ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN LERAY
JULES SCHAUDER

Topologie et équations fonctionnelles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 45-78
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__45_0>

TOPOLOGIE ET ÉQUATIONS FONCTIONNELLES[1]

PAR MM. JEAN LERAY ET JULES SCHAUDER

Introduction.

I. Considérons l'équation très simple $P(x) = k$, où k est un paramètre, P un polynome de la variable réelle x; lorsque k varie, le nombre des solutions peut varier, mais sa parité reste constante; cette parité est un invariant de l'ensemble des solutions. Un résultat analogue vaut pour toutes les équations intégrales relevant de la méthode d'Arzelà-Schmidt [2]. Nous établirons au cours de ce travail qu'on peut de même attacher à l'ensemble des solutions de certaines équations fonctionnelles *non linéaires* un entier positif, négatif ou nul, *l'indice total*, qui reste *invariant* quand l'équation varie continûment et que les solutions restent bornées dans leur ensemble; les équations en question sont du type

$$x - \mathcal{F}(x) = 0, \tag{1}$$

où $\mathcal{F}(x)$ est *complètement continue* (vollstetig); x et $\mathcal{F}$ appartiennent à un ensemble abstrait, linéaire, normé et complet (au sens de M. Banach).

D'où résulte un procédé très général permettant *d'obtenir des théorèmes d'existence :* soit une équation du type (1). Supposons qu'on la modifie continûment sans qu'elle cesse d'appartenir au type (1) et de telle sorte que l'ensemble de ses solutions reste borné (on effectuera

---

(1) Ce travail a été résumé dans une Note parue aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 197, 1933, p. 115.

(2) Voir *Journal de Mathématiques*, t. 12, 1933, p. 1 à 7.

pratiquement cette opération en introduisant dans l'équation un paramètre variable k); supposons qu'on la transforme ainsi en une équation *résoluble* $x - \mathcal{F}_0(x) = 0$ et que l'on constate que l'indice total des solutions de cette *dernière* équation diffère de zéro. Alors l'indice total des solutions de l'équation primitive diffère aussi de zéro; elle admet donc *au moins une solution* (*voir* en particulier le théorème I). Les théorèmes d'existence établis par d'autres procédés font presque toujours appel à des hypothèses plus strictes entraînant par exemple l'unicité de la solution pour toute valeur de k. Nous croyons intéressant de signaler le superflu de telles restrictions.

En d'autres termes : Soit une famille d'équations du type (1), qui dépendent continûment du paramètre $k(k_1 \leqq k \leqq k_2)$

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0. \tag{1'}$$

L'une des conséquences de notre théorie est la suivante : il suffit de savoir majorer *a priori* toutes les solutions que possèdent ces équations et de vérifier, *pour une valeur particulière* k_0 *de* k, une certaine condition d'unicité pour avoir le droit d'affirmer que l'équation (1′) possède au moins une solution quel que soit k. En pratique on choisit k_0 tel que cette condition d'unicité se vérifie sans peine; on peut ainsi comme applications obtenir *des théorèmes d'existence où ne figure plus aucune condition d'unicité* (*voir* p. 68, § 21, alinéa 1°; théorème du paragraphe 22, p. 70).

Nous abandonnons donc complètement le procédé au moyen duquel ce genre de problèmes fut en général attaqué jusqu'à présent : partir d'une valeur k_0 du paramètre pour laquelle la solution était connue, la construire de proche en proche pour toutes les valeurs de k en employant des théorèmes d'existence locaux tels qu'en fournit la méthode des approximations successives; on se limitait ainsi nécessairement aux cas où l'existence et l'unicité locales de la solution de (1′) se trouvaient assurées.

Nous n'avons pas recouru non plus aux méthodes utilisées par M. Leray dans le travail déjà cité [2], on aurait dû supposer la fonctionnelle $\mathcal{F}(x)$ analytique; les démonstrations et les énoncés auraient été plus compliqués; le champ des applications se serait considérablement restreint; il est vrai que nous aurions obtenu des renseignements concernant l'ensemble des solutions (caractère analytique) [3].

Notre but a été au contraire de démontrer des théorèmes d'existence sous les hypothèses les plus simples et les plus commodes à vérifier : nous avons réussi à ne faire intervenir que des hypothèses concernant la continuité des équations fonctionnelles données.

II. Indiquons maintenant comment nous définissons l'indice total des solutions d'une équation du type (1) : il est égal au degré topologique de la transformation

$$y = x - \mathcal{F}(x) \tag{2}$$

au point O. Les beaux travaux de M. Brouwer [4] définissent ce degré topologique dans le cas des transformations continues opérant sur des espaces à n dimensions; notre premier chapitre étend ces définitions aux transformations (2). Il emploie des méthodes intimement liées à un Mémoire récent de M. Schauder [5].

III. *L'application de notre méthode* présente d'abord la difficulté suivante : transformer un problème en sorte qu'il se réduise à une équation du type (1). Nous avons réussi à faire subir cette réduction au problème de Dirichlet, l'équation aux dérivées partielles du second ordre étudiée étant l'équation du type elliptique la plus générale. Et nous avons ainsi obtenu des théorèmes d'existence nouveaux généralisant divers théorèmes d'existence que contiennent les célèbres travaux de M. S. Bernstein [6]. Nous prouvons par exemple que l'équation [7]

$$\begin{aligned} a\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + 2b\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial x\, \partial y} \\ + c\left(x, y; z; \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial z}{\partial y}\right) \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 0 \end{aligned}$$

$$(ac - b^2 > 0)$$

---

(3) Mais l'éventualité n'aurait pas été exclue d'une équation possédant un faisceau de solutions; cette éventualité est une des difficultés notables du sujet.

(4) Voir *Mathematische Annalen*, t. 71, 1911, p. 97-115.

(5) Voir *Mathematische Annalen*, t. 106, 1932, p. 661-721.

(6) Voir *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaft*, III, 2, Chap. XII, p. 1327-1328.

(7) M. S. Bernstein avait établi ce théorème dans le cas où z est absent de a, b, c. Nos méthodes nous permettent de nous dispenser de cette hypothèse qui entraînent l'unicité de la solution.

admet dans un cercle donné au moins une solution coïncidant sur la circonférence avec des valeurs données.

Il ne serait pas difficile de faire subir la même réduction à d'autres problèmes aux valeurs frontières, de les traiter selon le même principe.

Prochainement paraîtra une autre application de nos théorèmes d'existence; elle concernera la théorie du sillage.

I. — Degré topologique de certaines transformations fonctionnelles.

1. Soit *dans un espace à n dimensions* $\mathcal{E}_n$ un ensemble ouvert et borné ω; soit ω' sa frontière; soit $\overline{\omega} = \omega + \omega'$ son ensemble de fermeture. Envisageons une transformation continue Φ, définie sur $\overline{\omega}$; elle transforme $\overline{\omega}$ en un ensemble $\Phi(\overline{\omega})$ que nous supposons situé dans l'espace $\mathcal{E}_n$. Rappelons quelques résultats bien connus : la transformation Φ possède en tout point b étranger à l'image $\Phi(\omega')$ de ω', un degré $d[\Phi, \omega, b]$, qui jouit des *trois propriétés suivantes :*

1° Supposons que $\omega = \omega_1 + \omega_2$, ω_1 et ω_2 étant deux domaines sans point intérieur commun; supposons b étranger à $\Phi(\omega'_1)$ et à $\Phi(\omega'_2)$, alors

$$d[\Phi, \omega, b] = d[\Phi, \omega_1, b] + d[\Phi, \omega_2, b]$$

(propriété additive du degré).

2° Si le degré $d[\Phi, \omega, b]$ diffère de zéro, le point b appartient sûrement à l'image $\Phi(\omega)$ de ω.

3° Le degré $d[\Phi, \omega, b]$ reste constant quand le point b, la transformation Φ et le domaine ω varient continûment ([8]) sans que b atteigne jamais l'image $\Phi(\omega')$ de la frontière de ω.

Pour définir le degré de Φ en b, M. Brouwer opère comme suit : Il approche à ε près la transformation Φ par des transformations simpliciales Φ_ε; le nombre des simplexes positifs diminué du nombre des simplexes négatifs qui recouvrent b est le même pour toutes ces trans-

([8]) Déplacer b équivaut à transformer continûment Φ et ω.

formations approchées dès que ε est suffisamment petit : c'est le degré $d[\Phi, \omega, b]$.

2. Premier lemme. — Considérons un ensemble ouvert et borné ω_{n+p} d'un espace linéaire à $n+p$ dimensions $\mathcal{E}_{n+p}$; un point b de cet espace, un sous-espace linéaire $\mathcal{E}_n$ (hyperplan à n dimensions) contenant b et des points de ω_{n+p}. L'intersection de ω_{n+p} et $\mathcal{E}_n$ constitue, dans $\mathcal{E}_n$, un domaine ω_n. La frontière ω'_n de ce domaine fait partie de ω'_{n+p}.

Soit une transformation continue Φ_{n+p} qui transforme $\overline{\omega}_{n+p}$ en un ensemble de points de $\mathcal{E}_{n+p}$; nous supposons que b est étranger à $\Phi_{n+p}(\omega'_{n+p})$ et que Φ_{n+p} possède la propriété suivante :

($\mathfrak{T}$) : Tout point de $\overline{\omega}_{n+p}$ subit un déplacement parallèle à l'hyperplan $\mathcal{E}_n$.

Dans ces conditions Φ_{n+p} transforme $\overline{\omega}_n$ (c'est-à-dire $\omega_n + \omega'_n$) en un ensemble qui appartient, comme $\overline{\omega}_n$, à $\mathcal{E}_n$. Nous désignerons par Φ_n la transformation Φ_{n+p} ainsi envisagée dans l'hyperplan $\mathcal{E}_n$. Puisque b n'appartient pas à $\Phi_n(\omega'_n)$, Φ_n a un degré au point b, $d[\Phi_n, \omega_n, b]$.

Nous disons que ce degré est égal à celui de Φ_{n+p} au point b

$$d[\Phi_n, \omega_n, b] = d[\Phi_{n+p}, \omega_{n+p}, b].$$

Ce lemme permet donc de *comparer les degrés de deux transformations opérant dans des espaces à nombres différents de dimensions.*

Il suffit de le prouver pour $p = 1$.

