

ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉMILE COTTON

Sur l'étude locale des fonctions holomorphes et des fonctions algébroides de plusieurs variables (extension d'une méthode de Puiseux)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3^e série, tome 52 (1935), p. 131-182

http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1935_3_52__131_0

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1935, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
<http://www.numdam.org/>

SUR L'ÉTUDE LOCALE
DES
FONCTIONS HOLOMORPHES
ET DES
FONCTIONS ALGÈBROÏDES DE PLUSIEURS VARIABLES
(EXTENSION D'UNE MÉTHODE DE PUISEUX)

PAR M. ÉMILE COTTON,
Professeur à la Faculté des Sciences de Grenoble.



Introduction.

A toute fonction holomorphe de deux variables $f(x, y) = 0$ s'annulant pour $x = y = 0$ correspond une ligne polygonale, bien connue, le polygone de Newton. Il donne une première classification des cas se présentant dans la recherche de l'ordre infinitésimal, relatif à t , de la fonction $\varphi(t)$ obtenue en substituant, dans f , aux variables x, y , deux fonctions holomorphes $x(t), y(t)$ s'annulant pour $t = 0$.

Dans son célèbre mémoire sur les fonctions algébriques, Puiseux a utilisé ce polygone pour l'étude d'une courbe algébrique au voisinage de l'un de ses points.

Des questions analogues se posent à propos des fonctions f de plus de deux variables et des variétés $f = 0$ correspondantes. Elles sont abordées dans le présent travail, où j'examine surtout le cas de trois variables.

C'est une surface polyédrale de l'espace ordinaire ⁽¹⁾, le *polyèdre* N , qui remplace pour une fonction $f(x, y, z)$ le polygone de Newton. Sa définition, quelques propositions qui le concernent, utiles pour la suite, sont données au début du Chapitre I (nos 1 et 2). On peut associer à N une gerbe d'angles polyèdres convexes ou la section de cette gerbe par un plan (diagramme plan).

Substituons dans f à x, y, z les fonctions holomorphes $x(t), y(t), z(t)$ infiniment petites avec l'infiniment petit principal t , l'ordre infinitésimal de la fonction $\varphi(t)$ obtenue et ses parties principales se déterminent en général à l'aide des parties principales de $x(t), y(t), z(t)$ et de l'ensemble $F(x, y, z)$ des termes de N qui correspondent à un sommet, à une arête ou à une face de N . Pour un sommet F est un monome; pour les arêtes et les faces on a des polynomes (ou parfois des séries entières).

Les cas critiques (nos 3, 4) où une étude plus complète est nécessaire pour trouver l'ordre de $\varphi(t)$ sont ceux où les parties principales de x, y, z vérifient identiquement une équation $F(x, y, z) = 0$.

L'existence de *fonctions algébroides*, fonctions implicites définies par une équation $f = 0$ où f est holomorphe ou par un système de telles équations a été établie par les travaux de Cauchy, Briot et Bouquet, Weierstrass et Poincaré. Après avoir brièvement rappelé (n° 6) les résultats essentiels, j'étudie dans le Chapitre II les fonctions algébroides données par une équation $f(x, y, z) = 0$, l'un des axes, Oy par exemple, n'étant pas situé sur cette surface.

Les équations $F(x, y, z) = 0$, correspondant à une face ou à une arête admettent un groupe continu (n° 7). Ce groupe est à deux paramètres dans le cas d'une arête et conduit par suite à une représentation paramétrique des surfaces anharmoniques algébriques constituant la surface $F = 0$. On en déduit alors une représentation paramétrique holomorphe pour la surface analytique $f = 0$ ⁽¹⁾. Les développements

(1) Le premier Auteur ayant considéré ce polyèdre est M. Gustavo Dumas; il l'a utilisé en divers travaux (notamment Communication au Congrès de Bologne, *Atti* t. 4, p. 419, 1928 et Article des *Commentarii Mathematici Helvetici*, t. 4, p. 230, 1932). Avant de les connaître, j'avais dit quelques mots au sujet de ce polyèdre et ses applications dans une Communication au Congrès de l'Association française pour l'avancement des Sciences, Chambéry, 1933.

obtenus présentent une certaine analogie avec ceux de Puiseux et permettent de suivre l'échange des déterminations des fonctions algébroides lorsque les variables indépendantes décrivent certains contours fermés (nos 8, 9).

Pour une face du polyèdre N , le groupe est à un paramètre. On en déduit encore des représentations paramétriques de la surface $F(x, y, z) = 0$ relative à la face, mais en introduisant à côté du paramètre variable λ du groupe, un autre paramètre ξ et une fonction algébrique $\eta(\xi)$ définie par $F(\xi, \eta, 1) = 0$; les variables x et z jouent maintenant des rôles différents. De ces représentations on passe (nos 10, 11) à des représentations holomorphes valables pour la surface analytique $f = 0$; mais les conditions de validité des développements excluent pour ξ le voisinage de certaines valeurs exceptionnelles ξ_e .

On définit alors (nos 12, 13) dans le plan de la variable complexe x et pour toute valeur numérique \bar{z} de la seconde variable z , de module assez petit, un domaine S . Les frontières sont une circonférence $c: |x| = r$ (r constante) et des circonférences d'isolement σ_e intérieures à c extérieures les unes aux autres correspondant aux valeurs exceptionnelles ξ_e ; la frontière de S est complétée par des coupures rendant S simplement connexe.

Autrement dit, on a, à l'intérieur de c , un ensemble de lacets analogues à ceux de Puiseux, mais où les points singuliers sont remplacés par les petites circonférences d'isolement. Dans le domaine S les n fonctions algébroides $y(x, \bar{z})$ sont fonctions uniformes de x .

La recherche de leur prolongement analytique à l'intérieur des cercles d'isolement se ramène (n° 14) à une nouvelle application de la méthode, en subdivisant un tel cercle comme on l'a fait pour c , et ainsi de suite, mais les choses vont en se simplifiant.

(¹) L'emploi de telles représentations pour les surfaces algébriques est bien connu. (Picard et Simart, *Théorie des fonctions algébriques de deux variables*, t. 1, chap. IV). Les représentations données sont naturellement voisines de celles des Auteurs cités dans cet ouvrage; la méthode que nous suivons est plus rapide que l'emploi des transformations quadratiques. M. Gustave Dumas, à la fin de sa Communication au Congrès de Bologne, avait donné des indications sur des représentations analogues aux nôtres; mais nous ne nous limitons pas comme il le faisait aux substitutions unimodulaires.

Vient ensuite un examen rapide (n° 15) de cas écartés tout d'abord, où les polynômes de face où d'arête admettent des facteurs multiples.

Le Chapitre III concerne un système de deux équations $f(x, y, z) = 0$, $g(x, y, z) = 0$ représentant deux surfaces analytiques passant toutes deux par l'origine (qui peut être point multiple). Un théorème de Poincaré montre que x et y sont fonctions algébroides de z , ou, en d'autres termes, qu'au voisinage de l'origine l'intersection se compose d'un certain nombre de cycles analogues à ceux qu'Halphen a introduits dans la théorie des courbes gauches algébriques. L'emploi des polyèdres N permet, en général, de caractériser ces cycles (nos 16, 17); en prenant $g = f_y$, on peut ainsi reconnaître le moment où il devient superflu de poursuivre l'étude du n° 14 des fonctions à l'intérieur d'un cercle d'isolement.

Pour ne pas interrompre l'exposé de la théorie précédente aucun exemple n'a été donné dans les premiers chapitres; on en trouvera dans le dernier, où plusieurs des propositions antérieures reçoivent une application.

CHAPITRE I.

1. Étude d'un ordre infinitésimal. — Soit

$$f(x, y, z) = \sum A_{abc} x^a y^b z^c$$

une série entière où manquent le terme constant et quelques-uns des termes de moindre degré, ayant des rayons de convergence associés différents de zéro. Effectuons la substitution

$$(1) \quad x = x_1 t^\alpha, \quad y = y_1 t^\beta, \quad z = z_1 t^\gamma,$$

x_1, y_1, z_1 sont différents de zéro; α, β, γ sont des entiers positifs. Cherchons l'ordre infinitésimal relatif à t de la fonction

$$\varphi(t) = f(x_1 t^\alpha, y_1 t^\beta, z_1 t^\gamma)$$

ainsi obtenue.

Soit ε le point de coordonnées rectangulaires α, β, γ , considérons aussi a, b, c comme les coordonnées relatives aux mêmes axes Ωa ,

$\Omega b, \Omega c$ d'un point; mais ne conservons parmi ces points a, b, c que ceux E auxquels correspondent dans la série f des coefficients A_{abc} différents de zéro. La substitution (1) transforme le monome $A_{abc}x^a y^b z^c$ en $A_{abc}x_1^a y_1^b z_1^c t^{a\alpha+b\beta+c\gamma}$ dont l'ordre infinitésimal est le *produit scalaire* $a\alpha + b\beta + c\gamma$ des deux vecteurs ΩE et $\Omega \varepsilon$. La recherche de l'ordre infinitésimal de $\varphi(t)$ amène donc à projeter les points E sur la droite $\Omega \varepsilon$ et à chercher celle de ces projections qui est la plus voisine de Ω .

Nous dirons qu'un point E est un point E_s s'il existe des points ε tels que le produit scalaire $\Omega E \Omega \varepsilon$ correspondant à ce point E ne soit supérieur à aucun des produits analogues. Il y a évidemment au moins un point dans l'ensemble E_s ; il se peut d'ailleurs qu'il y en ait un seul, la série f est alors de la forme $x^a y^b z^c [A + xyzg(x, y, z)]$, A est une constante, g une série entière. Il est possible encore que les points soient tous situés sur un segment de droite ou encore dans un même plan parallèle à l'un des plans de coordonnées; nous n'insisterons pas sur ces cas exceptionnels et supposerons en général que l'ensemble E_s comprend au moins trois points déterminant un plan qui n'est parallèle à aucune des faces du trièdre Ωabc .

Remarques. — 1° Soient E_1 un point de l'ensemble E_s , F un point quelconque à coordonnées positives, si le vecteur $\Omega F'$ équipollent à $E_1 F$ est situé dans le trièdre des coordonnées positives, on a, quel que soit ε pris à l'intérieur ou sur les faces de ce trièdre,

$$\Omega E_1 \Omega \varepsilon < \Omega F \Omega \varepsilon.$$

2° Si l'on a deux points F_1, F_2 , tels que

$$\Omega F_1 \Omega \varepsilon > \Omega E_1 \Omega \varepsilon, \quad \Omega F_2 \Omega \varepsilon > \Omega E_1 \Omega \varepsilon,$$

on a aussi pour un point F_3 , pris arbitrairement sur le segment $F_1 F_2$,

$$\Omega F_3 \Omega \varepsilon > \Omega E_1 \Omega \varepsilon.$$

Ces deux remarques permettent d'utiliser un ensemble continu à trois dimensions ⁽¹⁾, un *corps* (K) pour la recherche des points E_s et des points ε tels que le minimum du produit scalaire $\Omega E \Omega \varepsilon$ soit réalisé par $\Omega E_s \Omega \varepsilon$.

(1) Dans le Chapitre I du Mémoire de M. Favard, *Sur les corps convexes* (*Journal de Mathématiques*, t. XII, 1933), se trouve un bon exposé des notions utilisées ici à leur sujet.

Ce corps (K) sera constitué par l'ensemble des points situés à l'intérieur (ou sur les faces) de l'un au moins des tétraèdres dont les sommets sont quatre points appartenant soit à l'ensemble E défini plus haut, soit à ceux qu'on en déduit par des translations parallèles à chacun des trois axes Ωa , Ωb , Ωc , dans le sens positif, l'amplitude de la translation étant un nombre entier quelconque.

Ce corps (K) s'étend à l'infini ⁽¹⁾, mais la surface qui le limite est convexe et formée de faces planes; les unes qui ne sont parallèles à aucun des axes des coordonnées sont des polygones convexes, chacune des autres est limitée par une ligne brisée polygonale convexe dont les côtés extrêmes sont des demi-droites.

Nous conserverons à cette surface le nom de polyèdre, bien qu'elle s'étende à l'infini, et nous la désignerons par *polyèdre* N (ou N_f) pour rappeler son analogie évidente avec le polygone de Newton.

Dans tous les cas, les sommets du polyèdre N sont des points de l'ensemble E, les autres points de E, sont sur les faces ou sur les arêtes; comme ces points sont à coordonnées entières, il en résulte que *les paramètres directeurs des normales aux faces de N peuvent être pris entiers. Ces entiers sont de même signe*, car si a_0 , b_0 , c_0 désignent les coordonnées d'un sommet de la face, α , β , γ les paramètres directeurs de la normale au plan de la face, ce plan a pour équation

$$\alpha(a - a_0) + \beta(b - b_0) + \gamma(c - c_0) = 0,$$

et tous les points de coordonnées $a_0 + p$, $b_0 + q$, $c_0 + r$ (p , q , r non négatifs, non tous nuls) devant être par rapport à ce plan du côté opposé à celui où est l'origine Ω , $\alpha p + \beta q + \gamma r$ doit garder, quels que soient p , q , r , un signe constant. Nous prendrons α , β , γ positifs.

2. Éléments réticulaires. — L'ensemble des points de coordonnées a , b , c entières (positives, négatives ou nulles) constitue un *réseau* tel que ceux de la Cristallographie géométrique. Conservant quelques-unes

⁽¹⁾ Dans le cas où $f(x, y, z)$ est un polynôme, il y a intérêt d'une part à considérer des points ε dont les coordonnées sont des entiers de signes quelconques et d'autre part à ne pas faire usage des translations dont nous avons parlé. Le corps (K) est remplacé par l'intérieur et la surface du plus petit polyèdre convexe contenant les points représentatifs E des exposants du polynôme.

des locutions qu'elle utilise, nous appellerons *nœud* tout point du réseau, *droite réticulaire* toute droite passant par deux nœuds distincts, *plan réticulaire* tout plan contenant trois nœuds non en ligne droite. Sur une droite réticulaire il y a une infinité de nœuds, dont les distances mutuelles sont des multiples de la longueur d'un vecteur porté par la droite que nous appellerons *intervalle réticulaire*, et qui définit la translation associée à cette droite réticulaire. Un plan réticulaire P contient une infinité de nœuds, constituant un réseau plan de parallélogrammes; ce réseau correspond au groupe de translations associé au plan réticulaire considéré.

3. Cas où l'ordre infinitésimal s'élève. Gerbe et diagramme plan.

— Revenant au polyèdre N considéré plus haut, nous remarquerons que ses arêtes et ses faces sont des droites et des plans réticulaires; on a observé que les normales menées par l'origine à ces faces sont intérieures au trièdre Ωabc des coordonnées positives; les plans parallèles à ces faces passant par Ω n'ont donc aucun point intérieur au trièdre; il en résulte qu'en menant par l'origine une parallèle à une arête de N cette droite ne pénètre pas à l'intérieur du trièdre; autrement dit *les paramètres directeurs d'une arête de N ne peuvent avoir le même signe* (cependant deux d'entre eux peuvent être nuls).

Les exposants α, β, γ des formules (1) étant donnés, nous cherchons l'ordre infinitésimal de $\varphi(t)$ en considérant le point ε de coordonnées α, β, γ et le *plan d'appui du corps (K) ou du polyèdre frontière N normal à $\Omega\varepsilon$* ; plusieurs cas sont alors à distinguer.

