ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

JEAN MIRGUET

Nouvelles recherches sur les notions infinitésimales directes du premier ordre

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 201-244

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__201_0>

NOUVELLES RECHERCHES

SUR

LES NOTIONS INFINITÉSIMALES DIRECTES DU PREMIER ORDRE

PAR M. JEAN MIRGUET.

Introduction.

Le présent Mémoire s'ajoute aux travaux déjà consacrés par MM. G. Bouligand et G. Rabaté aux notions originelles de la Géométrie infinitésimale directe, travaux qui ont fait l'objet d'une synthèse récente [1]. L'un des points originaux consiste dans le recours systématique à la considération de triplets obtenus en réunissant trois points quelconques (et, d'une manière plus précise, trois points non alignés, donc déterminant un plan), points qui appartiennent à un ensemble ponctuel donné. Parallèlement à l'étude d'un ensemble par la collection infinie de ses cordes ou doublets et de leurs limites, qui conduit à définir le paratingent en un point d'accumulation [2], on conçoit l'utilité d'envisager un triplet non aligné qui détermine un plan; après avoir généralisé l'idée de tangente, il est bien naturel de chercher à généraliser celle de plan osculateur [3].

Examiner un triplet, c'est examiner simultanément trois cordes distinctes mais liées; ce nouvel effort d'attention devait permettre d'améliorer ou d'amplifier les résultats déjà acquis. M. Bouligand

---

(1) G. BOULIGAND, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*. Paris, Vuibert, 1932.

(2) *Loc. cit.*, Chap. XI, p. et 19 72.

(3) *Loc. cit.*, p. 182, et G. BOULIGAND, *Sur quelques points de méthodologie géométrique* (*Rev. gén. des Sc.*, t. XLI, 1930, nos 2, 12 et 21).

m'avait signalé certains problèmes laissés sans réponse; je les ai attaqués au moyen de la notion de triplet; j'en ai obtenu deux solutions proches parentes, quoique distinctes.

Pour la commodité du lecteur, je donne à mon exposé un tour autonome; c'est pourquoi, le Chapitre premier s'ouvre par un rappel de définitions de base, présentées sous la forme qui m'a été la plus commode. Toute notion qui ne tend pas directement à la lecture de ce Mémoire, si intéressante qu'elle soit en elle-même, a été volontairement sacrifiée et, de ce fait, les instruments principaux de la géométrie infinitésimale directe, le contingent et le paratingent, sont très nettement mis en relief. Je n'ai fait d'écart à cette règle d'élimination que pour divers sujets à propos desquels, même sur ce terrain d'ordre général, j'avais apporté quelques contributions personnelles : c'est ainsi que, dans ce Chapitre premier, je me suis étendu sur la continuité du paratingent. M. Rabaté, dans sa Thèse, avait signalé cette continuité du paratingent pour les continus plans et pour les continus de l'espace aux points où ce paratingent n'a aucune droite commune avec un plan au moins, c'est-à-dire pour certains arcs simples de Jordan. La solution que j'indique est générale pour les ensembles bornés, fermés et bien enchaînés au sens de Cantor; le processus fondamental de ma démonstration rencontrait deux pierres d'achoppement, que j'ai contournées, en créant la notion du *point inévitable*, lequel s'apparente à la *coupure* classique (qu'il admet, d'ailleurs, comme cas particulier) et en approfondissant *la connexion locale*. Quant au processus fondamental lui-même, il exigeait quelques précisions sur les ensembles de droites qu'on peut dire bien enchaînés; je me suis très strictement restreint à ce qui me paraissait essentiel, car la question est vaste et peut entraîner d'innombrables distinctions; j'ai renoncé à la traiter avec ampleur et même à signaler les résultats que je communiquais naguère à l'Académie des Sciences (1), comme réponse à un problème posé par M. Bouligand (2). On trouvera donc

---

(1) J. MIRGUET. *Sur certains ensembles de droites* (*Comptes rendus*, 196, 1933, p. 1067). Si autour d'un point d'une génératrice d'un de ces systèmes, l'ensemble a raison de surface, il est impossible qu'un autre point de cette même génératrice soit point intérieur du système.

(2) *Bull. Soc. Roy. Sc. Liége*, n° 12, 1932, p. 238-242.

seulement la définition des systèmes de demi-droites rayonnantes et de droites rayonnantes et celle des systèmes de cordes quelconques *bien enchaînées par alternance;* ces notions sont nécessaires et suffisantes pour définir et démontrer la continuité du paratingent.

Dans ce même Chapitre premier, je traite, en passant, de la notion du paratingent mutuel de deux ensembles, qui m'a permis de retrouver très simplement certains théorèmes classiques d'inclusion relatifs au ptg du produit ou de la réunion et qui donne lieu à différents problèmes. M. Eugène Blanc a trouvé de belles applications de cette notion nouvelle [1]. Et, puisque je parle de M. Blanc, je mentionne encore les deux semi-continuités d'inclusion, inférieure et supérieure, dont la première a été rencontrée par cet auteur [2]; j'ai l'occasion d'indiquer, à propos du contingent d'une surface, le cas d'une relation intermédiaire entre la semi-continuité supérieure et la semi-continuité inférieure d'inclusion.

Mon travail sur les triplets se rapportant aux surfaces, à la suite de la préparation éloignée que je viens de résumer, j'esquisse au Chapitre II une préparation prochaine; je délimite le terrain par la présentation des orthocourbes et des orthosurfaces (appellation abrégée qui m'est commode pour désigner les courbes et les surfaces particulières qu'on peut définir, avec M. Bouligand, en appliquant les lemmes d'univocité relatifs au paratingent) et des divers problèmes généraux entraînés par ces notions précises. C'est dans ce Chapitre II que les triplets entrent en jeu par une théorie des pinceaux solides de cordes et un théorème d'*aplatissement.* Déjà cette théorie laisse deviner l'importance du cas particulier où le paratingent n'aura pas d'élément intérieur et, précisément, c'est dans ce cas particulier que l'on voit l'intérêt, que j'ai surtout dégagé, des triplets. Aussi, est-ce cette question qui fera l'objet des deux chapitres suivants.

Le Chapitre III est, en somme, une réponse à une question posée par M. Bouligand, lequel avait montré — et je rétablis son résultat avec quelques variantes — la planéité du contingent pour les surfaces dont

---

(1) E. Blanc, *Bull. Soc. Roy. Sc. Liége*, nos 6-7, 1933.

(2) E. Blanc, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 600-602 et 1769-1771. Pour ce qui concerne la semi-continuité supérieure d'inclusion, étudiée dès l'origine par M. G. Bouligand, voir les références données au cours du Chapitre I, no 6.

le paratingent ne présente pas d'élément intérieur; si l'on pouvait démontrer la planéité du paratingent il y aurait coïncidence entre contingent et paratingent et de la semi-continuité de ce dernier résulterait la semi-continuité du contingent, autrement dit la répartition continue du plan tangent. Telle était l'indication offerte par M. Bouligand, dès 1930, dans les *Annales de la Société polonaise de Mathématiques* (1). J'ai démontré la planéité du paratingent; j'en fournis deux démonstrations, qui utilisent l'une et l'autre ma théorie des triplets; la seconde en marque plus nettement l'avantage (2).

Enfin, au Chapitre IV je reprends les triplets sous une autre forme. *Le biparatingent* est l'ensemble d'accumulation des plans des triplets non alignés dont les trois sommets tendent simultanément vers le point d'accumulation. Sous cette forme, le biparatingent est, à vrai dire, une source de difficultés; il ne suffit pas, en effet, d'éviter les triplets alignés (dont les limites ne comptent pas pour trouver le biparatingent), il faut encore rejeter les triplets qui tendent à devenir trois points alignés. Cette nouvelle manière d'envisager l'*aplatissement* conduit à un biparatingent réduit grâce auquel on retrouve, avec une grande facilité, l'existence et la répartition continue du plan tangent. On utilise, entre autres, la réciprocité entre répartition continue du plan tangent et planéité du paratingent, réciprocité démontrée dès le Chapitre III.

M. Georges Bouligand, dès qu'il connut mon désir de m'occuper de ces méthodes nouvelles, qui sont siennes, non seulement m'a autorisé à le faire, mais il a su me communiquer son enthousiasme et m'éclairer constamment de ses précieux conseils : je le prie de bien vouloir trouver ici une trop modeste expression de ma profonde gratitude.

Je remercie vivement M. Émile Picard du très bienveillant accueil dont il a gratifié ce Mémoire. Je dois également la plus grande reconnaissance à M. Cartan pour l'intérêt qu'il a bien voulu porter à mon travail. Que MM. Denjoy et Valiron daignent accepter l'assurance de tout le gré que je leur sais de la sympathie qu'ils m'ont témoignée.

---

(1) Tome X, 1930, p. 30-41.

(2) Ces questions d'existence et de continuité du plan tangent ont préoccupé de nombreux géomètres (*Voir* VALIRON, *Bull. Soc. math.*, t. 54, 1926).

CHAPITRE I.

CONTINGENT ET PARATINGENT.

I. — Définitions diverses.

1. **Éléments d'accumulation.** — *Notation.* — On désignera ci-dessous par S_M^ε une sphère de centre M et de rayon ε; par E_ε les points de l'ensemble E situés dans ou sur S_M^ε.

Point d'accumulation. — M est un point d'accumulation de E, si toute sphère de centre M contient, quel que soit son rayon, un point de E distinct de M.

Demi-droite d'accumulation. — Étant donnée une famille de demi-droites, issues d'un même point M, s'il existe des demi-droites de cette famille faisant avec une demi-droite MT un angle aussi petit qu'on veut sans coïncider avec elle, MT est une demi-droite d'accumulation pour cette famille.

Droite d'accumulation. — Une droite D, issue de M, est *d'accumulation* pour une famille de droites, rayonnant de M, s'il existe des droites de la famille faisant avec elle un angle aussi petit qu'on veut sans coïncider avec elle.

Une droite D issue de M est *d'accumulation* pour une famille de droites quelconques si, étant donné un angle arbitraire θ, toute sphère S_M^ε est coupée, quel que soit ε, par une droite de la famille, distincte de D et faisant avec D un angle inférieur à θ.

En ajoutant à une famille de demi-droites ou de droites ou en lui enlevant un nombre fini de demi-droites ou de droites, on ne modifie pas le système de ses éléments d'accumulation.

2. Rappelons l'énoncé du *théorème de Weierstrass-Bolzano :* tout ensemble borné contenant une infinité de points admet au moins un point d'accumulation.

Corollaires de ce théorème. — I. *Toute famille de demi-droites rayonnantes admet au moins une demi-droite d'accumulation.*

En effet, leurs intersections avec une sphère centrée sur le point de concours forment un ensemble infini borné; au point d'accumulation de Weierstrass-Bolzano de cet ensemble borné correspond une demi-droite d'accumulation de la famille de demi-droites.

Il s'ensuit la même propriété pour une famille infinie de droites toutes issues d'un même point.

Signalons encore cet autre corollaire :

II. *Si toute sphère, centrée sur un point* M, *est coupée par une droite d'une famille infinie de droites, cette famille admet une droite d'accumulation passant par* M.

Il suffit de l'établir lorsque, par M, il ne passe qu'un nombre fini de droites de la famille, ou ce qui revient au même lorsque par ce point il ne passe aucune droite de la famille; menant alors par M les parallèles à une suite de droites de la famille dont les distances à M tendent vers zéro, on se ramène au cas ci-dessus.

On peut noter aussi :

III. Lorsque toute sphère arbitrairement petite de centre M et toute sphère arbitrairement petite de centre M′ sont coupées par *une même infinité* de droites de la famille, la droite MM′ est une droite d'accumulation.

3. **Ensemble fermé.** — Un ensemble ponctuel E est fermé si les points d'accumulation de E sont des points de E. Un ensemble Δ de demi-droites est fermé si ses demi-droites d'accumulation sont des demi-droites de Δ. Même définition pour les ensembles de droites. D'une manière générale la propriété d'être fermé est l'appartenance des éléments d'accumulation à l'ensemble.

D'un ensemble fermé ou non, on déduit un second ensemble appelé sa fermeture, qui est la réunion de l'ensemble considéré et de ses éléments d'accumulation. Un ensemble fermé coïncide avec son ensemble-fermeture. Un ensemble-fermeture n'a pas d'autre élément d'accumulation que ceux de l'ensemble qu'il ferme : il est donc fermé.

Corollaires de la propriété d'être fermé. — Un point A *exclu* d'un ensemble ponctuel *fermé* E est le centre d'une sphère finie, vide de tout point de E.

On appelle *distance* d'un ensemble E_1 à un ensemble E_2 la borne inférieure de la distance d'un point quelconque de E_1 à un point quelconque de E_2; en particulier, on appelle distance d'un point A à un ensemble E la borne inférieure des distances de A aux divers points de E. D'après ce qui précède, un point A exclu d'un ensemble ponctuel fermé E est à une distance positive de E.