On le démontrera dans ce cas en construisant sur $\overline{\omega}_{n+1}$ des transformations simpliciales approchées, ayant la propriété ($\mathfrak{T}$), dont les simplexes posséderont tous une face parallèle à $\mathcal{E}_n$, et dont aucun simplexe n'aura de sommet situé dans $\mathcal{E}_n$.

3. Soit *un espace abstrait $\mathcal{E}$, linéaire, complet et normé*. Rappelons le sens de ces termes [9].

I. *Axiomes des espaces linéaires :*

a. On peut ajouter deux éléments de $\mathcal{E}$. Cette addition constitue un groupe commutatif, d'où résulte l'existence d'un élément zéro.

---

[9] *Voir* S. Banach, *Fundamenta Mathematica*, t. 3, 1922, p. 133-181.

b. On peut multiplier tout élément e de $\mathcal{E}$ par tout nombre réel λ, le produit λe appartenant à $\mathcal{E}$. Cette opération est distributive

$$(\lambda + \mu)(e_1 + e_2) = \lambda e_1 + \mu e_1 + \lambda e_2 + \mu e_2.$$

De plus

$$1 . e = e.$$

II. *Axiomes des espaces normés :*

A tout élément e de $\mathcal{E}$ est attaché un nombre positif ou nul, $\|e\|$ sa norme, en sorte que

a. $\|e\| = 0$ entraîne $e = 0$;
b. $\|e_1 + e_2\| \leqq \|e_1\| + \|e_2\|$;
c. $\|\lambda e\| = |\lambda| . \|e\|$.

III. *Axiome des espaces complets :*

La relation

$$\lim_{\substack{m \to \infty \\ n \to \infty}} \| e_m - e_n \| = 0$$

entraîne l'existence d'un élément e tel que

$$\lim_{m \to \infty} \| e_m - e \| = 0.$$

4. Un ensemble d'éléments de $\mathcal{E}$, C, est par définition compact [10] quand toute suite infinie d'éléments de C a au moins un élément limite appartenant à $\mathcal{E}$. Étant donnés un nombre ε (> 0) et l'ensemble compact C, le fait suivant est bien connu : on peut trouver un nombre fini d'éléments de $\mathcal{E}$ $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_p$ tels qu'à tout point x de C corresponde au moins un point η_i vérifiant l'inégalité $\|x - \eta_i\| \leqq \frac{1}{2} \varepsilon$ (lemme de Borel-Lebesgue).

On peut donc à l'aide d'une transformation continue $T[x]$, définie sur C, et telle que $\|T[x] - x\| \leqq \varepsilon$, transformer C en une figure située dans un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_n$, qui soit linéaire et qui ait un nombre fini de dimensions : il suffit de choisir pour $\mathcal{E}_n$ l'ensemble

$$\sum_1^p \lambda_i \eta_i \qquad (\lambda_i : \text{nombres réels arbitraires});$$

---

(10) Rappelons l'existence de critères pratiques permettant d'affirmer le caractère compact d'ensembles abstraits (théorème d'Arzelà, etc.).

pour $T[x]$ la transformation continue

$$\left[\sum_{i=1}^{p}\mu_i(x)\eta_i\right]\times\left[\sum_{i=1}^{p}\mu_i(x)\right]^{-1}$$

où

$$\mu_i(x)=\varepsilon-\|x-\eta_i\| \qquad \text{pour } \|x-\eta_i\|\leqq\varepsilon,$$
$$\mu_i(x)=0 \qquad \text{pour } \|x-\eta_i\|\geqq\varepsilon.$$

Soit ω un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ ouvert et borné; soit ω' sa frontière; soit $\mathcal{F}(x)$ une transformation fonctionnelle définie sur l'ensemble fermé $\overline{\omega}=\omega+\omega'$; le transformé $\mathcal{F}(\overline{\omega})$ de $\overline{\omega}$ est supposé appartenir à $\mathcal{E}$. Nous disons, avec M. F. Riesz, que $\mathcal{F}(x)$ est *complètement continue* (vollstetig) quand elle est continue et que $\mathcal{F}(\overline{\omega})$ est un ensemble compact C. Il suffit dans ces conditions de considérer la transformation fonctionnelle

$$\mathcal{F}_\varepsilon(x)=T[\mathcal{F}(x)]$$

pour obtenir le résultat suivant :

Second lemme. — Étant donnés l'ensemble ouvert et borné ω, $\mathcal{F}(x)$ complètement continue sur $\overline{\omega}$ et $\varepsilon(>0)$, on peut trouver une transformation fonctionnelle $\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ satisfaisant les deux conditions suivantes :

1° $\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ approche $\mathcal{F}(x)$ à ε près, c'est-à-dire

$$\|\mathcal{F}(x)-\mathcal{F}_\varepsilon(x)\|<\varepsilon$$

en tout point x de $\overline{\omega}$.

2° Toutes les valeurs prises par $\mathcal{F}_\varepsilon(x)$ font partie d'un même sous-ensemble linéaire de $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_n$, dont le nombre de dimensions est fini.

5. Définition du degré topologique de certaines transformations fonctionnelles. — $\mathcal{F}(x)$ étant une transformation fonctionnelle *complètement continue*, qui est définie sur l'ensemble de fermeture $\overline{\omega}$ d'un ensemble ouvert et borné ω, et dont toutes les valeurs appartiennent à $\mathcal{E}$, considérons la transformation fonctionnelle

(1) $$y=x-\mathcal{F}(x)\equiv\Phi(x).$$

Nous nous proposons de définir son degré au point o (11), $d[\Phi, \omega, o]$, en sorte que ce degré possède les trois propriétés essentielles rappelées au paragraphe 1. Ceci n'est manifestement possible que si o est étranger à l'image de la frontière de ω, $\Phi(\omega')$. Nous supposerons qu'il en est ainsi. Dès lors o est à une distance positive de $\Phi(\omega')$:

Sinon il existerait sur ω' une suite infinie de points $x_1, x_2, \ldots$, tels que

$$x_n - \mathcal{F}(x_n) \to o;$$

les points $\mathcal{F}(x_n)$ appartenant à un ensemble compact, nous aurions le droit de supposer la suite infinie choisie en sorte que les points $\mathcal{F}(x_n)$ tendent vers une limite x_0; les points x_n tendraient également vers x_0; x_0 appartiendrait à ω' et vérifierait l'équation

$$x_0 - \mathcal{F}(x_0) = o,$$

contrairement aux hypothèses. C. Q. F. D.

Posons donc :

$$h = \text{plus courte distance de o à } \Phi(\omega') > o. \tag{2}$$

Soit une transformation fonctionnelle $\mathcal{F}_h(x)$, définie sur $\overline{\omega}$, telle que

$$\| \mathcal{F}(x) - \mathcal{F}_h(x) \| < h, \tag{3}$$

et dont toutes les valeurs appartiennent à un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ linéaire dont le nombre de dimensions soit fini. [Le second lemme assure l'existence de telles transformations $\mathcal{F}_h(x)$.] Soit $\mathcal{E}_{n_h}$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ linéaire ayant un nombre de dimensions n_h fini, qui contienne toutes les valeurs de $\mathcal{F}_h(x)$ et au moins un point de ω. L'intersection de ω par $\mathcal{E}_{n_h}$, n'étant pas vide, constitue dans $\mathcal{E}_{n_h}$ un ensemble ouvert et borné ω_{n_h}; sa frontière ω'_{n_h} appartient à ω'; $\Phi(\omega'_{n_h})$ est donc à une distance de o au moins égale à h. La transformation

$$\Phi_h(x) \equiv x - \mathcal{F}_h(x)$$

transforme $\overline{\omega}_{n_h} (= \omega_{n_h} + \omega'_{n_h})$ en un ensemble $\Phi_h(\overline{\omega}_{n_h})$ situé dans le même sous-ensemble linéaire $\mathcal{E}_{n_h}$; elle approche Φ à h près; donc

$$\text{Plus courte distance de o à } \Phi_h(\omega'_{n_h}) > o; \tag{4}$$

(11) Un changement de coordonnées : $x' = x - b$, permet de faire jouer le rôle du point o à un point b quelconque de $\mathcal{E}$.

ainsi Φ_h considérée sur $\overline{\omega}_{n_h}$ a au point o *un degré bien défini. C'est lui que nous nommerons le degré topologique de la transformation Φ au point* o. Autrement dit nous posons

$$d[\Phi, \omega, o] = d[\Phi_h, \omega_{n_h}, o].$$

6. **Justification de la définition précédente.** — Nous nous proposons d'établir que le degré topologique de Φ en o est indépendant du choix de $\mathcal{F}_h(x)$ et $\mathcal{E}_{n_h}$.

Traitons d'abord un cas particulier : celui où nous considérons deux transformations différentes Φ_h et $\Phi_h^\star$, mais où les deux sous-ensembles linéaires associés $\mathcal{E}_{n_h}$ et $\mathcal{E}_{n_h^\star}$ sont confondus en un seul $\mathcal{E}_l$. Introduisons la transformation auxiliaire

$$\theta\,\Phi_h(x) + (1-\theta)\,\Phi_h^\star(x), \tag{5}$$

où θ est un paramètre variant de o à 1. D'après (3)

$$\|\theta\,\Phi_h(x) + (1-\theta)\,\Phi_h^\star(x) - \Phi(x)\| < h. \tag{6}$$

La transformation auxiliaire (5) permet donc de passer continûment de Φ_h à $\Phi_h^\star$ sans que l'image de $\omega'_l\left(\equiv \omega'_{n_h} \equiv \omega'_{n_h^\star}\right)$ atteigne jamais le point o. Donc les dégrés de Φ_h et $\Phi_h^\star$ sont égaux au point o.