Si ce plan d'appui n'a qu'un seul point commun avec N, c'est nécessairement un sommet de N et un point de l'ensemble E_s ; a, b, c étant ses coordonnées, A_{abc} le coefficient correspondant dans la série f , l'ordre infinitésimal de $\varphi(t)$ est bien $a\alpha + b\beta + c\gamma$ et la partie principale $A_{abc}x_1^a, y_1^b, z_1^c t^{a\alpha+b\beta+c\gamma}$.

Lorsque le plan d'appui a plusieurs points de contact avec N, ils sont répartis soit sur une arête, soit dans une face de N; plusieurs termes de la série f deviennent par la substitution (1) des monômes de même degré en t ; il peut arriver que la somme de ces monômes soit nulle, l'ordre de $\varphi(t)$ est dans ce cas supérieur au produit scalaire minimum.

Pour que cette circonstance se présente il faut d'abord que α, β, γ

soient les coordonnées d'un point ε tel que la demi-droite réticulaire $\Omega\varepsilon$ soit normale à une face ou à une arête de N . Dans le cas d'une face, la demi-droite est bien déterminée; pour une arête, $\Omega\varepsilon$ doit être située dans le plan des demi-droites $\Omega\varepsilon_1, \Omega\varepsilon_2$ normales aux faces adjacentes, et, de plus, être intérieure à l'angle aigu formé par ces deux demi-droites (sans quoi le plan normal à $\Omega\varepsilon$ mené par l'arête ne serait pas plan d'appui). En d'autres termes $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ étant les coordonnées (entiers non négatifs) des nœuds $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, il doit exister deux nombres positifs λ_1, λ_2 tels que

$$\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2, \quad \beta = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2, \quad \gamma = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2.$$

L'élévation de l'ordre exige une autre condition, le coefficient de t^m , m désignant le produit scalaire minimum doit être nul. Ce coefficient est $F(x_1, y_1, z_1)$, en désignant par $F(x, y, z)$ l'ensemble des termes de la série f dont les exposants sont représentés par les points de l'ensemble E , situés sur la face ou sur l'arête considérée.

Nous désignerons par *critiques* les substitutions (1) pour lesquelles l'ordre infinitésimal de $\varphi(t)$ est supérieur au produit scalaire minimum nous appliquerons la même épithète aux exposants α, β, γ aux points ε , aux demi-droites $\Omega\varepsilon$, aux coefficients x_1, y_1, z_1 , correspondant à de telles substitutions.

A chaque face de N faisons correspondre la demi-droite critique $\Omega\varepsilon$ qui lui est normale, à chaque arête associons l'angle aigu des demi-droites critiques correspondant aux faces adjacentes. Aux arêtes de N issues d'un même sommet correspondent ainsi les faces d'un angle polyèdre convexe. A l'ensemble des sommets de N correspond ainsi un ensemble Π d'angles polyèdres convexes remplissant le trièdre Ωabc ; et que nous appellerons *gerbe associée à N* . Les demi-droites critiques sont les droites réticulaires appartenant aux faces constituant la gerbe.

A cette gerbe il peut être commode d'associer sa section D par un plan tel que $a + b + c = 1$ rencontrant les trois arêtes du trièdre Ωabc ; c'est un ensemble de polygones convexes constituant le pavage du triangle section du trièdre Ωabc par le même plan.

Nous l'appellerons le *diagramme plan associé à N et à f* .

Ce triangle étant pris pour triangle de référence, le point de rencontre e d'une droite réticulaire $\Omega\varepsilon$ avec le plan du triangle a pour coordonnées α, β, γ .

De la règle élémentaire concernant l'ordre infinitésimal du produit de deux fonctions d'une même variable infiniment petite, on déduit aisément la proposition suivante.

Soient $f(x, y, z)$, $f_1(x, y, z)$ deux séries entières sans termes constants, f_2 leur produit; appelons N, N_1, N_2 les polyèdres N correspondants, Π, Π_1, Π_2 et D, D_1, D_2 les gerbes et les diagrammes plans qui leur sont associés; la gerbe Π_2 est constituée par l'ensemble des points communs aux faces de Π et de Π_1 ; autrement dit, toute face de Π_2 est face ou partie de face de l'une au moins des gerbes Π, Π_1 ; de même le diagramme D_2 est la superposition des diagrammes D, D_1 . Les arêtes des angles polyèdres constituant Π_2 sont soit les arêtes analogues pour Π, Π_1 , soit l'intersection d'une face de Π et d'une face de Π_1 . Ces arêtes donnent les normales aux faces de N_2 ; pour obtenir la face de N_2 correspondant à l'une d'elles, $\Omega\varepsilon$, on considère les points de rencontre e, e_1 de cette normale avec les plans d'appui de N, N_1 , normaux à $\Omega\varepsilon$, l'extrémité de la somme Ωe_2 des vecteurs $\Omega e, \Omega e_1$, donne un point de la face cherchée.

En d'autres termes, le corps K_2 correspondant au produit f_2 est la somme des corps K, K_1 relatifs aux deux séries facteurs (Favard, loc. cit., p. 233); on remarquera l'analogie de cette proposition et de celle qui concerne l'ordre du produit de deux fonctions infiniment petites d'une seule variable.

Lorsque l'une des séries f s'annule seule pour $x=y=z=0$ l'autre, f_1 , ayant un terme constant différent de zéro, le polyèdre, la gerbe, le diagramme plan, etc., sont les mêmes pour f et pour ff_1 . En particulier ces éléments sont les mêmes pour f et pour les formes réduites dont un théorème de Weierstrass, le *Vorbereitungs-Satz*, fait connaître l'existence. (Voir plus loin n° 6). Cette remarque nous sera utile.

4. **Polynômes correspondant aux faces et aux arêtes de N .** — En considérant ceux des termes de la série $f(x, y, z)$ dont les exposants a, b, c sont les coordonnées de points E_s situés sur une face ou sur une arête, nous avons défini une fonction $F(x, y, z)$ correspondant à cette

face ou à cette arête et qui intervient dans la recherche des substitutions critiques.

Pour les faces et les arêtes qui ne sont parallèles à aucun des trois axes de coordonnées, le nombre de ces points E_s est nécessairement fini, $F(x, y, z)$ est un polynôme; nous parlerons donc des *polynômes de face* et des *polynômes d'arête*. Il arrive souvent qu'on peut mettre en facteur dans F un certain monôme $x^{a_0} y^{b_0} z^{c_0}$ dont les exposants a_0, b_0, c_0 sont les coordonnées d'un point Ω' tel que la translation $\Omega\Omega'$ transforme le trièdre Ωabc en un trièdre $\Omega' a' b' c'$ dont chaque face contient un sommet au moins de la face ou de l'arête de N considérée; tous les autres points E_s de cette face ou de cette arête étant intérieurs à $\Omega' a' b' c'$. Le second facteur $F(x, y, z)/x^{a_0} y^{b_0} z^{c_0}$ est le plus important, c'est encore un polynôme; *le degré de ce polynôme par rapport à l'une des variables (y par exemple) est égal à la mesure de la projection sur l'axe correspondant Ωb de la face ou de l'arête de N .*

Considérons une arête $E'E''$ du polyèdre N ; soient $a', b', c', a'', b'', c''$ les coordonnées des sommets qu'elle relie et δ le plus grand commun diviseur des différences $a'' - a', b'' - b', c'' - c'$; les quotients

$$a = \frac{a'' - a'}{\delta}, \quad b = \frac{b'' - b'}{\delta}, \quad c = \frac{c'' - c'}{\delta}$$

sont premiers entre eux dans leur ensemble, et sont de signes différents (n° 2) (on admet que l'arête n'est parallèle à aucun des trois axes); a, b, c sont les projections de l'intervalle réticulaire de l'arête, et tout nœud E appartenant à l'arête considérée a des coordonnées de la forme

$$a = a' + pa, \quad b = b' + pb, \quad c = c' + pc,$$

p étant entier. Le polynôme relatif à l'arête peut donc s'écrire

$$(2) \quad F(x, y, z) = x^{a'} y^{b'} z^{c'} \Phi(\theta), \quad \theta = x^a y^b z^c$$

Φ est un polynôme dont le degré surpasse l'unité si $E'E''$ n'est pas intervalle réticulaire; l'équation $F = 0$ représente quelques-uns des plans de coordonnées $x = 0, y = 0, z = 0$ et une ou plusieurs surfaces algébriques

$$(3) \quad x^a y^b z^c = \tau;$$

τ est une constante racine de l'équation algébrique $\Phi(\theta) = 0$.

Ces surfaces appartiennent à une classe générale signalée par Sophus Lie dans ses travaux sur le complexe tétraédral (*Berührungs-transformationen*, Chap. II). Ce sont les *surfaces anharmoniques* ⁽¹⁾, qu'on peut transformer homographiquement de manière à donner à leur équation la forme (2), mais a, b, c sont en général des constantes quelconques.

Ici, ce sont des entiers; on peut les obtenir sans passer comme plus haut par l'intermédiaire des coordonnées $a', b', c', a'', b'', c''$; l'arête considérée étant l'intersection de deux faces de N , auxquelles correspondent les normales $\Omega\varepsilon_1, \Omega\varepsilon_2$, est parallèle au produit vectoriel $\Omega\varepsilon_1 \wedge \Omega\varepsilon_2$, en lui donnant Ω comme origine on a une droite réticulaire, dont l'intervalle réticulaire a pour projections a, b, c ; si $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont les coordonnées des nœuds $\varepsilon_1, \varepsilon_2$

$$(4) \quad \frac{a}{\beta_1\gamma_2 - \gamma_1\beta_2} = \frac{b}{\gamma_1\alpha_2 - \alpha_1\gamma_2} = \frac{c}{\alpha_1\beta_2 - \beta_1\alpha_2} = \frac{1}{d},$$

d étant le plus grand commun diviseur des trois premiers dénominateurs.

Lorsqu'il y a parallélisme de la face ou de l'arête considérée avec l'un des axes $\Omega a, \Omega b, \Omega c$, $F(x, y, z)$ est, en général, une série de forme particulière. Par exemple pour une face parallèle à Ωc (sans l'être aussi à Ωa ou à Ωb), F est de la forme $\Sigma \psi_{ab}(z) x^a y^b$ polynome en x, y dont les coefficients sont des séries entières en z ; les exposants a et b vérifient une relation $\alpha a + \beta b = \text{const.}$

Si la face est parallèle au plan $b\Omega c$, F est le produit d'une série entière en y et z par une puissance de x .

Pour une arête parallèle à Ωc , F est le produit d'une série entière en z par un monome en x et y .

Plus généralement, ε étant un nœud à coordonnées α, β, γ positives et entières, on peut grouper dans la série f tous les termes dont les points E représentatifs des exposants donnent lieu au même produit scalaire $p = a\alpha + b\beta + c\gamma$, en considérant les valeurs croissantes p_i ,

(1) Nous adoptons la dénomination de M. Tresse (*Thèse, Acta Mathematica*, t. 18).

Celle de Klein Surface W (*Höhere Geometrie*) prête à confusion, Darboux ayant donné ce nom à d'autres surfaces.

p_2, \dots , de ce produit, on transforme la série $f(x, y, z)$ en une série

$$f(x, y, z) = F_1(x, y, z) + F_2(x, y, z) + \dots,$$

F_k désignant l'ensemble des termes donnant le produit p_k est un polynome (si ε n'est pas dans une face du trièdre Ωabc). C'est ce que nous appellerons *ordonner la série f normalement à $\Omega\varepsilon$* (ou parallèlement à la face de N normale à $\Omega\varepsilon$ quand elle existe).

De même à deux nœuds $\varepsilon_1(\alpha_1, \beta_1, \gamma_1)$ et $\varepsilon_2(\alpha_2, \beta_2, \gamma_2)$ correspond un groupement des termes de la série f la transformant en une série à double entrée $f(x, y, z) = \Sigma F_{ik}(x, y, z)$ dont les termes correspondent à des mêmes valeurs des produits scalaires,

$$p = a\alpha_1 + b\beta_1 + c\gamma_1, \quad q = a\alpha_2 + b\beta_2 + c\gamma_2,$$

on ordonne ainsi la série f normalement à $\Omega\varepsilon_1$ et à $\Omega\varepsilon_2$ ou parallèlement aux plans perpendiculaires à ces droites.

5. **Remarques.** — En résumé, l'ordre infinitésimal de $\varphi(t)$ sera donné par le produit scalaire minimum $m = a\alpha + b\beta + c\gamma$ correspondant au plan d'appui de N normal à $\Omega\varepsilon$, la partie principale $\varphi(t)$ sera $F(x_1, y_1, z_1)t^m$, F désignant le monome, le polynome ou la série formés par l'ensemble des termes de f dont les exposants donnent ce produit scalaire, sauf dans les cas critiques où ε est un nœud appartenant à une face ou à une arête de la gerbe Π et où de plus $F(x_1, y_1, z_1) = 0$.

On peut énoncer une proposition analogue concernant le résultat

$$\Phi(t) = f[x(t), y(t), z(t)]$$

de la substitution à x, y, z de séries entières en t , variable infiniment petite,

$$x = x_1 t^\alpha + \dots, \quad y = y_1 t^\beta + \dots, \quad z = z_1 t^\gamma + \dots,$$

dont les termes de moindre degré sont seuls écrits; l'ordre infinitésimal et la partie principale de $\Phi(t)$ sont les mêmes que ceux de $\varphi(t) = f(x_1 t^\alpha, y_1 t^\beta, z_1 t^\gamma)$ sauf dans les cas critiques rappelés plus haut, pour lesquels l'ordre infinitésimal s'élève et qui demandent une étude plus complète.

Les résultats précédents s'étendent, pour la plupart, aux séries

entières à n variables

$$f(x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum A_{a_1 a_2 \dots a_n} x_1^{a_1} x_2^{a_2} \dots x_n^{a_n}$$

et aux substitutions

$$x_1 = X_1 t^{z_1} + \dots, \quad x_n = X_n t^{z_n} + \dots$$

Les expressions $a_1 \alpha_1 + \dots + a_n \alpha_n$ sont les produits scalaires de vecteurs d'un espace euclidien à n dimensions, rapporté à des coordonnées rectangulaires; on définit comme plus haut dans cet espace les ensembles E , E_s et par l'emploi de *simplex* (figures analogues aux tétraèdres) le corps continu K convexe et sa frontière polyédrale N (*Voir* le Chap. I du Mémoire de M. Favard).

Les points de cette surface se rangent en classes : les points de cette classe 1, ceux pour lesquels il n'y a qu'un plan d'appui sont les points intérieurs aux faces de N , les points de classe m ($1 \leq m \leq n$) constituent les intersections de m faces de N . A ces diverses classes correspondent (pour $m < n$) des classes de substitutions critiques $x_i = X_i t^{z_i}$.

Lorsque $n = 4$ leur recherche peut être facilitée par l'emploi d'un ensemble de polyèdres convexes remplissant un tétraèdre et constituant une figure analogue au diagramme plan. Nous nous contenterons ici de ces indications rapides.

Ajoutons enfin que les résultats précédents s'appliquent aux fonctions réelles de trois variables jouissant des propriétés suivantes : Elles admettent des dérivées continues jusqu'à un certain ordre p ; elles s'annulent à l'origine, ainsi que quelques-unes de ces dérivées.

CHAPITRE II.