Une demi-droite issue de A exclue d'un ensemble fermé Δ de demi-droites issues de A est le demi-axe d'un demi-cône de révolution de sommet A dont aucune demi-droite intérieure issue de A n'appartient à Δ. Par analogie avec la distance ponctuelle, on peut dire qu'une telle demi-droite est à une *distance angulaire* positive de Δ.

De même, une droite exclue d'une famille fermée D de droites rayonnantes est l'axe d'un cône de révolution vide de droites de D. (Corollaires analogues pour toute exclusion d'un ensemble fermé.)

4. **Demi-tangentes.** — Une demi-droite MT, issue d'un point d'accumulation M de E, est une demi-tangente de E en M, si, étant donné un angle arbitraire θ, il existe dans toute sphère S_M^ε, quel que soit ε, un point A de E distinct de M, tel que les demi-droites MA et MT fassent un angle inférieur à θ.

Contingent (en abrégé ctg). — Le ctg est l'ensemble des demi-tangentes de E en M.

Le contingent est fermé. — Si une demi-droite $M\tau$ est d'accumulation pour les demi-tangentes MT_i de E en M, étant donné un angle arbitraire 2θ, il existe : 1° une demi-tangente MT_1 faisant avec $M\tau$ un angle inférieur à θ; 2° dans toute sphère S_M^ε, un point A de E tel que les demi-droites MA et MT_1 fassent un angle inférieur à θ. Par suite, MA fait avec $M\tau$ un angle inférieur à 2θ. Donc $M\tau$ est une demi-tangente de E en M et le ctg est fermé.

5. **Paratingentes.** — Une droite D'MD passant par le point d'accumulation M de E est une paratingente de E en M si, étant donné

un angle arbitraire θ, il existe dans toute sphère S_M^ε une corde AB de E faisant avec D'MD un angle inférieur à θ.

Paratingent (ptg). — Le ptg est l'ensemble des paratingentes de E en M.

Le paratingent est fermé. — Si une droite $\Delta'M\Delta$ est d'accumulation pour les paratingentes de E en M, étant donné un angle arbitraire 2θ, il existe : 1° une paratingente D'MD faisant avec $\Delta'M\Delta$ un angle inférieur à θ; 2° dans toute S_M^ε, une corde faisant avec D'MD un angle inférieur à θ et, par suite, avec $\Delta'M\Delta$ un angle inférieur à 2θ. Donc $\Delta'M\Delta$ est paratingente et le ptg est fermé.

La droite qui porte une demi-tangente est une paratingente. — Soit MT une demi-tangente de E en M; étant donné un angle arbitraire 2θ, il existe, dans toute S_M^ε, un point A tel que l'angle de MT et de MA soit inférieur à θ; on peut de même choisir η assez petit pour qu'une corde de E_ε, dont A est une extrémité et dont l'autre extrémité est dans S_M^η, fasse avec MA un angle inférieur à θ. Cette même corde (intérieure à S_M^ε) fait avec MT un angle inférieur à 2θ. Donc, la droite qui porte MT est paratingente.

6. **Droites d'accumulation des paratingentes au voisinage de** M [1]. — Une droite $\Delta'M\Delta$ issue du point d'accumulation M, qui est droite d'accumulation pour les paratingentes de E *au voisinage de* M, est paratingente de E en M.

En effet, puisque $\Delta'M\Delta$ est d'accumulation pour les paratingentes situées au voisinage de M, étant donné un angle arbitraire 2θ, toute S_M^ε est coupée par une paratingente δ au point P, intérieur à S_M^ε, faisant avec $\Delta'M\Delta$ un angle inférieur à θ; toute sphère de centre P, intérieure à S_M^ε, contient une corde faisant avec δ un angle inférieur à θ; cette corde fait avec $\Delta'M\Delta$ un angle inférieur à 2θ et elle est intérieure à S_M^ε. Donc, étant donné un angle 2θ, il existe, dans toute S_M^ε, une corde faisant avec $\Delta'M\Delta$ un angle inférieur à 2θ; donc $\Delta'M\Delta$ est paratingente en M.

---

[1] G. Bouligand, *Introd. à la Géométrie Infi. Dir.* (§ 77, p. 73); Voir aussi : *Sur l'idée d'ensemble d'accumulation* (*Enseignement mathématique*, t. 29, 1931, p. 246); *Sur la semi-continuité d'inclusion et quelques sujets connexes* (*Ibid.*, t. 31, 1932, p. 6), et Eug. Blanc, *Comptes rendus*, 196, 1933, p. 600.

Cette propriété est un cas particulier de semi-continuité supérieure d'inclusion $(\overline{\text{S. C. I.}})$. Étant donnée une collection d'objets de même nature attachés à un point variable M_i, les limites de ces objets, quand M_i tend vers M de toutes les manières possibles, constituent, d'après une locution empruntée par M. Eugène Blanc à M. Bouligand [1], l'*accumulatif* de la collection en M (ici, la collection est l'ensemble des paratingentes au point d'accumulation M_i voisin de M; les limites de ces paratingentes sont des droites telles que $\Delta' M \Delta$). Si la collection d'objets relative à M lui-même contient l'accumulatif en M, on dit que la collection jouit de la *semi-continuité supérieure d'inclusion* en M (c'est le cas ici, puisque l'ensemble des droites limites telles que $\Delta' M \Delta$ appartient au ptg en M).

Si, par contre, l'accumulatif en M contenait la collection relative à M, on aurait en M la semi-continuité inférieure d'inclusion $(\underline{\text{S. C. I.}})$. Il peut arriver encore que l'accumulatif en M coïncide avec la collection en M [2].

Au lieu d'une collection d'objets attachés à un point variable M_i, on peut considérer une collection attachée à un autre élément variable, par exemple une collection de droites issues d'un point fixe et situées dans un même plan variable P_i. Si le plan P_i s'approche de toutes les manières possibles d'une position P_0, la collection des droites admet un accumulatif dans P_0; la comparaison de cet accumulatif et de la collection particulière relative à P_0 donne lieu à deux espèces de semi-continuité d'inclusion : supérieure et inférieure, avec le cas intermédiaire de la coïncidence (dont la possibilité sera montrée incidemment au n° 22).

II. — Continuité. Connexion locale. Coupure.

7. **Ensemble ponctuel borné, bien enchaîné, fermé.** — Un ensemble ponctuel borné (c'est-à-dire intérieur à une sphère) est bien enchaîné entre deux de ses points A et B, s'il est possible de trouver, quel que

(1) *Comptes rendus* (*loc. cit.*).

(2) D'autres notions de semi-continuité peuvent être rattachées à la considération d'ensembles substitués à l'accumulatif. *Cf.* Eugène Blanc, *Sur la structure de certaines lois générales régissant des correspondances multiformes* (*Comptes rendus*, t. 196, juin 1933, p. 1769-1771). Mais ces notions n'interviendront pas ici.

soit le nombre λ, une suite de points de l'ensemble dont le premier soit A, le dernier B et tels que la distance de deux points consécutifs de la suite soit, au plus, λ. Si cet ensemble borné est bien enchaîné relativement à tout couple de ses points, il sera dit *bien enchaîné* (sans plus). Une telle suite de points sera dite *une chaîne* AB relative à λ.

Un ensemble ponctuel borné, bien enchaîné, qui est, de plus, fermé, est dit *continu*.

8. **Connexion locale en un point M d'un continu K.** — Il y a connexion locale en M si, à toute sphère S_M^ε, correspond une seconde sphère plus petite S_M^η, telle que tout point M' de K intérieur à S_M^η se joigne à M par des chaînes relatives à un nombre quelconque, entièrement intérieures à S_M^ε.

Nous aurons à raisonner sur certains continus K localement connexes ou non en leurs divers points; en vue de ces raisonnements, nous allons établir l'important lemme suivant :

Lemme. — *En tout point* P *d'un continu* K (*localement connexe ou non en* P), *on peut prendre* ε *assez petit pour que tout point de* K *intérieur à* S_P^ε *se joigne à au moins un point de* K *situé sur* S_P^ε *par des chaînes relatives à un nombre quelconque contenues dans* S_P^ε.

Il suffit de choisir ε assez petit pour que le continu K présente un point A à l'extérieur de S_P^ε. En effet, soit B un point de K, distinct de P, et intérieur à S_P^ε. Les chaînes AB relatives à un nombre arbitraire 2η ont au moins un sommet qui se trouve à une distance de la surface de S_P^ε au plus égale à η. Soit $\mathcal{V}_{2\eta}$ l'ensemble des points de la surface de S_P^ε situés à une distance au plus égale à η d'une quelconque des chaînes relatives à 2η établies entre A et B sur K. Quand η tend vers zéro, l'inégalité $\eta > \eta'$ entraîne $\mathcal{V}_{2\eta} \supset \mathcal{V}_{2\eta'}$, et les points de $\mathcal{V}_0$, le produit des fermetures des $\mathcal{V}_{2\eta}$, sont des points d'accumulation de K situés sur S_P^ε; ce sont, par suite, des points de K et le point B est lié à au moins un point de $\mathcal{V}_0$ par des chaînes relatives à tout nombre, si petit qu'il soit, les dites chaînes étant, d'après la définition de $\mathcal{V}_0$, entièrement intérieures à S_P^ε. C. Q. F. D. (1).

(1) On peut rechercher des structures du contingent ou du paratingent en M suffisantes pour assurer la connexion locale de K en M; ε étant donné, le défaut de connexion locale en M permet d'affirmer qu'un point de K, situé dans une S_M^ρ arbitrairement petite, ne

9. **Point inévitable, coupure.** — Soient un point A, un continu K et deux points B et C de ce continu; nous dirons que A est *inévitable* entre B et C sur le continu *si la borne supérieure des distances de* A *aux chaînes* BC *relatives à* ε *tend vers zéro avec* ε.

A tout nombre ρ correspond un nombre ε tel que toute chaîne BC relative à ε présente un point au moins à l'intérieur de S_A^ρ; donc A est un point d'accumulation de K et comme K (continu) est fermé, A appartient à K; d'où cette conclusion : *tout point inévitable entre deux points d'un continu appartient à ce continu.*

La notion de point inévitable comprend, comme cas particulier, celle de *coupure* : un point A d'un continu K le coupe entre B et C, si (K — A) est la somme de deux ensembles sans *jonction* (1), l'un contenant B, l'autre C. Donc, une coupure est nécessairement un point inévitable; par contre, les continus de condensation offrent de faciles exemples de points qui sont inévitables sans être points de coupure (2).

Si A est inévitable entre B et C sur K, B peut, en même temps, être inévitable entre A et C; il suffit, pour le prouver, de citer l'exemple

---

peut se joindre à M par des chaînes relatives à des nombres arbitrairement petits sans que ces chaînes atteignent des points de K situés hors de la S_M^ε donnée; par une démonstration analogue à celle donnée ci-dessus pour le lemme, on voit que tout plan séparant un de ces derniers points et S_M^ρ contient au moins deux points de K, c'est-à-dire une corde de K; il y a donc une infinité de paratingentes en M. Par voie de réciprocité, l'unicité de paratingente (il ne peut pas y en avoir un nombre fini différent de un) est donc une condition suffisante de connexion locale. Il n'en est pas de même, en revanche, de l'unicité de demi-tangente; exemple : soit, dans un plan, deux axes de coordonnées rectangulaires Ox, Oy et un quart de cercle A_1M tangent à Ox en $M(+1, 0)$ et à Oy en A_1 $(0, +1)$; soit, sur Oy, les points A_n définis par $OA_n = n^{-1}$; à chaque A_n d'indice pair faisons correspondre le point B_n du quart de cercle, de même ordonnée. Joignons chaque point A_{2p+1} d'indice impair aux points B_{2p} et B_{2p+2}; à l'ensemble de ces segments de jonction réunissons le segment OM; l'ensemble total obtenu n'a qu'une demi-tangente en M et ne jouit pas de la connexion locale en M.

(1) La jonction de deux ensembles est la somme de leur produit et des points d'accumulation de l'un situés sur l'autre.

(2) J'avais tout d'abord songé à conserver pour les points inévitables l'appellation *coupure* prise en un sens général. M. Lucien Chamard m'a fait remarquer que la valeur intuitive de la coupure (répartition en deux ensembles) ne convient pas, en général, aux points inévitables et qu'une désignation nouvelle s'imposait. Je profite de cette occasion pour remercier ce condisciple qui a bien voulu relire mon texte et me faire profiter de ses observations très judicieuses.

d'une spirale partant de l'origine des coordonnées, restant intérieure au cercle de rayon *un*, centré sur cette origine, et devenant asymptote à ce cercle; réunissons cette spirale, l'origine et les points de la circonférence du cercle; tout point de cette circonférence est inévitable, sur l'ensemble ainsi obtenu, entre l'origine et n'importe quel autre point de la circonférence; ce dernier, à son tour, est inévitable entre l'origine et le premier point envisagé.

