Annales scientifiques de l'É.N.S.

JEAN FAVARD

Sur les intégrales curvilignes

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 1-44
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__1_0>

ANNALES

SCIENTIFIQUES

DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR

LES INTÉGRALES CURVILIGNES

PAR M. J. FAVARD

Introduction.

Dans les définitions de certaines intégrales curvilignes ou de surfaces classiques $\left(\text{telles que } \int_C f\,dx \text{ ou } \iint_S f\,dx\,dy\right)$, on aperçoit immédiatement que les procédés mis en œuvre dans leurs définitions peuvent être étendus à des lignes non rectifiables ou à des surfaces non quarrables et même, tout au moins pour les intégrales curvilignes, à des continus qui ne sont pas de Jordan.

Ainsi, en axes xy rectangulaires, soit le continu

$$(P_0P_1) \qquad y = 2 + \sin\frac{\pi}{x} \quad \text{si} \quad 0 < x \leqq 1; \qquad 1 \leqq y \leqq 3 \quad \text{si} \quad x = 0,$$

irréductible entre les points $P_0(x = 0, y = 2)$ et $P_1(x = 1, y = 2)$, l'aire du domaine, limité par ce continu, l'axe des y, la droite $x = 1$ et l'axe des x, est égale à

$$\int_0^1 \left(2 + \sin\frac{\pi}{x}\right) dx.$$

Si l'on veut dire que cette quantité est égale à l'intégrale curviligne

$$\int_{\widehat{P_0 P_1}} y\,dx;$$

pour étendre le champ d'application de cette dernière et si simple formule, on est amené à donner, dans ce cas particulier, une définition de l'intégrale curviligne ci-dessus, en utilisant une suite de points du continu d'abscisses croissantes, pour rester le plus près possible de la définition habituelle, et il ne faut pas être grand clerc pour cela. En désignant par $f(P)$ une fonction de point continue sur $(P_0 P_1)$ le même procédé nous permettra de définir, pour toute fonction $f(P)$, l'intégrale

$$\int_{\widehat{P_0 P_1}} f(P)\,dx.$$

Ainsi la puissance du procédé de définition des intégrales curvilignes déborde l'ensemble des arcs de courbes de Jordan. Mais, pour ces derniers continus, un ordre des points s'impose dès qu'on a donné le point initial et le point final, et c'est à partir de cet ordre que l'on bâtit la théorie. Quant aux continus irréductibles il faut donc, avant tout, en ordonner les points, cela est possible d'après un résultat de M. Kuratowski rappelé ci-après, mais, naturellement, d'une façon moins complète que pour les arcs de Jordan.

Cela étant, dans le plan xy, et pour l'élément différentiel dx par exemple, je me suis proposé de *déterminer tous les continus irréductibles $\mathcal{C}$ tels que l'intégrale*

$$\int_{\mathcal{C}} f(P)\,dx$$

ait un sens pour toutes les fonctions $f(P)$ continues. Par souci de simplicité on avait, jusqu'à présent, fait seulement la théorie des intégrales de cette sorte pour les courbes rectifiables ou semi-rectifiables; c'est-à-dire que, partant d'une métrique sur une courbe, on démontrait l'existence de l'intégrale; ici, c'est en quelque sorte le problème inverse que nous nous proposons; *à partir de la définition de l'intégrale, rechercher quelle propriété métrique d'une courbe forme son domaine* *naturel d'existence;* à cette métrique j'ai donné le nom de *variation* et les résultats qui suivent expliquent suffisamment cette dénomination.

L'idée directrice de ce travail, savoir : adapter la métrique à un problème donné n'est cependant pas nouvelle puisqu'elle domine la théorie de l'intégrale de Stieljes, non plus que la recherche des caractères des continus qui admettent une métrique donnée, puisque les résultats sur les courbes rectifiables procèdent de ce point de vue. Ce qui est nouveau ici, c'est l'essai que j'ai tenté, dans un cas particulier, de restituer à chaque problème de ce genre sa véritable métrique, ainsi que l'introduction de continus qui ne sont pas des courbes de Jordan.

Ce travail comprend deux chapitres. Dans le premier, j'ai essayé de faire, dans un espace métrique parfaitement compact, une théorie abstraite des intégrales curvilignes de la forme

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathrm{P})\, d\mathrm{U},$$

où U est une fonction de point donnée, ainsi que de quelques autres dont les éléments différentiels ne sont pas des différentielles exactes et qui comprennent les éléments différentiels de la longueur. Chemin faisant j'ai rencontré une interprétation de l'intégrale de Stieljes.

Je n'ai fait aucune recherche sur les intégrales d'éléments différentiels curvilignes qui ne sont pas du premier degré par rapport aux différentielles, quoique, par exemple, les éléments de la forme $(dx)^\alpha$ donnent (lorsque $\alpha > 1$) plus de finesse dans l'étude des ensembles de mesure nulle de l'axe des x, ou dans l'étude des courbes non rectifiables du plan xy (pour $\alpha > 1$). Les éléments de cette dernière forme ($\alpha = 2$) ont été introduits par M. A. Denjoy [1] dans une Note récente, où l'auteur se propose un problème analogue à celui que nous traitons ici, mais seulement pour des courbes de Jordan et des fonctions qui satisfont à une condition de Lipschitz.

Par analogie j'ai également essayé de faire une théorie abstraite des intégrales de surfaces, mais ici, naturellement, les résultats ne sont pas

---

[1] A. Denjoy, *Sur l'intégration des différentielles totales et la métrique des courbes* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 196, 1933, p. 838-841)

aussi complets que dans le cas des courbes, car, malgré les recherches récentes, la notion de surface est encore assez obscure.

Le Chapitre II est consacré aux applications de la théorie aux intégrales curvilignes les plus classiques. Ainsi j'ai pu obtenir des démonstrations des théorèmes de Green, dans le plan et dans l'espace, où les hypothèses présentent, je crois, toute la généralité désirable. Malgré quelques indications qui débordent le cas classique, je n'ai pu rien faire d'utile relativement au problème qui consiste, étant donnés un domaine simplement connexe et sa frontière, à transformer une intégrale double étendue à ce domaine en une intégrale curviligne étendue à sa frontière.

Les conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une courbe soit rectifiable prennent, dans notre théorie, une allure géométrique et, quant aux intégrales de surfaces, j'ai été conduit à la définition de la variation d'une surface, suivant une direction de plan donnée, et dans l'ordre d'idées de M. Lebesgue. Cette quantité, inférieure à l'aire d'une surface, est aussi plus simple et donne lieu à une condition nécessaire pour qu'une surface soit quarrable tout à fait analogue à celle qui exprime qu'une courbe est rectifiable.

CHAPITRE I.

THÉORIE ABSTRAITE.

1. Dans un espace métrique parfaitement compact, soit $\mathcal{C}$ un continu irréductible entre deux points A et B, la solution complète du problème qui consiste à ordonner un tel ensemble a été donnée par M. C. Kuratowski [1] :

Une décomposition de C est dite *semi-continue et linéaire* lorsque $\mathcal{C}$ est décomposé en un seul ensemble (cas trivial), ou bien lorsque C est décomposé en ensembles disjoints, appelés tranches

$$T_t (0 \leqq t \leqq 1,\ A \varepsilon T_0,\ B \varepsilon T_1),$$

(1) C. Kuratowski, *Théorie des continus irréductibles entre deux points* (*Fund. Math.* t. 10, 1927, p. 225-275).

de façon que

$$\lim_{n\to\infty} t_n = t \qquad \text{entraîne} \quad \limsup_{n\to\infty} T_{t_n} \subset T_t.$$

M. Kuratowski a alors défini une décomposition D de tout continu en tranches, qui satisfait aux conditions précédentes et qui est telle que pour toute autre décomposition D′, toute tranche de D′ est une tranche de D ou une somme de tranches de D.