6. Théorème d'existence des fonctions implicites. — Soit

$$f(y, x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$$

une équation dont le premier membre est une série entière, telle que $f(0, 0, \dots, 0) = 0$; elle définit y comme fonction implicite des x , les modules de toutes ces variables étant assez petits. Cela résulte du théorème classique d'existence lorsque la série $f(y, 0, 0, \dots, 0)$

contient un terme du premier degré en y , (la fonction implicite est alors développable en série entière en (x_1, \dots, x_n) et d'un théorème de Poincaré (*Thèse*, 1879, *Œuvres*, t. II, p. LIII) lorsque la série $f(y, 0, \dots, 0)$ commence par un terme en y^m ($m > 1$), la fonction implicite n'est alors plus uniforme et ses diverses déterminations vérifient une équation (*équation réduite*)

$$\mathcal{F}(y, x_1, \dots, x_n) = y^m + B_{m-1}y^{m-1} + \dots + B_1y + B_0 = 0,$$

algébrique en y , dont les coefficients sont des fonctions holomorphes de x_1, x_2, \dots, x_n s'annulant pour $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$. De là le nom de *fonctions algébroides* que Poincaré donne à ces fonctions implicites.

Weierstrass avait donné ce résultat ⁽¹⁾ dans ses Cours et l'avait complété en montrant que $f = \mathcal{F}g$, g est une série entière ne s'annulant pas pour $y = x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ (Werke, t. II, p. 135), proposition (*Vorbereitungssatz*) dont M. Goursat (*Bulletin de la Société mathématique de France*, t. 26, 1908, p. 209) a donné une démonstration élémentaire.

Poincaré (*loc. cit.*, lemme IV) a donné pour les systèmes de p équations définissant p fonctions implicites de n variables un théorème analogue dont nous aurons à nous servir dans la suite.

Il faut maintenant étudier les fonctions implicites dont le théorème de Poincaré-Weierstrass nous fait connaître l'existence, et notamment classer leurs diverses déterminations.

Pour $n = 1$ la fonction implicite dépend d'une seule variable x , la méthode de Puiseux apprend à répartir les m racines en un certain nombre de systèmes circulaires; les racines d'un même système se permutant entre elles quand le point x décrit une petite courbe fermée entourant le point $x = 0$. L'emploi d'une surface de Riemann au voisinage d'un point de ramification donne une forme élégante à la loi d'échange des racines appartenant à un même système circulaire.

Nous allons étudier le cas le plus simple après celui-là, celui où $n = 2$; désignons plus brièvement les variables indépendantes x_1, x_2 par x et z (elles jouent, le plus souvent, des rôles différents).

(1) Dans son *Calcul des Résidus* (p. 27, note) M. Lindelöf rappelle les travaux de Cauchy sur le même sujet.

Les résultats antérieurs vont nous conduire à diverses représentations paramétriques de la surface analytique $f(x, y, z) = 0$ au voisinage de l'origine; ces représentations correspondent les unes aux faces, les autres aux arêtes du polyèdre N et se prêtent à une étude plus complète des fonctions implicites $y(x, z)$ définies par cette équation.

7. Groupes correspondants aux faces ou aux arêtes de N . — Remarquons d'abord que tous les monomes constituant le polynôme (ou la série entière) $F(x, y, z)$, correspondant à f et à une face de son polyèdre N , se reproduisent multipliés par une même puissance de λ quand on effectue la transformation

$$(1) \quad x = x_1 \lambda^\alpha, \quad y = y_1 \lambda^\beta, \quad z = z_1 \lambda^\gamma,$$

α, β, γ étant les coordonnées du nœud ε pris sur la droite réticulaire $\Omega\varepsilon$ normale à la face.

Par suite, la surface obtenue en égalant à zéro un polynôme de face admet le groupe continu (1) à un paramètre λ . Il en est de même évidemment pour toute surface $\Phi(x, y, z) = 0$ où Φ est un polynôme dont les exposants sont représentés par des points E situés dans un même plan normal à $\Omega\varepsilon$. Par suite, la surface obtenue en égalant à zéro le polynôme correspondant à une arête de N admet le groupe à deux paramètres λ, μ

$$(2) \quad x = x_1 \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}, \quad y = y_1 \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \quad z = z_1 \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2},$$

$\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ et $\alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ sont les coordonnées des points $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ pris sur les normales $\Omega\varepsilon_1, \Omega\varepsilon_2$ aux faces adjacentes de l'arête considérée.

La même propriété appartient aux surfaces anharmoniques

$$(3) \quad x^a y^b z^c = \tau$$

en lesquelles cette surface se décompose (n° 4); nous admettons ici que l'arête n'est pas parallèle à l'un des axes $\Omega a, \Omega b, \Omega c$.

8. Représentations paramétriques correspondant à une arête. — La surface anharmonique admet, par suite, la représentation paramétrique

$$(4) \quad x = \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}, \quad y = \eta \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \quad z = \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2},$$

où η est racine de l'équation

$$(5) \quad \eta^b - \tau = 0,$$

pourvu que $b \neq 0$, c'est-à-dire que l'arête de N ne soit pas parallèle au plan $b = 0$; nous reviendrons plus loin sur les cas écartés.

Cherchons une représentation paramétrique analogue pour la surface analytique $f(x, y, z) = 0$. F désignant le polynôme correspondant à l'arête, posons

$$f(x, y, z) = F(x, y, z) + g(x, y, z)$$

et effectuons la substitution

$$(6) \quad x = \lambda^{\alpha_1} \mu^{\alpha_2}, \quad y = \eta(1 + \varphi) \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \quad z = \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2}$$

dans l'équation $f = 0$; nous obtenons après suppression d'un facteur monome en λ, μ l'équation

$$(7) \quad F[1, \eta(1 + \varphi), 1] + \gamma(\varphi, \lambda, \mu) = 0$$

qui détermine φ ; γ est une série entière en φ, λ, μ s'annulant identiquement ⁽¹⁾ pour $\lambda = \mu = 0$. Comme $F(1, \eta, 1)$ est nul,

$$F[1, \eta(1 + \varphi), 1]$$

contient en facteur une puissance de φ , montrons que l'exposant en sera égal à l'unité dans le cas (cas général) où la racine τ de $\Phi(\theta) = 0$ (n° 4) est simple.

La formule (2) (n° 4) donne

$$F'_{y'}(x, y, z) = b' \frac{F}{y} + b x^a y^{b'-1} z^{c'} \Phi'(\theta),$$

d'où

$$F'_{y'}(1, \eta, 1) = b \eta^{b'-1} \tau \Phi'(\tau),$$

c'est le coefficient de $\eta\varphi$ il est différent de zéro puisque $b = 0$ a été écarté et que τ, η ne sont pas nuls.

Dès lors le théorème classique d'existence des fonctions implicites nous montre que (7) admet une solution holomorphe $\varphi(\lambda, \mu)$ telle que $\varphi(0, 0) = 0$, que nous écrirons aussi $\varphi(\lambda, \mu; \eta)$ pour rappeler

(1) Pour tout terme en $x^a y^b z^c$ de g l'un au moins des nombres p et q du n° 4 est supérieur aux nombres analogues provenant des monomes de F .

qu'elle correspond à une racine γ_1 de (5); il faut toutefois examiner les questions de convergence.

Soient R_x, R_y, R_z des rayons de convergence associés relatifs à x, y, z de la série f , la série entière en $Y, \lambda, \mu : f(\lambda^{z_1} \mu^{z_2}, Y \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}, \lambda^{\gamma_1} \mu^{\gamma_2})$ est absolument convergente si les modules de ces variables vérifient les inégalités

$$|\lambda|^{z_1} |\mu|^{z_2} < R_x, \quad |Y| |\lambda|^{\beta_1} |\mu|^{\beta_2} < R_y, \quad |\lambda|^{\gamma_1} |\mu|^{\gamma_2} < R_z.$$

Prenons $|Y| < R$ nombre positif arbitraire supérieur à $|\gamma_1|$, nous choisirons ensuite des nombres positifs r_1, r_2 de façon que

$$r_1^{z_1} r_2^{z_2} < R_x, \quad R r_1^{\beta_1} r_2^{\beta_2} < R_y, \quad r_1^{\gamma_1} r_2^{\gamma_2} < R_z,$$

ce qui est toujours possible lorsque les deux nombres d'un même couple $\alpha_1, \alpha_2; \beta_1, \beta_2; \gamma_1, \gamma_2$ ne sont pas nuls simultanément, c'est-à-dire lorsque l'arête considérée de N n'est parallèle à aucun des trois axes $\Omega a, \Omega b, \Omega c$.

La série entière en φ, λ, μ constituant le premier membre de (7) est convergente si

$$|\lambda| < r_1, \quad |\mu| < r_2, \quad |\eta| |\varphi| < R - |\eta|,$$

et les hypothèses du théorème classique d'existence des fonctions implicites étant remplies, il existe des nombres positifs r'_1, r'_2 tels que la série entière $\varphi(\lambda, \mu)$ représentant la solution de (7) est convergente pour

$$|\lambda| < r'_1, \quad |\mu| < r'_2.$$

Remarques. — Les formules (6) donnent

$$(8) \quad x^{\gamma_1} = z^{\alpha_1} \mu^{b d}, \quad x^{\gamma_2} = z^{\alpha_2} \lambda^{-b d},$$

$b d = \alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2$, b et d ont été définis plus haut (n° 4). Nous pouvons supposer $\frac{\alpha_2}{\gamma_2} > \frac{\alpha_1}{\gamma_1}$, dès lors quand λ et μ tendent tous deux vers zéro $|x| |z|^{-\frac{\alpha_1}{\gamma_1}}$ tend vers zéro, $|x| |z|^{-\frac{\alpha_2}{\gamma_2}}$ devient infini; par suite la représentation paramétrique trouvée peut convenir à une partie de la surface analytique telle que

$$(9) \quad M |z|^{\frac{\alpha_2}{\gamma_2}} < |x| < m |z|^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}},$$

$$(10) \quad |z| < h,$$

m, M, h étant des nombres positifs donnés, le dernier doit être assez voisin de zéro (¹).

Les équations (8) permettent d'exprimer λ et μ et par suite $\varphi(\lambda, \mu)$ et y en fonction de certaines puissances de x et z à exposants fractionnaires, ces développements rappellent donc ceux de Puiseux; toutefois, parmi ces exposants fractionnaires, il en est ici de négatifs.

Pour une valeur donnée de z , la double inégalité (9) entraîne que le point représentatif de la variable x doit être intérieur à un anneau limité par deux circonférences ayant pour centre $x = 0$; c'est l'*anneau correspondant à l'arête considérée*.

9. Correspondance entre les deux surfaces (anharmonique et analytique). — L'équation (3) d'une surface anharmonique détermine, pour des valeurs données de x et z , b valeurs distinctes de y que nous écrirons

$$(11) \quad y_k = \eta_k (x^a z^c)^{\frac{-1}{b}}, \quad \eta_k = \eta_1 e^{(k-1)\frac{2\pi i}{b}},$$

η_1 étant celle des racines $\tau^{\frac{1}{b}}$ dont l'argument est positif et aussi petit que possible; nous prendrons pour argument du second facteur $-\frac{a \operatorname{Arg} x + c \operatorname{Arg} z}{b}$ les arguments $\operatorname{Arg} x, \operatorname{Arg} z$ étant inférieurs à 2π et positifs ou nuls. Ces b fonctions y_1, \dots, y_b sont ainsi bien définies quand les points x, z se déplacent dans leurs plans respectifs sans franchir les coupures pratiquées dans ces plans suivant les demi-droites représentant les x et les z réels et positifs.

Faisons maintenant varier x et z d'une façon continue en partant de valeurs initiales x_0, z_0 et décrivant deux courbes fermées C_x, C_z pouvant franchir les coupures, mais telles que $|x|, |z|$ restent finis et différents de zéro; déterminons $y(x, z)$ par les conditions suivantes: y vérifie (3) est continue et a pour détermination initiale $(y_0)_k$. Quand x et z ayant décrit C_x et C_z reviennent en x_0 et z_0 l'argument de x a augmenté de $2l\pi$, celui de z de $2n\pi$ (l, n entiers de signes quelconques)

(¹) Pour $\gamma_2 = 0, \alpha_2 \neq 0$, au lieu de la première inégalité (9), on en a une de même forme que (10), qui peut être supprimée en choisissant convenablement h . L'anneau correspondant à une telle arête, se réduit à un cercle de centre $x = 0$.

et la valeur de $y(x, z)$ lors du retour en x_0, z_0 sera $(y_0)_k \omega^{-(la+nc)}$ en posant

$$\omega = e^{\frac{2\pi i}{b}}.$$

On trouve sa place $(y_0)_k$ dans la classification précédente, en cherchant le nombre h tel que $1 \leq h \leq b$ auquel est congrue (module b) la différence $k - (la + nc)$; pour retrouver la valeur initiale il faut et il suffit que $la + nc$ soit multiple de b .

Remplaçons, pour un instant, dans les formules (4), η par un troisième paramètre variable ν ; nous obtenons une représentation paramétrique de l'espace x, y, z . Elle n'est pas parfaite : plusieurs systèmes de valeurs de λ, μ, ν donnent le même point x, y, z ; étudions cette indétermination.

Donnons-nous x, y, z , les équations (8) et la formule $y = \nu \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2}$ déterminent λ, μ, ν à des facteurs près σ'' , σ' , σ' où $\sigma = e^{\frac{2\pi i}{bd}}$; p, q, r sont entiers. Ces entiers ne sont pas arbitraires; pour que la substitution

$$(12) \quad \lambda' = \sigma'' \lambda, \quad \mu' = \sigma' \mu, \quad \nu' = \sigma' \nu,$$

entraîne les identités

$$x' = \lambda'^{\alpha_1} \mu'^{\alpha_2} = x, \quad y' = \nu' \lambda'^{\beta_1} \mu'^{\beta_2} = y, \quad z' = \lambda'^{\gamma_1} \mu'^{\gamma_2} = z,$$

il faut

$$\begin{aligned} p\alpha_1 + q\alpha_2 &= sbd, \\ p\beta_1 + q\beta_2 + r &= tbd, \\ p\gamma_1 + q\gamma_2 &= ubd, \end{aligned}$$

s, t, u étant entiers, d'où, puisque $b d = \gamma_1 \alpha_2 - \gamma_2 \alpha_1$,

$$(13) \quad \begin{cases} p = -s\gamma_2 + u\alpha_2, \\ q = s\gamma_1 - u\alpha_1, \\ r = s(\beta_1\gamma_2 - \beta_2\gamma_1) + t(\gamma_1\alpha_2 - \gamma_2\alpha_1) + u(\alpha_1\beta_2 - \alpha_2\beta_1) \end{cases}$$

(r est bien multiple de d plus grand commun diviseur des trois parenthèses).

Les équations (12) et (13) définissent un groupe discontinu (s, t, u sont des entiers arbitraires).

Ce groupe donne les *transformations des paramètres laissant invariants les points de l'espace*.

En prenant, dans les formules (12), pour ν une racine η de l'équation (5), nous avons les transformations de la représentation paramétrique qui laissent invariante la surface anharmonique. Soit P le point de cette surface donné par λ, μ (ou λ', μ'), x, y, z ses coordonnées.