10. **Point inévitable et connexion.** — Nous allons démontrer le théorème suivant : *Si* A *est inévitable sur* K *entre* B *et* C *et si*, *en même temps*, B *est inévitable sur* K *entre* A *et* C, *le continu* K *n'est localement connexe ni en* A, *ni en* B.

En effet, soit $\lambda(\varphi)$ la borne supérieure des distances de B aux chaînes AC relatives à une longueur φ. Supposons que le continu K jouisse en A de la connexion locale : à toute sphère S_A^ε correspond une sphère plus petite S_A^η telle que tout point K intérieur à S_A^η se joigne à A par des chaînes relatives à un nombre arbitraire entièrement intérieures à S_A^ε. En suivant point par point depuis C une chaîne AC, relative à φ, on ne peut s'approcher de A à moins de η sans s'être approché auparavant de B à une distance au plus égale à $\lambda(\varphi)$: car, si cette chaîne AC, relative à φ, avait un point M dans S_A^η, avant de s'être approché de B de moins de $\lambda(\varphi)$, ce point M se joindrait à A par une chaîne, relative à un nombre arbitraire, entièrement intérieure à S_A^ε et il y aurait ainsi une chaîne AC relative à φ dont la distance à B serait supérieure à $\lambda(\varphi)$. Donc cette chaîne AC, relative à φ, présente, à partir de C, un point dans ou sur S_B^λ avant d'avoir un point dans ou sur S_A^η; soit M le premier point de cette chaîne, à partir de C, situé dans ou sur S_B^λ; tous les points de cette chaîne depuis C jusqu'à M, auxquels on adjoint le point B constituent une chaîne CB relative à $\lambda(\varphi)$. Or, tout ceci reste vrai *pour le même nombre* η si petit que soit φ et, par suite, $\lambda(\varphi)$.

Donc, si K jouissait en A de la connexion locale, il y aurait des chaînes CB relatives à un nombre arbitrairement petit, toutes extérieures à la sphère fixe S_A^η; donc A ne serait pas inévitable sur K entre B et C, ce qui est contraire à l'hypothèse primitive.

11. **Continuité de certaines familles de droites, de demi-droites et**

de segments de droites. — En ce qui concerne cette question, nous aurons en vue ce qui est nécessaire pour définir la continuité du ptg et démontrer cette continuité du ptg en chaque point d'un continu de l'espace.

Une famille de demi-droites, issues d'un même point, est bien enchaînée relativement à deux d'entre elles D_1 et D_2 si, étant donné un angle θ, arbitrairement petit, il est possible de trouver une suite de demi-droites de la famille, dont la première soit D_1, la dernière D_2 et telle que l'angle de deux demi-droites consécutives soit au plus égal à θ. Une famille fermée de demi-droites rayonnantes, bien enchaînées relativement à deux quelconques d'entre elles, sera dite continue.

Il revient au même de considérer les intersections des demi-droites de la famille avec une sphère centrée sur le point de concours des demi-droites et de dire que cette famille de demi-droites est fermée, bien enchaînée..., si l'ensemble ponctuel des intersections est fermé, bien enchaîné... Une famille de droite issues d'un même point O sera bien enchaînée entre deux de ses éléments, si l'on peut prélever, sur chacune de ces droites, une demi-droite limitée à O de telle sorte que la famille de demi-droites ainsi obtenue soit elle-même bien enchaînée.

Une famille de segments de droites, limités à un même point O, est, de même, bien enchaînée, si la famille des demi-droites issues de O et dont chacune porte un des segments est elle-même bien enchaînée.

Enfin une famille *quelconque* de segments rectilignes de l'espace sera dite *bien enchaînée par alternance* ([1]) entre deux d'entre eux AB et CD si, étant donné un angle arbitraire θ, il est possible de trouver une suite de segments de la famille dont le premier soit AB, le dernier CD et telle que deux segments consécutifs :

1° Aient une extrémité commune;
2° Fassent entre eux un angle au plus égal à θ.

12. Utilisant ces définitions, nous allons maintenant établir trois lemmes relatifs aux cordes d'un continu.

Lemme I. — *Étant donnés un continu* K *et un point* A *non situé sur* K,

([1]) Nous employons ce terme pour marquer la distinction avec la locution *bien enchaînée par rayonnement*, que nous réservons pour le cas de droites concourantes.

la famille Σ des segments de droites limités à A *d'une part et à un point de* K *d'autre part forment une famille bien enchaînée de segments rayonnants de* A.

Soient α la distance de A au continu K; θ un angle arbitraire; B et C deux points choisis arbitrairement sur K; établissons sur K une chaîne

$$BM_1M_2 \ldots M_iM_{i+1} \ldots M_nC$$

relative à $\alpha \sin\theta$; tout angle M_iAM_{i+1} sera, quel que soit i, inférieur à θ. Donc, comme B, C et θ sont arbitraires, cette famille Σ de segments rayonnants est bien enchaînée.

Lemme II. — *Étant donné, sur un continu* K, *un point* A *qui n'est pas inévitable sur* K *entre deux points* B *et* C *de* K, *la famille des cordes de* K *issues de* A *est bien enchaînée entre* AB *et* AC.

Puisque A n'est pas inévitable sur K entre B et C, on peut fixer un nombre λ tel qu'il y ait des chaînes BC relatives à un nombre arbitrairement petit dont la distance à A soit supérieure à λ; étant donné un angle arbitrairement petit θ, on construira une chaîne ponctuelle BC relative à $\lambda \sin\theta$, dont la distance à A soit supérieure à λ; les cordes limitées à A et à cette chaîne forment une famille bien enchaînée de segments rayonnants relative à l'angle θ, entre AB et AC.

Lemme III. — *Étant donné un point* A *inévitable entre* B *et* C *sur* K *la famille des cordes de* K *est bien enchaînée soit par rayonnement, soit par alternance entre* AB *et* AC.

La démonstration devra tenir compte des circonstances que nous avons reconnues possibles au n° 9; nous distinguerons donc deux cas :

Premier cas. — A est inévitable sur K entre B et C et, en même temps, B est inévitable sur K entre A et C.

Nous allons établir une chaîne de cordes de K, rayonnant de A, relatives à l'angle arbitraire θ, entre AB et AC : une chaîne ponctuelle CA relative à un nombre ε, avant d'avoir, après son départ de C, un point dans ou sur la sphère de centre A et de rayon $\frac{\varepsilon}{\sin\theta}$, s'approche de B d'une quantité qui est d'autant plus petite que ε est plus petit car la partie de cette chaîne depuis C jusqu'à son premier point situé dans ou sur $S_A^{\frac{\varepsilon}{\sin\theta}}$ constitue, après réunion au seul point A, une chaîne CA relative à $\frac{\varepsilon}{\sin\theta}\cdot$ Choisissons ε assez petit pour que toute chaîne CA ait un point dans ou sur $S_B^{\overline{AB}\sin\theta}$ avant d'en avoir un dans ou sur $S_A^{\frac{\varepsilon}{\sin\theta}}$, ce qui est possible puisque AB sin θ est indépendant de ε. Soit D le premier point de cette chaîne CA, à partir de C, situé dans ou sur $S_B^{\overline{AB}\sin\theta}$; construisons les cordes de l'ensemble qui joignent A à C, à D et à tous les points de cette chaîne CA intermédiaires à C et à D; puisque ces points forment une chaîne ponctuelle relative à ε et sont à une distance de A supérieure à $\frac{\varepsilon}{\sin\theta}$, les cordes ainsi obtenues constituent une chaîne de segments rayonnants de A relative à θ; quant à l'angle DAB il est évidemment au plus égal à θ puisque $BD \leqq AB\sin\theta$. Donc, cette suite de segments rayonnants est bien la chaîne relative à θ entre AC et AB que nous avions annoncée.

Deuxième cas. — A est inévitable entre B et C mais B n'est pas inévitable entre A et C, ni C entre A et B.

Étant donné un angle arbitraire θ, on établira, conformément aux procédés du lemme II, une chaîne relative à θ de segments rayonnants de B entre BA et BC; puis, par le même procédé, une chaîne relative à θ de segments rayonnants de C entre CB et CA. La réunion de ces deux chaînes est une chaîne par alternance relative à θ entre AB et AC.

13. **Continuité du ptg d'un continu de l'espace.** — Soient Δ_1 et Δ_2 deux paratingentes d'un continu K en M, nous allons tout d'abord établir qu'étant donné un angle arbitraire θ, il existe parmi les cordes de K intérieures à S_M^{ε} (ε arbitraire) une chaîne de cordes par alternance relative à θ dont la première fait avec Δ_1, la dernière fait avec Δ_2, des angles au plus égaux à θ.

En effet, ε étant donné, construisons la sphère $S_M^{\varepsilon\sin\theta}$. Dans cette dernière, choisissons une corde AB faisant avec Δ_1 un angle inférieur à θ et une corde CD faisant avec Δ_2 un angle inférieur à θ. On sait, d'après le lemme établi au n° 8, que A et D sont reliés continûment avec des points de K situés sur S_M^ε (il suffit, à cette fin, de choisir ε assez petit). Soient P un point situé sur S_M^ε et lié continûment sur K avec A, et Q un point situé sur S_M^ε et lié continûment sur K avec D, les chaînes assurant ces relations continues étant entièrement intérieures à S_M^ε.

Les lemmes du n° 12 nous apprennent qu'on peut établir des chaînes de cordes (par rayonnement ou par alternance) entre BA et BC, relatives à θ; en effet, cette chaîne est évidente entre BA et BP (lemme II) si B n'est pas inévitable relativement aux chaînes ponctuelles intrasphériques qui relient A à P; si, au contraire, B est inévitable relativement à ces chaînes, on voit qu'il y a des chaînes ponctuelles intrasphériques relatives à un nombre arbitraire entre B et P et, dès lors, on peut appliquer soit le lemme II, soit le lemme III (1^{er} cas), entre AB et AP. Donc, on peut passer de AB soit à BP soit à AP; alors, puisque AB et CD sont dans $S_M^{\varepsilon \sin \theta}$ et puisque P et Q sont situés sur S_M^ε, les angles ABP, BPD et APD sont inférieurs à θ et l'on atteint PD toujours sans dépasser le nombre θ. En partant, ensuite, de PD, on peut, toujours en conservant θ, et en distinguant le cas où D est inévitable relativement aux chaînes intrasphériques qui relient A à P, passer de PD à AD. La moitié logique du passage de AB à CD est, alors, effectuée; la seconde moitié n'offre aucune difficulté nouvelle; donc, la chaîne par alternance entre AB et CD est établie.

THÉORÈME. — *Le ptg de* K *en* M *est continu* [1].

Nous allons montrer qu'il est toujours possible d'établir entre deux paratingentes quelconques en M, Δ_1 et Δ_2 des chaînes rayonnantes relatives à un angle θ arbitrairement petit. Menons par M les parallèles π_ε à toutes les cordes de K contenues dans S_M^ε; d'après ce n° 13 actuel, cette famille de parallèles π_ε, après réunion à Δ_1 et Δ_2, est, quel que soit ε, bien enchaînée entre Δ_1 et Δ_2. Or, d'après la définition même du ptg, on peut choisir ε assez petit pour que toute parallèle π_ε soit à une distance angulaire, inférieure à un angle donné ψ, d'au moins une paratingente; par suite, à une chaîne relative à φ, établie

[1] Dans la Thèse de M. Rabaté (Toulouse, 1931) la continuité du ptg était résolue pour les continus plans et pour les continus spatiaux dont le ptg est privé de tout un plan.

entre Δ_1 et Δ_2, parmi les parallèles π_3, dans la famille bien enchaînée $\Delta_1 \dotplus \Delta_2 \dotplus \pi_3$, répond une chaîne relative à $\varphi + 2\psi$ établie, parmi les paratingentes entre Δ_1 et Δ_2. Il suffit donc de faire, pour φ et ψ, des choix qui respectent l'inégalité $\varphi + 2\psi < 0$ pour avoir, parmi les paratingentes, la chaîne demandée relative à θ. Donc, les paratingentes en M forment une famille de droites rayonnantes bien enchaînée et, comme le ptg est fermé, on voit qu'il est continu.

III. — Le paratingent mutuel [1].

14. **Définition.** — Le ptg mutuel de E_1 et de E_2 (en abrégé ptg $E_1 \mid E_2$) en un point d'accumulation commun de ces deux ensembles est la réunion des droites qui sont limites des directions des cordes de $E_1 \dotplus E_2$ dont une extrémité est sur E_1, l'autre sur E_2 et tendent simultanément vers le point d'accumulation commun.