Étudions maintenant le cas général : comparons deux choix différents $\mathcal{F}_h(x)$, $\mathcal{E}_{n_h}$ et $\mathcal{F}_h^\star(x)$, $\mathcal{E}_{n_h^\star}$. Nous voulons prouver que les transformations Φ_h et $\Phi_h^\star$, envisagées dans les espaces $\mathcal{E}_{n_h}$ et $\mathcal{E}_{n_h^\star}$ ont au point o des degrés d et $d^\star$ égaux. Soit $\mathcal{E}_l$ un sous-ensemble de $\mathcal{E}$, linéaire à nombre fini de dimensions qui contienne $\mathcal{E}_{n_h}$ et $\mathcal{E}_{n_h^\star}$; soit ω_l l'intersection de ω par $\mathcal{E}_l$. Les transformations Φ_h et $\Phi_h^\star$ sont évidemment définies sur $\overline{\omega}_l$; considérées sur $\overline{\omega}_l$ elles possèdent chacune un degré au point o; ces deux degrés ont une même valeur δ, comme nous venons de le démontrer. Mais notre premier lemme affirme que $d = \delta$ et $d^\star = \delta$. D'où $d = d^\star$. C. Q. F. D.

7. A l'aide de la définition donnée au paragraphe 5 le lecteur prouvera sans difficulté que *les trois propriétés fondamentales du degré*, que nous avons énoncées au paragraphe 1, continuent à valoir pour les transformations fonctionnelles $\Phi(x)$ envisagées ci-dessus. Mais pré-

cisons le sens de l'expression : « varier continûment ». Soit k le paramètre variable que nous supposons figurer dans Φ; $\Phi(x, k)$ doit être *uniformément continue par rapport à* k; en d'autres termes quels que soient les nombres k_0 et $\varepsilon(>0)$ il doit exister un nombre $\eta(>0)$ tel que l'inégalité $|k-k_0|<\eta$ entraîne

$$\|\Phi(x, k)-\Phi(x, k_0)\|<\varepsilon.$$

$\overline{\omega}(k)$ doit être *pour chaque valeur de* k l'ensemble de fermeture d'un domaine ouvert et borné, $\omega(k)$. De plus, quels que soient k_0 et $\varepsilon(>0)$ il doit exister un nombre η tel que l'inégalité $|k-k_0|<\eta$ ait la conséquence suivante : $\overline{\omega}(k)$ et $\overline{\omega}(k_0)$ ne diffèrent que par des points situés à une distance de $\omega'(k_0)$ qui est inférieure à ε.

II. — Notion d'indice et détermination effective du degré.

Ce chapitre ne contient aucun point essentiel de notre théorie. Il n'est pas indispensable à la compréhension des chapitres ultérieurs.

8. **Indice d'un point a de ω.** — Soient un point a intérieur à ω, et son image : $b=a-\mathcal{F}(a)\equiv\Phi(a)$. Supposons qu'une sphère de rayon ρ suffisamment faible

$$\|x-a\|<\rho$$

contienne la seule solution $x=a$ de l'équation $x-\mathcal{F}(x)=b$; on dira que a est une solution isolée de cette équation.

Le degré $d[\Phi, \Sigma(\theta), b]$ au point b de la transformation Φ envisagée dans la sphère $\Sigma(\theta)$

$$\|x-a\|<\theta\rho$$

existe pour $0<\theta<1$ et est dans ces conditions indépendant de θ. Par analogie avec le cas d'un espace à nombre fini de dimensions nous nommerons « indice du point a » ce nombre : $i[\Phi, a]$.

Si un point b de $\mathcal{E}$ est l'image d'un nombre fini de points de $\overline{\omega}$: $a_1, a_2, \ldots, a_\mu$, s'il est l'image de ces seuls points, si aucun d'eux n'est sur la frontière ω', alors *son degré est la somme des indices* [12]

---

[12] *Voir* SCHAUDER, *Fundamenta Mathematica*, t. 12, *Ueber stetige Abbildungen*, Satz 3.

de $a_1, \ldots, a_\mu$

$$d[\Phi, \omega, b] = \sum_{i=1}^{\mu} i[\Phi, a_i].$$

Dans le cas envisagé le calcul effectif du degré se ramène ainsi à la détermination d'indices.

Remarque importante. — Si la transformation étudiée est l'identité ($\Phi \equiv x$, $\mathcal{F} \equiv 0$), alors l'indice de tout point de ω est $+1$.

9. **Indice d'un point de ω au voisinage duquel Φ est biunivoque.** — Utilisons un travail récent de M. Schauder ([5]). $\mathcal{E}$ sera supposé à cet effet faiblement compact; $\mathcal{F}(x)$ devra être non seulement complètement continue, mais aussi faiblement continue ([13]). Remarquons que la conclusion du « Hilfsatz 6 » de M. Schauder peut être complétée comme suit :

« L'indice de la transformation Φ au point O vaut ± 1 ($m_1 = \pm 1$). »

Appliquons ce Hilfsätz et les Hilfsatz 7 et 8 aux transformations approchées Φ_h et aux espaces $\mathcal{E}_{n_h}$ que nous avons considérés au paragraphe 5 du présent travail. Nous obtenons le résultat suivant qui équivaut au « Satz 1 » :

Si $\mathcal{E}$ est faiblement compact, si $\mathcal{F}$ est faiblement continue, et si la transformation $x - \mathcal{F}(x)$ est biunivoque au voisinage d'un point a de ω, alors l'indice de ce point a est ± 1.

10. *Supposons qu'au point a $\mathcal{F}(x)$ admette une différentielle de Fréchet* $A(x-a)$ *complètement continue;* en d'autres termes :

$$\mathcal{F}(x) = \mathcal{F}(a) + A(x-a) + R(x-a),$$

A étant linéaire et homogène, $\|R(x-a)\| \, \|x-a\|^{-1}$ tendant vers zéro avec $\|x-a\|$. Supposons de plus la transformation

$$y = (x-a) - A(x-a)$$

biunivoque. On voit facilement que a est une solution isolée de l'équa-

---

([13]) Nous ignorons si ces hypothèses supplémentaires sont essentielles.

tion
$$x - \mathcal{F}(x) = a - \mathcal{F}(a);$$

le point a possède donc un indice : C'est le degré au point O de la transformation

$$y = (x - a) - \mathrm{A}(x - a) - \mathrm{R}(x - a) \qquad \text{pour } \|x - a\| \leqq \varepsilon,$$

ε tendant vers zéro.

C'est donc, en posant $x' = \varepsilon(x - a)$, le degré de la transformation

$$y = x' - \mathrm{A}(x') - \frac{1}{\varepsilon}\mathrm{R}(\varepsilon x') \qquad \text{pour } \|x'\| < 1.$$

Puisque $\frac{1}{\varepsilon}\mathrm{R}(\varepsilon x')$ tend uniformément vers zéro, ce degré est celui de la transformation
$$y = x - \mathrm{A}(x).$$

Conclusion. — *Si $\mathcal{F}(x)$ admet au point a une différentielle de Fréchet complètement continue* $\mathrm{A}(x)$, *l'indice en a de la transformation $y = x - \mathcal{F}(x)$ existe et est égal à l'indice de la transformation $y = x - \mathrm{A}(x)$ quand existe ce second indice.*

Il est donc important de savoir déterminer l'indice d'une telle transformation linéaire : $y = x - \mathrm{A}(x)$.

11. Considérons l'équation $x - \lambda\mathrm{A}(x) = 0$ où $\mathrm{A}(x)$ est linéaire, homogène, complètement continue; supposons qu'elle admette la seule solution zéro pour toute valeur de λ comprise entre λ' et λ''; en d'autres termes l'intervalle (λ', λ'') ne contient pas de valeur fondamentale [14]; l'indice est alors le même en tous les points de $\mathcal{E}$ et pour toutes les valeurs de λ comprises entre λ' et λ'' (ceci résulte de la troisième des propriétés du degré qui sont énoncées au paragraphe 1). En particulier cet indice est $+1$ si l'intervalle (λ', λ'') contient la valeur $\lambda = 0$.

Pour compléter ce résultat nous utiliserons des théorèmes établis

---

(14) *Eigenwert.*

en premier lieu par M. Goursat ([15]) et que M. F. Riesz ([16]) a étendus aux cas les plus généraux. D'après M. Riesz les valeurs fondamentales sont isolées (théorème 11); nous allons maintenant supposer que λ en franchisse une; nous la supposerons égale à 1 pour simplifier les notations; notre but est de déterminer la modification que subit alors l'indice.

Le théorème n° 10 de M. Riesz définit deux opérations fonctionnelles linéaires complètement continues $A_1(x)$ et $A_2(x)$ dont nous allons rappeler quelques propriétés

a. $A(x) = A_1(x) + A_2(x)$.

b. $A_1[A_2(x)] \equiv 0$, $A_2[A_1(x)] \equiv 0$.

c. L'ensemble des valeurs prises par $A_2(x)$ constitue un espace linéaire $\mathcal{E}_m$ à nombre fini de dimensions, m. $\mathcal{E}_m$ est engendré par les combinaisons linéaires des solutions des équations ([17])

$$\begin{aligned} B\ \ (x) &\equiv x - A(x) = 0, \\ B^{(2)}(x) &\equiv B[B\ \ (x)] = 0, \\ B^{(3)}(x) &\equiv B[B^{(2)}(x)] = 0, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{aligned}$$

m est identique au nombre que M. Goursat nomme le degré de la valeur singulière 1.

d. La définition de $\mathcal{E}_m$, les théorèmes 8 et 10 de M. Riesz prouvent que

$$A_2(\mathcal{E}_m) \equiv \mathcal{E}_m.$$

e. D'après les théorèmes 11 et 12 de M. Riesz la transformation $y(x)$

$$y = x + \lambda A_1(x)$$

est biunivoque quand le paramètre λ est intérieur à un certain intervalle de l'axe des λ, intervalle qui contient le point $\lambda = 1$.

D'après (*b*) la transformation

$$y = x - \lambda A(x) \equiv B(x, \lambda)$$

([15]) *Voir* GOURSAT, *Traité d'Analyse*, t. III, Chap. XXXI, II, *Étude du noyau résolvant; résolvante canonique*.

([16]) *Voir* F. RIESZ, *Acta mathematica*, 41. 1918, p. 71-98.

([17]) Ces solutions ont été nommées par M. Goursat *fonctions principales;* M. Riesz les désigne par l'expression *Nullelemente*.

est le produit des deux transformations

$$z = x - \lambda A_1(x) \equiv B_1(x, \lambda); \qquad y = z - \lambda A_2(z) \equiv B_2(z, \lambda).$$

L'indice $i(\lambda)$ de la transformation B est donc [18], sauf pour $\lambda = 1$, le produit des indices $i_1(\lambda)$ et $i_2(\lambda)$ des transformations B_1 et B_2 :

$$i(\lambda) = i_1(\lambda) . i_2(\lambda).$$

En vertu de (e) et du début de ce paragraphe $i_1(\lambda)$ est constant au voisinage de la valeur $\lambda = 1$.