Faisons ensuite dans ces mêmes formules (12)

$$\nu = \eta[1 + \varphi(\lambda, \mu; \eta)].$$

Nous obtenons un point Q de la surface analytique $f = 0$ ayant même x et même z que P, et dont l'ordonnée Y peut s'écrire, d'après ce qui précède,

$$Y = \eta[1 + \varphi(\lambda, \mu; \eta)] \lambda^{\beta_1} \mu^{\beta_2} = \eta[1 + \varphi(\lambda, \mu; \eta)] \sigma' \lambda'^{\beta_1} \mu'^{\beta_2}.$$

On a donc

$$f\{\lambda'^{\alpha_1} \mu'^{\alpha_2}, \eta[1 + \varphi(\lambda, \mu; \eta)] \sigma' \lambda'^{\beta_1} \mu'^{\beta_2}, \lambda'^{\gamma_1} \mu'^{\gamma_2}\} = 0.$$

$\varphi(\lambda, \mu; \eta)$ vérifie donc l'équation analogue à (7) qui donne $\varphi(\lambda', \mu'; \eta \sigma')$ et par suite

$$(14) \quad \varphi(\sigma' \lambda, \sigma' \mu; \sigma' \eta) = \varphi(\lambda, \mu; \eta).$$

En résumé, bien que la correspondance entre P et Q n'ait été établie que par l'intermédiaire d'une représentation paramétrique imparfaite elle est indépendante des transformations (12), (13) qu'on peut effectuer sur les paramètres. *Dans le domaine défini par (9) et (10), à un point P de la surface anharmonique, correspond un point Q et un seul de la surface analytique $f = 0$.*

Si l'on se donne une parallèle à Oy (c'est-à-dire x et z), il y a sur cette parallèle b points P_1, P_2, \dots, P_b de la surface anharmonique et b points Q_1, Q_2, \dots, Q_b correspondants de la surface analytique. Quand les points représentatifs des variables complexes x et z décrivent dans leurs plans respectifs des circuits fermés (tels que les inégalités (9) et (10) ne cessent pas d'être vérifiées), les points Q_1, \dots, Q_b se permutent de la même façon que P_1, \dots, P_b .

10. Représentations paramétriques correspondant à une face. —

Égalons à zéro le polynome (ou la série) $F(x, y, z)$ correspondant à une face de N ; nous avons l'équation

$$(15) \quad F(x, y, z) = 0$$

d'une surface en général algébrique admettant un groupe continu (1) à un paramètre.

Pour les faces que nous aurons à utiliser γ est positif, ce groupe donne une représentation paramétrique de la surface

$$(16) \quad x = \xi \lambda^\alpha, \quad y = \eta \lambda^\beta, \quad z = \lambda \gamma,$$

les paramètres sont λ et ξ ; η est une fonction implicite de ξ vérifiant l'équation

$$(17) \quad F(\xi, \eta, 1) = 0.$$

Supposons de plus $\alpha\beta > 0$; $F(\xi, \eta, 1)$ est un polynome, la courbe (17) est algébrique (¹), la nature de la fonction η est bien connue; on sait notamment qu'au voisinage de tout point ordinaire ξ_0, η_0 de la courbe (17), c'est-à-dire tel que ce point est à distance finie et n'est pas point de ramification $\eta - \eta_0$ est développable en série entière en $\xi - \xi_0$.

Passant à la surface analytique, nous poserons

$$(18) \quad x = \xi \lambda^\alpha, \quad y = (\eta + \psi) \lambda^\beta, \quad z = \lambda \gamma,$$

η étant la fonction implicite de ξ dont nous venons de parler; ψ sera déterminé en fonction de ξ et de λ par l'équation $f(x, y, z) = 0$ qui s'écrit

$$(19) \quad F(\xi, \eta + \psi, 1) + \mathcal{F}(\xi, \eta + \psi, \lambda) = 0.$$

\mathcal{F} est une série entière en $\xi, \eta + \psi, \lambda$ contenant en facteur une puissance de λ ; elle est absolument convergente si

$$(20) \quad |\xi \lambda^\alpha| < R_x, \quad |(\eta + \psi) \lambda^\beta| < R_y, \quad |\lambda \gamma| < R_z.$$

Prenons

$$(21) \quad |\xi| < M, \quad |\eta| < M', \quad |\psi| < M'',$$

(¹) Si $F(x, y, z)$ contient en facteur un monome en x, y, z nous excluons les axes $\omega_\eta (\xi = 0), \omega_\xi (\eta = 0)$ quand nous parlerons de la courbe (17).

M, M', M'' étant des nombres positifs arbitrairement donnés ⁽¹⁾ et

$$(22) \quad |\lambda| < \rho,$$

ρ étant un nombre positif suffisamment petit, les inégalités (20) seront satisfaites.

F est un polynome en ψ sans terme constant; le coefficient de ψ dans ce polynome est $F'_\eta(\xi, \eta, 1)$. Le point ξ, η de (17) étant voisin d'un point ordinaire ξ_0, η_0 de cette courbe, $F'_\eta(\xi, \eta, 1)$ est une série entière en $\xi - \xi_0$ avec un terme constant $F'_\eta(\xi_0, \eta_0, 1)$ différent de zéro. D'après le théorème classique d'existence des fonctions implicites, l'équation (19) admet une solution $\psi(\xi, \lambda)$ donnée par une série entière en $\xi - \xi_0$ et λ ; ψ contient en facteur une puissance de λ [car $\psi(\xi, 0)$ est évidemment nul].

Désignons par ν le degré de l'équation (17) considérée comme équation en η . Si l'abscisse ξ est quelconque, la parallèle correspondante à l'axe $\omega\eta$ rencontre la courbe en ν points ordinaires distincts les uns des autres et situés à distance finie; nous admettons que le polynome de face $F(x, y, z)$ n'admet pas de facteur multiple. Mais pour certaines valeurs, ξ_e , de ξ il en est autrement, ces *abscisses exceptionnelles* sont celles des points de (17) où la tangente est parallèle à l'axe $\omega\eta$, celles des points multiples, celles enfin des asymptotes parallèles à $\omega\eta$. Il n'existe pas nécessairement des abscisses exceptionnelles; s'il en existe, nous prendrons M supérieur aux modules de toutes ces valeurs, qui sont en nombre fini, puisque F est un polynome; et nous leur ferons correspondre dans le plan de la variable x (pour z donné et de module petit) les points

$$(23) \quad x_e = \xi_e \lambda^\alpha = \xi_e z^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

et les cercles d'isolement σ_e définis par

$$(24) \quad |x - x_e| = \varepsilon |\lambda|^z = \varepsilon |z|^{\frac{\alpha}{\gamma}},$$

ε est un nombre positif assez petit pour que deux cercles d'isolement de centres différents soient extérieurs l'un à l'autre. Il leur corres-

⁽¹⁾ En excluant, comme plus loin, les abscisses exceptionnelles ξ_e , on peut obtenir que la première des inégalités (21) entraîne la seconde.

pond, dans le plan ξ , les cercles

$$|\xi - \xi_e| = \varepsilon.$$

Les abscisses exceptionnelles relatives aux asymptotes parallèles à $\omega\eta$ sont racines de l'équation obtenue en égalant à zéro le coefficient de la plus haute puissance η^y de η dans $F(\xi, \eta, 1)$; les valeurs x_e correspondantes vérifient de même l'équation obtenue en égalant à zéro, le coefficient $\varphi(x, z)$ du terme de F dont le degré en y est maximum.

Les exposants a, b, c des monomes constituant ce terme sont représentés par les points E appartenant au plan de la face considérée et aussi éloignés que possible du plan $b = 0$; ce sont donc des points d'une arête de la face et cette arête est parallèle au plan $b = 0$. En définitive, *les fonctions x_e de z correspondant aux asymptotes $\xi = \xi_e$ vérifient l'équation algébrique relative à une arête de N parallèle au plan $b = 0$* . Nous avons laissé de côté antérieurement les arêtes de cette nature, et y reviendrons plus loin; mais nous remarquerons dès à présent que les cercles d'isolement correspondants (24) remplacent les anneaux relatifs à une arête de nature différente (¹).

Observons aussi que l'ensemble $\varphi(x, z)$ est le coefficient de la puissance de y entrant en facteur dans le polynôme $F_1(x, y, z)$ correspondant à une face adjacente à la précédente, *les valeurs ξ_e sont donc aussi les abscisses des points de rencontre de $F_1(\xi, \eta, 1) = 0$ avec l'axe $\omega\xi$* .

11. Remarques diverses. — 1° La représentation paramétrique (16) de l'espace x, y, z n'est pas parfaite; en effectuant sur les paramètres ξ, η, λ les transformations du groupe

$$(25) \quad \xi' = \xi \sigma^{-\alpha r}, \quad \eta' = \eta \sigma^{-\beta r}, \quad \lambda' = \lambda \sigma^r,$$

$$(26) \quad \sigma = e^{\frac{2\pi i}{Y}},$$

(¹) Inversement, toute arête de N parallèle au plan $b = 0$ conduit à des points exceptionnels de la nature précédente : ces points correspondent à celle des deux faces à laquelle elle est adjacente pour laquelle $\frac{\beta}{Y}$ a la plus petite valeur; pourvu toutefois que cette valeur ne soit pas nulle.

où r varie par valeurs entières, tous les points de l'espace restent invariants.

Le point ξ', η' du plan $\xi\omega\eta$ appartient, lui aussi, à la courbe $F(\xi, \eta, 1) = 0$ lorsque ξ, η est un point de cette courbe. En effet si x, y, z sont liés à x_1, y_1, z_1, λ par les formules (1), $F(x_1, y_1, z_1)$ et $F(x, y, z)$ ne diffèrent que par un facteur (puissance de λ); prenons $x_1 = \xi, y_1 = \eta, z_1 = 1, \lambda = \sigma^{-r}$ ce facteur est différent de zéro, $F(\xi, \eta, 1), F(\xi', \eta', 1)$ s'annulent bien simultanément.

2° A tout point $P(x, y, z)$ de la surface algébrique relative à la face considérée de N nous faisons correspondre un point $Q(x, Y, z)$ de la surface analytique par les formules (16) et $Y = (\eta + \psi)\lambda^\beta$, ψ est la solution de l'équation (19); une démonstration analogue à celle qui a été donnée pour les équations relatives aux arêtes montre que, bien que la correspondance ait été établie par l'intermédiaire d'une représentation paramétrique, elle est indépendante de la nature imparfaite de cette représentation, autrement dit elle subsiste si l'on remplace ξ, η, λ par ξ', η', λ' .

3° Lorsque ξ est tel que les inégalités $|\xi - \xi_0| > \varepsilon, |\xi| < M$ soient satisfaites, η reste fini, on peut trouver un nombre M' , et de plus les rayons de convergence associés de ψ (série double en $\xi - \xi_0$ et λ) ont une borne inférieure positive. Par suite, *on peut trouver un nombre positif h assez petit pour que la correspondance entre les deux surfaces $F = 0, f = 0$ soit valable pour $|z| < h$ et pour les points représentatifs de la variable complexe x intérieurs au cercle $|x| = M|z|^{\frac{\alpha}{\gamma}}$ et extérieurs aux cercles d'isolement.*

4° *Face de N normale à Ωc .* — Nous avons supposé α, β différents de zéro; s'ils sont tous deux nuls on prendra $\gamma = 1, x = \xi, y = \eta$ vérifiant l'équation $F(x, y, z) = 0$ dont le premier membre est formé par l'ensemble des termes de $f(x, y, z)$ dont le degré par rapport à z est aussi petit que possible; nous pouvons supposer ce degré minimum nul (en divisant, au besoin, f par une puissance de z entrant en facteur). Alors $F(x, y, z) = f(x, y, 0)$ série entière en x, y ; la surface $F = 0$ est un cylindre à génératrices parallèles à Oz passant par l'intersection de $f = 0$ et du plan $z = 0$.

La méthode suivie précédemment reste valable, pourvu que le point représentatif de la variable x soit choisi dans un domaine convenable.

Elle établit une correspondance entre deux points P du cylindre, Q de la surface analytique, situés sur une parallèle à Oy d'abscisse x , de cote z ; mais alors que dans le cas général x, y, Y tendaient (quel que soit ξ_0), vers zéro lorsque z et, par suite, λ étaient infiniment petits, il n'en est plus de même ici; on peut seulement affirmer que $Y - y$ tend vers zéro en même temps que z et λ . Comme l'a montré M. Dumas dans sa Communication au Congrès de Bologne, le cas général d'une face quelconque de N où $\alpha\beta\gamma \neq 0$ est par la transformation (16) ramené à l'étude d'une surface analytique $F(\xi, \eta, 1) + \lambda \varphi(\xi, \eta, \lambda) = 0$ au voisinage de son intersection avec le plan $\lambda = 0$, le cylindre $F(\xi, \eta, 1) = 0$ étant ici algébrique et ne passant pas nécessairement par l'axe $\xi = \eta = 0$.

Des remarques analogues s'appliquent au cas (également étudié par M. Dumas dans un article des *Commentarii mathematici Helvetici*, t. 4, 1932, p. 230 à 247) où une face du polyèdre N est parallèle à un axe Ωa , Ωb sans l'être à deux; nous signalons seulement ce cas très particulier où la surface analytique $f = 0$ contient l'un des axes Ox, Oy .

12. Valeurs de y pour x et z donnés. — Nous allons maintenant préciser la définition des n fonctions algébroides déterminées par notre équation

$$(27) \quad f(x, y, z) = 0;$$

nous supposons $f(0, y, 0)$ non identiquement nul et d'ordre infinitésimal n par rapport à y .

Attribuons à z une valeur constante \bar{z} de module inférieur à un nombre positif h assez petit pour que les développements en série des numéros précédents (8 à 11) soient valables et regardons x comme variable. En d'autres termes, étudions ⁽¹⁾ la surface (27) en considérant ses intersections par les plans $z = \bar{z}$; intersections qu'on peut

⁽¹⁾ M. Picard a montré l'intérêt de cette étude. *Théorie des fonctions algébriques*, t. 1, Chap. IV, 1897; *Quelques applications analytiques de la théorie des courbes et des surfaces algébriques*, Chap. V, section II, 1931.

appeler courbes de niveau, en conservant les locutions usitées dans le cas des variables réelles et de l'axe Oz vertical.

Rangeons par ordre de grandeur croissante les quotients $s = \frac{\alpha}{\gamma}$ relatifs aux coordonnées α, β, γ des nœuds correspondant aux diverses faces du polyèdre N , en écartant $s = 0$ et $s = \infty$; soit

$$s_1, s_2, \dots, s_k,$$

la suite obtenue; tout nombre s_j de cette suite correspond à une ou à plusieurs faces de N . Soient m, M deux nombres positifs le premier inférieur, le second supérieur aux modules des abscisses non nulles ξ_e des divers points exceptionnels de toutes les courbes algébriques $F(\xi, \eta, 1) = 0$ correspondant aux faces du polyèdre N ; nous pouvons prendre de plus $m < 1 < M$.

Traçons, dans le plan de la variable complexe x , les circonférences

$$\begin{array}{ll} (c) & |x| = r < m, \\ (C_1) & |x| = M |\bar{z}|^{s_1}, \quad (c_1) \quad |x| = m |\bar{z}|^{s_1}, \\ \dots & \dots, \quad \dots, \\ (C_j) & |x| = M |\bar{z}|^{s_j}, \quad (c_j) \quad |x| = m |\bar{z}|^{s_j}, \\ \dots & \dots, \quad \dots, \\ (C_k) & |x| = M |\bar{z}|^{s_k}, \quad (c_k) \quad |x| = m |\bar{z}|^{s_k}, \end{array}$$

nous supposons $h < 1$ et assez petit pour que leurs rayons forment une suite décroissante.

A chaque face de N correspond ainsi un anneau limité par deux circonférences C_j, c_j sauf si pour cette face $\alpha = 0$ on a alors une région extérieure à c , ou si $\gamma = 0$ qui donne l'origine.

A chaque arête de N est associé un anneau, $c_j C_l$ limité par deux circonférences relatives à deux nombres s_j, s_l différents qui correspondent aux faces adjacentes à cette arête

$$m |\bar{z}|^{s_j} \geq |x| \geq M |\bar{z}|^{s_l}.$$

Toutefois quand une arête est l'intersection de deux faces de N donnant le même quotient $s = \frac{\alpha}{\gamma}$, l'arête est parallèle au plan $b = 0$, le même anneau correspond à ces deux faces et c'est un *cercle d'isolement* qui sera associé à cette arête (n° 10).