On peut donc écrire :

$$\text{ptg}(E_1 \dotplus E_2) = \text{ptg}\,E_1 \dotplus \text{ptg}\,E_2 \dotplus \text{ptg}\,(E_1 \mid E_2). \tag{1}$$

15. **Opérations sur le ptg mutuel.** — *a*. Généralisation de l'égalité (1) pour n ensembles : nous allons démontrer la formule

$$\text{ptg}\left(\sum_i E_i\right) = \sum_i \text{ptg}\,E_i \dotplus \sum_{ij} \text{ptg}\,(E_i \mid E_j), \tag{2}$$

où les $\sum\limits_i$ et $\sum\limits_{ij}$ sont des réunions et où i et j prennent toutes les valeurs possibles de 1 à n.

Supposons, en effet, cette formule (2) vraie pour $n-1$; écrivons

$$\text{ptg}\left(\sum_{i=1}^{i=n} E_i\right) = \text{ptg}\left[\sum_1^{n-1} E_i \dotplus E_n\right],$$

(1) *Cf.* J. Mirguet, *Quelques nouvelles notions infinitésimales directes* (*Rendic. dei Lincei*, Chap. XV, mars 1932, p. 429-431).

et appliquons (1) au second membre; il vient :

$$\operatorname{ptg}\left(\sum_1^n E_i\right) = \operatorname{ptg}\sum_1^{n-1} E_i \dotplus \operatorname{ptg} E_n \dotplus \operatorname{ptg}\left(E_n \,\Big|\, \sum_1^{n-1} E_i\right).$$

Puisque nous supposons la formule (2) vraie pour $n-1$, le nouveau second membre peut s'écrire :

$$\operatorname{ptg}\left(\sum_1^n E_i\right) = \sum_1^{n-1} \operatorname{ptg} E_i \dotplus \sum_{i=1;j=1}^{i=n-1;j=n-1} \operatorname{ptg}(E_i \mid E_j) \dotplus \operatorname{ptg} E_n \dotplus \operatorname{ptg}\left(E_n \,\Big|\, \sum_1^{n-1} E_i\right).$$

Or,

$$\operatorname{ptg}\left(E_n \,\Big|\, \sum_1^{n-1} E_i\right) = \sum_{i=1}^{i=n-1} \operatorname{ptg}(E_n \mid E_i),$$

ce qui prouve que (2) est vraie pour n.

b. Réunissons membre à membre les trois développements suivants de $\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2 \dotplus E_3)$:

$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2 \dotplus E_3) = \operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2) \dotplus \operatorname{ptg} E_3 \dotplus \operatorname{ptg}(E_1 \mid E_3) \dotplus \operatorname{ptg}(E_2 \mid E_3),$$
$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2 \dotplus E_3) = \operatorname{ptg}(E_2 \dotplus E_3) \dotplus \operatorname{ptg} E_1 \dotplus \operatorname{ptg}(E_2 \mid E_1) \dotplus \operatorname{ptg}(E_3 \mid E_1),$$
$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2 \dotplus E_3) = \operatorname{ptg}(E_3 \dotplus E_1) \dotplus \operatorname{ptg} E_2 \dotplus \operatorname{ptg}(E_3 \mid E_2) \dotplus \operatorname{ptg}(E_1 \mid E_2).$$

Au second membre de la formule de réunion, les trois ptg propres sont sous-ensembles des ptg de réunions deux à deux; il en est de même des trois ptg mutuels; il reste donc, finalement, la formule de M. Bouligand :

$$(3) \qquad \operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2 \dotplus E_3) = \operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2) \dotplus \operatorname{ptg}(E_2 \dotplus E_3) \dotplus \operatorname{ptg}(E_3 \dotplus E_1).$$

Cette formule (3) et le procédé utilisé ici pour l'établir se généralisent facilement pour les ptg de rang supérieur.

On appelle ptg de rang n, en un point d'accumulation, la réunion des droites qui sont limites des ensembles alignés de $n+1$ points de l'ensemble tendant simultanément vers le point d'accumulation en restant alignés; le ptg d'ordre n de E est désigné ci-dessous par $\operatorname{ptg}_n E$. On obtient facilement la généralisation annoncée : le ptg_n d'une réunion de $n+2$ ensembles est la réunion des $n+2$ ptg_n des réunions de ces $n+2$ ensembles $n+1$ à $n+1$.

c. De la formule (2) on déduit :

$$\operatorname{ptg}\Big(\sum_i E_i\Big) \supset \sum_i \operatorname{ptg} E_i$$

traduction du théorème connu sur l'inclusion de la réunion des ptg dans le ptg de la réunion. De même, multiplions membre à membre les deux formules

$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2) = \operatorname{ptg} E_1 \dotplus \operatorname{ptg} E_2 \dotplus \operatorname{ptg}(E_1 \mid E_2),$$
$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_3) = \operatorname{ptg} E_1 \dotplus \operatorname{ptg} E_3 \dotplus \operatorname{ptg}(E_1 \mid E_3).$$

Nous obtenons

$$\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_2)\operatorname{ptg}(E_1 \dotplus E_3) \supset \operatorname{ptg} E_1,$$

traduction du théorème connu : le ptg du produit est contenu dans le produit des ptg. Et, ces nouvelles formules d'inclusion se généralisent elles aussi pour les ptg de rang supérieur.

16. **Propriétés du ptg mutuel.** — *a*. Le ptg $(E_1 \mid E_2)$ englobe évidemment le ptg du produit $E_1 E_2$. D'autre part, le ptg $(E_1 \mid E_2)$ englobe les droites qui portent ctg $(E_1 \dotplus E_2)$; en effet, parmi les cordes mutuelles de E_1 et E_2 dont une extrémité est un point A de E_1, il y en a une infinité dont la seconde extrémité est un point de E_2 aussi voisin qu'on veut du point d'accumulation commun M et dont, par suite, la direction diffère aussi peu qu'on veut de MA : toute demi-tangente de E_1 est donc limite de cordes mutuelles.

De même pour E_2. Donc ptg $(E_1 \mid E_2)$ englobe les demi-tangentes propres de E_1 et E_2; il englobe donc ctg $(E_1 \dotplus E_2)$ puisque

$$\operatorname{ctg} E_1 \dotplus \operatorname{ctg} E_2 = \operatorname{ctg}(E_1 \dotplus E_2).$$

b. *ptg* $(E_1 \mid E_2)$ *jouit de la S. C. I supérieure sur* $E'_1 E'_2$. Soient O_1, O_2, ..., O_i, ... une suite de points de $E'_1 E'_2$ admettant pour limite le point O de $E'_1 E'_2$; quand O_i s'approche indéfiniment de O, toute limite $O\Delta$ de paratingente mutuelle $O_i\Delta_i$ est paratingente mutuelle en O : en effet, dans la sphère S_0^ε, on peut trouver, quel que soit ε, un point O_i où une paratingente mutuelle $O_i\Delta_i$ fait avec $O\Delta$ un angle inférieur à un angle α donné; il existe, de plus, une sphère $S_{0_i}^{\eta}$ entièrement intérieure à S_0^{ε} où une corde mutuelle fait avec $O_i\Delta_i$ un angle inférieur à α et, par suite, avec $O\Delta$ un angle inférieur à 2α. Donc $O\Delta$ est limite de cordes mutuelles.

17. **Problème relatif au ptg mutuel.** — I. *Étant donnés deux ensembles* E_1 *et* E_2 *admettant un point d'accumulation commun* M, *déterminer leur ptg mutuel en* M.

Ce problème général est, évidemment, très indéterminé; nous nous proposons seulement de donner certaines indications simples. On appelle *branche* en M un ensemble ponctuel présentant en M une seule demi-tangente; une branche de E_1 sera une suite de points choisis sur E_1, qui admettent M comme point d'accumulation et qui présentent en M une seule demi-tangente.

Soient E_{1i} et E_{2j} deux branches de E_1 et E_2 respectivement. Le ptg$(E_{1i} | E_{2j})$ fait évidemment partie du ptg$(E_1 | E_2)$; l'étude de tous les ptg$(E_{1i} | E_{2j})$ possibles peut faciliter celle du ptg$(E_1 | E_2)$.

Voici quelques remarques communes :

1° Supposons que les demi-tangentes, MT_1 et MT_2, de E_{1i} et E_{2j} ne soient pas situées sur la même droite; étudions la limite d'une corde mutuelle de E_{1i} et E_{2j} dont les extrémités A et B tendent simultanément vers M : quelle que soit la manière relative dont A et B tendent vers M, il est évident que le plan AMB est de plus en plus voisin de T_1MT_2. Donc, la limite de AB est dans T_1MT_2.

2° Supposons que les demi-tangentes, MT_1 et MT_2, de E_{1i} et E_{2j} soient situées sur la même droite, mais opposées : quand les extrémités A et B de la corde mutuelle AB tendent simultanément vers M, AB est de plus en plus voisine de la droite qui porte les deux demi-tangentes; le ptg mutuel de E_{1i} et E_{2j} se réduit donc à cette droite.

3° Si les demi-tangentes MT_1 et MT_2 sont confondues, on ne peut rien dire d'absolument général. Citons, cependant, les observations suivantes relatives au cas de symétrie de E_{1i} et E_{2j} par rapport à un plan P passant par M : soient, au voisinage de M, A_1 un point de E_{1i} et B_2 un point de E_{2j}; le symétrique B_1 de B_2 par rapport à P est sur E_{1i} et le symétrique A_2 de A_1 par rapport à P est sur E_{2j}. A la corde mutuelle A_1B_2 correspondent donc une seconde corde mutuelle A_2B_1 et deux cordes propres A_1B_1 et A_2B_2. Inversement, à une corde propre donnée A_1B_1 correspondent une deuxième corde propre A_2B_2 et deux cordes mutuelles A_1B_2 et A_2B_1. Il résulte de ces remarques que :

α. Le ptg$(E_{1i} | E_{2j})$ admet P comme plan de symétrie.

β. La projection orthogonale sur P de toute paratingente mutuelle de E_{1i} et E_{2j} non perpendiculaire à P est la projection d'une paratingente propre de E_{1i} et d'une paratingente propre de E_{2j}. La réciproque n'est pas vraie.

γ. Si E_{1i} est à paratingente unique en M, le paratingent mutuel est tout entier dans le plan Q passant par cette paratingente T'MT et perpendiculaire à P. Et si, de plus, E_{1i} est un continu, tout plan parallèle à la perpendiculaire menée à T'MT dans le plan P et assez voisin de M rencontre E_{1i} et E_{2j} chacun en un point; si ce plan, en conservant la même direction, s'approche indéfiniment de M, il contient toujours une corde mutuelle; donc, l'intersection du plan parallèle mené par M et du plan Q est une paratingente mutuelle. Donc, toute direction issue de M dans Q est paratingente.

Exemple. — Deux cercles égaux C_1 et C_2, non situés dans un même plan, ont même tangente en un point commun M; déterminer le ptg de l'ensemble de ces deux cercles en M : les deux ptg propres sont la tangente commune; le ptg mutuel est tout entier dans le plan mené par cette tangente commune perpendiculairement au plan de symétrie des deux cercles et il comprend toutes les directions issues de M dans ce plan.

18. **On demande ce qu'on peut dire en général sur deux ensembles E_1 et E_2 en un point d'accumulation commun M pour que le ptg $(E_1 | E_2)$ présente une structure donnée à l'avance.** — *Exemple.* — On demande que le ptg$(E_1 | E_2)$ en M se réduise à une droite :

D'après les propriétés du ptg mutuel énoncées au n° 16, le ctg de la réunion doit être situé sur une même droite; chacun des deux ensembles a donc, au plus, deux demi-tangentes et, s'il en a deux, elles sont opposées. Ces condidions sont nécessaires; cherchons maintenant a énoncer quelques conditions suffisantes : d'après le cas 2° du premier problème du n° 17, deux ensembles à demi-tangente unique dont les demi-tangentes sont opposées ont leur ptg mutuel réduit à une droite.

Dans le cas où deux ensembles à ctg aligné ont une demi-tangente commune en M, on ne peut rien dire d'absolument général. Voici un résultat dans le cas où l'un d'eux est continu : par chaque point de l'autre ensemble menons un plan non parallèle à la demi-tangente commune, mais parallèle à une direction fixe ϖ; ces plans parallèles, qui contiennent déjà un point du second ensemble, finissent, en tendant vers M, par contenir un point de l'ensemble continu; il y a donc une paratingente mutuelle parallèle à ϖ; et, comme ϖ est arbitraire, le ptg mutuel ne se réduit pas à une droite.

Nous avons donc ce théorème :

La condition nécessaire et suffisante pour que deux ensembles à ctg aligné, dont l'un est un continu, aient une seule paratingente mutuelle, est que ces deux ensembles soient des branches opposées (1).

CHAPITRE II.

ENSEMBLES ORTHOCURVILIGNES ET ORTHOSUPERFICIELS.