Cette décomposition D peut se réduire à un seul élément, mais, s'il n'en est pas ainsi ses tranches forment un intervalle; lorsque $\mathcal{C}$ est borné ses tranches sont des continus (qui peuvent ne comprendre qu'un seul point); si l'on désigne par $t(P)$ l'indice de la tranche qui contient un point P du continu, la fonction $t(P)$ est une fonction continue de P.

Considérons une suite de points de $\mathcal{C}$,

$$P_i \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n;\ P_0 = A,\ P_n = B),$$

et soient t_i les indices des tranches auxquelles appartiennent ces points ($t_0 = 0$, $t_n = 1$), nous dirons que *la suite* P_i *est ordonnée* si l'on a

$$t_0 \leqq t_1 \leqq t_2 \leqq \ldots \leqq t_n.$$

Si le continu $\mathcal{C}$ n'a qu'une tranche, toute suite de points sera dite ordonnée.

2. Cela étant, soit $U(P)$ une fonction réelle bornée de point, définie au moins pour tous les points de $\mathcal{C}$, le continu $\mathcal{C}$ sera dit *à variation* U *bornée* si, étant donnée une suite ordonnée quelconque de points, la quantité

$$\sum_1^n |U(P_i) - U(P_{i-1})|$$

a une plus grande limite finie lorsque n augmente indéfiniment, chacune des quantités $t_i - t_{i-1}$ tendant vers zéro ([1]).

([1]) On peut remplacer cette condition par la suivante : chacune des distances $|P_{i-1}P_i|$ tendant vers zéro; ce qui donne une allure plus géométrique à notre définition et demande quelques modifications évidentes dans nos démonstrations.

En intercalant des points de division dans une division choisie, on voit que la quantité qui vient d'être définie est aussi la borne supérieure de l'ensemble des nombres précédents; nous la désignerons par $V_U(\mathcal{C})$,

$$V_U(\mathcal{C}) = \text{borne sup} \sum_1^n |U(P_i) - U(P_{i-1})|. \tag{1}$$

En représentant par ω_i l'oscillation de $U(P)$ sur l'ensemble des tranches T_t telles que $t_{-i} \leqq t \leqq t_i$, on peut encore poser

$$V_U(\mathcal{C}) = \text{borne sup} \sum_1^n \omega_i.$$

Nous allons rechercher à quelles conditions doit satisfaire $\mathcal{C}$ pour être à variation U bornée.

Tout d'abord, je dis que, pour qu'il en soit ainsi, il est nécessaire que $U(P)$ soit constante sur toute tranche de $\mathcal{C}$.

La question ne se pose que pour les tranches qui contiennent plus d'un point. Si, sur l'une de ces tranches, la fonction U n'était pas constante, alors il existerait sur cette tranche deux points P' et P'' tels que $U(P') - U(P'') \neq 0$.

Considérons alors une suite ordonnée de points contenant p fois le couple (P', P'') d'après les remarques précédentes, on a

$$V_U(\mathcal{C}) \geqq p\,|U(P') - U(P'')|,$$

mais p désignant un nombre naturel quelconque, cette inégalité nous montre que $V_U(\mathcal{C})$ surpasse toute quantité donnée à l'avance, contrairement à l'hypothèse.

Ainsi $U(P)$ apparaît sur le continu comme une fonction de tranche, soit $u(t)$ et, d'après la formule (1), on voit que

$$V_U(\mathcal{C}) = \text{borne sup} \sum_1^n |u(t_i) - u(t_{i-1})| = \text{variation totale de } u(t) \text{ dans } (0, 1),$$

$\mathcal{C}$ sera donc à variation U bornée si $u(t)$ l'est dans l'intervalle $(0, 1)$.

En désignant par $\varphi(t)$ une fonction de tranche, nous poserons

$$\int_{\widehat{AB}} \varphi(t)\, dU = \int_0^1 \varphi(t)\, du,$$

de sorte que la théorie des intégrales précédentes coïncidera avec la théorie des intégrales de Stieljes sur le segment (o,1) de l'axe des t.

3. Nous allons maintenant nous borner aux fonctions U(P) continues, il en est alors de même de la fonction $u(t)$ et, par suite, de la variation $v(t)$ de cette fonction dans l'intervalle (o, t), variation qui est une fonction non décroissante de t; enfin, on sait aussi que, dans ce cas, on a

$$V_U(\mathcal{C}) = \lim \sum_1^n |U(P_i) - U(P_{i-1})|,$$

lorsque n augmente indéfiniment, chacune des quantités $t_i - t_{i-1}$ tendant vers zéro, la suite étant une suite ordonnée.

Au moyen de la fonction U, on peut définir une décomposition semi-continue et linéaire du continu $\mathcal{C}$ {sauf que les limites (o,1) seront remplacées $[o, V_U(\mathcal{C})]$ de la manière suivante} :

A chaque tranche T_t, nous affecterons l'indice $v(t)$, l'ensemble des tranches pour lesquelles v a une valeur constante, ensemble dont l'image sur l'axe des t est un point ou un intervalle fermé, formera une tranche $\mathfrak{T}_v$ de notre nouvelle décomposition $[o \leqq v \leqq V_U(\mathcal{C})]$. Cette nouvelle décomposition est mieux adaptée à la métrique que nous venons d'établir sur $\mathcal{C}$.

Soit E un ensemble de points de $\mathcal{C}$ (ou de tranches), nous appellerons variation V de cet ensemble, et nous désignerons par $V_U(E)$ la mesure, sur l'axe des v, de l'ensemble E_v des points images des tranches $\mathfrak{T}_v$ qui contiennent au moins un point de E :

$$V_U(E) = m(E_v) = \int_E dv = \int_E |dU|.$$

4. Soient maintenant $f(P)$ une fonction continue de point définie sur $\mathcal{C}$ et $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ une suite ordonnée de points, t_i la suite non décroissante des indices des tranches correspondantes, désignons par π_i un point quelconque appartenant à une tranche d'indice θ_i intermédiaire entre t_{i-1} et $t_i (t_{i-1} \leqq \theta_i \leqq t_i)$, considérons la quantité

$$(2) \qquad \sum^n f(\pi_i)[U(P_i) - U(P_{i-1})].$$

Lorsque n augmente indéfiniment, chacune des quantités $t_i - t_{i-1}$ tendant vers zéro, la limite de cette quantité, quand elle existe, sera appelée une *intégrale curviligne étendue au continu* $\mathcal{C}$ *de* A à B; nous la désignerons par

$$(3) \qquad \int_{\widehat{AB}} f(P)\, dU = \lim \sum_1^n f(\pi_i)[U(P_i) - U(P_{i-1})].$$

Relativement à ces intégrales, nous nous proposons le problème suivant :

A quelles conditions doit satisfaire $\mathcal{C}$ *pour que l'intégrale précédente existe quelle que soit la fonction continue* $f(P)$?