Traçons aussi tous les autres cercles d'isolement pour lesquels ξ_c est différent de zéro (n° 10); ils sont intérieurs aux anneaux des faces auxquels ils se rapportent.

La figure formée par un anneau de face et par les cercles d'isolement correspondants se transforme par similitude (autour du point $x = 0$) lorsqu'on remplace \bar{z} par une autre valeur \bar{z}' ; le rapport de similitude est le quotient $\frac{|\bar{z}'|}{|\bar{z}|}$, l'angle de rotation est égal à la différence des arguments de \bar{z}' et \bar{z} . Au contraire, un anneau d'arête ne reste pas, dans les mêmes conditions, semblable à lui-même, puisque le rapport des rayons des deux circonférences concentriques qui le limitent change avec $|\bar{z}|$.

Donnons à x une valeur déterminée \bar{x} , le point représentatif de \bar{x} étant intérieur à c et extérieur à tous les cercles d'isolement, ce qui précède (n° 8 à 10) permet de calculer les valeurs numériques $\gamma(\bar{x}, \bar{z})$ de nos fonctions implicites.

En effet, considérons un anneau d'arête auquel le point \bar{x} est intérieur; à cette arête correspond un polynôme $F(x, y, z)$ l'équation algébrique $F(\bar{x}, y, \bar{z}) = 0$ (préalablement débarrassée du facteur monome $\bar{x}^{a_0} y^{b_0} \bar{z}^{c_0}$ du n° 4), admet un nombre de solutions \bar{y} égal au degré de $\frac{F}{\bar{x}^{a_0} y^{b_0} \bar{z}^{c_0}}$ par rapport à y ; $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ sont les coordonnées d'un point P d'une surface anharmonique relative à l'arête. A ce point P nous associons (n° 9) un point Q bien déterminé de la surface analytique.

La méthode est tout à fait analogue pour un anneau de face auquel \bar{x} serait intérieur (n° 10).

Enfin, si \bar{x} est sur une circonférence frontière c_j ou C_j on peut appliquer indifféremment l'une ou l'autre des méthodes (1).

(1) Observons, à ce propos que m et M ne sont assujettis qu'à vérifier certaines inégalités, on peut donc les modifier un peu, prendre par exemple m entre m' et m'' et définir un anneau

$$m' |\bar{z}| s < x < m'' |\bar{z}| s,$$

où la méthode du n° 8 et celle du n° 10 sont simultanément applicables. En d'autres termes, un point Q de la surface analytique correspondrait ainsi à un point P d'une sur-

Pour trouver les arêtes à considérer (pour \bar{x} et \bar{z} donnés) on utilise avantageusement la remarque suivante.

Posons $|\bar{x}| = X$, $|\bar{z}| = Z$ considérons un anneau d'arête auquel \bar{x} est intérieur, soient s' , s'' les rapports $\frac{\alpha}{\gamma}$ correspondant aux deux faces adjacentes à l'arête, on a la double inégalité

$$mZ^{s'} > X > MZ^{s''},$$

en tenant compte de $m < 1 < M$ et posant $X = Z^s$ on trouve

$$Z^{s'} > X = Z^s > Z^{s''},$$

et par suite s est compris entre s' et s'' .

On calcule donc $s = \frac{\log |\bar{x}|}{\log |\bar{z}|}$, on trace dans le diagramme plan (n° 3) la droite Δ d'équation $\alpha = s\gamma$, on cherche tous les côtés du diagramme plan rencontrés par Δ ils correspondent aux arêtes cherchées. Si Δ passait par un sommet du diagramme, on comparerait $\frac{X}{Z}$ à m et M , si le rapport est compris entre ces nombres, on applique la méthode du n° 10 à la face correspondant à ce sommet; dans le cas contraire, on utilise les arêtes qui la limitent (deux cas sont à distinguer suivant que le rapport est inférieur à m ou supérieur à M).

Au lieu du diagramme plan, utilisons le polyèdre N. Les normales aux plans d'appui relatifs à une arête ont des paramètres directeurs de la forme $\alpha = \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2$, $\beta = \lambda_1 \beta_1 + \lambda_2 \beta_2$, $\gamma = \lambda_1 \gamma_1 + \lambda_2 \gamma_2$, $\alpha_1, \dots, \gamma_2$ étant les paramètres directeurs des faces adjacentes à cette arête, λ_1, λ_2 étant positifs (n° 3); $s = \frac{\alpha}{\gamma}$ est donc compris entre $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}$ et $\frac{\alpha_2}{\gamma_2}$. Inversement, à tout nombre s satisfaisant à cette condition,

face anharmonique relative à une arête et à un point P' d'une surface algébrique relative à une face. Les deux correspondances (P, Q) (P', Q) étant univoques, la correspondance (P, P') le sera aussi.

Il est aisé de le voir analytiquement : Soient F un polynôme de face, F_1 un polynôme relatif à l'une des arêtes de cette face. Pour passer de P pris sur $F_1 = 0$ à P' point correspondant sur $F = 0$ nous n'avons qu'à représenter paramétriquement l'une des surfaces anharmoniques dont l'ensemble donne $F_1 = 0$ et à utiliser la méthode du n° 8, en y remplaçant la série f par le premier membre F de l'équation de la surface algébrique relative à la face.

on peut faire correspondre un plan d'appui relatif à l'arête considérée; il est parallèle à la droite; $b = 0$, $as + c = 0$. C'est dire que pour x , z et par suite s donnés, *les arêtes à utiliser constituent le contour apparent dans l'espace du polyèdre N parallèlement à la direction D de paramètres directeurs* $1, 0, -s$ (en excluant toutefois l'axe Ωb et le plan $a\Omega c$).

Ces arêtes forment une ligne brisée partant du sommet de N situé sur Ωb de coordonnées $0, n, 0$ et aboutissant au plan $a\Omega c$; la projection de cette brisée sur Ωb a pour mesure n et d'autre part est égale à la somme des mesures des projections de ses côtés, c'est-à-dire à la somme des degrés relatifs à y des équations $F = 0$ relatives aux arêtes utilisées (équations débarrassées des racines nulles données par les facteurs monomes). C'est dire que *la méthode précédente nous donne bien un nombre n de racines $y(x, \bar{z})$ égal au degré de l'équation réduite de Poincaré-Weierstrass.*

13. **Domaine S où les fonctions $y(\bar{x}, \bar{z})$ sont uniformes.** — En nous donnant toujours la valeur numérique \bar{z} de z , traçons, dans le plan de la variable complexe x , une demi-droite Δ issue de O ne rencontrant pas les cercles d'isolement ⁽¹⁾, soient a_j, A_j les points où elle rencontre les circonférences c_j, C_j .

Nous joindrons à un point B_j du segment $a_j A_j$ les diverses circonférences d'isolement σ intérieures à l'anneau de face $c_j C_j$; les lignes de jonction λ étant intérieures à l'anneau, ne se coupant pas entre elles et ne coupant pas Δ . Ce tracé qui rend l'anneau simplement connexe est analogue à celui des lacets de Puiseux dans la théorie des fonctions algébriques : les circonférences σ, C_j, c_j remplacent les points critiques. De même l'anneau compris entre c_j et C_{j+1} est rendu simplement connexe par la coupure Δ .

Considérons maintenant la partie S du plan intérieure à la circonférence c extérieure à toutes les circonférences d'isolement σ ; nous admettons donc qu'on peut traverser les circonférences c_j, C_j mais on conserve les coupures précédentes Δ, λ ; il est évident que S est simplement connexe.

⁽¹⁾ Au lieu d'une demi-droite, on peut prendre une courbe quelconque ne rencontrant qu'en un seul point tout cercle de centre O.

Partant d'un point \bar{x} de S et d'une solution déterminée $y_k(\bar{x}, \bar{z})$ nous en déduirons par prolongement analytique le long d'un chemin L joignant \bar{x} et x et tout entier intérieur à S, une solution $y_k(x, \bar{z})$ de $f(x, y, \bar{z}) = 0$; montrons que nous obtenons ainsi une fonction uniforme dans le domaine S.

La démonstration, tout à fait analogue à celle qui concerne les fonctions algébriques d'une variable (APPELL et GOURSAT, *Théorie des fonctions algébriques*, Chap. IV, n° 80) revient à établir que pour tout point \bar{x} de S les n racines $y_k(\bar{x}, \bar{z})$ sont bien distinctes. Or on établit facilement (par exemple avec la décomposition de Weierstrass) que si deux de ces racines étaient égales elles vérifieraient à la fois $f(\bar{x}, y, \bar{z}) = 0$, $f'_y(\bar{x}, y, \bar{z}) = 0$.

Mais les solutions du système d'équations en x et y

$$(29) \quad f(x, y, z) = 0 \quad f'_y(x, y, z) = 0$$

sont fonctions algébroides de z (POINCARÉ, *Thèse*, lemme IV) c'est-à-dire qu'on peut les représenter par un nombre fini de formules

$$(30) \quad x = x(t) = \xi_1 t^{\alpha_1} + \dots, \quad y = y(t) = \eta_1 t^{\beta_1} + \dots, \quad z = t^{\gamma_1},$$

où t désigne une nouvelle variable, γ_1 un nombre entier positif, $x(t)$, $y(t)$ des séries entières dont nous avons mis en évidence les termes de moindre degré : $x(0) = y(0) = 0$.

De plus si $|\bar{x}|$, $|\bar{z}|$ sont assez voisins de zéro, toute solution de (29) peut être obtenue par les développements précédents en attribuant à t une valeur numérique convenable \bar{t} .

La substitution $x = \xi_1 t^{\alpha_1}$, $y = \eta_1 t^{\beta_1}$, $z = t^{\gamma_1}$ est évidemment critique (n° 3) à la fois pour $f(x, y, z)$ et $f'_y(x, y, z)$; en particulier $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ sont des paramètres directeurs de la normale à un plan d'appui du polyèdre N relatif à f , l'appui ayant lieu suivant une face ou suivant une arête. On vérifie facilement que ξ_1, η_1 doivent satisfaire aux relations

$$(31) \quad F(\xi, \eta, 1) = 0, \quad F'_\eta(\xi, \eta, 1) = 0,$$

F étant le polynome correspondant à la face ou à l'arête.

S'il s'agit d'une arête non parallèle au plan $b = 0$, F a la forme (2) du n° 4

$$F(\xi, \eta, 1) = \xi^{a'} \eta^{b'} \Phi(\theta) \quad (\theta = \xi^a \eta^b),$$

on ne pourrait trouver des valeurs de ξ, η différentes de zéro satisfaisant au système (31) que si $\Phi(\theta) = 0$ admettait des racines multiples, mais nous admettons d'abord que les polynômes $F(x, y, z)$ relatifs aux faces et aux arêtes n'ont pas de facteurs multiples (autres que des monômes en x, y, z).

Les seules arêtes restant à considérer sont donc celles qui sont parallèles au plan $b = 0$; pour celles-ci $F(\xi, \eta, 1) = \xi^{a'} \eta^{b'} \Phi(\xi^a)$; $\xi_1 \neq 0$ doit vérifier $\Phi(\xi_1^a) = 0$; mais vérifie alors aussi les deux équations (31) (qui ne suffisent pas à déterminer η_1). Dans ce cas,

$$\xi_1 \bar{t}^{x_1} = \xi_1 \bar{z}^{\frac{\alpha_1}{\gamma_1}}$$

est dans le plan de la variable complexe x centre d'un cercle d'isolement.

Il en est de même pour une face lorsque ξ_1, η_1 différents de zéro vérifient les relations (31).

Si $|\bar{z}|$ et $|\bar{t}|$ sont assez petits, les points $x(\bar{t})$ correspondant aux solutions (30) du système (29) sont intérieurs aux cercles d'isolement; nous ne saurions donc les rencontrer puisque le chemin L suivant lequel s'effectue le prolongement analytique est extérieur à ces cercles.

Chacune des n fonctions $y_k(x, \bar{z})$ est donc bien fonction uniforme de x dans le domaine S .

14. Étude des fonctions à l'intérieur des cercles d'isolement. —

Considérons une face du polyèdre N intervenant dans l'étude de $y_k(x, \bar{z})$ à tout point x de l'anneau relatif à cette face correspond une abscisse ξ bien déterminée et à $y_k(x, \bar{z})$ une ordonnée $\eta_k(\xi)$ de la courbe $F(\xi, \eta, 1) = 0$. Le prolongement analytique de $y_k(x, \bar{z})$ se déduit de celui de $\eta_k(\xi)$; ce dernier s'effectue sans difficulté lorsque ξ n'est pas voisin d'une abscisse exceptionnelle ξ_e . Il n'en offre pas davantage lorsque ξ tendant vers ξ_e , $\eta_k(\xi)$ tend vers une valeur η' telle que ξ_e, η' est un point ordinaire de cette courbe, c'est-à-dire un point simple

d'ordonnée η' finie, et où la tangente n'est pas parallèle à $\omega\eta$. Dans ce cas, le cercle d'isolement n'intervient pas.

Si $\eta_k(\xi)$ ne remplit pas ces conditions, deux cas sont possibles suivant que $\eta_k(\xi_e)$ est ou non infini. Examinons d'abord le second cas, celui où $\eta_k(\xi_e)$ que nous désignerons par η_e est l'ordonnée d'un point multiple ou d'un point à tangente parallèle à $\omega\eta$ de la courbe $F(\xi, \eta, 1) = 0$.

Le changement de variables

$$(32) \quad x = (\xi_e + x') z'^\alpha, \quad y = (\eta_e + y') z'^\beta, \quad z = z'^\gamma,$$

fait correspondre à la surface $f(x, y, z) = 0$ une surface analogue $g(x', y', z') = 0$ que nous aurons à étudier au voisinage de l'origine.

Cette étude est, en général, plus simple pour la seconde surface que pour la première. En effet

$$g(x', y', 0) = F(\xi_e + x', \eta_e + y', 1);$$

l'ordre infinitésimal n' par rapport à y' de $g(0, y', 0)$ qui nous donne le nombre des nouvelles fonctions algébroides $y'(x', z')$ à considérer est égal à l'exposant de la puissance de y' entrant en facteur dans $F(\xi_e, \eta_e + y', 1)$, exposant en général inférieur au degré de $F(\xi, \eta, 1)$ par rapport à η et qui ne peut jamais le surpasser; *a fortiori*, on a $n' \leq n$.

Considérons un cercle d'isolement

$$\left| x - \xi_e z^{\frac{\alpha}{\gamma}} \right| \leq \varepsilon |z|^{\frac{\alpha}{\gamma}}$$

correspondant à une arête \mathcal{A} de N parallèle au plan $b = 0$. Cette arête est l'intersection de deux faces, écrivons les équations de leurs plans

$$\alpha_1 a + \beta_1 b + \gamma_1 c = p_1, \quad \alpha_2 a + \beta_2 b + \gamma_2 c = p_2,$$

les coefficients $\alpha_1, \beta_1, \dots, p_2$ sont des entiers positifs; $\frac{\alpha}{\gamma}$ est la plus simple expression des fractions égales $\frac{\alpha_1}{\gamma_1}, \frac{\alpha_2}{\gamma_2}$. Posons

$$\alpha_1 = m_1 \alpha, \quad \gamma_1 = m_1 \gamma, \quad \alpha_2 = m_2 \alpha, \quad \gamma_2 = m_2 \gamma,$$

ξ_e est racine de l'équation $\Phi(\xi^a) = 0$, relative à l'arête.