19. Les ensembles envisagés maintenant comprennent, comme cas particuliers, les orthocourbes et les orthosurfaces dont les notions réalisent assez bien, *grâce au paratingent*, les concepts *intuitifs* de courbes et de surfaces : en effet, sans répondre au contenu le plus large de ces concepts, on obtient, dans le cas des courbes, une solution

(1) Un cas particulier de ce théorème a été trouvé, indépendamment de ce mémoire, par M. Eug. Blanc qui, à propos d'un arc plan de Jordan, étudiant, en un point M de cet arc, le ptg mutuel des deux arcs antérieur et postérieur en M, montre que la condition nécessaire et suffisante pour que ce ptg mutuel se réduise à une droite est que l'arc antérieur et l'arc postérieur aient chacun une demi-tangente et que ces deux demi-tangentes soient opposées (*Bulletin de la Société Royale des Sciences de Liége*, 1933, *n*os 6-7, p. 128-132).

plus adéquate que celle donnée par les *continus de Jordan*, $x = f(t)$, $y = g(t)$, $z = h(t)$, car cette catégorie, en plus des courbes intuitives, comprend encore des sujets indésirables comme la « courbe » de Peano; plus adéquate également que celle donnée par les *continus irréductibles entre deux points* dont les continus de condensation sont en désaccord avec l'idée intuitive de courbe.

20. **Ensembles orthosuperficiels et orthocurvilignes en général** (1). — Un ensemble est orthosuperficiel si, en chacun de ses points d'accumulation, le ptg est incomplet; un ensemble est orthocurviligne si, en chacun de ses points d'accumulation, le ptg est privé d'un plan.

On peut mettre ces définitions sous cette autre forme : un ensemble est orthosuperficiel si, en chacun de ses points d'accumulation, le ptg est *extérieur* à un cône de révolution; un ensemble est orthocurviligne si, en chacun de ses points d'accumulation, le ptg est *intérieur* à un cône de révolution. L'équivalence entre les deux formes de définition est évidente : si le ptg est incomplet, c'est-à-dire si une direction D'MD est exclue du ptg, toutes les directions voisines de D'MD sont exclues elles aussi; donc, toutes les directions intérieures à un cône de révolution, d'axe D'MD et d'ouverture suffisamment étroite, sont exclues; donc, le ptg est extérieur à un cône de révolution et la réciproque est évidente. De même, si tout un plan de directions est exclu, toutes les directions de droites voisines de ce plan sont exclues; donc, sont exclues toutes les directions extérieures à un cône de révolution d'axe normal au plan et d'ouverture suffisamment grande; donc, le ptg est intérieur à ce cône; et la réciproque est, là encore, évidente.

Remarque. — Tout ensemble orthocurviligne est orthosuperficiel.

Continuité du caractère orthosuperficiel et du caractère orthocurviligne.

Théorème. — *Si le ptg est incomplet en* M, *l'ensemble est orthosuperficiel à l'intérieur d'une sphère centrée sur* M. En effet, en raison de

(1) G. Bouligand, *Introduction à la Géométrie infinitésimale directe*, § 78 et suivants, p. 76.

la S. C. I. supérieure du ptg, une direction, exclue de ptg en M, est exclue du ptg dans un voisinage fini de M; le ptg est donc incomplet dans tout ce voisinage fini de M.

THÉORÈME. — *Si le ptg est privé de tout un plan en* M, *l'ensemble est orthocurviligne à l'intérieur d'une sphère centrée sur* M (démonstration analogue).

21. **Orthocourbes et orthosurfaces.** — Les orthocourbes (et les orthosurfaces) sont des ensembles orthocurvilignes (et orthosuperficiels) pour qui, aux exclusions dans le ptg, s'ajoutent des conditions de continuité pour l'ensemble, de la manière que nous allons préciser :

Orthocourbes. — Soient M un point d'un ensemble E orthocurviligne et P un plan exclu du ptg en tout point de E intérieur à une sphère S_M^ε (on peut toujours choisir ε assez petit pour que tout plan parallèle à P contienne au plus un point de E_ε, *ce que nous supposerons*).

Premier cas : Il existe une longueur $\lambda \leqq \varepsilon$ telle que tout plan P_i, parallèle à P et situé à moins de λ du point M, rencontre E_ε : l'ensemble des points de E_ε situés sur ces P_i est une *orthocourbe*, dont M est un *point courant*. Cette orthocourbe est un continu puisque :

1° Tout P_i la rencontre;

2° Tout angle d'une de ses cordes avec P est supérieur à un nombre non nul.

Deuxième cas : Il existe une longueur $\lambda \leqq \varepsilon$ telle que tout plan Q_i parallèle à P et situé d'un premier côté de M, à moins de λ de M, rencontre E_ε (un plan parallèle à P qui s'approche indéfiniment de M *de l'autre côté*, rencontrant toujours des positions où il ne contient pas de points de E_ε) : les points de E_ε situés dans les Q_i forment une *orthocourbe* du premier côté de M; M est une *extrémité* de cette orthocourbe; cette orthocourbe est encore un continu.

Orthosurfaces. — Soient M un point d'un ensemble E orthosuperficiel et D′MD une droite exclue du ptg en tout point de E intérieur à une sphère S_M^ε (ε est supposé choisi pour que toute parallèle à D′MD contienne un point de E_ε au plus).

Premier cas : Il existe une longueur $\lambda \leqq \varepsilon$ telle que toute droite D_i, parallèle à D'MD et située à moins de λ de M, rencontre E_ε; l'ensemble des points de E_ε situés sur D_i est une *orthosurface* dont M est un *point courant* (par opposition aux points en bordure dont nous parlerons ci-dessous). Cette orthosurface est un continu puisque :

1° Toute D_i la rencontre;

2° Tout angle d'une de ses cordes avec D'MD est supérieur à un nombre non nul.

Deuxième cas : Considérons un triangle solide découpé dans un plan; sur les côtés et aux sommets, cet ensemble ne remplit pas les conditions du premier cas; sommets et points sur les côtés ne sont pas points courants d'orthosurfaces; le faciès de surface existe cependant dans un certain secteur du voisinage de ces points; de tels points seront dits *en bordure d'orthosurface*. On peut proposer la définition générale suivante des points en bordure : il existe deux demi-plans, coplanaires ou non, issus de D'MD, tels que sur ces demi-plans et dans un de leurs dièdres (ou d'un côté de leur plan commun) toute parallèle à D'MD, située à moins de λ de M, contienne un point de E_ε (la même propriété n'étant pas vraie dans l'autre dièdre). Cette définition élaborée à la suite d'un échange de vues avec M. Bouligand est plus large que celle proposée dans son Introduction (1); elle laisse encore échapper certaines espèces de points qui, intuitivement, paraissent en bordure; par exemple : on ajoure un plan en lui enlevant deux cercles tangents extérieurement; le point de contact représente l'étranglement d'un filet de surface et, cependant, il échappe à la définition par les dièdres.

22. Propriétés générales du ctg d'une orthosurface en un point courant (2). — Conservant les notations de la définition d'un point courant M d'une orthosurface, considérons un demi-plan Π issu de D'MD; il coupe l'orthosurface suivant une orthocourbe plane Γ dont M est une extrémité : soient MT_1 et MT_2 les deux demi-tangentes de Γ

(1) G. Bouligand, *Géom. Inf. dir.*, § 82, p. 82.

(2) *Loc. cit.*, § 141 et suivants, p. 166.

en M les plus proches en direction de l'une et l'autre directions de D'MD.

THÉORÈME I. — *Toute demi-droite* Mt *issue de* M *dans* Π *et pénétrant l'angle, inférieur à deux droits, de* MT_1 *et* MT_2 *est demi-tangente de* Γ.

Soient A et B deux points de Γ tels que Mt soit intérieure à l'angle aigu de MA et MB; le sous-ensemble découpé sur Γ par la bande déterminée sur Π par les parallèles à D'MD menées par A et B, est un continu joignantA et B. La demi-droite Mt, laissant A et B de part et d'autre, rencontre ce continu. A et B étant arbitraires, on voit qu'il y a des points de l'ensemble sur Mt aussi voisins qu'on veut de M. Donc Mt est une demi-tangente de Γ.

THÉORÈME II. — *Toute demi-tangente de l'orthosurface, située sur* Π, *est une demi-tangente de* Γ.

Supposons qu'il existe une demi-tangente Mτ située sur Π qui ne soit pas demi-tangente de Γ; coupons la figure par un plan P perpendiculaire à Π et parallèle à D'MD et soient τ, T_1 et T_2 les traces sur P de Mτ, MT_1 et MT_2. On pourrait trouver sur l'orthosurface un point A, tel que :

1° Sa projection conique (centre M) sur P soit aussi voisine qu'on voudrait de τ.

2° B étant l'intersection de Γ et du plan parallèle à P mené par A, la projection conique de B sur P soit aussi voisine qu'on voudrait du segment T_1T_2.

La corde AB étant parallèle à la droite qui joint ces deux projections coniques pourrait être choisie aussi voisine en direction de D'MD qu'on voudrait, ce qui est impossible. Donc, l'existence de Mτ conduit à une contradiction.

Corollaires. — α. La section du ctg de l'orthosurface par Π est le ctg de la section Γ de l'orthosurface par Π (1).

β. Le ctg de l'orthosurface en M est un continu de demi-droites.

γ. Soient Π_i un demi-plan variable issu de D'MD et Γ_i son inter-

(1) *Loc. cit.*, p. 168, lemme II.

section avec l'orthosurface, quand Π_i tend vers Π en tournant autour de D'MD, le ctg de Γ_i tend vers le ctg de Γ : d'une manière plus précise, *toute demi-tangente de* Γ_i *tend vers une demi-tangente de* Γ *et toute demi-tangente de* Γ *est limite d'une demi-tangente de* Γ_i.

En effet, la limite sur π d'une demi-tangente de Γ_i est une demi-tangente de l'orthosurface puisque le ctg est fermé; donc, d'après le théorème II, c'est une demi-tangente de Γ. Inversement, supposons qu'une demi-tangente MV de Γ ne soit pas limite d'une demi-tangente de Γ_i; conservant les notations du théorème II, désignons par V l'intersection de MV et du plan P; les limites des demi-tangentes de Γ_i coupent P en des points ($\mathfrak{S}$) dont les distances à V restent supérieures à un nombre m. On pourrait trouver un point C de Γ dont la projection conique sur P serait aussi voisine qu'on voudrait de V; les points de l'orthosurface situés dans le plan parallèle à P mené par C pourraient être choisis assez voisins de Π pour que leurs projections coniques soient arbitrairement voisines des points ($\mathfrak{S}$), c'est-à-dire à une distance de V arbitrairement voisine de m. Comme dans la démonstration du théorème II, on aurait des cordes de la surface arbitrairement voisines en direction de D'MD, ce qui est impossible.

On voit ici un exemple ([1]) d'accumulatif d'une collection de demi-droites attachées à un demi-plan variable qui se confond avec cette collection puisque l'accumulatif du ctg de Γ_i coïncide avec le ctg de Γ. Cela constitue une circonstance intermédiaire entre la semi-continuité supérieure d'inclusion et la semi-continuité inférieure d'inclusion.

23. Nous dirons qu'une demi-tangente est *intérieure* si toutes les demi-droites issues du même point et suffisamment voisines d'elle en direction sont des demi-tangentes; qu'une paratingente est *intérieure* si toutes les droites issues du même point d'accumulation et suffisamment voisines d'elle en direction sont des paratingentes. Conservant alors les notations précédentes, nous allons établir le théorème suivant :

Si dans un demi-plan Π *issu de* D'MD *figure plus d'une demi-tangente, le ctg (et par suite le ptg) présente des éléments intérieurs.*

([1]) *Cf.* n° 6 du présent Mémoire.

Désignons par 3φ l'angle aigu des demi-tangentes extrêmes MT_1 et MT_2 contenues dans Π; en raison de la semi-continuité (par rotation autour de $D'MD$) du ctg de Γ_i, à l'angle φ correspond un angle θ tel que si l'angle de Π_i et de Π est inférieur à θ, les deux demi-tangentes extrêmes de Γ_i dans Π_i font avec MT_1 et MT_2 respectivement des angles inférieurs à φ. Si Π_i reste dans les limites fixées par cet angle θ, le ctg de Γ_i, qui est un continu de demi-droites, pénètre chacun des deux demi-cônes de sommet M, d'ouverture φ et de demi-axes respectifs MT_1 et MT_2; dans chacune de ces positions de Π_i, il y a donc, dans Π_i, un angle plein, d'ouverture φ, de disposition fixe par rapport à $D'MD$, qui est rempli de demi-tangentes. Donc, il existe un pinceau solide de demi-tangentes.

Le raisonnement n'est en défaut que si $\varphi = 0$, d'où la proposition énoncée. Cette proposition avait été donnée par M. G. Bouligand dans le cas du ptg [1].

24. **Propriétés générales du ptg d'une orthosurface en un point courant.** — Conservant toujours les notations des numéros précédents, nous envisageons une droite $\Delta'M\Delta$, distincte de $D'MD$, mais exclue elle aussi du ptg en M. Toutes les droites parallèles à $\Delta'M\Delta$, suffisamment voisines de M, rencontrent-elles l'orthosurface au voisinage de M? Autrement dit, aurions-nous retrouvé le caractère d'orthosurface, pour l'ensemble étudié, en nous servant de $\Delta'M\Delta$ comme nous nous sommes servis de $D'MD$?