Il nous reste à étudier $i_2(\lambda)$. Reportons-nous à la définition du degré d'une transformation que nous avons donnée au paragraphe 5 : nous constatons que $i_2(\lambda)$ est l'indice de la transformation $B(x, \lambda)$ envisagée dans l'espace $\mathcal{E}_m$. Cette transformation est une substitution linéaire; son indice est donc en chaque point $+1$ ou -1 suivant que son déterminant est positif ou négatif.

Ce déterminant est un polynome en λ de degré au plus égal à m. Il est exactement de degré m en vertu de (d). Le théorème 13 de M. Riesz nous apprend d'autre part que la transformation $B_2(x, \lambda)$ n'a pas de valeur fondamentale, réelle ou complexe, autre que 1. Son déterminant est donc $(1-\lambda)^m$:

$$i_2(\lambda) = +1 \quad \text{pour} \quad \lambda < 1; \qquad i_2(\lambda) = (-1)^m \quad \text{pour} \quad \lambda > 1.$$

Conclusion. — Soit une transformation $y = x - A(x)$, linéaire, homogène, biunivoque, où $A(x)$ est complètement continue. Pour savoir si son indice i vaut $+1$ ou -1, on introduit un paramètre λ; on considère l'équation $x - \lambda A(x) = 0$; on cherche toutes les valeurs fondamentales λ_p comprises entre 0 et 1, puis leurs degrés (au sens de M. Goursat) m_p. *L'indice i vaut $+1$ ou -1 suivant que la somme de ces degrés m_p est paire ou impaire.*

Remarque. — Dans le cas où l'équation $x - \lambda A(x) = 0$ est une équation de Fredholm la règle précédente peut se formuler comme suit :

L'indice i de la transformation $y = x - A(x)$ vaut $+1$ ou -1 sui-

---

(18) La démonstration de ce fait est aisée parce que les transformations B_1 et B_2 (qui sont linéaires et biunivoques) transforment des domaines en domaines.

vant que la fonction déterminante de Fredholm, $D(\lambda)$, *est positive ou négative pour* $\lambda = 1$.

III. — Théorie de certaines équations fonctionnelles.

12. Nous nous proposons d'étudier l'équation

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0, \tag{1}$$

les hypothèses suivantes étant réalisées :

(H)

L'inconnue x et toutes les valeurs de $\mathcal{F}$ appartiennent à un espace linéaire, normé et complet, $\mathcal{E}$.

L'ensemble des valeurs du paramètre k constitue un segment [19] K de l'axe des nombres réels [20].

Nous désignerons par $[\mathcal{E} \times K]$ l'espace abstrait qu'engendrent les couples d'éléments (x, k); nous nommerons distance de deux éléments (x, k) et (x', k') de $[\mathcal{E} \times k]$ la quantité $\|x - x'\| + |k - k'|$.

$\mathcal{F}(x, k)$ est supposée définie sur l'ensemble de fermeture $\overline{\Omega}$ d'un ensemble ouvert [21] et borné de $[\mathcal{E} \times K]$: Ω.

$\mathcal{F}(x, k)$ doit être *complètement continue* [22] sur $\overline{\Omega}$ et de plus *uniformément continue* [23] *en* k.

Nous supposons enfin que *la frontière* Ω' *de* Ω *ne contient aucune solution* (x, k) *de l'équation* (1).

Étant donnée une valeur k du paramètre, $\omega(k)$ désignera l'ensemble des points x tels que (x, k) soit intérieur à Ω. $\omega(k)$ ou bien est vide, ou bien est un ensemble ouvert et borné de l'espace $\mathcal{E}$. Sa fron-

---

(19) Un segment se compose d'un intervalle et de ses deux extrémités.

(20) Moyennant quelques légères complications de l'énoncé et du raisonnement, nous pourrions supposer que k est un point d'un espace abstrait K vérifiant les deux conditions suivantes : la distance de deux éléments de K est définie; K est un continu. Mais de telles considérations nous paraissent sans grand intérêt.

(21) Un ensemble ouvert de $[\mathcal{E} \times K]$ est un ensemble dont chaque point possède un voisinage ne contenant aucun point de $[\mathcal{E} \times K]$ étranger à cet ensemble. Par exemple, l'inégalité $\|x\| < 1$ définit un domaine de $[\mathcal{E} \times K]$ dont la frontière se compose des points de $[\mathcal{E} \times K]$ tels que $\|x\| = 1$.

(22) Ceci signifie que $\mathcal{F}(x, k)$ est continue en chaque point de $\overline{\Omega}$ et que l'ensemble des valeurs prises par $\mathcal{F}$ sur $\overline{\Omega}$ est un sous-ensemble compact de $\mathcal{E}$.

(23) *Cf.* § 7, p. 54.

tière $\omega'(k)$ est constituée par des points x tels que (x, k) appartienne à Ω'; $\omega'(k)$ ne contient aucune solution de l'équation (1) qui corresponde à la valeur k du paramètre.

13. Nous associerons à l'équation (1) la transformation suivante qui dépend du paramètre k :

$$y = x - \mathfrak{F}(x, k). \tag{2}$$

Le premier chapitre définit un degré au point $y = 0$ pour la transformation (2) considérée sur l'ensemble $\omega(k)$. Nous nommerons désormais ce degré *indice total des solutions de* (1) qui correspondent à la valeur k du paramètre; ceci afin de ne plus avoir à parler de la transformation (2) et de ne plus considérer que l'équation (1) elle-même et ses solutions. Quand $\omega(k)$ sera vide, cet indice total sera par définition zéro.

De même, si parmi les solutions correspondant à une valeur k du paramètre il s'en trouve une isolée, a, l'indice [24] du point a relativement à la transformation (2) sera nommé *l'indice de la solution* (a, k).

Du premier chapitre résultent les conséquences suivantes :

LEMME 1. — Si l'ensemble des solutions correspondant à une valeur k du paramètre se compose d'un nombre fini de solutions, alors l'indice total est la somme des indices de ces solutions.

LEMME 2. — Si en un point k de K l'indice total diffère de zéro, alors l'équation (1) admet, pour cette valeur k du paramètre, au moins une solution.

LEMME 3. — L'indice total est le même en tous les points de K.

Les deux premiers lemmes sont évidents.

14. Pour *démontrer le lemme* 3 il suffit d'établir la proposition suivante :

$(\mathfrak{T})$ $\left\{\begin{array}{l}\text{On peut attacher à tout point } \chi \text{ de K un voisinage } |k - \chi| < \varepsilon \\ \text{dans lequel l'indice total est constant.}\end{array}\right.$

---

[24] *Cf.* § 8, p. 54.

Nous distinguerons deux cas :

a. Supposons que l'équation $x - \mathcal{F}(x, \chi) = 0$ n'admette aucune solution. La propriété ($\mathcal{T}$) résulte alors du fait suivant :

Il existe un intervalle $|k - \chi| < \varepsilon$ aux points duquel ne correspond aucune solution de l'équation (1).

En effet si cette dernière affirmation était fausse il existerait une suite de valeurs k_1, k_2, $\ldots$, tendant vers k, auxquelles correspondraient des solutions de (1), x_1, x_2, $\ldots$:

$$x_n - \mathcal{F}(x_n, k_n) = 0.$$

Nous pourrions supposer cette suite choisie en sorte que les quantités $\mathcal{F}(x_n, k_n)$ tendent vers une limite x_0 ; x_n tendrait vers x_0 ; (x_0, χ) appartiendrait à $\overline{\Omega}$ et constituerait une solution de (1) contrairement aux hypothèses.

b. Démontrons maintenant la proposition ($\mathcal{T}$) dans le cas où l'équation $x - \mathcal{F}(x, \chi) = 0$ possède au moins une solution ; $\omega(\chi)$ ne peut être vide. Un raisonnement par l'absurde, bien aisé et que nous n'expliciterons pas, prouve l'existence d'un sous-ensemble ϖ de $\mathcal{E}$ et d'un intervalle K_0 de K qui jouissent des propriétés suivantes :

K_0 contient le point χ ; ϖ est l'ensemble de fermeture d'un ensemble ouvert de l'espace $\mathcal{E}$; ϖ contient en son intérieur toutes les solutions de (1) pour lesquelles k appartient à K_0 ; si x appartient à ϖ et si k appartient à K_0, le point (x, k) est sûrement intérieur à Ω.

En tout point K_0 l'indice total des solutions de (1) est égal au degré au point 0 de la transformation (2) envisagée sur ϖ ; cet indice total est donc constant sur K_0. C. Q. F. D.

15. (H') Supposons qu'en un point k_0 de K l'équation (1) admette un nombre fini de solutions : a_1, a_2, $\ldots$, a_μ et que nous les connaissions toutes. Le Chapitre II nous permet d'étudier leurs indices. Supposons que cette étude nous apprenne que *l'indice total diffère de zéro au point* k_0.

D'après le lemme 3 l'indice total n'est nul en aucun point de K. D'après le lemme 2 à chaque point de K correspond une solution au moins de l'équation (1). Cette proposition est manifestement *un théorème d'existence*. [Ce théorème fournit d'ailleurs des renseignements sur la structure de Ω : moyennant les hypothèses faites $\omega(k)$

n'est vide en aucun point de K.] Nous allons compléter ce théorème d'existence par des renseignements concernant *la continuité des solutions :* le résultat obtenu constituera notre théorème fondamental.

A cet effet supposons encore vérifiées les hypothèses (H) et (H'). Considérons dans l'espace $[\mathcal{E} \times K]$ le plus grand continu de solutions ([25]) contenant a_1, le plus grand continu de solutions contenant a_2, ... Soient c_1, c_2, ... c_ν les continus distincts que nous obtenons ainsi ($\nu \leqq \mu$). Il existe un nombre δ tel qu'il est impossible de trouver dans $[\mathcal{E} \times k]$ une suite finie de solutions (x_1, k_1), (x_2, k_2), ..., qui possèdent les deux propriétés suivantes :

Les deux solutions extrêmes de cette suite appartiennent à deux continus c_l et c_m distincts; la distance de deux solutions consécutives de cette suite reste inférieure à δ.