Effectuons dans f la substitution

$$(33) \quad x = (\xi_e + x') z'^\alpha, \quad y = y', \quad z = z'^\gamma,$$

nous sommes ramené à l'étude des fonctions algébroides d'ordre n définies par

$$f[(\xi_e + x')z^{\alpha}, y', z^{\gamma}] = g(x', y', z') = 0,$$

pour $|z'|$ petit et pour $|x'| < \varepsilon$.

Le polyèdre N' relatif à g est de forme simple, ainsi que nous allons le voir. Le terme $A_{abc}x'^a y'^b z'^c$ donne par la substitution précédente le polynôme $A_{abc}(\xi_e + x')^a y'^b z'^{a\alpha + c\gamma}$. Ordonnons f parallèlement à l'arête \mathcal{A} , un terme de la série double obtenue est de la forme

$$F_{ij}(x, y, z) = y'^i \Sigma A_{aic} x'^a z'^c,$$

l'addition Σ s'étend aux valeurs de a et c telles que

$$a\alpha + c\gamma = j.$$

Par la substitution (33), F_{ij} donne un terme de la série double obtenue en ordonnant $g(x', y', z')$ parallèlement à Ωa :

$$G_{ij}(x', y', z') = y'^i z'^j F_{ij}(\xi_e + x', 1, 1).$$

Soit Δ_{ij} la droite réticulaire

$$b = i, \quad a\alpha + c\gamma = j,$$

on vérifie aisément que si elle pénètre à l'intérieur de N , la droite transformée Δ'_{ij} donnée par $b' = i$, $c' = j$ pénètre à l'intérieur de N' . Au prisme \mathcal{P} de contour apparent parallèlement à \mathcal{A} du polyèdre N correspond ainsi le prisme \mathcal{P}' de contour apparent de N' parallèlement à Ωa ; aux arêtes du premier correspondent les arêtes du second. Pour une arête du premier le terme constant $F_{ij}(\xi_e, 1, 1)$ du polynôme en x' précédent est en général différent de zéro, c'est dire que l'arête correspondante du second prisme passe par un sommet de N' situé dans le plan $a = 0$. Il y a exception toutefois pour l'arête \mathcal{A}' correspondant à \mathcal{A} ; plaçons-nous dans le cas le plus simple où il n'y a pas d'autre exception.

N' a une face dans le plan $a = 0$; les autres sont celles de \mathcal{P}' et une face *troncature* du trièdre formé par $a' = 0$ et les deux faces du prisme ayant pour équations

$$\beta_1 b' + m_1 c' = p_1, \quad \beta_2 b' + m_2 c' = p_2,$$

et qui correspondent aux faces de N se coupant suivant \mathcal{A} . Cette troncature a une équation de la forme

$$\rho_1(\beta_1 b' + m_1 c') + \rho_2(\beta_2 b' + m_2 c') + \rho_3 a' = p,$$

ρ_1, ρ_2, ρ_3 étant positifs et $p > \rho_1 p_1 + \rho_2 p_2$, et par suite les coordonnées α', β', γ' d'un nœud situé sur la normale menée par Ω à la troncature sont

$$\alpha' = \rho_3, \quad \beta' = \rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2, \quad \gamma' = \rho_1 m_1 + \rho_2 m_2.$$

A la troncature correspondent des représentations paramétriques (n° 10)

$$x' = \xi' \lambda^{\alpha'}, \quad y' = (\eta' + \psi') \lambda^{\beta'}, \quad z' = \lambda^{\gamma'},$$

où η' est fonction implicite de ξ' définie par une équation algébrique $F'(\xi', \eta', 1) = 0$; elles donnent, par élimination des paramètres (λ, ξ') , η' en fonction de x' et z' et par suite y' en fonction de x' et z' ; on vérifie que $\frac{|y'|}{|z'|^{\frac{\beta_1}{\gamma_1}}}$ reste fini, mais

$$\frac{\beta'}{\gamma \gamma'} = \frac{\rho_1 \beta_1 + \rho_2 \beta_2}{\rho_1 \gamma_1 + \rho_2 \gamma_2}$$

est compris entre $\frac{\beta_1}{\gamma_1}$ et $\frac{\beta_2}{\gamma_2}$; des deux rapports $\frac{|y'|}{|z'|^{\frac{\beta_1}{\gamma_1}}}$, $\frac{|y'|}{|z'|^{\frac{\beta_2}{\gamma_2}}}$ l'un tend vers zéro, l'autre devient infini lorsque $|z'|$ tend vers zéro. Les fonctions $y(x, z)$ données par les autres éléments de N' ne jouissent pas de cette double propriété, ceux que nous venons de trouver conviennent bien aux fonctions implicites $\eta(\xi)$, relatives aux faces adjacentes à \mathcal{A} , qui sont infiniment petites ou infinies lorsque ξ tend vers ξ_e (voir n° 10).

Observons que $F'(\xi', \eta', 1)$ est par rapport η' de degré au moins égal à deux; nous aurons à introduire de nouveaux cercles d'isolement, (de rayons infiniment petits par rapport à celui que nous venons d'étudier) correspondant à des tangentes parallèles à $\omega \eta'$ ou à des points multiples. Un exemple est donné plus loin (n° 19).

L'étude ainsi poursuivie des fonctions algébroides à l'intérieur des cercles d'isolement σ nous conduit à y tracer des cercles concentriques à σ , à distinguer des anneaux relatifs aux faces et aux arêtes du polyèdre N' de g , à introduire de nouveaux cercles d'isolement, entraînant eux aussi des subdivisions analogues.

Nous verrons plus loin dans quels cas on pourra s'arrêter, la répétition indéfinie de la méthode n'augmentant pas le nombre des cercles d'isolement.

15. Facteurs multiples. — Examinons rapidement les cas écartés jusqu'ici où un polynôme F correspondant à une arête ou à une face de N admet un facteur multiple.

Soit d'abord un *polynôme relatif à une arête* \mathcal{A} ; supposons qu'il admette un facteur binôme multiple; c'est-à-dire que l'équation $\Phi(\theta) = 0$ du n° 4 ait des racines multiples. Soient τ l'une d'elles, p son ordre de multiplicité, $\alpha_1, \beta_1, \gamma_1, \alpha_2, \beta_2, \gamma_2$ les coordonnées des nœuds pris sur les normales menées par l'origine aux faces contiguës à l'arête; faisons dans l'équation $f = 0$ le changement de variables

$$x = x'^{\alpha_1} z'^{\alpha_2}, \quad y = (\eta + y') x'^{\beta_1} z'^{\beta_2}, \quad z = x'^{\gamma_1} z'^{\gamma_2},$$

où η est racine de $\eta^p - \tau = 0$ (analogue à celui du n° 8), $\lambda, \mu, \eta\varphi$ étant seulement remplacés par x', z', y' . L'équation obtenue, débarrassée d'un monome entrant en facteur est

$$f_1(x', y', z') = 0,$$

f_1 est une série entière, $f_1(0, 0, 0) = 0$, et la série $f_1(0, y', 0)$ commence par un terme de degré p en y' .

Étudions cette nouvelle surface par la méthode antérieure, nous serons conduit à des représentations paramétriques de x', y', z' correspondant les unes aux arêtes, les autres aux faces du polyèdre N_1 relatif à f_1 ; on en déduit pour x, y, z des représentations correspondantes.

On vérifie facilement qu'elles ont même forme que celles précédemment données, et qu'elles sont valables dans de nouveaux anneaux concentriques à l'anneau primitif relatif à \mathcal{A} et à f et compris entre la frontière intérieure et la frontière extérieure de ce premier anneau.

Les seconds anneaux relatifs aux faces de N_1 introduisent naturellement de nouvelles circonférences d'isolement.

Lorsque le polynôme F relatif à f et à une face \mathcal{F} de son polyèdre N admet un facteur multiple $G(x, y, z)$ d'ordre de multiplicité l , on peut écrire $F = G^l H$, H étant un polynôme ou une constante. La surface

$F = 0$ est invariante vis-à-vis du groupe (1) du n° 7, il doit en être de même pour $G = 0$, $H = 0$, par suite $G(x, y, z)$ est le produit de $G(x_1, y_1, z_1)$ par une puissance de λ et de même pour $H(x_1, y_1, z_1)$ et $H(x, y, z)$.

Ordonnant ensuite (n° 4) F, G, H parallèlement à une autre face \mathcal{F}' de N

$$F = F_1 + F_2 + \dots + F_m,$$

$$G = G_1 + G_2 + \dots + G_n,$$

$$H = H_1 + H_2 + \dots + H_p,$$

l'identité $F = G/H$ donne $F_i = G'_i H_i$.

Si \mathcal{F} et \mathcal{F}' ont une arête commune, F_i est le polynôme correspondant à cette arête, et l'on voit ainsi que, s'il y a un facteur multiple pour un polynôme de face, il en existe aussi pour les polynômes concernant les arêtes frontières de la face, l'ordre de multiplicité est le même. On leur applique donc la méthode qui vient d'être donnée.

La recherche de développements relatifs à la face elle-même étant alors abordée comme au n° 10, on obtient une équation (19); η est une fonction de ξ déterminée par

$$F(\xi, \eta, 1) = G'(\xi, \eta, 1) H(\xi, \eta, 1) = 0.$$

Supposons que η annule le premier facteur, $F(\xi, \eta + \psi, 1)$ contient ψ^l en facteur, mais comme $l > 1$, la méthode du n° 10 doit être modifiée.

L'équation (19), où nous laissons d'abord ξ constant, ψ et λ variables, définit une courbe plane qu'on peut étudier au voisinage de l'origine par la méthode de Puiseux; son premier membre est une série entière en λ et ψ , soit $A_{ab} \lambda^a \psi^b$ l'un de ses termes, on construit le polygone de Newton; il a au plus l côtés; les points a, b tels que $A_{ab} \neq 0$ sont sur ce polygone ou dans sa concavité. Les normales à ses côtés donnent, par leurs pentes, les ordres infinitésimaux relatifs à λ des fonctions implicites $\psi(\lambda)$ vérifiant (19); les parties principales de ces fonctions se déterminent par des équations algébriques ayant pour coefficients ceux des coefficients A_{ab} qui correspondent à des points (a, b) , situés sur l'un des côtés du polygone de Newton. Si une première application de la méthode de Puiseux suffit pour isoler un système circulaire auquel appartient une fonction $\psi(\lambda)$, en posant $\lambda = \lambda^h$ (h entier con-

venablement choisi, $\psi(\lambda)$ devient une série entière en λ' ; sinon il faudra continuer l'application de la méthode.

Considérons maintenant ξ et par suite η comme variables, et admettons que les expressions A_{ab} sont des polynômes en ξ, η (ce qu'il est facile d'établir); nous voyons que les modifications qui peuvent survenir soit dans le polygone de Newton, soit dans la nature simple ou multiple des racines des équations algébriques correspondant à des côtés ne se produisent que pour des valeurs de ξ, η vérifiant outre $F(\xi, \eta, 1) = 0$ d'autres équations algébriques. Nous aurons donc à adjoindre de nouvelles valeurs exceptionnelles à celles antérieurement considérées.

Nous nous contenterons de ces indications très rapides, et nous observerons avec M. Dumas (*Commentarii Mathematici helvetici*, vol. 4, 1932, p. 244-245) qu'elles reviennent à étudier la surface analytique dont l'équation est

$$F(\xi, Y, 1) + \mathcal{F}(\xi, Y, \lambda) = 0,$$

au voisinage de sa section par le plan $\lambda = 0$ (qui est ici une courbe algébrique) par une méthode donnée par Halphen ⁽¹⁾ pour l'étude d'une surface algébrique au voisinage d'une ligne multiple.

CHAPITRE III.

16. Intersection de deux surfaces analytiques. — Considérons le système des deux équations

$$(1) \quad f(x, y, z) = 0, \quad g(x, y, z) = 0,$$

dont les premiers membres sont des séries entières s'annulant pour $x = y = z = 0$; on y regarde x et y comme des fonctions inconnues de z .

Les fonctions sont algébroïdes lorsque les deux équations

$$(2) \quad f(x, y, 0) = 0, \quad g(x, y, 0) = 0,$$

⁽¹⁾ *Sur les lignes singulières des surfaces algébriques* (*Annali di matematica*, 2^e série, t. 9, 1878, et *Œuvres complètes*, t. 2, voir p. 155 et 159).

sont distinctes; nous voulons dire par là que ces deux courbes du plan xOy n'ont pas de branche commune aboutissant en O ou encore qu'il est possible de trouver un nombre $\varphi > 0$ tel que, pour

$$|x| < \rho, \quad |y| < \rho,$$

le système (2) n'ait pas d'autre solution que $x = y = 0$. C'est un cas particulier d'un lemme donné par Poincaré au début de sa Thèse. (Lemme IV, *Œuvres*, t. 1, p. LXI).

Il est bien facile de le démontrer. Tout d'abord $f(0, y, 0)$, $g(0, y, 0)$ ne peuvent pas être identiquement nulles, sans quoi les deux courbes auraient en commun l'axe Oy contrairement à notre hypothèse. Supposons $f(0, y, 0) \neq 0$, soit n son ordre infinitésimal par rapport à y . Nous pouvons aussi admettre que $g(0, y, 0)$ n'est pas identiquement nul : s'il l'était, on remplacerait g par $f + g = g_1$, les systèmes (1) et $f = 0$, $g_1 = 0$ étant évidemment équivalents. Soit p l'ordre infinitésimal de $g(0, y, 0)$. Remplaçons les équations (1) par les formes réduites de Poincaré-Weierstrass

$$(3) \quad \begin{cases} y^n + a_1(x, z)y^{n-1} + \dots + a_n(x, z) = 0, \\ y^p + b_1(x, z)y^{p-1} + \dots + b_p(x, z) = 0, \end{cases}$$

les a et les b sont des séries entières en x et z s'annulant pour $x = z = 0$.

Soit $R(x, y)$ le résultant des premiers membres; c'est une série entière en x, z s'annulant pour $x = z = 0$. $R(x, 0)$ et *a fortiori* $R(x, z)$ ne peuvent être identiquement nuls, puisque les deux courbes (2) n'ont pas de branche commune; on peut donc donner à $R(x, z) = 0$ la forme réduite de Poincaré-Weierstrass

$$x^r + A_1(z)x^{r-1} + \dots + A_r(z) = 0,$$

et répartir en divers systèmes circulaires les solutions $x(z)$ s'annulant avec z

$$x = u^\lambda [u], \quad z = u^\nu,$$

λ, ν sont entiers, $[u]$ désigne une série entière ne s'annulant pas pour $u = 0$. Portant ces expressions de x et z dans (3) nous obtenons deux équations algébriques en y à coefficients holomorphes en u ;

leurs racines, et en particulier leurs racines communes sont données par des séries entières en t , en posant $u = t^\sigma$ (σ entier). En définitive, l'intersection se compose de *cycles* ⁽¹⁾, chacun d'eux a une représentation paramétrique holomorphe :

$$(4) \quad \begin{cases} x = \xi_1 t^{l_1} + \xi_2 t^{l_2} + \dots, \\ y = \eta_1 t^{m_1} + \eta_2 t^{m_2} + \dots, \\ z = t^q, \end{cases}$$

q et l'ensemble des exposants des termes à coefficients non nuls n'ayant pas de diviseur commun.

Supposons connues les valeurs numériques des coefficients des séries f et g ou du moins des premiers d'entre eux et cherchons les cycles dont se compose l'intersection des surfaces.