La réponse est affirmative : en effet, supposons ε assez petit pour que les parallèles à $\Delta'M\Delta$ rencontrent E_ε en un point au plus; les parallèles à $D'MD$ situées à moins de λ de $D'MD$ rencontrent toutes E_ε. Soit M_i un point de E_ε situé à moins de λ de $D'MD$; menons $D'_iM_iD_i$ et $\Delta_iM_i\Delta_i$ respectivement parallèles à $D'MD$ et $\Delta'M\Delta$; la section de l'orthosurface par le plan de $D'_iM_iD_i$ et $\Delta'_iM_i\Delta_i$ devant être *rencontrée* et en *un seul point* par toutes les parallèles à $D'_iM_iD_i$ voisines de M_i, doit se trouver dans deux angles formés par $D'_iM_iD_i$ et $\Delta_iM_i\Delta_i$, situés de part et d'autre de $D'_iM_iD_i$. Or, cette section devant être rencontrée en un point seulement par les parallèles à $\Delta'_iM_i\Delta_i$, il

(1) G. Bouligand, *Introd. Géom. Inf. Dir.*, p. 170, théor. B.

faut que la section de l'orthosurface par $D_iM_i\Delta_i$ soit située dans deux des angles, formés par $D'_iM_iD_i$ et $\Delta'_iM_i\Delta_i$, qui soient opposés par le sommet et, alors, toutes les parallèles à $\Delta'_iM_i\Delta_i$, voisines de M_i, rencontrent cette section et, comme M_i est arbitraire, notre affirmation est justifiée.

25. Il existe une propriété du ptg analogue au corollaire δ, relatif aux éléments intérieurs du ctg (exposé au n° 23). Pour simplifier [1] nous appellerons $D'MD$ la *verticale*, trois points A, B et C de l'orthosurface, situés dans un plan parallèle à $D'MD$, un *triplet vertical;* toute parallèle à $D'MD$ menée par un point, la *verticale* de ce point; C_r un cylindre de révolution d'axe $D'MD$ et de rayon r; Σ_r l'ensemble des points de E_ε situés dans ou sur C_r. Enfin, en désignant toujours par λ une distance telle que toute parallèle à $D'MD$ située à moins de λ de M rencontre E_ε en un point et un seul, nous supposerons $r \leqq \lambda$.

Soit ABC un triplet vertical de Σ_r; C, le sommet de ce triplet dont la verticale est *intermédiaire* entre les verticales des deux autres (nous dirons ci-dessous *le sommet intermédiaire*).

Lemme. — *L'angle plan* A *du triplet vertical* ABC *est plein de cordes de* Σ_r *situées dans le plan* ABC *et ayant pour extrémité commune le sommet* A (*énoncé analogue pour* B).

En effet, la bande du plan vertical ABC, comprise entre les verticales de B et C, coupe Σ_r suivant un continu K joignant B à C; toute droite, issue de A dans le plan ABC et séparant B de C, rencontre K.

C. Q. F. D.

Théorème I. — *A un triplet vertical non aligné* ABC (C, *sommet intermédiaire*) *de* Σ_r, *situé sur une rondelle* Σ_ρ, *découpée sur* Σ_r *par le cylindre* C_ρ *défini par* $3\rho = r$, *correspond un pinceau solide de cordes de* Σ_r *ayant pour extrémité commune le sommet* A (Énoncé analogue pour B).

Construisons le pinceau solide annoncé : soit ϖ_0 le demi-plan issu de la verticale de A et contenant B et C; ϖ_i un demi-plan variable issu

[1] J. Mirguet, *Sur une classe de surfaces admettant un plan tangent continu* (*Bulletin de la Soc. Royale des Sc. de Liége*, n° 1, 1933, p. 11).

de cette même verticale; Θ_i l'angle de ϖ_0 et ϖ_i $(-180^\circ \leqq \Theta_i \leqq +180^\circ)$.

Dans chaque ϖ_i considérons les deux verticales dont les distances à la verticale de A sont respectivement égales aux projections horizontales de AB et AC. ABC étant pris sur Σ_ρ $(3\rho = r)$ ces deux verticales rencontrent Σ_r. Soient B_i et C_i les points où ces deux verticales rencontrent respectivement Σ_r.

Désignons par D le point de rencontre de AC et de la verticale de B, par D_i le point de rencontre de AC_i et de la verticale de B_i; notons que DD_i et CC_i sont parallèles; ABC n'étant pas aligné, on a $BD \neq 0$.

Ceci posé, voici notre démonstration : *Quand* Θ_i *croît constamment en valeur absolue à partir de zéro*, $B_i D_i$ *ne devient pas nul avant que* Θ_i *atteigne une certaine valeur* Θ'.

Pour calculer Θ', on peut opérer ainsi : en désignant par m la plus grande pente d'une corde de Σ_r et par h la longueur de la projection horizontale de AB, on voit facilement qu'en *valeur absolue :*

$$\text{Projection verticale de } BB_i \leqq 2\,hm \sin\frac{\Theta_i}{2},$$

et, en raison du parallélisme de DD_i et CC_i,

$$\text{Projection verticale de } DD_i \leqq 2\,hm \sin\frac{\Theta_i}{2}.$$

En remarquant alors que $B_i D_i$ est la somme algébrique de BD et des deux projections verticales de BB_i et DD_i, on obtient cette conclusion : quels que soient les signes des deux projections verticales de BB_i et DD_i, le segment $B_i D_i$ ne sera pas nul, quand Θ_i croît à partir de zéro, avant que Θ_i ait atteint la valeur Θ' définie par

$$4\,hm \sin\frac{\Theta'}{2} = BD.$$

Aussi longtemps que $|\Theta_i| < \Theta'$, le triplet AB_iC_i n'est pas aligné et l'angle en A de ce triplet est, d'après le lemme, plein de cordes de Σ_r situées dans ϖ_i.

Pour achever la démonstration, il faut prouver que tous ces angles pleins AB_iC_i ont entre eux une connexion telle, qu'ils forment un pinceau solide. Dans ce but, divisons BD en trois parties égales, soit $BR = RS = SD$; projetons R et S en R_i et S_i sur la verticale de B_i. Quand Θ_i croîtra constamment en valeur absolue à partir de zéro,

R_iS_i restera intérieur à B_iD_i aussi longtemps que les projections verticales de BB_i et CC_i seront inférieures au tiers de BD, *a fortiori* aussi longtemps que Θ_i sera inférieur ou au plus égal en valeur absolue à l'angle Θ'' défini par $2hm \sin\frac{\Theta''}{2} = \frac{BD}{3}$.

Dans ces limites, les angles $R_iA_iS_i$ sont intérieurs aux angles B_iAD_i correspondants, lesquels sont pleins de cordes; donc, les angles $R_iAS_i(|\Theta_i| < \Theta'')$ sont pleins de cordes, on peut donc énoncer :

Le cône σ engendré par l'angle plein R_iAS_i *tournant autour de la verticale de* A *depuis sa position* RAS *de* ϖ_0 *jusqu'à* $\Theta_i = \pm\Theta'$ *est plein de cordes de* Σ_r *issues de* A.

Ce qui démontre le théorème.

26. On désignera maintenant par « aplatissement relatif à un triplet vertical ABC » (C, intermédiaire) le rapport de BD à la projection horizontale de AB; nous nous proposons d'établir le nouveau théorème suivant :

Théorème II. — *Si le ptg d'une orthosurface en un point* M *non situé sur un bord, ne comprend aucun pinceau solide, à un nombre arbitraire α, on peut faire correspondre un rayon μ tel que si $\rho < \mu$ les aplatissements des triplets verticaux de Σ_ρ soient tous inférieurs à α.*

Considérons, comme au théorème précédent, les deux cylindres coaxiaux C_r et $C_\rho(3\rho = r)$; supposons que, r tendant vers zéro, il y ait toujours, sur la Σ_ρ correspondante, des triplets verticaux dont les aplatissements restent supérieurs à un nombre donné; les deux éléments RAS et Θ'' des cônes σ correspondants ne tendent pas vers zéro (c'est évident pour RAS et l'égalité

$$2\,mh \sin\frac{\Theta''}{2} = \frac{BD}{3}.$$

le prouve pour θ''). Il y a donc constamment des pinceaux non aplatis de cordes de Σ_r; à la limite, il y a un pinceau solide de paratingentes de l'orthosurface en M.

27. **Faire passer une orthocourbe par un ensemble orthocurviligne, une orthosurface par un ensemble orthosuperficiel** (1). — Un ensemble de points choisis sur une orthocourbe est orthocurviligne; un ensemble de points choisis sur une orthosurface est orthosuperficiel. Examinons la question inverse : peut-on toujours faire passer une courbe par un ensemble orthocurviligne et une surface par un ensemble orthosuperficiel.

1° Pour un ensemble orthocurviligne plan, la question est immédiatement résolue par le lemme d'univocité de M. Bouligand (2). Soient, dans un plan, un point M d'un ensemble orthocurviligne E et $\mathcal{C}_M^\varepsilon$ un cercle à l'intérieur duquel une direction de droite D est exclue partout du ptg. Par chaque point de E_ε menons la parallèle D_i à D. En appelant *consécutives* deux D_i entre lesquelles il n'y en a pas d'autres, considérons les segments qui joignent les points de E_ε situés sur des parallèles consécutives. Soit V l'ensemble de ces segments.

Aucune corde de V n'est plus inclinée sur D que les cordes de E_ε; donc D est exclue du ptg de V en M et aux points voisins de M. D'autre part, toute parallèle à D située entre deux D_i rencontre V. Donc V est une orthocourbe plane.

2° Pour un ensemble orthocurviligne de l'espace, la solution est identique. Soient un point M d'un tel ensemble E et S_M^ε une sphère à l'intérieur de laquelle une direction de plan P est exclue partout du ptg. Par chaque point de E_ε menons le plan P_i parallèle à P. Considérons la réunion V des segments qui joignent les points de E_ε situés sur des P_i *consécutifs* : tout plan parallèle à P compris entre deux P_i consécutifs rencontre *un seul* segment, donc rencontre V et en un seul point. En opérant de même pour toute direction P′ très voisine de P, on obtiendrait le même V que les plans parallèles à P′ rencontreraient tous et en un seul point. Donc P est exclu du ptg de V et V est une orthocourbe de l'espace.

3° Abordons maintenant le cas d'un ensemble orthosuperficiel : soient M_1 un point d'un tel ensemble E et S_M^ε une sphère à l'intérieur de laquelle une direction de droite D est exclue partout du ptg. On peut

(1) J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 195, p. 509.
(2) G. Bouligand, *Introduc. Géom. Inf. dir.*, p. 76.

fixer un angle α tel que toute corde E_ε fasse avec D un angle supérieur à α. Construisons les demi-cônes de révolution ayant pour sommets les points E_ε, pour demi-angles au sommet le même angle β (avec les conditions $0 < \beta < \alpha$) et pour demi-axes les demi-droites toutes équipollentes à l'une des directions de D (toujours la même) :

La frontière du domaine réunion de ces demi-cônes est une orthosurface V *englobant l'ensemble donné.* — La direction de la droite D est, en effet, exclue du ptg de V : considérons une corde de V dont les extrémités sont situées sur le même demi-cône; puisque cette corde rencontre le demi-cône en deux points, elle fait avec D un angle au moins égal à β; considérons une corde de V dont les extrémités sont sur des demi-cônes différents; si cette corde faisait avec D un angle inférieur à β, l'une des deux extrémités serait intérieure au demi-cône sur lequel est situé l'autre et, par suite, n'appartiendrait pas à V, qui a raison de frontière. Toutes les cordes de V font donc avec D des angles au moins égaux à β; donc D est exclu du ptg de V.

D'autre part, toute parallèle à D rencontre évidemment V en un point. Donc, V est une orthosurface englobant E_ε.

CHAPITRE III.

LES ORTHOSURFACES DONT LE PARATINGENT N'A PAS D'ÉLÉMENT INTÉRIEUR.

28. M. Bouligand a établi, dans son *Introduction à la Géométrie Infinitésimale directe* (¹), que l'absence de paratingentes intérieures entraîne la planéité du ctg, c'est-à-dire l'existence d'un plan tangent unique. Ce Chapitre III reprend la même idée et montre qu'il n'y a pas seulement planéité du ctg, mais aussi planéité du ptg, laquelle entraîne, en vertu de la S. C. I., répartition continue du plan tangent.