Soit λ une grandeur positive quelconque inférieure à δ et inférieure à la plus courte distance de Ω' à l'ensemble de toutes les solutions que contient Ω. Considérons l'ensemble des points de $[\mathcal{E} \times K]$ qui sont situés à une distance moindre que λ de l'une au moins des solutions de (1) : c'est un ensemble ouvert qui se compose de domaines. Soit $\mathcal{O}_l$ celui de ces domaines qui contient le continu $c_l (l = 1, 2, \ldots, \nu)$; les domaines $\mathcal{O}_l$ sont distincts; ils sont deux à deux sans point commun; ils sont intérieurs à Ω; quand λ tend vers zéro chacun d'eux se réduit au continu c_l qui lui correspond. *Nous avons le droit d'appliquer les lemmes* 1, 2, 3 *en substituant* $\mathcal{O}_l$ à Ω : l'indice total des solutions contenues dans $\mathcal{O}_l$ est le même en tous les points de K; il est égal à la somme des indices des points (a_p, k_0) qui font partie de c_l; c'est donc un nombre indépendant de λ. Nous le nommerons l'indice i_l du continu c_l. Il a deux propriétés essentielles :

1° Si (comme vraisemblablement cela a lieu « en général ») les points de c_p correspondant au point k de K sont en nombre fini, alors la somme de leurs indices est l'indice i_p de c_p;

2° Si l'indice i_p de c_p diffère de zéro, à tout point de K correspond au moins un point de c_p.

([25]) Une solution est l'ensemble d'un point x de $\mathcal{E}$ et d'un point k de K qui vérifient (1).

16. (H′) a pour conséquence que l'un au moins des indices i_1, $i_2, \ldots, i_r$ diffère de zéro. D'où :

THÉORÈME FONDAMENTAL. — *Soit l'équation* :

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0. \tag{1}$$

Supposons vérifiées les hypothèses H (§ 12, p. 59) *et* H′ (§ 15, p. 61). *Alors* IL EXISTE SUREMENT *dans l'espace* [$\mathcal{E} \times$ K] *un continu de solutions le long duquel* k *prend toutes les valeurs* [26] *de* K.

N. B. — Ce théorème fondamental n'exprime pas toutes les conséquences qu'entraînent les deux propriétés des indices i_p. Citons par exemple la conséquence suivante : la solution (a_1, k_0), si son indice diffère de zéro, ou bien [27] appartient à un continu de solutions contenant l'une des autres solutions (a_2, k_0), ..., (a_μ, k_0); ou bien [27] appartient à un continu de solutions le long duquel k prend toutes les valeurs de K.

Remarques concernant les hypothèses (H′). — Signalons un cas fréquent et particulièrement simple où les conditions (H′) sont satisfaites : celui où, en un point k_0 de K, $\mathcal{F}(x, k_0)$ est identiquement nulle [28].

Un autre cas important est le suivant : on connaît un point k_0 de K où l'équation (1) admet *un nombre impair de solutions*, au voisinage desquelles *la transformation* (2) *est biunivoque*.

IV. — Applications.

Signalons en premier lieu que les théorèmes d'existence établis par la méthode d'Arzelà-Schmidt [2] sont tous des cas particuliers du théorème fondamental énoncé ci-dessus.

17. Le présent chapitre est consacré à l'application d'un corollaire du théorème fondamental; ce corollaire s'obtient en supposant Ω

---

[26] Une même valeur de K peut être prise plusieurs fois.
[27] Rien n'empêche ces deux éventualités de se présenter simultanément.
[28] *Cf.* § 8, p. 55, « Remarque importante ».

défini par une inégalité $\|x\| < M$, M étant une constante; il s'énonce comme suit :

Théorème I. — Soit l'équation

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0. \tag{1}$$

Faisons les trois séries d'hypothèses :

(H₁) L'inconnue x et toutes les valeurs de $\mathcal{F}$ appartiennent à un espace linéaire, normé et complet, $\mathcal{E}$.

L'ensemble des valeurs du paramètre k constitue un segment K de l'axe des nombres réels.

$\mathcal{F}(x, k)$ est définie pour tous les couples (x, k) où x est un élément quelconque de $\mathcal{E}$, k un élément quelconque de K.

En chaque point k de K, $\mathcal{F}(x, k)$ est *complètement continue*; ceci signifie que $\mathcal{F}(x, k)$ transforme tout ensemble borné de points x de $\mathcal{E}$ en un ensemble compact.

Sur tout sous-ensemble de $\mathcal{E}$ borné, $\mathcal{F}(x, k)$ est *uniformément continue par rapport à* k.

(H_2) En un point particulier k_0 de K toutes les solutions sont connues et l'on peut étudier leurs indices par l'intermédiaire du Chapitre II; nous supposons *la somme de ces indices non nulle*.

(H_3) Enfin nous supposons démontré par un procédé quelconque que les solutions de (1) sont bornées dans leur ensemble. (*Limitation a priori* indépendante de k.)

Conclusion. — Alors *il existe* sûrement dans l'espace $[\mathcal{E} \times K]$ un continu de solutions le long duquel k prend toutes les valeurs de K.

18. Nous allons maintenant montrer comment des systèmes de relations, au premier abord très différents de (1), équivalent à des équations de ce type (1), pour lesquelles les hypothèses (H_1) sont vérifiées. Il serait d'ailleurs facile de multiplier ces exemples.

Soit d'abord une *équation aux dérivées partielles, du second ordre, elliptique et de forme normale*,

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = f\left[x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}; k\right]; \tag{3}$$

f est une fonction continue par rapport à l'ensemble de ses arguments. Nous nous proposons, par exemple, de trouver les solutions de (3) qui sont définies dans un domaine régulier Δ du plan (x_1, x_2) et qui s'annulent à la frontière de ce domaine. Soit $G(x_1, x_2; y_1, y_2)$ la fonction de Green de Δ. Transformons notre problème en choisissant pour inconnue $\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = \rho$, l'équation (3) prend la forme

$$\rho(x_1, x_2) = f\left[x_1, x_2; \iint_\Delta G(x_1, x_2; y_1, y_2)\rho(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2; \frac{\partial}{\partial x_1}\iint_\Delta G\rho\,dy_1\,dy_2, \frac{\partial}{\partial x_2}\iint_\Delta G\rho\,dy_1\,dy_2; k\right]. \tag{4}$$

Cette équation est du type (1). Choisissons pour espace $\mathcal{E}$ l'espace des fonctions $\rho(x_1, x_2)$ qui sont définies sur Δ et qui sont mesurables et bornées; posons $\|\rho\| =$ maximum de $|\rho(x_1, x_2)|$.

Les conditons (H_1) sont réalisées : en effet à des fonctions $\rho(x_1, x_2)$ bornées dans leur ensemble correspondent des fonctions

$$f\left[x_1, x_2; \iint_\Delta G(x_1, x_2; y_1, y_2)\rho(y_1, y_2)\,dy_1\,dy_2; \frac{\partial}{\partial x_1}\iint_\Delta G\rho\,dy_1\,dy_2, \frac{\partial}{\partial x_2}\iint_\Delta G\rho\,dy_1\,dy_2; k\right]$$

qui possèdent une égale continuité.

Abordons un problème plus général.

19. **Problème de Dirichlet pour une équation quasi linéaire du type elliptique.** — Soit un domaine borné Δ d'un espace à n dimensions : $x_1, x_2, \ldots, x_n$. La frontière Δ' de Δ est supposée régulière. Une fonction z définie sur $\overline{\Delta}(=\Delta + \Delta')$ sera dite appartenir à l'espace abstrait E_α quand elle satisfera une condition de Hölder d'exposant α; à l'espace $E_{\alpha,m}$ quand ses dérivées d'ordre m existeront et appartiendront à E_α. Une fonction φ définie sur Δ' sera dite appartenir à l'espace $e_{\alpha,m}$ quand ses dérivées d'ordre m existeront et vérifieront une condition de Hölder d'exposant α. Les normes dans ces différents espaces E_α, $E_{\alpha,m}$, $e_{\alpha,m}$ seront celles qu'a définies M. Schauder [5] : $\|z\|_\alpha$, $\|z\|_{\alpha,m}$, $\|\varphi\|_{\alpha,m}$. k sera un paramètre variant sur un segment K de l'axe réel. Nous supposons données $\frac{n(n+1)}{2} + 1$ transformations fonc-

tionnelles : $A_{ij}(z, k) \equiv A_{ij}(z, k)$; $D(z, k)$; elles dépendent du paramètre k; elles sont définies en tout point z de l'espace $E_{\alpha,2}$; elles transforment continûment ces points z en points d'un espace $E_{\alpha+2\beta}(0 < \alpha < \alpha + 2\beta < 1)$, tout en étant uniformément continues par rapport à k quand z reste dans un domaine borné de $E_{\alpha,2}$; enfin les formes $\sum\limits_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} A_{ij}(z, k)u_i u_j$ sont supposées définies quelles que soient la fonction z et les valeurs de x_1, x_2, k.

Nous supposons également donné un élément $\varphi(k)$ de $e_{\alpha+\beta,2}$, qui dépend continûment du paramètre k.

Le problème que nous envisageons est le suivant :

Trouver pour chaque valeur de k un élément de $E_{\alpha,2}$, $z(x_1, \ldots, x_n; k)$, qui vaille $\varphi(k)$ sur Δ' et qui vérifie l'équation fonctionnelle

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} A_{ij}(z, k)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = D(z, k). \tag{5}$$

— L'équation classique du type elliptique

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}\left(x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j} = d\left(x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k\right) \tag{6}$$

est un cas particulier de (5); quelques hypothèses évidentes doivent être faites sur la continuité de a_{ij} et d, qui sont simplement des fonctions des arguments : $x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; k$.

