x - y)^2 \}.$$

⁽¹⁾ Ce résultat, comparé avec la fin du paragraphe 5, donne la conclusion suivante : le système (T, S, Σ) dépend de 18 paramètres et le couple S, Σ ne donne qu'un nombre *fini* de tétraèdres T ; donc (S, Σ) dépend de 18 paramètres. Mais si $\rho = -1$, le système (T, S, Σ) dépend de 17 paramètres et le couple S, Σ donne ∞^1 tétraèdres : donc (S, Σ) dépend de 16 paramètres.

Nous écartons le cas $C = C'$; nous supposons $\rho = -1$, de sorte que le cône représenté par $S + 2\Sigma = 0$ a pour son sommet $(0, 0, 1, 1)$ situé sur l'arête $x = y = 0$ de T ; S et Σ sont tangentes en ce point; pour le point $A(0, 0, 0, 1)$, le cône C' recoupe Σ suivant une conique γ et suivant deux génératrices G' et G'' , G' étant l'arête $x = y = 0$ et moyennant les hypothèses faites, *il y a une infinité de tétraèdres associés à A ; un sommet décrit G' , les deux autres décrivent la conique λ .*

Nous écrivons (avec $\rho = -1$)

$$\begin{aligned} S + \lambda \Sigma &\equiv [t + (\lambda C - 1)x + (\lambda C' - 1)y - z]^2 \\ &\quad + (2\lambda C - \lambda^2 C^2)x^2 + 2(\lambda C' - \lambda^2 C'^2)y^2 \\ &\quad + 2(\lambda - 2)yz + 2(\lambda - 2)zx + 2[-\lambda^2 CC' + \lambda(C + C' + 1) - 2] \end{aligned}$$

Le discriminant de $S + \lambda \Sigma$ est égal à

$$(\lambda - 2)^2 [\lambda^2 (C - C')^2 + 2\lambda - 4].$$

Il y a donc quatre racines telles que

$$\lambda_1 = \lambda_2 = 2, \quad \lambda_3 + \lambda_4 = \frac{-2}{(C - C')^2}, \quad \lambda_3 \lambda_4 = \frac{-4}{(C - C')^2}.$$

On a

$$(76) \quad \frac{\lambda_3 \lambda_4}{\lambda_3 + \lambda_4} = \lambda_1, \quad \lambda_1 = \lambda_2.$$

Donc pour deux quadriques S, Σ tangentes entre elles en un point unique, telles que la relation (76) ait lieu entre la racine double λ_1 et les racines simples λ_3, λ_4 , il y a pour le point A qui a été étudié une infinité de tétraèdres de cette espèce.

Chose curieuse, si l'on suppose maintenant que les deux quadriques deviennent tangentes en un autre point, la relation (75) subsistant, on arrive au cas

$$(S) \quad x^2 + y^2 + z^2 + t^2 = 0,$$

$$(\Sigma) \quad x^2 + y^2 + \gamma^2 z^2 + \delta^2 t^2 = 0$$

avec

$$\gamma^2 + \delta^2 = 1 \quad \left(\text{car } \lambda_1 = \lambda_2 = 1, \lambda_3 = \frac{1}{\gamma^2}, \lambda_4 = \frac{1}{\delta^2} \right);$$

mais alors les tétraèdres de l'espèce étudiée sont devenus dégénérés. C'est cette considération qui nous a fait découvrir le facteur $\gamma^2 + \delta^2 - 1$ du résultant de deux polynômes (58).