Les propriétés générales du ctg exposées au chapitre précédent sont une première voie par où atteindre ces planéités et cette répartition continue : le point de départ sera cette importante proposition du n° 23 : *si le ptg (et par suite le ctg) n'a pas d'élément intérieur, tout demi-plan* Π *issu de la droite* D′MD, *exclue du ptg, au point courant* M,

(¹) Pages 167 et suivantes.

contient une seule demi-tangente en M *et coupe l'orthosurface suivant une branche continue dont* M *est une extrémité.*

Voici comment on peut utiliser cette proposition : le ptg mutuel des deux branches contenues dans les deux demi-plans Π_i et Π_j est constitué par une gerbe g_{ij} plane continue de paratingentes englobant leurs demi-tangentes Mt_i et Mt_j et extérieure à l'angle de ces deux demi-tangentes. Déplaçons Π_j d'une rotation continue; à chacune de ses positions correspond une g_{ij} englobant toujours Mt_i. Si le plan (Mt_i, Mt_j) n'est pas fixe, la réunion des g_{ij} est un pinceau solide de paratingentes (¹); or, nous n'avons pas ici de pinceau solide de paratingentes; donc, le plan (Mt_i, Mt_j) est fixe; c'est-à-dire que le ctg est plan.

On va voir maintenant qu'une paratingente extérieure au plan P du ctg entraînerait l'existence d'un pinceau solide de paratingentes : il suffit de prouver que, dans le cas où une telle paratingente existerait, on aurait dans tout voisinage évanouissant de M des pinceaux solides de cordes dont l'ouverture sphérique ne tendrait pas vers zéro. La présence de tels pinceaux ressort des remarques suivantes (²) :

a. Détermination dans tout voisinage de M *sur l'orthosurface de cordes infiniment voisines en direction de* P *et de cordes infiniment voisines en direction de la paratingente* D′MD, *située hors de* P.

En raison de la planéité du contingent, on peut, étant donné un angle α arbitraire, lui faire correspondre une longueur ε telle que tous les points de l'orthosurface contenus dans ou sur la sphère S_M^ε soient à l'extérieur du cône de révolution de sommet M, d'axe perpendiculaire à P et de demi-ouverture $\frac{\pi}{2} - \alpha$; à un nouvel angle β on peut faire correspondre une deuxième sphère plus petite S_M^η telle que les cordes joignant les points de l'orthosurface, situés exclusivement sur S_M^ε, aux points de l'orthosurface, situés dans ou sur la deuxième sphère S_M^η, fassent avec P un angle *inférieur* à $\alpha + \beta$. D'autre part, il existe une infinité de cordes de l'orthosurface, intérieures à S_M^η et faisant avec D′MD un angle aussi petit qu'on veut; autrement dit,

(¹) En raison de la semi-continuité par rotation de Mt_j.

(²) J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 195, 1932, p. 592.

soit θ l'angle de D'MD et de P et χ un angle arbitraire, on trouvera dans S_M^η, une infinité de cordes faisant avec P un angle *supérieur* à $\theta - \chi$.

b. Intersection de l'orthosurface par un plan issu de M *et parallèle à une direction exclue du paratingent de l'orthosurface en* M.

Étant donnée une direction $\Delta' M \Delta$ exclue du ptg de l'orthosurface au point courant M, toute direction assez voisine de $\Delta' M \Delta$ est exclue également du ptg; toute parallèle à $\Delta' M \Delta$ assez proche de M rencontre l'orthosurface en un point et l'on a vu, au n° 24, qu'il en est de même de toute parallèle à une direction voisine de $\Delta' M \Delta$, si cette parallèle est assez proche de M. Par suite, tout plan assez voisin de M et parallèle à une direction assez voisine de $\Delta' M \Delta$ rencontre l'orthosurface suivant un continu qui est une orthocourbe; les cordes de cette orthocourbe constituent un ensemble de segments bien enchaînés par alternance; parmi ces cordes, il y en a qui font avec P un angle inférieur à $\alpha + \beta$: il suffit qu'une extrémité soit dans S_M^η et l'autre sur S_M^ε.

c. Existence d'une gerbe plane continue de cordes dans tout plan issu de M *et parallèle à une direction exclue du ptg de l'orthosurface en* M.

Soit $A_i B_i$ une corde intérieure à S_M^η faisant avec P un angle supérieur à $\theta - \chi$. Par le point A_i menons $\delta' A_i \delta$ parallèle à une direction exclue du ptg en M, assez voisine de $\Delta' M \Delta$. Considérons l'intersection de l'orthosurface et du plan déterminé par $A_i B_i$ et $\delta' A_i \delta$; soit H un point de cette intersection situé *sur* S_M^ε *du même côté* que B_i par rapport à $\delta' A_i \delta$; A_i n'établit pas une coupure entre H et B_i sur l'intersection du plan et de l'orthosurface; donc l'angle HA_iB_i est entièrement balayé par un système de cordes bien enchaînées rayonnant de A_i : quelle que soit la parallèle $\delta' A_i \delta$, choisie assez voisine en direction de $\Delta' M \Delta$, cet angle plein de cordes existe, il englobe $A_i B_i$ et il est supérieur à $\omega = \theta - (\alpha + \beta + \chi)$.

d. Ces gerbes planes continues, en se connectant, donnent un pinceau solide dont l'ouverture sphérique ne tend pas vers zéro, si le voisinage de M *se restreint indéfiniment.*

Cette ouverture sphérique ne pourrait, en effet, tendre vers zéro que si l'angle $\omega = \theta - (\alpha + \beta + \chi)$ d'une part et l'ouverture sphérique du cône des directions exclues du ptg en M d'autre part, tendaient vers zéro, ce qui n'est pas.

29. Les propriétés générales du ptg en un point courant (n^{os} 25 et 26) et d'une manière plus précise le théorème d'aplatissement du n° 26 sont une seconde voie pour obtenir les planéités. Cette seconde voie marque, mieux que la première, l'unité de raisonnement de ce double problème de planéité; nous conserverons ici les notations du n° 26 [1].

Voici une remarque préliminaire : Soit, sur une orthosurface, au voisinage du point courant M, un triplet vertical ABC dont les trois sommets tendent vers M, C restant l'intermédiaire. Dire que les aplatissements relatifs à A et B tendent vers zéro ou dire que les angles A et B tendent vers zéro, revient au même. Aussi, d'après le théorème du n° 26, si le ptg en M est dépourvu d'élément intérieur, puisque tout aplatissement de triplet vertical tend vers zéro, tout angle de sommet non intermédiaire tend vers zéro.

D'après cette remarque : 1° Tout demi-plan issu de la verticale de M contient *une seule demi-tangente*, car avec deux demi-tangentes le continu intersection de la surface par ce demi-plan présenterait des triplets dont un angle non intermédiaire ne tendrait pas vers zéro;

2° Si le ctg n'était pas plan, on pourrait trouver trois demi-tangentes en M, non coplanaires, situées dans trois plans verticaux différents, mais rencontrées par un même plan Q vertical tendant vers M. Près de chacune des intersections de Q et de trois demi-tangentes, il y aurait dans Q trois sommets d'un triplet vertical de l'orthosurface dont les deux angles aux sommets non intermédiaires ne tendraient pas vers zéro; le ctg est donc tout entier dans un plan P;

3° Enfin, supposons qu'il existe en M une paratingente Δ faisant avec P un angle 4α; on peut toujours choisir une corde BC assez voisine en direction de Δ et d'extrémités assez proches de M pour que, dans son plan vertical, figure un point A de l'orthosurface remplissant les conditions suivantes :

---

(1) Cf. *Bulletin de la Soc. Roy. des Sc. de Liége,* n° 1, 1933, p. 11-15.

1° On peut choisir A pour qu'il tende vers M en même temps que BC;

2° L'angle $\widehat{CBA}$ est aigu;

3° L'angle $\widehat{BAM}$ et l'angle du vecteur $\overrightarrow{MA}$ et du plan P sont l'un et l'autre inférieurs à α.

Comme, de plus, BC choisi assez proche de M fait avec P un angle supérieur à 3α, on déduit de ces différentes conditions que l'angle en B du triplet vertical BCA sera supérieur à α. Donc, quand le triplet vertical ABC tend vers M, un angle de sommet non intermédiaire ne tend pas vers zéro, ce qui, d'après le n° 26, est contraire aux hypothèses. Donc, il n'y a pas de paratingentes en M hors de P.

30. **Répartition continue du plan tangent.** — La semi-continuité d'inclusion du ptg entraîne, pour les orthosurfaces sans éléments intérieurs, la répartition continue du plan tangent, puisque plan tangent et paratingent coïncident.

Nous nous proposons, de plus, de démontrer que si la planéité du paratingent est une condition suffisante de la répartition continue du plan tangent, elle en est aussi une condition nécessaire; c'est-à-dire que si une orthosurface présente partout un plan tangent et si ce plan tangent est réparti continûment, le ptg est partout plan.

Soit, sur une orthosurface, une rondelle où le plan tangent existe partout et où il est partout continûment réparti : il faut entendre par là qu'étant donné un angle arbitraire α, on peut toujours prendre ε assez petit, pour que les plans tangents à la rondelle dans $S^{\varepsilon}_{M_0}$, centrée sur le point M_0 de la rondelle, fassent avec le plan tangent P en M_0 un angle inférieur à α.

Supposons que, si petit que soit ε, il y ait toujours dans $S^{\varepsilon}_{M_0}$ des cordes de la rondelle qui fassent avec P un angle supérieur à un angle fixe θ : Soit M_iM_j une de ces cordes; coupons la rondelle par le plan R déterminé par M_iM_j et une direction Δ exclue du ptg de l'orthosurface en M_0; soit Γ_{ij} l'ensemble ponctuel constitué par les points M_i, M_j et les points de la rondelle situés sur R entre les parallèles à Δ menées par M_i et M_j [1]; le ctg de Γ_{ij} est partout aligné, puisqu'il y a un plan

[1] *Cf.* E. Blanc, *Sur une propriété différentielle des continus de Jordan* (*Comptes rendus*, t. 196, p. 600).

tangent partout. Soit A un point de Γ_{ij} dont la distance à M_iM_j ne soit inférieure à aucune autre des distances des points de Γ_{ij} à M_iM_j (un tel point existe puisqu'une fonction continue atteint son maximum). Γ_{ij} est entièrement d'un même côté de la parallèle à M_iM_j menée par A; il y a donc nécessairement une demi-tangente de Γ_{ij} en A dont le support fait avec P un angle supérieur à θ. Donc, le plan tangent en A fait avec P un angle supérieur à l'angle fixe θ : ce qui est contraire aux hypothèses.

Donc, supposer qu'il y a indéfiniment dans $S^{\varepsilon}_{M_0}$ des cordes de la rondelle qui fassent avec P un angle supérieur à un angle fixe est contraire aux données. Par conséquent, le ptg est plan.

CHAPITRE IV.

ORTHOSURFACES A PLAN TANGENT DÉFINIES PAR LE BIPARATINGENT.

31. Le biparatingent (biptg) dont nous allons maintenant nous occuper est un élément présentant les plus grandes analogies avec le ptg. Cette analogie incite à rechercher si les résultats obtenus, en précisant que le ptg n'a pas d'élément intérieur, ne peuvent pas être retrouvés ou imités au moyen d'une particularisation du biptg. On va voir que la réponse est, à la fois, affirmative ou négative : négative, en ce qui concerne le biptg proprement dit; affirmative, en considérant un sous-ensemble remarquable du biptg : le biparatingent réduit.

Dans l'exposé de cette question, nous procéderons comme suit : puisqu'il est logique de songer d'abord au biptg proprement dit, et que son étude prépare celle de ses sous-ensembles, nous exposerons d'abord la théorie générale du biptg, et nous montrerons pourquoi une structure incomplète du biptg est inapte à permettre l'étude des orthosurfaces.

Nous présenterons alors le biptg réduit, grâce auquel nous donnerons — et très simplement — de nouveaux théorèmes d'existence de plans tangents.

32. **Le biptg : définition, analogies et relations avec le ptg** [1]. —

[1] *Cf.* J. MIRGUET, *Quelques nouvelles notions infinitésimales directes* (*Rendic. dei Leincei*, Chap. XV, mars 1932, p. 429-431).

Un plan P est *biparatingent* au point d'accumulation M si, étant donné un angle θ, il existe dans toute sphère de centre M un *triplet non aligné*, dont le plan fasse avec P un angle inférieur à θ. Le biptg est l'ensemble des plans biparatingents.

Outre la similitude de définitions, deux propriétés permettent un parallèle entre biptg et ptg : ils sont fermés et jouissent de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ On démontre la première propriété pour le biptg comme pour le ptg : si un plan π est limite de plans P_i *biparatingents en* M, c'est que dans toute sphère de centre M, il existe des triplets non alignés de direction de plan aussi voisine qu'on veut d'un quelconque des P_i, et, par suite, aussi voisine qu'on veut de π; le plan π est donc lui-même biparatingent; les limites des plans biparatingents appartiennent ainsi au biptg; donc, le biptg est fermé.