Quand cela aura lieu nous dirons que $\mathcal{C}$ *est capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues.*

Tout d'abord, puisque l'indice de la tranche est une fonction continue de point, nous pouvons prendre pour $f(P)$ une fonction continue de tranche $\varphi(t)$.

Raisonnant alors comme précédemment, nous voyons tout d'abord que U(P) doit se réduire à une fonction de tranche; puis, l'intégrale

$$\int_{\widehat{AB}} \varphi(t)\, dU = \int_0^1 \varphi(t)\, du$$

devant avoir un sens quelle que soit la fonction continue $\varphi(t)$, il suit de là que la fonction u doit être à variation bornée d'après un résultat connu. Mais ce dernier résultat veut dire que $\mathcal{C}$ *doit être à variation* U *bornée.*

De plus, lorsque U n'est pas continue, toutes ses tranches de discontinuité ne doivent pas contenir plus d'un point, car, dans le cas contraire, en prenant pour $f(P)$ une fonction non constante sur une telle tranche, la quantité (2) n'aurait pas de limite.

Considérons les deux fonctions de tranche :

$$m(t) = \underset{P \in T_t}{\text{borne inf}}\, f(P), \qquad M(t) = \underset{P \in T_t}{\text{borne sup}}\, f(P);$$

chacune de ces fonctions de t est mesurable B. Tout d'abord, chaque tranche étant un ensemble fermé, il existera sur chacune d'elles deux points au moins P'_t et P''_t, tels que :

$$m(t) = f(P'_t); \qquad M(t) = f(P''_t),$$

puisque la fonction $f(P)$ est continue. A désignant une constante donnée, montrons que l'ensemble des tranches pour lesquelles $m(t) \leqq A [M(t) \geqq A]$ est fermé; considérons pour cela une suite de tranches $T_{t_n} (n = 1, 2, \ldots)$ telles que $m(t_n) \leqq A [M(t_n) \geqq A]$, tandis que les nombres t_n tendent vers une limite t et que la suite de points $P'_{t_n} (P''_{t_n})$ associés à chaque tranche convergent vers un point $P' (P'')$. En vertu de la semi-continuité de la décomposition de $\mathcal{C}$, le point P appartient à la tranche T_t et, en vertu de la continuité de f, on a $f(P') \leqq A [f(P'') \geqq A]$, ce qui démontre notre proposition.

En désignant par $v(t)$ la variation de U dans l'intervalle $(0, t)$, les deux intégrales

$$\int_0^1 m(t)\, dv, \quad \int_0^1 M(t)\, dv$$

existent donc; il en est donc également ainsi de l'intégrale

$$\int_0^1 [M(t) - m(t)]\, dv = \int_0^1 o(t)\, dv,$$

où $o(t)$ représente l'oscillation de $f(P)$ sur la tranche d'indice t.

L'intégrale (3) existera lorsque l'intégrale précédente sera nulle; par suite *le continu $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues lorsque l'ensemble de ses tranches qui contiennent plus d'un point sera à variation* U *nulle*.

Dans le cas général, je n'ai pu démontrer que cette condition était nécessaire; cependant on peut trouver autant de conditions nécessaires que l'on veut en prenant des fonctions $f(P)$ particulières; dans l'application de la théorie, que nous ferons, nous verrons que la condition indiquée ci-dessus est nécessaire.

Lorsqu'elle est réalisée, on voit que le continu $\mathcal{C}$ est également capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues pour la fonction $V(P) = v(t)\ (P \varepsilon T_t)$.

Enfin, lorsque la fonction U est continue, au lieu d'opérer sur les tranches T, on peut opérer sur les tranches $\mathfrak{T}$ que nous avons définies précédemment [1].

Comme pour les intégrales de Stieljes, on peut étendre la notion d'intégrale aux fonctions $f(\mathrm{P})$ mesurables B sur l'axe des t à condition que l'ensemble des tranches qui contiennent plus d'un point soit à variation U nulle. [Une fonction $f(\mathrm{P})$ sera dite mesurable B si les deux fonctions $m(t)$ et $\mathrm{M}(t)$ le sont.]

5. **Éléments différentiels plus généraux.** — Il n'est pas question, pour des éléments différentiels très généraux, de donner un critère aussi simple que le précédent quant aux continus capables d'une intégrale dans le champ des fonctions continues, quoique la notion de variation d'un continu puisse être étendue facilement.

Nous examinerons seulement quelques cas particuliers.

Remarquons tout d'abord qu'étant donnés deux éléments différentiels δ et Δ, le deuxième positif, on a toujours, le long de $\mathcal{C}$,

$$\int_{\mathcal{C}} \mathrm{o}(t)\,\Delta \geqq \left| \int_{\mathcal{C}} \mathrm{o}(t)\,\delta \right|,$$

lorsque la fonction $\mathrm{o}(t)$ est non négative; en particulier, si $\mathrm{o}(t)$ est

---

(1) Ce point de vue amène naturellement à la définition suivante de l'intégrale de Stieljes

$$\int_0^1 f(t)\,d\,v(t),$$

où v est une fonction non décroissante et continue de t : sur l'axe des t introduisons les tranches $\mathfrak{T}_v$ et désignons par $\varphi(v)$ une fonction multiforme de v, mais uniforme presque partout, qui prend au point v toutes les valeurs $f(t)$ sur la tranche $\mathfrak{T}_v$, on peut poser

$$\int_0^1 f(t)\,d\,v(t) = \int_0^{v(1)} \varphi(v)\,dv,$$

la deuxième intégrale étant prise au sens de Lebesgue, l'ensemble des points où $\varphi(v)$ n'est pas uniforme ayant été négligé.

Cette définition met en relief la différence entre la mesurabilité t et la mesurabilité v d'une fonction $f(t)$. On voit que l'on peut étendre cette définition aux fonctions $f(t)$ multiformes, mais presque partout uniformes v (c'est-à-dire sauf sur un ensemble de variation nulle) ou à celles définies seulement presque partout v.

l'oscillation d'une fonction $f(\mathrm{P})$ sur la tranche d'indice t, le continu $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale pour l'élément δ, s'il l'est pour Δ.

Ainsi l'élément différentiel

$$\delta = \mathrm{A}(\mathrm{P})\, d\mathrm{U},$$

où $\mathrm{A}(\mathrm{P})$ désigne une fonction de point continue sur $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale pour δ s'il l'est pour $|d\mathrm{U}|$; on voit aussi qu'il est suffisant qu'il le soit seulement pour $d\mathrm{U}$. Cette dernière condition est aussi nécessaire si $\mathrm{A}(\mathrm{P})$ ne change pas de signe et si, de plus, $|\mathrm{A}(\mathrm{P})|$ a une borne inférieure positive.

Pour un élément différentiel de la forme

$$\sum_{j=1}^{k} \mathrm{A}_j(\mathrm{P})\, d\mathrm{U}_j,$$

où les fonctions $\mathrm{A}_j(\mathrm{P})$ sont continues, $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale s'il l'est pour les éléments $d\mathrm{U}_j$.

Le continu $\mathcal{C}$ sera dit à variation bornée suivant cet élément si

$$\sum_{i=1}^{n} \left| \sum_{j=1}^{k} \mathrm{A}_j(\Pi_i)[\mathrm{U}_j(\mathrm{P}_i) - \mathrm{U}_j(\mathrm{P}_{i-1})] \right|$$

a une borne supérieure finie lorsque n augmente indéfiniment, les conditions et les notations étant les mêmes que précédemment.