Le cas classique est celui où le déterminant fonctionnel $f'_x g'_y - f'_y g'_x$ est différent de zéro pour $x = y = z = 0$ l'intersection est déterminée par deux fonctions holomorphes de la variable z . Géométriquement, ce cas se présente quand les deux surfaces ont à l'origine des plans tangents bien déterminés, coupant le plan xOy suivant deux droites distinctes l'une de l'autre.

Écartons ce cas, soit (4) un cycle appartenant à l'intersection; les résultats de la substitution à x, y, z dans f et g , des seconds membres des formules (4) doivent être nuls. D'après le n° 5, le point réticulaire de coordonnées l_1, m_1, q doit être sur la normale menée par l'origine à *deux plans d'appui parallèles* des polyèdres N_f, N_g relatifs aux deux séries f et g , chacun de ces plans d'appui contenant plusieurs sommets de ces polyèdres, et rencontrant à distance finie les arêtes du trièdre Ωabc . De plus, ξ_1, η_1 doivent vérifier les équations algébriques

$$(5) \quad F(\xi, \eta, 1) = 0, \quad G(\xi, \eta, 1) = 0,$$

(1) Cette notion a été introduite dans la théorie des courbes algébriques gauches par Halphen (*Œuvres*, t. 2, p. 110-124). Si q est inférieur à l_1 et à m_1 , on a, par les formules (4), la représentation d'Halphen, l'ordre du cycle est q ; dans les autres cas il est facile de trouver un changement de variables permettant d'obtenir cet ordre. Si les trois membres q, l_1, m_1 sont différents, l'ordre, le rang, la classe au cycle s'en déduisent immédiatement, la tangente du cycle est l'un des axes de coordonnées, le plan osculateur l'un des plans de coordonnées.

$F(x, y, z)$, $G(x, y, z)$ étant les polynômes correspondant respectivement à f et g et aux arêtes ou aux faces d'appui.

Les plans d'appui cherchés peuvent correspondre : 1° à une face de N_f et à une face de N_g parallèles entre elles; 2° à une face de l'un des polyèdres et à une arête de l'autre; 3° à une arête de N_f et une arête de N_g non parallèles entre elles; 4° à deux arêtes parallèles.

On voit immédiatement s'il en existe de la première catégorie; pour rechercher ceux de la seconde et de la troisième, on élimine parmi les combinaisons d'un élément de N_f et d'un élément de N_g celles qui ne donnent pas de plans d'appui (un plan passant par une arête n'étant plan d'appui que si l'une de ses normales est intérieure à deux angles opposés par le sommet). L'emploi des diagrammes plans facilite beaucoup cette recherche. Nous reviendrons sur la quatrième catégorie.

Admettons qu'on ait deux plans d'appui parallèles, on connaît l_1 , m_1 , q à des facteurs près; on prend d'abord des nombres premiers entre eux dans leur ensemble; les équations (5) donnent ξ_1 , η_1 qui doivent être finis et différents de zéro, ou font reconnaître soit l'impossibilité de trouver une telle solution, soit l'indétermination de ce problème [lorsque les deux courbes (5) ont une branche commune].

Dans le premier cas nous poursuivons la recherche en substituant à x, y, z dans les équations (1) les expressions

$$x = (\xi_1 + x') x'^{l_1}, \quad y = (\eta_1 + y') z'^{m_1}, \quad z = z'^q.$$

ce qui nous donne, après suppression des puissances de z' entrant en facteur,

$$(6) \quad \begin{cases} f_1(x', y', z') = F(\xi_1 + x', \eta_1 + y', 1) + \dots = 0, \\ g_1(x', y', z') = G(\xi_1 + x', \eta_1 + y', 1) + \dots = 0, \end{cases}$$

les points désignant des séries entières en x', y', z' contenant z' en facteur. Le déterminant fonctionnel $\frac{D(f_1, g_1)}{D(x', y')}$ est pour $x' = y' = 0$ égal à

$$\Delta = F'_\xi(\xi_1, \eta_1, 1) G'_\eta(\xi_1, \eta_1, 1) - F'_\eta(\xi_1, \eta_1, 1) G'_\xi(\xi_1, \eta_1, 1).$$

Quand il est différent de zéro, c'est-à-dire lorsque ξ_1, η_1 est un point simple commun aux deux courbes (5) et que ces courbes ne sont pas tangentes en ce point, on est ramené au cas classique, et l'on peut affirmer

qu'il existe un et un seul des cycles cherchés caractérisé⁽¹⁾ par les parties principales $\xi_1 t^{l_1}, \gamma_1 t^{m_1}$ de x et y et par t^q .

Si $\Delta = 0$, on applique aux surfaces (6) la méthode utilisée pour les surfaces (1), mais, d'après une remarque antérieure (n° 14) l'étude, au voisinage de l'origine, des secondes surfaces est plus simple que celle des premières. Au cours de cette étude, on pourra avoir à poser $z = t^{q'}$ et à remplacer par suite q, l_1, m_1 par $qq', l_1 q', m_1 q'$.

On arrivera ainsi, après une ou plusieurs applications de cette méthode, à caractériser les cycles dont se compose l'intersection, pourvu qu'on ne rencontre aucun des cas d'exception signalés plus haut. Nous allons dire quelques mots sur ces cas.

Supposons que $F(\xi, \gamma, 1), G(\xi, \gamma, 1)$ aient un *facteur commun*; il en est de même de $F(x, y, z), G(x, y, z)$. Nous pouvons écrire, en désignant ce facteur par $P(x, y, z)$ et par F_1, G_1 deux autres polynômes $F = F_1 P, G = G_1 P$ et par suite

$$f = F_1 P + \mathcal{F}, \quad g = G_1 P + \mathcal{G},$$

\mathcal{F} et \mathcal{G} étant deux séries entières; tout cycle commun à $f = 0, g = 0$ doit être situé aussi sur la surface analytique

$$(7) \quad G_1 f - F_1 g = G_1 \mathcal{F} - F_1 \mathcal{G} = 0,$$

dont il est facile d'ordonner le premier membre normalement à la

⁽¹⁾ D'une façon générale, nous dirons qu'un cycle d'Halphen est caractérisé par les polynômes

$$X_h(t) = \xi_1 t^{l_1} + \dots + \xi_h t^{l_h}, \quad Y_k(t) = \gamma_1 t^{m_1} + \dots + \gamma_k t^{m_k}, \quad z = t^q,$$

obtenus en prenant un certain nombre de termes au commencement des développements en série

$$x(t) = X_h(t) + t^{l_h+\alpha}[t], \quad y(t) = Y_k(t) + t^{m_k+\beta}[t],$$

qui correspondent au cycle (on a désigné par $[t]$ des séries entières en t ne s'annulant pas pour $t = 0$) si la transformation

$$x = X_h(t) + t^{l_h} x', \quad y = Y_k(t) + t^{m_k} y', \quad t = z',$$

effectuée sur les équations (1) donne pour déterminer x', y' en fonction de z' deux équations auxquelles s'applique le théorème classique d'existence, c'est-à-dire que le déterminant fonctionnel par rapport aux variables x', y' des premiers membres est supposé différent de zéro pour $x' = y' = z' = 0$.

direction l_1, m_1, q ; si, comme il arrive en général le premier terme de ce développement n'est pas divisible par P , on serait ramené au cas précédent en remplaçant l'une des équations (1), $g = 0$ par exemple, par (7). Sinon on procéderait de même pour $f = 0$ et (7).

Lorsqu'on associe *deux arêtes parallèles des polyèdres* $N_f N_g$ les rapports mutuels de l_1, m_1, q et les plans d'appui ne sont pas immédiatement déterminés. Mais malgré cette indétermination on sait que ξ_1, η_1 doivent vérifier deux relations de la forme $\xi_1^a \eta_1^b = \tau, \xi_1^a \eta_1^b = \tau'$; si donc les équations algébriques déterminant τ et τ' n'ont pas de racine commune, ce qui arrivera le plus souvent, aucun cycle de l'intersection ne peut correspondre à ces arêtes parallèles. Si elles avaient une racine commune, un procédé d'élimination analogue à celui du cas précédent pourrait être utilisé.

Nous ne pousserons pas plus loin l'étude de ces cas exceptionnels, et observerons cependant que si f et g ont un facteur holomorphe commun $h(x, y, z)$ tel que $h(0, 0, 0) = 0$ l'indétermination relative à ξ_1, η_1 ne peut être levée puisque tout cycle situé sur $h(x, y, z) = 0$ appartient aux deux surfaces (1).

De même la possibilité de décomposer en cycles l'intersection des surfaces (1) a été établie en supposant que les courbes (2) n'avaient pas de branche commune aboutissant à l'origine. Si $f(x, y, 0), g(x, y, 0)$ sont des séries entières et non des polynômes, leurs coefficients doivent vérifier une infinité de conditions pour qu'il existe une telle branche (¹). On ne saurait donc fixer a priori une limite supérieure du nombre des opérations nécessaires pour être en mesure d'affirmer que la réduction en cycles est possible.

17. Application aux contours apparents et lignes multiples d'une surface. — Nous avons rencontré plus haut (n° 13) le système

$$(8) \quad f(x, y, z) = 0, \quad f'_y(x, y, z) = 0.$$

Voici quelques remarques à son sujet.

Soit E le point dont les coordonnées a, b, c sont les exposants d'un

(¹) Weierstrass, dans le Mémoire cité plus haut, a étudié la divisibilité d'une série entière par une autre et la recherche d'un diviseur commun à deux séries entières (*Werke*, t. 2, p. 142 à 151).

terme $A_{abc}x^a y^b z^c$ ($A_{abc} \neq 0$) de la série f ; on déduit facilement de l'ensemble des points E l'ensemble analogue E' relatif à f_y : en supprimant les points E situés dans le plan $b=0$ et faisant subir aux points restants une translation parallèle à Ωb : $a'=a$, $b'=b-1$, $c'=c$. Par suite, à toute face du polyèdre N relatif à f contenant au moins trois points non en ligne droite, non situés dans le plan $b=0$, correspond une face parallèle du polyèdre N' relatif à f_y . De même les deux polyèdres N et N' ont, en général des arêtes parallèles.

Le système (8) est un système (1) où $g=f_y$ et par suite à un polynôme F relatif à une face ou à une arête de N correspond le polynôme $G=F_y$, le système (5) auquel doivent satisfaire ξ_1, η_1 , lorsque l_1, m_1, q sont déterminés par deux plans d'appui parallèles, est donc

$$F(\xi, \eta, 1) = 0, \quad F'_\eta(\xi, \eta, 1).$$

et le déterminant Δ formé avec une solution de ce système se réduit à

$$F'_\xi(\xi_1, \eta_1, 1) F''_{\eta^2}(\xi_1, \eta_1, 1).$$

Si donc on a un point ξ_1, η_1 simple de la courbe $F(\xi, \eta, 1) = 0$ où la tangente est parallèle à $\omega\eta$ et n'a qu'un contact du premier ordre avec la courbe, ce point étant de plus à distance finie et non situé sur les axes, es parties principales $\xi_1 t^k, \eta_1 t^m$ caractérisent un cycle bien déterminé de la courbe (8).

C'est à ce cas que nous avons fait allusion plus haut (n° 14) à propos des cercles d'isolement.

Si la tangente en ξ_1, η_1 a un contact d'ordre supérieur à l'unité, ou si ce point est point multiple, il faut continuer les calculs pour caractériser les cycles de l'intersection correspondant à ces parties principales. Il est de même, *a fortiori*, quand les parties principales ne sont pas immédiatement déterminées (facteurs multiples de face ou arêtes parallèles).

Géométriquement, les équations (8) définissent le contour apparent dans l'espace parallèlement à Oy de la surface $f=0$, mais il faut y distinguer le contour apparent proprement dit et les lignes multiples qui peuvent être situées sur la surface. Les cycles appartenant à ces lignes multiples vérifient non seulement le système (8) mais aussi

l'équation $f''_x = 0$ ⁽¹⁾; l'existence de lignes multiples peut être considérée comme exceptionnelle pour une surface analytique, en ce sens qu'elle exige que la série entière en t $f'_x[x(t), y(t), t^q]$, où $x(t), y(t), t^q$, définissent un cycle de la courbe (8) soit identiquement nulle, ce qui entraîne une infinité de conditions nouvelles pour les coefficients A_{abc} des termes de la série f . De la même façon, on voit que les lignes de contour apparent en tous les points desquelles la parallèle à Oy aurait un contact d'ordre supérieur à l'unité avec la surface $f = 0$ donnent lieu à une remarque analogue.

18. **Remarques.** — Mentionnons brièvement deux problèmes où l'emploi des méthodes précédentes est utile.

Le premier est l'étude, au voisinage d'un point O réel, d'une surface donnée par une équation $f = 0$ dont le premier membre est une série entière à coefficients réels. La recherche de conditions suffisantes pour l'existence en O d'un maximum ou d'un minimum de $f(x, y, z)$ se rattache évidemment à cette étude. Elle pourrait même être étendue à des équations dont le premier membre, sans être holomorphe, admet un développement limité de Taylor tel qu'en égalant à zéro ses premiers termes, on obtient l'équation d'une surface algébrique qui n'admet ni ligne multiple réelle passant par O , ni ligne réelle de contour apparent à contact multiple.

Le second problème est l'étude des *singularités locales des intégrales abéliennes* ⁽²⁾ [où la fonction sous le signe intégral est définie par l'intermédiaire d'une fonction y algébrique, solution d'une équation implicite $f(x, y, z) = 0$]. Les développements en série donnés plus haut sont alors d'un emploi particulièrement commode.

Signalons enfin l'extension possible des méthodes précédentes aux équations à plus de trois variables; soit, par exemple, une équation $f(x, y, z, t) = 0$, qui définit une multiplicité dans l'espace x, y, z, t .

⁽¹⁾ Si les séries entières $x(t), y(t)$ et $z = t^q$ vérifient les trois équations $f = 0, f'_x = 0, f'_y = 0$, elles vérifient aussi $f'_z = 0$.

⁽²⁾ *Étude locale d'une surface et de certaines intégrales* (Comptes rendus, t. 198, 1934, p. 1285). Voir aussi *Annales de l'École Normale*, 3^e série, t. 50, p. 371 et *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2^e série, t. 58.

On aurait maintenant trois classes de multiplicités algébriques

$$F(x, y, z, t) = 0,$$

comme analogues des deux classes d'équations données dans le cas de trois variables par les faces et par les arêtes du polyèdre N (Chap. 2). Ces trois classes correspondent à celles dans lesquelles nous avons rangé les éléments critiques. Aux éléments critiques de classe m correspondent des multiplicités algébriques $F(x, y, z, t) = 0$ invariantes vis-à-vis des transformations d'un groupe à m paramètres, qui conduit à une représentation paramétrique de la multiplicité analytique $f = 0$.

CHAPITRE IV.

19. Fonctions algébroïdes d'ordre deux. — Écartons le cas élémentaire où la série entière $f(0, y, 0)$ commence par un terme du premier degré : l'équation $f(x, y, z) = 0$ admet alors une seule solution, holomorphe, $y(x, z)$; le théorème classique le montre sans qu'il y ait lieu d'utiliser le polyèdre N d'ailleurs facile à construire et les développements en série donnés plus haut.

Supposons que $f(0, y, 0)$ commence par un terme du second degré; les fonctions algébroïdes sont d'ordre deux, c'est-à-dire que l'équation réduite de Poincaré-Weierstrass est de la forme

$$(1) \quad \varphi(x, y, z) = y^2 + B_1(x, z)y + B_2(x, z) = 0.$$

Le polyèdre N commun à f et à φ a un sommet $0, 2, 0$ sur l'axe Ωb , des sommets dans le plan $b = 0$ constituant le polygone de Newton relatif à $f(x, 0, z)$ [ou à $B_2(x, z)$].