20. **Nous nous proposons de ramener l'étude de ce problème de Dirichlet à l'étude d'une équation du type (1) vérifiant les hypothèses (H_1).** — Nous utiliserons à cet effet un procédé essentiellement différent de celui qu'emploie le paragraphe 18; nous croyons ce *procédé nouveau*. Soit l'équation

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} A_{ij}(z, k)\frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = D(z, k). \tag{7}$$

Choisissons un point z quelconque dans $E_{\alpha,2}$ et un point k quelconque dans K. D'après un théorème de M. Gevrey ([29]), (7) admet une solution et une seule, $Z(z, k)$, qui soit égale à $\varphi(k)$ sur Δ'. Un théorème plus récent ([30]) affirme que cette solution appartient à $E_{\alpha+\beta,2}$; et il permet d'établir bien aisément que $Z(z, k)$ transforme continûment les points z de $E_{\alpha,2}$ en points de $E_{\alpha+\beta,2}$, tout en étant uniformément continue par rapport à k sur tout domaine borné de $E_{\alpha,2}$. Or tout sous-ensemble borné de $E_{\alpha+\beta,2}$ est un sous-ensemble compact de $E_{\alpha,2}$; donc $Z(z, k)$, envisagée dans $E_{\alpha,2}$, est complètement continue pour chaque valeur de k.

Par suite il suffit de poser $\mathcal{E} \equiv E_{\alpha,2}$ et de remarquer que notre problème équivaut à la recherche des points de $\mathcal{E}$ qui satisfont l'équation $z = Z(z, k)$, pour avoir ramené ce problème à la résolution d'une équation du type (1) vérifiant les hypothèses (H_1).

N. B. — Le procédé employé ci-dessus est le suivant : nous avons constaté que l'équation fonctionnelle proposée se présentait sous la forme

$$\mathcal{G}(x, x, k) = 0.$$

([29]) *Voir* E. PICARD, *Journal de Mathématiques*, 1890; *Journal de l'École Polytechnique*, 1890; *Journal de Mathématiques*, 1900; *Acta mathematica*, 1902; *Annales de l'École Normale*, 1906; E. GEVREY, *Détermination et emploi des fonctions de Green* (*Journal de Mathématiques*, t. 9, 1930, p. 1-80).

([30]) *Voir*, par exemple, un travail de M. Schauder dans la *Mathematische Zeitschrift*, t. 38, 1934, p. 257, et une Note le résumant dans les *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 196, 1933, p. 89. Donnons l'énoncé de ce théorème, que ne peut suppléer dans le procédé ci-dessus aucune majoration moins précise :

« Soit à trouver un élément $Z(x_1, \ldots, x_n)$ de $E_{\gamma,2}$ qui coïncide sur Δ' avec un élément donné φ de $e_{\gamma,2}$ et qui vérifie dans Δ l'équation

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) \frac{\partial^2 Z}{\partial x_i \partial x_j} = d(x_1, \ldots, x_n),$$

les circonstances suivantes étant réalisées : d est un élément donné de E_γ; les a_{ij} sont des éléments donnés de $E_{\gamma+\delta}$; la forme $\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n) u_i u_j$ est définie en tout point de Δ; le déterminant des a_{ij} est supérieur à 1. $(0 < \gamma < \gamma + \delta < 1)$.

Ce problème de Dirichlet admet une solution et une seule; cette solution vérifie l'inégalité

$$\| z \|_{\gamma,2} < C \left\{ \| d \|_\gamma + \| \varphi \|_{\gamma,2} \right\},$$

C étant une fonction continue des $\| a_{ij} \|_{\gamma+\delta}$, qui dépend de la forme du domaine Δ et du choix des constantes γ et δ. »

Nous l'avons remplacée par le système

$$x = X; \qquad \mathcal{G}(x, X, k) = 0.$$

Et il s'est trouvé que cette dernière équation définissait univoquement une transformation fonctionnelle

$$X = \mathcal{F}(x, k),$$

telle que les hypothèses (H_1) fussent vérifiées. Ce procédé est évidemment susceptible d'autres applications. Il sera généralisé au cours du Chapitre V.

21. Suite de l'étude du problème de Dirichlet : Remarques concernant les hypothèses (H_2). — 1° Un cas très simple où les hypothèses (H_2) sont vérifiées est celui où l'on a en un point k_0 de K $\varphi(k_0) = 0$ et $D(z, k_0) \equiv 0$: en effet, $Z(z, k_0) = 0$.

2° Supposons maintenant connues toutes les solutions du problème correspondant à une valeur k_0 et cherchons à appliquer les conclusions des paragraphes 10 et 11; l'équation $x - A(x) = 0$ du paragraphe 10 se réduit à l'équation de Jacobi; dans le cas où l'équation donnée est l'équation

$$(6) \quad \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n; k)\, r_{ij} = d(x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n; k)$$

$$\left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i};\; r_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i\, \partial x_j}\right),$$

cette équation de Jacobi s'écrit :

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} a_{ij}(x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n; k)\frac{\partial^2 u}{\partial x_i\, \partial x_j} \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} \left[\frac{\partial a_{ij}}{\partial z} u + \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial a_{ij}}{\partial p_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}\right] r_{ij} \\ &\quad = \frac{\partial d}{\partial z} u + \frac{\partial d}{\partial p_1}\frac{\partial u}{\partial x_1} + \ldots + \frac{\partial d}{\partial p_n}\frac{\partial u}{\partial x_n}. \end{aligned}$$

En particulier les hypothèses (H_2) sont réalisées quand les circonstances suivantes se présentent : pour la valeur particulière $k_0 = k$ le nombre des solutions de (6) est impair; et aucune des équations de Jacobi correspondant à ces diverses solutions n'est singulière [nous entendons par là que chacune d'elles admet une seule solution : $u(x_1, \ldots, x_n)$ nulle sur Δ', à savoir $u \equiv 0$]. Par exemple les hypothèses (H_2) sont vérifiées si l'on connaît une valeur particulière k_0 de K pour laquelle les fonctions a_{ij} et d sont indépendantes de z et si l'on sait qu'à cette valeur k_0 correspond au moins une solution de (6). (Cette solution est nécessairement unique; l'équation de Jacobi correspondante ne peut être singulière.)

22. Un problème de Dirichlet particulier pour lequel les hypothèses (H_3) sont vérifiées. — Nous allons étudier le cas suivant : Δ est plan et convexe; l'équation à résoudre est l'équation du type elliptique

$$(8)\quad a\left(x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}; k\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2b(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1\,\partial x_2} + c(\ldots)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0.$$

Soit une solution de (8), $z(x_1, x_2; k)$ (appartenant à $E_{\alpha,2}$). C'est, au sens de M. Radó, une « Sattelfunktion » ([31]) de x_1 et x_2. En d'autres termes, considérons sa surface représentative dans l'espace z, x_1, x_2; la plus grande inclinaison des plans tangents à cette surface est au plus égale à la plus grande inclinaison des plans qui rencontrent trois points de sa frontière; cette frontière est une courbe donnée sur le cylindre droit de base Δ'; nous supposons les données assez régulières pour que l'inclinaison de ces plans reste inférieure à une borne indépendante de k. Les quantités z, $\frac{\partial z}{\partial x_1}$ et $\frac{\partial z}{\partial x_2}$ possèdent alors des bornes indépendantes de k.

Un théorème important de M. S. Bernstein, précisé et adapté au cas présent par M. Schauder ([32]), permet d'en déduire que les solutions z de (8) qui appartiennent à $E_{\alpha,2}$ ont des normes $\|z\|_{\alpha,2}$ bornées dans leur ensemble. (Nous devons faire les nouvelles hypothèses suivantes : les valeurs frontières φ appartiennent à $e_{\alpha,3}$; a, b, c sont des fonctions des arguments x_1, x_2, z, p, q dérivables deux fois et dont

---

([31]) RADÓ, *Acta litt. ac. scient.*, t. 4, 1924-1926; VON NEUMAN, *Abhandlungen des mathematischen Seminares*, Hambourg, t. 8, 1931, p. 28-31.

([32]) *Ueber das Dirichletsche Problem im Grossen für nicht lineare elliptische Differential-gleichungen*, *Mathematische Zeitschrift*, t. 37, 1933 (*voir* en particulier le paragraphe 4).

La méthode de M. Bernstein suppose la solution $z(x_1, x_2)$ analytique : ceci conduit les dérivées secondes satisfont une condition de Hölder.) L'hypothèse (H_3) se trouve donc vérifiée.

Conclusion. — Supposons que a, b, c soient indépendants de k, que $\varphi(k)$ se présente sous la forme $k.\varphi$; ce qui précède établit que le problème de Dirichlet considéré peut être ramené à une équation du type (1) pour laquelle les hypothèses (H_1), (H_2) et (H_3) sont vérifiées. D'après le théorème I il admet au moins une solution quel que soit k. D'où le théorème :

Toute équation [33] :

$$a\left(x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2} + 2b\left(x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2} + c\left(x_1, x_2; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \frac{\partial z}{\partial x_2}\right)\frac{\partial^2 z}{\partial x_2^2} = 0$$

du type elliptique admet au moins une solution qui soit définie dans un domaine convexe donné, Δ, *et qui prenne des valeurs données sur sa frontière* Δ'. (Rappelons que nous avons dû faire des hypothèses concernant la régularité de la courbe Δ', des valeurs frontières et des fonctions a, b, c.)

V. — Applications (*suite*).

23. **Sommaire.** — Nous nous proposons de signaler de nouvelles équations fonctionnelles dont on peut effectuer l'étude par l'intermédiaire d'une équation du type

$$x - \mathcal{F}(x, k) = 0, \tag{1}$$

vérifiant les hypothèses (H) (§ 12, p. 59).

à la formation de « Normalreihen »; il faut établir l'existence de toutes les dérivées de z et les majorer toutes.

Au contraire, nous avons actuellement besoin, comme c'est souvent le cas, de nous borner à la considération de fonctions appartenant à $E_{\alpha,2}$.

[33] z peut figurer dans les fonctions a, b, c; le cas où z en est absent et où ces fonctions sont analytiques a été traité depuis longtemps par M. S. Bernstein; dans ce cas, l'unicité de la solution est assurée. Au contraire le problème de Dirichlet étudié ci-dessus peut admettre plusieurs solutions, peut-être même des faisceaux de solutions; quand on fait varier les données, des « bifurcations » peuvent se produire.