Pour l'élément $\sqrt{|d\mathrm{U}\, d\mathrm{V}|}$, la variation sera définie de même par

$$\sum_{i=1}^{n} \sqrt{[\mathrm{U}(\mathrm{P}_i) - \mathrm{U}(\mathrm{P}_{i-1})][\mathrm{V}(\mathrm{P}_i) - \mathrm{V}(\mathrm{P}_{i-1})]}$$

$$\left(\leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{|\mathrm{U}(\mathrm{P}_i) - \mathrm{U}(\mathrm{P}_{i-1})| + |\mathrm{V}(\mathrm{P}_i) - \mathrm{V}(\mathrm{P}_{i-1})|}{2} \right),$$

et l'inégalité précédente montre que $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale pour cet élément, s'il l'est pour $|d\mathrm{U}|$ et pour $|d\mathrm{V}|$.

6. Nous ne multiplierons pas ces remarques, nous terminerons en traitant complètement un cas important parce qu'il contient les éléments différentiels de la longueur.

Soit $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k)$ une fonction convexe, positivement homogène, de degré un, par rapport aux variables x; c'est-à-dire que :

$$\varphi(0, 0, \ldots, 0) = 0;$$
$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) > 0 \quad \text{pour} \quad (x_1, x_2, \ldots, x_k) \neq (0, 0, \ldots, 0);$$
$$\varphi(hx_1, hx_2, \ldots, hx_k) = |h|\,\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k);$$
$$\varphi(x_1+y_1, x_2+y_2, \ldots, x_k+y_k) \leqq \varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) + \varphi(y_1, y_2, \ldots, y_k).$$

Dans l'espace d'ordre k, l'inégalité

$$\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_k) \leqq 1$$

représente un corps convexe ayant l'origine comme point intérieur.

Soient maintenant $U_1, U_2, \ldots, U_k$, k fonctions continues définies sur un continu irréductible $\mathcal{C}$, considérons l'élément différentiel

$$\varphi(dU) = \varphi(dU_1, dU_2, \ldots, dU_k),$$

que nous appellerons *élément différentiel de Minkowski* (¹).

Je dis que, pour qu'un continu $\mathcal{C}$ soit capable, relativement à φ, d'une intégrale dans le champ des fonctions continues, il est nécessaire et suffisant que $\mathcal{C}$ possède la même propriété relativement aux éléments $|dU_1|, |dU_2|, \ldots, |dU_k|$.

D'après nos hypothèses, il existe, en effet, deux constantes m et M telles que

$$(4) \qquad \begin{aligned} &m\sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + \ldots + dU_k^2} \\ &\quad \leqq \varphi[dU_1, dU_2, \ldots, dU_k] \leqq M\sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + \ldots + dU_k^2}; \end{aligned}$$

de là suit que $\mathcal{C}$ sera capable d'une intégrale relativement φ, s'il l'est pour l'élément,

$$\sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + \ldots + dU_k^2};$$

or, on a, pour ce dernier élément.

$$\begin{aligned} |dU_1|, |dU_2|, \ldots, |dU_k| &\leqq \sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + \ldots + dU_k^2} \\ &\leqq |dU_1| + |dU_2| + \ldots + |dU_k|, \end{aligned}$$

et cette double inégalité démontre notre résultat.

(¹) A cause de la métrique que cet élément fournit dans l'espace $(U_1, \ldots, U_k)$, métrique qui a été définie par Minkowski.

En particulier, pour que $\mathcal{C}$ soit à variation $V_\varphi(\mathcal{C})$ bornée, avec

$$V_\varphi(\mathcal{C}) = \lim_{n \to \infty} \sum_1^n \varphi[U(P_i) - U(P_{i-1})],$$

les notations étant les mêmes que précédemment, il est nécessaire et suffisant que $\mathcal{C}$ soit à variation U_j bornée ($j = 1, 2, \ldots, k$) : c'est la traduction abstraite du théorème de Jordan relatif aux courbes rectifiables.

Plus généralement, considérons un élément différentiel de la forme

$$\varphi(P; dU_1, dU_2, \ldots, dU_k),$$

qui, lorsque P est fixe, se réduit à un élément différentiel de Minkowski; supposons que cet élément soit continu par rapport à toutes les variables; P, dU_1, dU_2, ..., dU_k, et que l'on puisse trouver un nombre m tel que

$$\varphi(P; dU_j) \geqq m\sqrt{dU_1^2 + dU_2^2 + \ldots + dU_k^2},$$

alors, en vertu de nos hypothèses, un nombre M peut être déterminé de sorte qu'ait lieu la double inégalité (4) et la conclusion est la même que précédemment.

Comme exemple d'un tel élément, j'indiquerai le suivant :

$$\sqrt{A(P)\, dU_1^2 + 2B(P)\, dU_1\, dU_2 + C(P)\, dU_2^2},$$

où les fonctions continues A, B, C doivent satisfaire à des conditions bien évidentes.

Enfin, on peut abstraire encore la notion d'élément différentiel de Minkowski comme il suit : supposons qu'à chaque point E de l'espace où est plongé $\mathcal{C}$, nous fassions correspondre un point p d'un espace vectoriel normé e de façon que la correspondance soit continue [1]; soit $|p|$ la norme de p, nous pouvons nous proposer le même problème que précédemment pour l'intégrale curviligne définie comme il suit :

$$\int_{\mathcal{C}} f(P)\,|dp| = \lim_{n \to \infty} \sum_{i=1}^n f(\pi_i)\,|p_i - p_{i-1}|,$$

où p_i désigne l'image du point P_i.

---

[1] Il suffit même que la correspondance soit définie et continue sur ($\mathcal{C}$).

Pour que $\mathcal{C}$ soit capable d'une intégrale, il est nécessaire qu'il soit à variation e bornée, ce nombre étant défini par

$$\mathrm{V}_e(\mathcal{C}) = \lim_{n \to \infty} |p_i - p_{i-1}|,$$

suivant les mêmes notations que celles déjà employées.

On voit, comme précédemment, que, pour que $\mathcal{C}$ soit à variation e bornée, il faut que tous les points d'une même tranche de $\mathcal{C}$ aient la même image; en particulier si la correspondance entre E et e est biunivoque et bicontinue, $\mathcal{C}$ doit être un arc de Jordan.

7. **Généralisations de la notion de variation U à un ensemble.** — La variation U d'un continu peut être définie d'autres façons, ou plutôt, on peut donner à cette définition une forme différente qui permettra de généraliser les conceptions précédentes à des ensembles plus généraux que les continus et nous montrera la voie vers une théorie des intégrales de surfaces.

Rappelons que, pour qu'un continu $\mathcal{C}$ soit à variation U bornée, il faut que U(P) soit une fonction de tranche $\mathrm{U}(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ et alors la variation de $\mathcal{C}$ n'est autre que la variation de la fonction $\mathrm{U}(t)$ dans l'intervalle $(0 \leqq t \leqq 1)$. Pour calculer cette variation, on peut employer l'un des deux procédés suivants, lorsque U(P) est continue.