La recherche des points exceptionnels et des cercles d'isolement est particulièrement simple parce que les polynômes $F(\xi, \eta, 1)$, relatifs aux faces, sont, par rapport à η , d'un degré au plus égal à deux, de même les polynômes $\Phi(\theta)$, relatifs aux arêtes (non parallèles à $b = 0$), sont du premier ou du second degré. Quand l'équation (1) admet des racines égales, ce ne peut être que des racines doubles; elles cor-

respondent à des lignes ordinaires de contour apparent (parallèlement à Oy) ou exceptionnellement à des lignes doubles.

Les projections de ces diverses lignes sur xOz sont données par

$$B_1^2(x, z) - 4B_2(x, z) = 0,$$

on peut, le plus souvent, trouver le nombre r de ses racines $x(z)$ infiniment petites avec z sans connaître les coefficients B_1, B_2 de la forme réduite de Poincaré-Weierstrass.

Le polyèdre N coupe le plan $c = 0$ suivant le polygone de Newton de $\varphi(x, y, 0)$, qui est aussi celui de $f(x, y, 0)$. Si ce polygone a deux côtés, l'ordre infinitésimal de $B_1^2(x, 0)$ est inférieur à celui de $B_2(x, 0)$; r est alors le double de l'ordre infinitésimal de $B_1(x, 0)$.

Quand le polygone a un seul côté, on voit de même que r est en général l'ordre infinitésimal de $f(x, 0, 0)$; il y aurait exception toutefois si à ce côté correspondait un polynôme d'arête ayant un facteur double; nous n'étudierons pas ce cas singulier.

Soit, par exemple, le cas le plus simple, celui où

$$f(x, 0, 0) = Ax + \dots, \quad f(0, y, 0) = By^2 + \dots, \quad f(0, 0, z) = Cz^h + \dots,$$

le polygone précédent n'a qu'un seul côté et le facteur d'arête $Ax + By^2$ ne peut être carré parfait, on a $r = 1$.

Le contour apparent de $f = 0$ pris parallèlement à Oy n'a, au voisinage de l'origine, qu'une branche régulière, pour laquelle x et y sont fonctions holomorphes de z , car le théorème classique d'existence s'applique ici au système

$$f(x, y, z) = 0, \quad f'_y(x, y, z) = 0.$$

On constate facilement d'ailleurs que l'on a au plus une équation de face $F(\xi, \eta, 1) = 0$ pouvant donner lieu à des abscisses exceptionnelles, que cette équation est celle d'une parabole d'axe parallèle à $\omega\xi$

$$A\xi + B\eta^2 + \dots = 0,$$

il y a donc une seule abscisse exceptionnelle, l'abscisse ξ_a du sommet.

Étudions encore l'équation

$$(2) \quad y^2 + y(x - z) + \varphi_3(x, z) + \dots = 0$$

en n'écrivant que les termes intervenant pour la construction du

polyèdre N, et en désignant par φ_3 un polynôme homogène du troisième degré

$$\varphi_3(x, z) = Ax^3 + Bx^2z + Cxz^2 + Dz^3.$$

Supposons $AD \neq 0$; le polyèdre N a deux faces non situées dans les plans de coordonnées; les équations des plans de ces deux faces sont

$$a + b + c = 2, \quad a + 2b + c = 3;$$

leur intersection est une *arête parallèle au plan $b = 0$* ; nous avons ici l'exemple le plus simple où se présente une arête de cette nature.

Elle donne lieu au cercle d'isolement de centre $x_e = z$ correspondant à $\xi_e = 1$; nous l'étudierons comme au n° 14 en posant

$$(3) \quad x = (1 + x')z', \quad y = y', \quad z = z',$$

ce qui donne

$$(4) \quad g(x', y', z') = f[(1 + x')z', y', z'] = z'^2 + x'y'z' + z'^3\varphi_3(1, 1) + \dots = 0.$$

L'axe Ox est situé sur cette nouvelle surface. Le polyèdre N' relatif à g a des faces dans les plans de coordonnées, dans les deux plans

$$b + c = 2, \quad 2b + c = 3$$

(qui constituent ici la surface prismatique du n° 14) et enfin une face (troncature) dans le plan

$$a + 3b + 2c = 6.$$

La représentation paramétrique correspondant à cette troncature est

$$(5) \quad x' = \xi'\lambda, \quad y' = (\eta' + \psi)\lambda^2, \quad z' = \lambda^2.$$

Les paramètres variables sont ξ' et λ , η' est une fonction de ξ' déterminée par l'équation

$$(6) \quad \eta'^2 + \eta'\xi' + \varphi_3(1, 1) = 0,$$

η' est une fonction holomorphe de $\xi' - \xi'_0$ tant que ξ'_0 n'est pas solution de l'équation

$$(7) \quad \xi'^2 - 4\varphi_3(1, 1) = 0$$

qui donne les tangentes parallèles à ω_η de l'hyperbole précédente.

Enfin ψ désigne une fonction holomorphe de $\xi' - \xi'_0$ et λ qui contient en facteur une puissance de λ .

Les formules (3) et (5) donnent une représentation analogue

$$x = (1 + \xi'\lambda)\lambda^2, \quad y = (\eta' + \psi)\lambda^3, \quad z = \lambda^2$$

qui convient aux deux fonctions algébroides définies par (2) lorsque x est intérieur au premier cercle d'isolement $|x - z| < \varepsilon|z|$ et extérieur à deux nouveaux cercles d'isolement, c'est-à-dire satisfait aux inégalités

$$|x - z - \xi'_{e1}\lambda^3| > \varepsilon'|\lambda|^3, \quad |x - z - \xi'_{e2}\lambda^3| > \varepsilon'|\lambda|^3$$

$\lambda = z^{\frac{1}{3}}$, ξ'_{e1} , ξ'_{e2} désignent les deux racines (opposées) de (7) et ε' est un nombre positif et petit. Les points correspondants de l'hyperbole (6) ont pour coordonnées

$$\xi'_{e1}, \eta'_{e1} = -\frac{1}{2}\xi'_{e1}; \quad \xi'_{e2}, \eta'_{e2} = -\frac{1}{2}\xi'_{e2}$$

et remplissent les conditions du n° 17; en poursuivant l'étude des fonctions algébroides y à l'intérieur de l'un de ces cercles d'isolement, on n'introduirait, à chaque opération, qu'un seul nouveau cercle d'isolement. En d'autres termes, le contour apparent de (2) pris parallèlement à Oy est défini par un cycle d'Halphen où x et y sont fonctions holomorphes de $z^{\frac{1}{3}}$.

20. Autre exemple. — Soit enfin l'équation

$$f(x, y, z) = 4xyz - x^4 - y^4 - z^4 + \psi(x, y, z) = 0$$

les termes de la série entière ψ étant du 5° degré au moins en x, y, z .

Le polyèdre N (*fig. 1*) a quatre sommets dont les coordonnées sont respectivement

$$S_0 : 1, 1, 1; \quad S_1 : 4, 0, 0; \quad S_2 : 0, 4, 0; \quad S_3 : 0, 0, 4,$$

et six faces, dont trois sont situées dans les plans de coordonnées.

La figure (2) représente le diagramme plan (1).

(1) Pour ne pas surcharger la figure, on a remplacé S_0, S_1, S_2, S_3 par leurs indices.

Le Tableau suivant donne les éléments correspondant aux trois

Fig. 1.

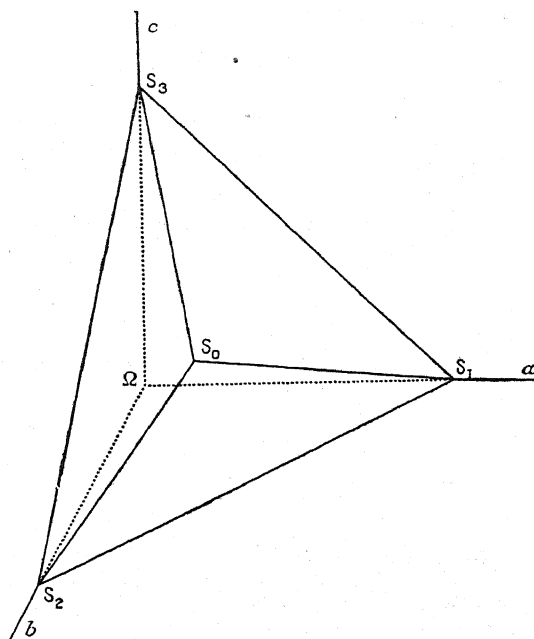
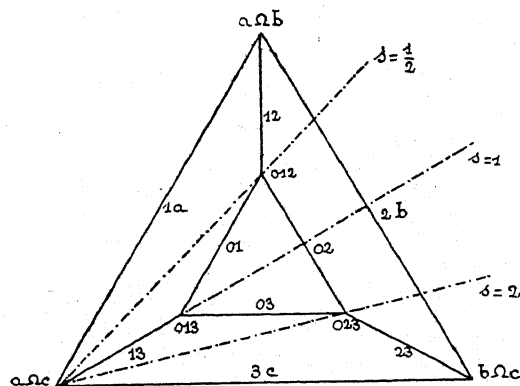


Fig. 2.



faces restantes : Équations de leurs plans (et par suite valeurs correspondantes de α, β, γ données par les coefficients de a, b, c dans ces

équations) rapports $s = \frac{\alpha}{\gamma}$ polynômes $F(x, y, z)$, courbes $F(\xi, \eta, 1) = 0$ coordonnées des points exceptionnels ξ_e, η_e (d'abscisses $\xi_e \neq 0$).

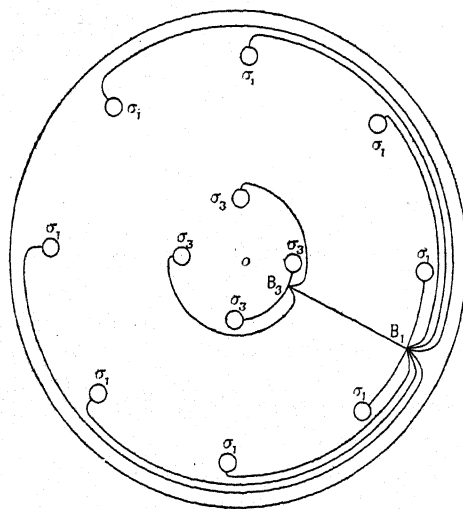
La même détermination des radicaux intervient dans ξ_e, η_e ; on prend successivement toutes les déterminations.

$$\begin{array}{ll} S_0 S_1 S_2 & a + b + 2c = 4 \quad s_1 = \frac{1}{2} \quad 4xyz - x^4 - y^4 \quad 4\xi\eta - \xi^4 - \eta^4 = 0 \quad \xi_{e1} = (\sqrt[8]{3})^3 \quad \eta_{e1} = \sqrt[8]{3}, \\ S_0 S_1 S_3 & a + 2b + c = 4 \quad s_2 = 1 \quad 4xyz - x^4 - z^4 \quad 4\xi\eta - \xi^4 - 1 = 0, \\ S_0 S_2 S_3 & 2a + b + c = 4 \quad s_3 = 2 \quad 4xyz - y^4 - z^4 \quad 4\xi\eta - \eta^4 - 1 = 0 \quad \xi_{e3} = \frac{1}{(\sqrt[4]{3})^3} \quad \eta_{e3} = \frac{1}{\sqrt[4]{3}}. \end{array}$$

Nous ne faisons pas figurer $\xi_e = 0$ dans ce tableau, le point $x = 0$ étant extérieur aux trois anneaux de face.

La figure (3) a été faite pour \bar{z} réel et positif; on n'a pas tracé les

Fig. 3.



circonférences c_i et C_i du n° 12 qui, ainsi que nous l'avons observé (n° 13), ne doivent pas être considérées comme des coupures. On a donc représenté seulement la circonférence frontière extérieure $c: |x| = r$ et les circonférences d'isolement: les unes σ_1 correspondant aux huit valeurs exceptionnelles ξ_{e1} ont pour centres les points $x_{e1} = \xi_{e1} \bar{z}^{\frac{1}{2}}$ et pour rayon $\varepsilon \bar{z}^{\frac{1}{2}}$; les autres σ_3 relatives aux quatre

valeurs exceptionnelles ξ_{e_3} ont pour centres les points $x_{e_3} = \xi_{e_3} \bar{z}^2$ et pour rayon $\varepsilon \bar{z}^2$. Des lacets joignent les circonférences σ_1 au point B_1 , et les circonférences σ_3 au point B_3 . Une coupure joint B_1 et B_3 ; en la prolongeant jusqu'à la circonférence c le domaine serait rendu simplement connexe. Mais ce prolongement peut être franchi sans qu'il y ait lieu de changer la détermination adoptée pour y .

En effet, au voisinage de la circonférence c (entre c et C_1), le calcul des fonctions implicites utiliserait l'équation $F(x, y, z) = x^4 + y^4 = 0$ relative à l'arête $S_1 S_2$; elle donne quatre fonctions uniformes de x . Le diagramme plan montre de même que pour x compris entre les circonférences c_1 et C_3 , trois des racines $y(x, \bar{z})$ peuvent être obtenues en utilisant l'arête $S_0 S_2$ et la surface anharmonique correspondante $4xz - y^3 = 0$; ces trois racines se permutent quand le point x traverse la coupure $B_1 B_3$. La quatrième racine reste uniforme dans cet anneau $c_1 C_3$, mais pour appliquer les développements antérieurs à son calcul trois cas seraient à distinguer, suivant la position du point x par rapport aux circonférences c_2 et C_2 : Entre c_1 et C_2 on utiliserait la série correspondant à l'arête $S_0 S_1$ et à l'équation $4yz - x^3 = 0$; entre C_2 et c_2 ce seraient la face $S_0 S_1 S_3$ et l'équation $4xyz - x^4 - z^4 = 0$ qui interviendraient; on ferait appel enfin entre c_2 et C_3 à l'arête $S_0 S_3$ et à l'équation $4xy - z^3 = 0$. L'arête $S_2 S_3$ et l'équation $y^4 + z^4 = 0$ conviennent pour l'intérieur de c_3 , où les quatre fonctions $y(x, \bar{z})$ sont uniformes.

L'étude des anneaux $c_1 C_1$, $c_3 C_3$ et de l'influence des lacets issus de B_1 et de B_3 sur l'échange des quatre fonctions revient à celle des deux courbes $4\xi\eta - \xi^4 - \eta^4 = 0$, $4\xi\eta - \eta^4 - 1 = 0$; mais nous ne la ferons pas ici. Nous observerons seulement que ces équations n'ont pas de racines η d'ordre de multiplicité supérieur à deux; nous avons donc, (n° 17), par une seule application de la méthode, caractérisé les cycles de contour apparent. Les quatre fonctions algébroides donnent lieu à douze points de ramification respectivement intérieurs aux cercles d'isolement; une rotation autour d'un tel point n'échange que deux de ces fonctions.

On pourrait compléter cette étude en construisant un cercle de Riemann à quatre feuillets (voir l'article de ces Annales cité p. 174);

les quatre fonctions algébroides $y(x, \bar{z})$ correspondant à une seule fonction uniforme sur ce cercle. Celui-ci ne diffère évidemment de la partie intérieure à c de la surface de Riemann correspondant à

$$4xyz - x^4 - y^4 - z^4 = 0$$

que par la position des points de ramification.