Reportons-nous au N. B. du paragraphe 20 (p. 68) : nous y avons considéré une équation

(2) $$\mathcal{G}(x, x, k) = 0,$$

telle que l'équation

(3) $$\mathcal{G}(x, X, k) = 0,$$

attache à tout système de valeur (x, k) un point X et un seul, la transformation fonctionnelle $X(x, k)$ se trouvant être complètement continue. Nous allons maintenant étudier une catégorie d'équations du type (2), caractérisée par un nouveau système d'hypothèses et pour lesquelles d'autres circonstances se présenteront : nos hypothèses concerneront la continuité de l'opération fonctionnelle $\mathcal{G}(x, X, k)$ et de sa différentielle de Fréchet; le caractère compact de l'ensemble des solutions de (2); des particularités qui devront se présenter pour une valeur particulière k_0 de k. Nous envisagerons l'ensemble des solutions de (2) et nous nous proposerons d'en préciser les propriétés. A cet effet nous utiliserons la transformation fonctionnelle (complètement continue), $X(x, k)$, qui est définie par (3); c'est alors que nous nous trouverons en face de nouvelles circonstances : la construction de $X(x, k)$ s'opère en partant de l'ensemble des solutions de (2); et *l'existence de cette transformation fonctionnelle n'est assurée qu'à l'intérieur d'un domaine étroit entourant l'ensemble des points* (x, k) *qui satisfont la relation* (2). Toutefois l'ensemble des solutions de (2) coïncide encore avec l'ensemble des solutions de l'équation $x - X(x, k) = 0$; cette équation est du type (1); ceci nous permet d'appliquer le théorème fondamental aux solutions de (2). Nous obtiendrons ainsi le théorème II dont la proposition essentielle est la suivante : les hypothèses faites entraînent que, quel que soit k, l'équation (2) admet au moins une solution.

L'exemple que nous avons choisi pour donner une application de ce théorème II est le problème de Dirichlet relatif à l'équation la plus générale du second ordre.

24. Commençons par énoncer *une première série d'hypothèses* concernant l'équation (2) :

$(\mathcal{H})$

1° Nous supposons donnés trois espaces linéaires, normés et complets $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$ et E. $\mathcal{E}_0$ est un sous-ensemble de $\mathcal{E}$ et tout sous-ensemble borné de $\mathcal{E}$ constitue un ensemble compact de $\mathcal{E}$.

$\mathcal{G}(x, X, k)$ est un élément de E qui dépend du point x de $\mathcal{E}$, du point X de $\mathcal{E}_0$ et du paramètre k; ce dernier varie sur un segment K de l'axe des nombres.

2° Les solutions [34] x de (2) qui correspondent aux divers points de K constituent un sous-ensemble borné de $\mathcal{E}_0$. (Nous supposons donc que ce sous-ensemble n'est pas vide. Il forme un sous-ensemble compact de $\mathcal{E}$.)

3° En chaque point (x_1, x_1, k_1) de l'espace $[\mathcal{E} \times \mathcal{E}_0 \times K]$ tel que $\mathcal{G}(x_1, x_1, k_1) = 0$ l'opération fonctionnelle $\mathcal{G}(x, X, k)$ possède une différentielle de Fréchet, $L_1(\xi, \Xi, \chi)$; L_1 dépend évidemment de la solution (x_1, k_1) considérée; L_1 appartient à E, est linéaire et homogène par rapport à ses arguments qui sont respectivement un point ξ de $\mathcal{E}$, un point Ξ de $\mathcal{E}_0$, un nombre réel χ.

Plus précisément posons :

$$(4) \qquad R_1(\xi, \Xi, \chi) = \mathcal{G}(x_1 + \xi, x_1 + \Xi, k_1 + \chi) - L_1(\xi, \Xi, \chi).$$

Nous supposons [35] :

$$(5) \qquad \begin{aligned} &\| R_1(\xi, \Xi, \chi) - R_1(\xi', \Xi', \chi') \| \\ &\quad < M_1 \{ \|\xi\| + \|\Xi\| + |\chi| + \|\xi'\| + \|\Xi'\| + |\chi'| \} \\ &\qquad \times \{ \|\xi - \xi'\| + \|\Xi - \Xi'\| + |\chi - \chi'| \}, \end{aligned}$$

M_1 étant une fonction continue de $\|\xi\|$, $\|\Xi\|$, $|\chi|$, $\|\xi'\|$, $\|\Xi'\|$, $|\chi'|$.

Enfin les formules

$$(6) \qquad x = y; \qquad L(x, X, k) = Y; \qquad k = l$$

sont supposées établir une correspondance biunivoque et bicontinue entre l'espace produit $[\mathcal{E} \times \mathcal{E}_0 \times K]$ et l'espace produit $[\mathcal{E} \times E \times K]$.

---

(34) On pourrait étudier de même l'ensemble des solutions (x, k) de (2) qui sont contenues dans un domaine de l'espace $[\mathcal{E} \times K]$, à condition qu'aucun point frontière de ce domaine ne vérifie l'équation (2).

(35) Les normes sont prises bien entendu dans les divers espaces $\mathcal{E}$, $\mathcal{E}_0$, E.

25. **Introduction d'une équation du type** (1). — Considérons la transformation auxiliaire

$$(7) \qquad x = y; \qquad \mathcal{G}(x, X, k) = Y; \qquad k = l,$$

où x et y sont des points de $\mathcal{E}$, X un point de $\mathcal{E}_0$, Y un point de E, k et l des nombres réels. Cette transformation (7) représente donc l'espace $[\mathcal{E} \times \mathcal{E}_0 \times K]$ sur une portion de l'espace $[\mathcal{E} \times E \times K]$. Grâce à la troisième des hypothèses ($\mathcal{H}$) la méthode des approximations successives, maniée comme l'ont fait MM. Graves et Hildebrandt [36], permet d'étudier localement la transformation inverse de (7) : considérons dans l'espace $[\mathcal{E} \times E \times K]$ l'ensemble des points (x_1, o, k_1) qui satisfont la condition

$$(2) \qquad \mathcal{G}(x_1, x_1, k_1) = 0;$$

chaque point de cet ensemble peut être entouré dans l'espace $[\mathcal{E} \times E \times K]$ d'une petite sphère à l'intérieur de laquelle la transformation (7) admet une seule transformation inverse uniformément continue

$$(8) \qquad x = y; \qquad X = \mathcal{F}(y, Y, l); \qquad k = l,$$

telle que $\mathcal{F}(x_1, o, k_1) = x_1$.

Nous supposerons même chacune de ces sphères choisie assez petite pour que $X = \mathcal{F}(y, Y, l)$ soit de toutes les solutions éventuelles de (7) celle qui est la plus proche [37] de y.

Remarquons d'autre part que l'ensemble des points (x_1, o, k_1) satisfaisant l'équation (2) est un sous-ensemble compact de l'espace $[\mathcal{E} \times E \times K]$. On peut donc, en réunissant un nombre fini des sphères précédentes, obtenir un ensemble ouvert Π de cet espace $[\mathcal{E} \times E \times K]$ qui contient en son intérieur tous ces points (x_1, o, k_1). Sur Π et sur sa frontière la transformation inverse (8) est définie, est uniforme et est uniformément continue par rapport à l'ensemble des variables (y, Y, l).

([36]) *Voir :* 1° HILDEBRANDT and GRAVES, *Implicit functions and their differentials in general Analysis* (*Trans. of the Math. Amer. Society*, t. XXIX, 1927); 2° GRAVES, *Implicit functions and differential equations in general Analysis* (idem).

([37]) La notion de distance utilisée ici est celle qui règne dans l'espace $\mathcal{E}$.

Soit Ω l'ensemble des points (y, l) de $[\mathcal{E} \times K]$ tels que $(y, 0, l)$ appartienne à Π. Ω est un ensemble ouvert et borné de $[\mathcal{E} \times K]$ qui contient en son intérieur toutes les solutions (x_1, k_1) de (2).

$\mathcal{F}(y, 0, l)$ est une transformation fonctionnelle définie sur Ω, uniformément continue par rapport à (y, l), et dont toutes les valeurs appartiennent à $\mathcal{E}_0$. (Les valeurs prises par $\mathcal{F}(y, 0, l)$ sur Ω constituent donc un sous-ensemble compact de $\mathcal{E}$.) *L'ensemble des solutions de* (2) *est identique à l'ensemble des solutions de l'équation*

$$x - \mathcal{F}(x, 0, k) = 0; \tag{9}$$

et cette équation est du type (1), *les hypothèses* H (§ 12, p. 59) *étant vérifiées.*

26. Supposons donc vérifiées les hypothèses (H′) (§ 15, p. 61). Autrement dit faisons *les nouvelles hypothèses :*

($\mathcal{H}'$)

En un point k_0 de K l'équation (2) admet un nombre fini de solutions ; nous les connaissons toutes ; on peut, grâce au Chapitre II, étudier leurs indices relativement à la transformation

$$y = x - \mathcal{F}(x, 0, k); \tag{10}$$

la somme de ces indices diffère de zéro.

Le théorème fondamental (p. 63) s'applique directement ; il fournit le théorème suivant :

Théorème II. — *Soit l'équation* (2). *Supposons vérifiées les hypothèses* ($\mathcal{H}$) *et* ($\mathcal{H}'$). *Alors* IL EXISTE SUREMENT *dans l'espace* $[\mathcal{E} \times K]$ *un continu de solutions le long duquel k prend toutes les valeurs de* K.

27. Soient un domaine Δ d'un espace à n dimensions : $(x_1, \ldots, x_n)$ et une équation aux dérivées partielles du second ordre dépendant d'un paramètre k :

$$f(x_1, \ldots, x_n; z; p_1, \ldots, p_n; r_{11}, r_{12}, \ldots, r_{nn}; k) = 0 \tag{11}$$
$$\left(p_i = \frac{\partial z}{\partial x_i};\ r_{ij} = \frac{\partial^2 z}{\partial x_i \partial x_j}\right).$$

Nous supposons la frontière Δ' de Δ suffisamment régulière et la fonction f dérivable un nombre suffisant de fois par rapport à ses divers arguments; le paramètre k décrit un segment K de l'axe des nombres réels. Considérons le problème de Dirichlet qui consiste à trouver pour chaque valeur de k une solution de (11), $z(x_1, \ldots, x_n)$, dont les dérivées secondes satisfont sur Δ une condition de Hölder indéterminée et qui prend elle-même, le long de la frontière Δ' de Δ, des valeurs données à l'avance; nous supposerons ces valeurs nulles : ceci ne restreint pas la généralité. Nous nous proposons d'appliquer le théorème II à ce problème de Dirichlet. Nous ferons à cet effet deux hypothèses :

1° L'équation (11) est du type elliptique au voisinage de chacune de ses solutions; ceci signifie que la forme quadratique

$$\sum_{\substack{i=1,\ldots,n\\ j=1,\ldots,n}} \frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n; z; \dfrac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial z}{\partial x_n}; \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}; k\right)}{\partial r_{ij}} u_i u_j$$

est définie quand (z, k) est l'une quelconque des solutions.