1° *Procédé ordinaire.* — Nous divisons l'intervalle $(0, 1)$ de l'axe des t en invervalles partiels (t_{i-1}, t_i) et, dans chacun d'eux, nous considérons l'oscillation de la fonction U soit ω_i, puis nous formons la somme

$$\sum_1^n \omega_i.$$

Par passage à la limite nous avons la quantité que nous cherchons. Observons que la quantité ω_i est la mesure de l'ensemble des valeurs de U qui correspondent à l'ensemble des tranches dont les indices sont compris entre t_{i-1} et t_i.

2° *Procédé de Banach* [1]. — A chaque valeur de U faisons corres-

[1] S. Banach, *Sur les lignes rectifiables et les surfaces dont l'aire est finie* (*Fund.*

pondre le nombre $N_{\mathcal{C}}(U)$ défini de la façon suivante : $N_{\mathcal{C}}(U)$ est égal au nombre des tranches sur lesquelles $U(t)$ prend la valeur U si ce nombre est borné, et à l'infini dans le cas contraire; on a, d'après M. Banach,

$$V_U(\mathcal{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mathcal{C}}(U)\, dU. \tag{5}$$

De là, tout d'abord, deux procédés pour généraliser la notion de variation U à un ensemble E qui n'est plus forcément un continu irréductible.

1° Supposons que, quel que soit n, on puisse diviser E en n ensembles disjoints $E_i^{(n)}$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ tels que le diamètre de chacun des $E_i^{(n)}$ tende vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et tels de plus $e_i^{(n)}$ désignant l'ensemble des valeurs U correspondant à $E_i^{(n)}$, l'ensemble $e_i^{(n)}$ de l'axe des U soit mesurable; si l'expression

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n m(e_i^{(n)})$$

a un sens, quelle que soit la méthode choisie pour la division, pourvu que les conventions précédentes soient respectées, nous appellerons la limite précédente la variation U de $E[V_U(E)]$.

L'intégrale, au sens de Riemann,

$$\int_E f(P)\,|dU|$$

se définira de même comme la limite, lorsqu'elle existe, de la somme

$$\sum_1^n f(\pi_i^{(n)})\, m(e_i^{(n)}),$$

où $\pi_i^{(n)}$ désigne un point de l'ensemble $E_i^{(n)}$. L'intégrale au sens de Lebesgue se définirait d'une façon analogue.

Math., t. 7, 1925, p. 225-236). Nous aurons plus tard l'occasion de remarquer que la généralisation d'un procédé, donné par Minkowski à propos de la longueur, donne le procédé de M. Banach.

2° Par le procédé de Banach, à chaque valeur de U, nous ferons correspondre le nombre $N_E(U)$ des points de E où U(P) prend la valeur U et nous définirons $V_U(E)$ par l'intégrale de Lebesgue

$$V_U(E) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_E(U)\, dU, \tag{6}$$

lorsque cette intégrale existe. Ainsi un continu $\mathcal{C}$ n'est à variation bornée suivant l'une ou l'autre des définitions précédentes que s'il l'est suivant la définition exposée au début et si, de plus, l'ensemble de ses tranches qui comprennent plus d'un point est à variation U nulle; c'est-à-dire lorsqu'il est capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues.

Ensuite l'intégrale

$$\int_E f(P)\,|dU|$$

sera définie de la façon suivante : à chaque valeur de U pour laquelle il y a n points $P_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ de E tels que $U(P_i) = U$, nous ferons correspondre la fonction

$$F(U) = \sum_1^n f(P_i),$$

si le nombre des points de E pour lesquels $U(P) = U$ n'est pas fini, nous ne définirons pas F(U); nous poserons alors, puisque F(U) est définie presque partout,

$$\int_E f(P)\,|dU| = \int_{-\infty}^{+\infty} F(U)\, dU, \tag{7}$$

lorsque la dernière intégrale a un sens.

Comme on le voit, il semble difficile de donner, pour l'un ou l'autre de ces procédés, une définition de l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} f(P)\, dU,$$

car l'ordre des points n'a pas été introduit et toute définition de l'ordre qui ne procéderait pas suivant les tranches semble dénuée d'intérêt.

Pour les intégrales qui proviennent d'éléments différentiels plus généraux, on peut, dans certains cas, adapter les généralisations précédentes à ces éléments, tel est par exemple le cas des éléments de Minkowski. Indiquons comment on peut le faire pour l'élément $\sqrt{dU^2 + dV^2}$. Comme précédemment, décomposons E suivant les ensembles $E_i^{(n)}$ et soient $e_i^{(n)}$ et $f_i^{(n)}$ les ensembles des valeurs de U et de V qui correspondent à $E_i^{(n)}$; pour $g_i^{(n)}(\alpha)$ les ensembles des valeurs $U\cos\alpha + V\sin\alpha$; nous définirons, par exemple, la variation de E suivant l'élément différentiel précédent par l'une ou l'autre des expressions suivantes :

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n \sqrt{m^2(e_i^{(n)}) + m^2(f_i^{(n)})},$$

$$\lim_{n \to \infty} \sum_1^n \operatorname*{borne\ sup}_{0 \leqq \alpha < \pi} m[g_i^{(n)}(\alpha)],$$

$$\frac{1}{2}\int_0^\pi V_E(U\cos\alpha + V\sin\alpha)\,d\alpha,$$

en supposant comme toujours que ces quantités ont un sens.

8. **Intégrales de surfaces.** — Pour transposer les considérations précédentes aux intégrales de surface, considérons deux fonctions U(P) et V(P) continues définies sur un ensemble E. A chaque point P de E nous ferons correspondre le point du plan des UV :

$$U = U(P), \qquad V = V(P).$$

Les considérations précédentes nous permettent alors de donner deux définitions de la variation (U, V) de E :

1° Comme précédemment, divisons E en n morceaux $E_i^{(n)}$, dont le diamètre tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment et, pour chaque morceau, considérons son image $e_i^{(n)}$ dans le plan des UV, formons la somme des mesures de chacun de ces ensembles (en supposant que chacun des $e_i^{(n)}$ soit mesurable) :

$$\sum_1^n m(e_i^{(n)}),$$

la limite de cette quantité, quand n augmente indéfiniment, sera, par définition, la variation (U, V) de E : $V_{U,V}(E)$.

2° Chaque point du plan des U, V étant l'image de $N_E(U, V)$ points de E, nous poserons :

$$V_{U,V}(E) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} N_E(U, V)\, dU\, dV. \tag{8}$$

L'intégrale

$$\int_E f(P)\,|dU\, dV|$$

pourra être définie comme la limite de

$$\sum_1^n f(\pi_i^{(n)})\, m(e_i^{(n)}) \qquad (\pi_i^{(n)} \varepsilon E_i^{(n)}),$$

soit par

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} F(U, V)\, dU\, dV \tag{9}$$

avec

$$F(U, V) = \sum_{i=1}^{N_E(U,V)} f(P_i) \qquad [U(P_i) = U,\ V(P_i) = V],$$

lorsque $N_E(U, V)$ est fini (¹).

Quant à l'intégrale $\int_E f(P)\, dU\, dV$, nous n'arriverons à la définir que dans le cas particulier classique où nous appliquerons les résultats établis ici.