De même, si un plan χ est limite de plans Q_i *biparatingents au voisinage de* M, il existe dans toute sphère de centre M des triplets non alignés aussi voisins qu'on veut en direction des Q_i; par suite, aussi voisins qu'on veut en direction de χ, et χ est biparatingent; donc, le biptg en M englobe les limites des plans biparatingents du voisinage; c'est-à-dire que le biptg jouit de la $\overline{\text{S. C. I.}}$ (1).

33. Les quelques observations suivantes marquent une certaine dépendance entre la structure du ptg et celle du biptg : un plan biparatingent P est limite de plans contenant des triplets non alignés, c'est-à-dire de plans contenant trois doublets. Les limites ou la limite commune de ces doublets est contenue dans le plan biparatingent P. Donc, *tout plan biparatingent contient au moins une paratingente*. Il est évident qu'il peut n'en contenir qu'une : l'exemple d'un cercle, d'une hélice le prouve immédiatement.

De même, hormis le cas d'un ensemble aligné (pour lequel le biptg n'existe pas), tout doublet fait partie d'une infinité de triplets non alignés; donc, par la paratingente limite de ce doublet doit passer au moins un plan limite des triplets dont il fait partie, c'est-à-dire un plan biparatingent.

Le plan de deux demi-tangentes MT_1 et MT_2 est biparatingent; en

(1) *Voir* n° 6 du présent Mémoire.

effet, on peut choisir un point A infiniment voisin de M et deux points B et C, tels que AB et AC soient infiniment voisins en direction de MT_1 et MT_2. Il existe donc un triplet non aligné, aussi voisin qu'on veut en direction de MT_1T_2.

Enfin, il peut arriver qu'aucun triplet ne tende vers le plan de deux paratingentes données : le plan de deux paratingentes n'est donc pas nécessairement biparatingent [1].

34. **Le biptg proprement dit est inapte à l'étude des orthosurfaces.** — Le ptg se prête à la définition et à l'étude des orthosurfaces, car le caractère incomplet du ptg est un mode général des surfaces et une particularisation de ce caractère incomplet se concilie elle aussi avec la nature d'orthosurface pour l'ensemble et ne fait que définir une classe d'orthosurfaces. Il en va tout autrement pour le biptg : *la seule exclusion d'un plan est inconciliable avec la nature d'orthosurface*. Pour nous en convaincre, nous allons montrer qu'une orthosurface à biptg incomplet en M se réduit nécessairement à un plan au voisinage de M.

Soient P un plan exclu du biptg en M; P_i les plans, parallèles à P, très voisins de M; chaque P_i, s'il rencontre le voisinage Σ de M sur l'orthosurface, n'en contient que des points alignés. Soit A un point du voisinage Σ, situé dans P', un des plans P_i; menons par A une droite D, parallèle à une direction exclue du ptg en M et non située dans P. S'il existait trois demi-plans issus de D, non situés d'un même côté d'un plan issu de D et contenant chacun un point de Σ très voisin de A et situés tous les trois d'un même côté de P' (soit B_1, B_2 et B_3 ces trois points), tout plan P_i séparant P' de B_1, B_2 et B_3 contiendrait trois points non alignés sur Σ [2], ce qui serait contraire à l'hypothèse. Il existe donc un plan Q, issu de D tel que Σ soit contenu dans l'un des dièdres formés par P' et Q et dans le dièdre opposé; naturellement Σ s'appuie

(1) *Exemple :* l'ensemble des quatre demi-droites, issues de M, définies en coordonnées cartésiennes rectangulaires, d'origine M, par les paramètres directeurs $(+1, 0, +1)$; $(+1, 0, -1)$; $(-1, +1, 0)$; $(-1, -1, 0)$. Les axes des y et des z sont des paratingentes, le plan zOy n'est pas biparatingent.

(2) Puisque les trois demi-plans, comme parallèles à une direction non paratingente en M, coupent Σ suivant des continus.

sur l'arête de ces dièdres suivant un segment continu, car Q rencontre Σ suivant un continu.

Donc, tous les plans P_i rencontrent Σ suivant un segment rectiligne ([1]). Σ est donc réglée parallèlement à la direction de plan P; elle est donc encore réglée parallèlement à toutes les directions de plans très voisines de P. Σ est donc plane ([2]).

35. **Le biparatingent réduit.** — Essayons de deviner les raisons de l'échec du biptg en matière d'orthosurface. A cette fin, examinons l'exemple d'une sphère : on vérifie facilement le caractère complet du biptg; on remarquera, de plus, la planéité du ptg; il est alors très important d'observer que de tous les plans issus d'un point de la sphère, un seul contient plusieurs paratingentes distinctes : c'est le plan tangent; tous les autres plans sont donc limites de triplets, mais de triplets dont *les trois sinus tendent vers zéro*.

Cette dernière phrase semble bien être le mot de l'énigme; le biptg proprement dit possède une définition trop large, ouverte aux surprises des triplets dont la somme des sinus tend vers zéro; cette définition du biptg laisse passer, au point de rendre le biptg complet, une surabondance de plans et de plans sans intérêt. Considérons donc plutôt les limites des triplets qui, non seulement ne sont pas alignés, mais encore ne vont pas en s'alignant, c'est-à-dire dont la somme des sinus a une limite différente de zéro : nous obtenons un *biptg réduit* qui, dans le cas de la sphère, se compose partout du seul plan tangent. Nous avons donc ainsi une notion nouvelle susceptible de fournir des indications sur les orthosurfaces : cherchons à en tirer profit en commençant par préciser sa définition et ses propriétés essentielles.

36. **Définitions** ([3]). — Une famille de triplets *d'un ensemble quel-*

(1) On suppose le voisinage Σ suffisamment restreint et les plans P_i suffisamment proches de M.

(2) J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 197, 1933, p. 547. M. Bouligand a récemment utilisé ce résultat pour la recherche, sur une sphère, d'un ensemble ponctuel dont le biptg se réduit partout au seul plan tangent; ayant démontré qu'un ensemble qui, sur la sphère, serait partout dense, ayant même biptg que sa fermeture, aurait un biptg complet, (puisque la fermeture est une orthosurface), M. Bouligand profite d'une extension qu'il a donnée aux résultats énoncés par M. Ch. Brunold dans sa *Thèse*, pour en conclure que l'ensemble cherché se laisse inclure dans un ensemble fermé punctiforme (*Bulletin scientifique de l'École Polytechnique de Timisoara*, 1934, t. 5, fasc. 1-2).

(3) J. Mirguet, *Comptes rendus*, t. 196, 1933, p. 547.

conque telle que la somme des sinus de chacun ait au moins une valeur limite non nulle, quand on considère dans cette famille des triplets à sommets de plus en plus voisins de M, sera désignée par *famille régulière*.

L'ensemble des plans biparatingents issus de familles régulières en M est le *biptg réduit*, que nous désignerons par T_M.

Proposition A : Le plan de deux demi-tangentes non alignées appartient à $\mathbf{T}_M$. — Nous savons qu'il existe dans toute sphère de centre M un triplet $M_1M_2M_3$ dont la direction de plan et les deux côtés M_1M_2 et M_1M_3 sont aussi voisins qu'on veut des demi-tangentes et de leur plan. Or, le sinus de (M_1M_2, M_1M_3) ne tend pas vers zéro quand on réduit indéfiniment le rayon de cette sphère.

Proposition B : Si le ptg se réduit à une droite, T_M *est vide.* — Car il n'existe pas, dans ce cas, de famille régulière.

Proposition C : Tout plan de T_M *contient deux paratingentes distinctes.* — Il contient, en effet, les limites de deux directions de cordes constamment distinctes.

Proposition D : Un plan exclu de T_M *contient au plus, ou bien une demi-tangente ou bien deux demi-tangentes opposées; s'il contient une ou deux demi-tangentes, la droite de support est la seule paratingente qu'il contienne.* — S'il existait, en effet, une seconde paratingente, on pourrait indéfiniment trouver des triplets dont le plan tendrait vers le plan exclu, dont un côté tendrait vers la demi-tangente et un autre vers la seconde paratingente; le plan exclu serait limite de famille régulière, ce qui serait contradictoire.

37. Structures du biptg réduit des orthosurfaces, entraînant l'existence et la répartition continue du plan tangent. — Les classes d'orthosurfaces que nous allons définir ne diffèrent pas, au fond, de celle obtenue par l'office du ptg : nous avons, d'ailleurs, fait remarquer la nécessaire planéité du ptg au cas d'un plan uniformément réparti. Il s'agit donc d'une simple différence de méthode d'obtention.

On va même trouver ici deux modes de raisonnement : une première méthode se rapportant à une structure assez générale de T_M conduira à la planéité du ctg, puis à celle du ptg; c'est seulement de cette planéité du ptg que sera déduite la répartition continue du plan tangent : même ordre logique, donc, que dans la méthode du ptg. Une seconde méthode, appliquée à un cas plus général englobant la précédente structure conduira *d'abord* à la répartition continue du plan du ctg, indépendamment de toute préoccupation du ptg. De cette répartition continue, découlera la planéité du ptg, conformément à la théorie générale évoquée à l'instant (*cf* n° 30).

Premier cas : Ont un plan tangent continu, les surfaces à ptg incomplet telles que la réunion des plans de T_M, *en chaque point* M (*exclu des bords*) *laisse échapper un pinceau conique solide.*

En effet, toute droite $\Delta' M \Delta$ intérieure à un tel pinceau est exclue du ptg; sinon, comme il existe forcément des demi-tangentes de la surface hors de $\Delta' M \Delta$, le plan déterminé par $\Delta' M \Delta$ et une de ces demi-tangentes appartiendrait, contrairement à l'hypothèse, à T_M. Donc, $\Delta' M \Delta$ est entièrement entourée de directions exclues du ptg; on sait, dans ces conditions, que toute parallèle à $\Delta' M \Delta$ qui s'approche indéfiniment de M, finit par contenir un point de la surface qui tend vers M; par suite, tout demi-plan π, issu de $\Delta' M \Delta$, contient une demi-tangente et une seule (*proposition A*). *Toutes ces demi-tangentes sont coplanaires :* sans quoi, un plan P_i, parallèle à $\Delta' M \Delta$, tendant vers M en restant parallèle à lui-même et en rencontrant trois demi-tangentes non coplanaires en H_i K_i L_i, contiendrait constamment un triplet à sommets voisins de H_i, K_i et L_i, dont un sinus ne tendrait pas vers zéro et la direction de P serait limite d'une famille régulière.

Vu cette planéité du ctg, il n'existe aucune paratingente hors du plan du ctg : en effet, le plan de $\Delta' M \Delta$ et d'une paratingente étrangère au ctg serait exclu de T_M; cependant, devant contenir cette paratingente et son intersection avec le contingent, il ne pourrait échapper à T_M. Donc, *le paratingent est plan* [par surcroît, on voit que T_M se réduit au plan du contingent (*proposition C*)]. De cette planéité du paratingent découle la répartition continue du plan tangent.

38. **Cas général.** — *Ont un plan tangent continu, les surfaces à paratingent incomplet dont le biparatingent réduit* T_M *laisse échapper tous les plans extérieurs à un cône de révolution* γ *en chaque point* M *exclu des bords.*

Si toute droite menée de M hors du cône γ était une paratingente, il n'existerait pas de demi-tangente hors de γ (*proposition D*); le ctg, qui est un continu, serait donc tout entier dans ou sur l'une des nappes du cône γ et il existerait (à cause des directions exclues du paratingent) un second cône de révolution, intérieur au premier, auquel le ctg serait extérieur. En raison d'une telle structure du contingent, les plans extérieurs à γ seraient limites de familles régulières, contrairement à l'hypothèse.

Soit donc $\Delta' M \Delta$ une droite extérieure à γ, exclue du paratingent; elle serait entourée de droites exclues; dès lors, tout demi-plan π, issu de $\Delta' M \Delta$ et extérieur à γ, contient une demi-tangente et une seule; en remarquant que la section de la surface par chaque demi-plan π est un continu, on voit, en procédant comme dans le premier cas (n° 37), que toutes les demi-tangentes, extérieures ou non à γ, sont coplanaires.

Enfin, aucun plan, issu de $\Delta' M \Delta$ *et extérieur* à γ, ne contient (d'après D) de paratingente étrangère au contingent en M. Ceci posé, aux points voisins de M, le biparatingent réduit ayant par hypothèse la même structure à exclusions qu'en M, le contingent y demeure plan. Le plan du ctg en un point M_i, qui tend vers M, a forcément pour limite le plan du ctg en M : en effet, la limite du ctg en M_i est englobée dans le ptg en M; les demi-tangentes en M_i, dont la limite est dans un plan issu de $\Delta' M \Delta$ et extérieur au cône γ, tendent donc vers des paratingentes qui, d'après D, s'incorporent au ctg en M; il existe donc deux demi-tangentes distinctes en M_i qui tendent, en restant distinctes, vers le plan du ctg en M; leur plan (ctg en M_i) tend vers le ctg en M; d'où la répartition continue annoncée.