2° Les dérivées secondes r_{ij} des solutions [38] du problème sont bornées dans leur ensemble et satisfont dans leur ensemble une même condition de Hölder [39], d'exposant α.

Si Δ est un domaine plan (c'est-à-dire si $n = 2$), il suffit de supposer que l'on connaît *a priori* une borne supérieure des dérivées secondes r_{ij} : il résulte [40] alors des hypothèses faites que ces dérivées secondes satisfont dans leur ensemble une même condition de Hölder.

---

[38] Nous supposons que, pour une valeur de k au moins, l'existence d'au moins une solution est assurée.

[39] En d'autres termes : on peut trouver trois constantes α, C_1 et C_2 telles que les dérivées secondes r_{ij} de toutes les solutions du problème vérifient les inégalités :

$$|r_{ij}(x_1, \ldots, x_n)| < C_1,$$
$$|r_{ij}(x_1, \ldots, x_n) - r_{ij}(x'_1, \ldots, x'_n)| < C_2 \left\{ |x_1 - x'_1| + \ldots + |x_n - x'_n| \right\}^{\alpha}.$$

[40] Se reporter au travail cité dans la note [32].

Nous allons prouver au cours du paragraphe suivant que *l'équation* (11) *est alors une équation du type* (2) *vérifiant les hypothèses* ($\mathcal{H}$).

28. Nous choisirons ([41]) dans ce cas pour équation (3) la suivante :

$$(12)\qquad f\left(x_1, \ldots, x_n; z; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 Z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 Z}{\partial x_n^2}; k\right) = 0.$$

L'espace $\mathcal{E}$ sera l'espace des fonctions z, définies sur Δ, nulles sur Δ', dont les dérivées premières existent et satisfont une condition de Hölder d'exposant $\gamma < \alpha$; l'espace $\mathcal{E}_0$ sera l'espace des fonctions Z définies sur Δ, nulles sur Δ', dont les dérivées secondes satisfont une condition de Hölder d'exposant γ ; l'espace E sera l'espace des fonctions ψ définies sur Δ, qui satisfont une condition de Hölder d'exposant γ. Les normes $\|z\|_{\gamma.1}$, $\|Z\|_{\gamma.2}$, $\|\psi\|_\gamma$ seront celles qu'a introduites M. Schauder.

Les hypothèses ($\mathcal{H}$) n^{os} 1 et 2 sont manifestement satisfaites ; (z_1, k_1) étant une solution du problème, nous poserons

$$\mathrm{L}_1(\xi, \Xi, \chi) = \sum_{\substack{i=1,\ldots,n \\ j=1,\ldots,n}} \frac{\partial f\left(x_1, \ldots, x_n; z_1; \frac{\partial z_1}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z_1}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_n^2}\right)}{\partial r_{ij}} \frac{\partial^2 \Xi}{\partial x_i \partial x_j}$$
$$\sum_{i=1,\ldots,n} \frac{\partial f(\ldots)}{\partial p_i}\frac{\partial \xi}{\partial x_i} + \frac{\partial f(\ldots)}{\partial z}\xi + \frac{\partial f}{\partial k}\chi.$$

Un théorème déjà cité ([30]) nous assure que les formules (6) établissent bien une correspondance biunivoque et bicontinue. Pour prouver ([42]) l'inégalité (5) nous remarquerons tout d'abord que :

$$\mathrm{R}_1(\xi, \Xi, \chi) = \int_0^1 (1-t)\frac{d^2}{dt^2} f\left(x_1, \ldots; z_1 + t\xi; \frac{\partial z_1}{\partial x_1} + t\frac{\partial \xi}{\partial x_1}, \ldots; \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2} + t\frac{\partial^2 \Xi}{\partial x_1^2}, \ldots; k_1 + t\chi\right) dt.$$

([41]) Ce choix est assez arbitraire : on pourrait dans (12) substituer à quelques dérivées $\frac{\partial z}{\partial x_i}$ les dérivées $\frac{\partial Z}{\partial x_i}$ correspondantes.

([42]) Nous employons un procédé déjà utilisé : *voir* les pages 697-701 du Mémoire que cite la note ([5]).

La quantité sous le signe $\int$ est de la forme

$$(1-t)Q_1\Big[\xi;\frac{\partial\xi}{\partial x_1};\ \dots,\ \frac{\partial\xi}{\partial x_n};\ \frac{\partial^2\Xi}{\partial x_1^2},\ \frac{\partial^2\Xi}{\partial x_1\,\partial x_2},\ \dots,\ \frac{\partial^2\Xi}{\partial x_n^2};$$
$$\chi\,|\,x_1,\ \dots;\ z_1+t\xi;\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1}+t\frac{\partial\xi}{\partial x_1},\ \dots;\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}+t\frac{\partial^2\Xi}{\partial x_1^2};\ \dots;\ k_1+t\chi\Big],$$

Q_1 étant une forme quadratique par rapport aux variables $\xi,\ \dots,\chi$; les coefficients, J, de cette forme dépendant des variables $x_1,\ \dots,$ $k_1+t\chi$. Par exemple le coefficient de ξ^2 est

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2}f\left(x_1,\ \dots;\ z+t\xi;\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1}+t\frac{\partial\xi}{\partial x_1},\ \dots;\ \frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}+t\frac{\partial^2\Xi}{\partial x_1^2},\ \dots;\ k_1+t\chi\right).$$

Pour justifier l'inégalité (5) il suffit d'établir que chacun de ces coefficients J vérifie une inégalité

$$\begin{aligned}&\|J(t\xi,\ t\Xi,\ t\chi)-J(t\xi',\ t\Xi',\ t\chi')\|\\&\quad<N_1\{\|\xi\|+\|\Xi\|+|\chi|+\|\xi'\|+\|\Xi'\|+|\chi'|\}\\&\qquad\times\{\|\xi-\xi'\|+\|\Xi-\Xi'\|+|\chi-\chi'|\};\end{aligned}$$

N_1 y représente une fonction continue de $\|\xi\|,\ \|\Xi\|,\ |\chi|,\ \|\xi'\|,\ \|\Xi'\|,\ |\chi'|$, dont l'expression peut varier suivant la solution $(z_1,\ k_1)$ de (10) que nous envisageons. Or cette dernière inégalité est une conséquence immédiate de l'identité

$$\begin{aligned}&J(t\xi,\ t\Xi,\ t\chi)-J(t\xi',\ t\Xi',\ t\chi')\\&=\int_0^1\frac{d}{d\theta}J\Big[x_1,\dots;\ z_1+t\xi'+t\theta(\xi-\xi');\ \frac{\partial z_1}{\partial x_1}+t\frac{\partial\xi'}{\partial x_1}+t\theta\left(\frac{\partial\xi'}{\partial x_1}-\frac{\partial\xi}{\partial x_1}\right),\dots;\\&\qquad\frac{\partial^2 z_1}{\partial x_1^2}+t\frac{\partial^2\xi'}{\partial x_1^2}+t\theta\left(\frac{\partial^2\xi'}{\partial x_1^2}-\frac{\partial^2\xi}{\partial x_1^2}\right),\ \dots;\ k_1+t\chi'+t\theta(\chi'-\chi)\Big]\,d\theta.\end{aligned}$$

Toutes les hypothèses $(\mathcal{H})$ sont donc satisfaites.

29. **Remarques concernant les hypothèses** $(\mathcal{H}')$. — Supposons maintenant connues toutes les solutions du problème qui correspondent à une valeur particulière k_0 de k; et cherchons à appliquer les conclusions des paragraphes 10 et 11; l'équation $x-\mathrm{A}(x)=0$ du paragraphe 10 se réduit à l'équation de Jacobi [43]. En particulier les

---

[43] Voir *Encyclopädie der mathematischen Wissenschaft, Analysis*, t. III, p. 1325.

hypothèses ($\mathcal{H}'$) sont réalisées quand les circonstances suivantes se présentent : pour $k_0 = k$ le nombre des solutions est impair et aucune des équations de Jacobi correspondant à ces diverses solutions n'est singulière.

Les résultats acquis nous permettent d'énoncer par exemple la proposition suivante :

Soit à trouver une solution $z(x_1, \ldots, x_n)$ de l'équation du deuxième ordre,

$$f\left(x_1, \ldots, x_n; kz; \frac{\partial z}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial z}{\partial x_n}; \frac{\partial^2 z}{\partial x_1^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial x_1 \partial x_2}, \ldots, \frac{\partial^2 z}{\partial x_n^2}; k\right) = 0, \tag{13}$$

qui soit définie à l'intérieur d'un domaine donné et qui s'annule sur sa frontière. Supposons que, pour $k = 0$, (13) soit du type elliptique et possède une solution dont les dérivées secondes satisfont une condition de Hölder. Faisons varier k continûment : le problème *ne peut cesser d'admettre de solution tant que l'une des deux éventualités suivantes ne s'est pas pas produite :*

a. Il est apparu une solution au voisinage de laquelle (12) *n'est pas du type elliptique:*

b. A des valeurs du paramètre comprises entre o et k correspondent des solutions, dont les dérivées secondes vérifient chacune une condition de Hölder, sans qu'il existe *une même condition de Hölder* qu'elles vérifient toutes simultanément.

Quand $n = 2$ on peut même affirmer que si l'éventualité (a) ne se présente pas la suivante se réalise :

b. A des valeurs du paramètre comprise entre o et k correspondent des solutions dont les dérivées secondes ne sont pas bornées dans leur ensemble, bien que chacune de ces dérivées secondes soit bornée et vérifie une condition de Hölder, particulière à chacune d'elles.