Des travaux de M. Banach, il résulte que les deux définitions précédentes de la variation coïncident lorsque E est une surface de Jordan homéomorphe à un carré. Considérons une telle surface homéomorphe au carré

$$0 \leqq u \leqq 1, \qquad 0 \leqq v \leqq 1$$

du plan des uv; les deux fonctions U et V, lorsqu'elles sont continues,

(¹) On peut également passer à des éléments différentiels plus généraux que le produit $dU\, dV$; ainsi, on peut démontrer un résultat analogue à celui exposé au n° 6 et relatif aux éléments différentiels de Minkowski.

deviennent alors des fonctions continues de u et de v, et M. Banach appelle correspondance à variation bornée

$$U = U(u, v), \qquad V = V(u, v)$$

tout couple de fonctions continues qui satisfont à l'une ou l'autre des conditions ci-dessus : ainsi, pour qu'une surface soit à variation UV bornée, il faut et il suffit que la correspondance précédente soit à variation bornée [1].

CHAPITRE II.

APPLICATIONS AUX INTÉGRALES CLASSIQUES.

9. Des définitions et des résultats précédents, nous allons faire l'application aux intégrales curvilignes les plus simples que l'on rencontre dans le calcul intégral ainsi qu'aux intégrales de surfaces classiques. Nous obtiendrons de nouvelles extensions des formules de Green dans le plan et dans l'espace; la limite d'application se trouvant fixée par les énoncés.

Considérons un continu irréductible $\mathcal{C}$ entre deux points A et B de l'espace euclidien ordinaire à trois dimensions où trois axes de coordonnées $Oxyz$ ont été tracés. Pour simplifier le langage, nous supposerons que ces trois axes sont rectangulaires, mais cela n'a rien d'essentiel comme on s'en rendra compte immédiatement.

---

(1) *Remarque sur les correspondances à variation bornée.* — Ces correspondances peuvent être caractérisées, comme les fonctions à variation bornée d'une variable par le fait suivant :

Pour qu'un couple de fonctions

$$U = U(u, v), \qquad V = V(u, v)$$

définies et continues dans le carré $(0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1)$, soit tel que l'intégrale

$$\int_0^1 \int_0^1 f(u, v) \mid dU\, dV \mid$$

ait un sens quelle que soit la fonction continue f, il faut et il suffit que le couple précédent forme une correspondance à variation bornée.

Comme fonction $U(P)$ nous prendrons la fonction continue

$$U(P) = x,$$

où x désigne l'abscisse du point P.

Nous n'avons rien à ajouter à ce que nous avons dit précédemment au sujet de la *variation de* $\mathcal{C}$; cependant nous voyons apparaître le caractère géométrique des considérations que nous venons de faire. Soient, en effet, comme auparavant, $P_0 = A, P_1, P_2, \ldots, P_n = B$ une suite ordonnée de points du continu, x_i l'abscisse du point P_i, nous sommes amenés à la considération de la somme

$$\sum_1^n |x_i - x_{i-1}|,$$

dont chaque élément est la projection sur l'axe des x du côté $P_{i-1}P_i$ du polygone $P_0, P_1, \ldots, P_n$ inscrit dans $\mathcal{C}$; ainsi :

La variation x du continu $\mathcal{C}$ est la limite vers laquelle tend la somme des projections des côtés d'une ligne polygonale inscrite dans $\mathcal{C}$ lorsque le nombre des côtés de ce polygone augmente indéfiniment, chacun d'eux tendant vers zéro.

Une ligne polygonale est inscrite dans $\mathcal{C}$ lorsque ses sommets, pris dans l'ordre où ils se rencontrent en la parcourant, forment une suite ordonnée; l'indice d'une tranche étant une fonction continue de point sur le continu, nous avons remplacé dans la définition précédente la condition que la différence des indices des tranches de deux points consécutifs du polygone tende vers zéro par la condition que chacun des côtés du polygone tende vers zéro.

Dans le cas où $\mathcal{C}$ est un arc simple, ou plus généralement lorsque $\mathcal{C}$ désigne un continu de Jordan, pouvant avoir des points multiples, la quantité $V_x(\mathcal{C})$ est susceptible d'une autre définition, analogue à celle de M. Lebesgue pour la longueur, et qui se justifie de la même façon.

La quantité $V_x(\mathcal{C})$ *est la plus petite limite de toutes les plus petites limites vers lesquelles tendent les variations* x *d'une suite de lignes polygonales qui tendent vers* $\mathcal{C}$.

Pour qu'un continu irréductible $\mathcal{C}$ soit à variation x bornée, il est nécessaire que chacune de ses tranches qui contient plus d'un point soit située dans un plan perpendiculaire à Ox; désignant alors par $x(t)$ $(0 \leqq t \leqq 1)$ l'abscisse de la tranche d'indice t, il est nécessaire et suffisant que la fonction $x(t)$ soit à variation bornée et alors $V_x(\mathcal{C})$ est la variation totale de $x(t)$ dans $(0, 1)$; par suite

$$V_x(\mathcal{C}) \geqq \int_0^1 |x'(t)|\, dt,$$

le signe d'égalité n'ayant lieu que si la fonction x est absolument continue.

Désignons alors par v la variation de l'ensemble des tranches dont l'indice est compris entre zéro et t [on a : $0 \leqq v \leqq V_x(\mathcal{C})$], à cause de la continuité de v, on peut parler de la tranche T_v au lieu de parler de la tranche T_t. La décomposition de $\mathcal{C}$ en tranches T_v est semi-continue et linéaire, mais une tranche T_v peut se composer d'un ensemble de tranches T_t dont les indices comprennent tout un intervalle de l'axe des t.

Cette décomposition définit sur $\mathcal{C}$ une métrique et l'on peut alors parler d'un ensemble mesurable x de tranches (T_t ou T_v) et de la variation x d'un tel ensemble.

Les mêmes définitions s'appliquent à un ensemble de points de $\mathcal{C}$ si, à ce point de vue, on convient d'identifier l'ensemble de points avec l'ensemble des tranches qui le supportent; ainsi la variation x de la somme de deux ensembles disjoints peut être inférieure à la somme des variations de chacun des deux ensembles; cet inconvénient disparaît, comme on le verra, lorsque le continu est capable d'une intégrale.

10. Nous avons vu, dans le chapitre précédent, que, pour que $\mathcal{C}$ soit capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues, il fallait qu'il fût à variation bornée, montrons à présent que la condition nécessaire et suffisante pour qu'il en soit ainsi est que l'ensemble de ses tranches qui contiennent plus d'un point soit à variation x nulle.

Si nous montrons que les tranches qui contiennent plus d'un point sont, à l'exception peut-être d'un ensemble de tranches de variation x nulle, des segments de droite parallèles au plan des xy, le résultat sera acquis, car la même démonstration conduira à une proposition semblable relativement au plan xz et la combinaison de celle-ci et de la précédente exprime précisément ce que nous voulons démontrer.

Considérons donc la fonction continue de point

$$f(\mathrm{P}) = z,$$

et supposons que l'ensemble E des tranches sur lesquelles z n'est pas constant soit de variation positive, c'est-à-dire que l'ensemble des tranches qui ne se réduisent pas à un segment de droite parallèle au plan xy soit de variation x positive, nous allons voir que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} z\,dx$$

n'a pas de sens.

Pour cela remarquons d'abord qu'en désignant par ε un nombre positif quelconque, l'ensemble des tranches sur lesquelles l'oscillation de z n'est pas inférieure à ε est fermé et, par suite, mesurable x. Soient alors $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_\nu, \ldots$ une suite de nombres positifs décroissants et qui tendent vers zéro lorsque ν augmente indéfiniment, E_ν l'ensemble des tranches sur lesquelles l'oscillation de z n'est pas inférieure à ε_ν, on a évidemment :

$$\mathrm{E} = \lim_{\nu \succ \infty} \mathrm{E}_\nu.$$

l'ensemble E est donc mesurable x et, quant aux variations, on a

$$\mathrm{V}_x(\mathrm{E}) = \lim_{\nu \succ \infty} \mathrm{V}_x(\mathrm{E}_\nu).$$

D'après notre hypothèse, $\mathrm{V}_x(\mathrm{E})$ est positif, il en est donc de même de $\mathrm{V}_x(\mathrm{E}_\nu)$ à partir d'une certaine valeur de ν; désignons par k une valeur de ν telle que $\mathrm{V}_x(\mathrm{E}_k)$ soit positif.

Cela posé, soit $\mathrm{P}_i (i = 1, 2, \ldots, n)$ une suite ordonnée de points de $\mathcal{C}$, t_i les indices des tranches correspondantes, posons :

1° Lorsque $x(\mathrm{P}_i) - x(\mathrm{P}_{i-1}) \geqq 0$,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_i &= \text{borne sup } f(\mathrm{P}) = z \\ m_i &= \text{borne inf } f(\mathrm{P}) = z \end{aligned}\right\} \mathrm{P}\,\varepsilon\,\mathrm{T}_t \qquad (t_{i-1} \leqq t < t_i);$$

2° Lorsque $x(\mathrm{P}_i) - x(\mathrm{P}_{i-1}) \leqq 0$,

$$\left.\begin{aligned} \mathrm{M}_i &= \text{borne inf } f(\mathrm{P}) = z \\ m_i &= \text{borne sup } f(\mathrm{P}) = z \end{aligned}\right\} \mathrm{P}\,\varepsilon\,\mathrm{T}_t \qquad (t_{i-1} \leqq t < t_i);$$

de sorte que le produit

$$(M_i - m_i)[x(P_i) - x(P_{i-1})]$$

n'est jamais négatif.

Considérons les deux sommes

$$S = \sum_1^n M_i[x(P_i) - x(P_{i-1})],$$

$$s = \sum_1^n m_i[x(P_i) - x(P_{i-1})],$$

pour que $\int_{\mathcal{C}} z\,dx$ il faut que ces deux sommes tendent vers une limite commune lorsque n augmente indéfiniment, chacune des quantités $t_i - t_{i-1}$ tendant vers zéro. Or on a

$$S - s = \sum_{i=1}^n (M_i - m_i)[x(P_i) - x(P_{i-1})] \geqq \varepsilon_k \Sigma' |x(P_i) - x(P_{i-1})|,$$

où l'accent de la dernière somme indique que l'on a conservé seulement les intervalles (t_{i-1}, t_i) qui contiennent au moins une tranche appartenant à E_k.

Or il est très facile de montrer que, sous les conditions précédentes, on a

$$\lim \Sigma' |x(P_i) - x(P_{i-1})| = V_x(E_k),$$

et il suit de l'inégalité précédente

$$\underline{\lim}(S - s) \geqq \varepsilon_k V_x(E_k).$$

Les deux sommes S et s ne sauraient donc avoir une limite commune, la fonction z n'est donc pas intégrable, contrairement à l'hypothèse admise sur $\mathcal{C}$.

Nous arrivons ainsi à une contradiction qui démontre notre assertion.

11. Ajoutons un exemple de continu à variation x bornée et qui n'est pas capable d'une intégrale. Ce continu est situé dans le

plan xy, il est irréductible entre les deux points d'abscisses o et 1 de l'axe Ox et il admet comme continus de condensation des segments de longueur 2 parallèles à Oy et centrés sur Ox; les centres de ces segments formant un ensemble fermé sans point intérieur et de mesure positive; dans le complémentaire de cet ensemble le continu est la courbe représentative d'une fonction $y=f(x)$ définie et continue dans chacun des intervalles contigus à l'ensemble fermé précédent, fonction choisie de façon à réaliser les conditions précédentes. La variation x d'un tel continu est 1, mais il est de mesure superficielle positive et la fonction y n'est pas intégrable sur lui.

12. Variation d'un continu d'après M. Banach. — J'ai déjà expliqué ce qu'il faut entendre par là dans le cas général; nous allons, dans le cas présent, légitimer la définition donnée en l'adaptant à notre objet.

Pour éviter les longueurs, nous bornerons les considérations aux continus $\mathcal{C}$ à variation bornée suivant la définition précédente. Pour un tel continu représentons par $n_{\mathcal{C}}(x)$ le nombre de ses tranches d'abscisse x, nous allons voir que la fonction $n_{\mathcal{C}}(x)$ est sommable et que l'on a

$$V_x(\mathcal{C})=\int_{-\infty}^{+\infty} n_{\mathcal{C}}(x)\,dx.$$

Inscrivons dans $\mathcal{C}$ un polygone ayant pour sommets une suite ordonnée de 2^p points, p désignant un entier positif; ces points étant situés sur des tranches d'indice t_k de façon que la variation $v(t_k)$ du continu formé par les tranches $(0, t_k)$ ait pour variation

$$k\frac{V_x(\mathcal{C})}{2^p} \qquad (k=1, 2, \ldots, 2^p).$$

Définissons alors une fonction $n_p(x)$ de la façon suivante : elle sera égale au nombre des côtés du polygone qui traversent le plan d'abscisse x augmenté du nombre des côtés de ce polygone qui ont leur extrémité d'indice le plus élevé dans ce plan; on a évidemment

$$n_p(x)\leqq n_{\mathcal{C}}(x).$$

Les fonctions $n_p(x)$ sont sommables et croissent avec l'indice, donc : ou bien leur limite $n(x)$ est sommable, ou bien la suite de nombres

$$\int_{-\infty}^{+\infty} n_p(x)\,dx$$

augmente indéfiniment. Or ce dernier cas ne se présente pas puisque la limite de la quantité précédente est la variation x de $\mathcal{C}$, finie par hypothèse; donc

$$V_x(\mathcal{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} n(x)\,dx \tag{10}$$

et

$$n(x) \leqq n_{\mathcal{C}}(x).$$

D'autre part, si l'on a $n_{\mathcal{C}}(x) \geqq m$ et si les tranches correspondantes $T_{t_1}, T_{t_2}, \ldots, T_{t_m}$ sont telles que

$$\varphi(t_1) < \varphi(t_2) < \ldots < \varphi(t_m),$$

on peut choisir p tel que

$$\frac{1}{2^p} < \min[\varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1})] \qquad (k = 2, \ldots, m),$$

et il viendra alors $n_p(x) \geqq m$; si les tranches correspondantes sont telles que l'un des nombre $\varphi(t_k)$ est égal à $\varphi(t_{k-1})$, alors toutes les tranches dont l'indice est compris entre t_{k-1} et t_k ont la même abscisse, de sorte que $n_{\mathcal{C}}(x) = \infty$ et que cette éventualité se produit pour une infinité dénombrable de valeurs de x au plus.

En définitive on a donc, par passage à la limite,

$$n(x) \geqq n_{\mathcal{C}}(x),$$

sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x.

Mais l'inégalité contraire a déjà été obtenue, de sorte que

$$n(x) = n_{\mathcal{C}}(x),$$

sauf peut-être pour un ensemble au plus dénombrable de valeurs de x.

La fonction $n_{\mathcal{C}}(x)$ est donc sommable et l'on a bien, d'après (10),

$$V_x(\mathcal{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{\mathcal{C}}(x)\, dx.$$

Soit $\mathcal{E}$ un ensemble de tranches de $\mathcal{C}$, désignons par $n_{\mathcal{E}}(x)$ le nombre des tranches de cet ensemble qui ont x pour abscisse, on a

$$V_x(\mathcal{E}) = \int_{-\infty}^{+\infty} n_{\mathcal{E}}(x)\, dx, \tag{11}$$

pourvu que $\mathcal{E}$ soit mesurable x. Cette égalité se démontre en effet facilement pour les ensembles ouverts et pour les ensembles fermés, de là on passe au cas général.

Considérons à présent le continu $\mathcal{C}$ comme un ensemble de points et soit $N_{\mathcal{C}}(x)$ le nombre des points du continu dont l'abscisse est x, on a évidemment

$$N_{\mathcal{C}}(x) \geqq n_{\mathcal{C}}(x),$$

et l'inégalité a lieu seulement dans le cas où il y a une tranche au moins d'abscisse x et contenant plus d'un point, auquel cas on a $N_{\mathcal{C}}(x) = \infty$.

Les considérations du numéro précédent prouvent d'autre part (si l'on y remplace les mots : l'ensemble des tranches sur lesquelles l'oscillation de z n'est pas inférieure à ε, par les mots : l'ensemble des tranches dont le diamètre n'est pas inférieur à ε) que l'ensemble $\mathcal{E}$ des tranches qui contiennent plus d'un point est la limite d'une suite d'ensembles fermés, il est donc mesurable x.

Par suite l'inégalité

$$V_x(\mathcal{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mathcal{C}}(x)\, dx$$

a lieu seulement dans le cas où l'ensemble $\mathcal{E}$ est de variation nulle, c'est-à-dire lorsque $\mathcal{C}$ est capable d'une intégrale; si cela n'est pas, l'intégrale précédente est infinie.

13. **Variation d'un continu d'après Minkowski.** — A la définition de la variation que nous allons exposer à présent, nous attachons le nom de Minkowski parce qu'elle se rattache facilement aux défini-

tions de la longueur et de l'aire données par cet illustre auteur [1].

Reprenons un continu $\mathcal{C}$ irréductible entre deux points et de chacun de ses points, comme centre décrivons un cercle de rayon ρ donné [2] et dont le plan est perpendiculaire à l'axe des x. Soit $v_\rho(\mathcal{C})$ la mesure de l'ensemble fermé $\mathcal{C}_\rho$ des points appartenant à l'un des cercles au moins; nous appellerons variation x inférieure et supérieure de $\mathcal{C}$, au sens de Minkowski, les quantités

$$\underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{v_\rho(\mathcal{C})}{\pi\rho^2}, \qquad \overline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \overline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{v_\rho(\mathcal{C})}{\pi\rho^2}.$$

Lorsque le continu est plan, au lieu de cercles on peut prendre des segments de droites de longueur 2ρ perpendiculaires à Ox et centrés en chaque point de $\mathcal{C}$; désignant par $s_\rho(\mathcal{C})$ la mesure de l'ensemble plan fermé composé des points qui font partie d'un de ces segments au moins, on peut poser

$$\underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \underline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{s_\rho(\mathcal{C})}{2\rho}, \qquad \overline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \overline{\lim}_{\rho \to 0} \frac{s_\rho(\mathcal{C})}{2\rho}.$$

Un continu sera dit à variation x bornée au sens de Minkowski lorsque

$$V_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \overline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) \qquad (< \infty).$$

De ces définitions il suit qu'un continu plan à variation x bornée est d'aire nulle, il peut donc servir à limiter un domaine quarrable.

Dans le cas général, il est d'abord évident que l'on a

$$v_\rho(\mathcal{C}) \geqq \pi\rho^2 D,$$

en désignant par D la largeur du continu suivant la direction de plan perpendiculaire à Ox; de là

$$\underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) \geqq D.$$

Pour comparer la définition de Minkowski aux précédentes, remar-

---

[1] H. Minkowski, *Ueber die Begriffe Länge, Oberfläche und Volumen* (*Werke*, t. 2, p. 122-127).

[2] Cela n'est pas naturel mais cela est simple. Au lieu d'un cercle on peut prendre un domaine fermé quarrable.

quons d'abord que, pour qu'un continu soit à variation inférieure bornée, il est nécessaire que chacune de ses tranches qui contiennent plus d'un point soit dans un plan perpendiculaire à Ox. Dans le cas contraire, en effet, le continu admettrait un continu limite c [1] de largeur d positive et alors on pourrait trouver dans $\mathcal{C}$ une suite de continus c_i ($i = 1, 2, \ldots$) tels que

$$c_i c_k = 0 \quad \text{si} \quad i \neq k; \qquad c_i c = 0; \qquad \lim c_i = c,$$

et dont la largeur surpasserait $\frac{d}{2}$.

Or puisque $\mathcal{C}$ contient les continus disjoints c_i, on aura, quel que soit n donné, pourvu que ρ soit suffisamment petit,

$$v_\rho(\mathcal{C}) \geqq \sum_{i=1}^{n} v_\rho(c_i) \geqq n\pi\rho^2 \frac{d}{2},$$

de là, en faisant tendre ρ vers zéro,

$$\underline{\mathrm{V}}_x^{(\mathrm{M})}(\mathcal{C}) \geqq \frac{n\,d}{2},$$

n désignant un nombre positif quelconque, cela veut dire que $\mathcal{C}$ n'est pas à variation bornée.

Cela étant, divisons l'intervalle $(0, 1)$ image de $\mathcal{C}$ sur l'axe des t en n intervalles partiels au moyen des $n+1$ points t_i

$$(t_{i-1} < t_i;\ t_1 = 0,\ t_{n+1} = 1)$$

et considérons l'ensemble des tranches T_t telles que $(t_{i-1} \leqq t \leqq t_i)$; cet ensemble constitue, lorsque toute tranche de $\mathcal{C}$ contenant plus d'un point est située dans un plan perpendiculaire à Ox, un continu $\mathcal{C}_i$ et l'on a, pourvu que ρ soit suffisamment petit,

$$v_\rho(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n} v_\rho(\mathcal{C}_i) - \varepsilon.$$

---

[1] Cette notion est due à M. Zarankiewicz, *Sur les points de division dans les ensembles connexes* (*Fund. Math.*, t. 9, 1927, p. 124-171).

De là

$$\underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) = \sum_{i=1}^{n} \underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}_i) \geqq \sum_{i=1}^{n} | x_i - x_{i-1} |,$$

en désignant par x_i l'abscisse de la tranche d'indice t.

De l'inégalité précédente on déduit

$$(12) \qquad \underline{V}_x^{(M)}(\mathcal{C}) \geqq \lim \sum_{i=1}^{n} | x_i - x_{i-1} | = V_x(\mathcal{C}).$$

Pour obtenir une autre inégalité de comparaison, remarquons d'abord que si l'ensemble $\mathcal{E}$ des tranches de $\mathcal{C}$ qui contiennent plus d'un point est de variation positive, on peut trouver un nombre ε tel que l'ensemble fermé des tranches dont le diamètre n'est pas inférieur à ε est de variation x positive (¹); cet ensemble a pour projection sur Ox un ensemble e fermé de mesure positive, comme il ressort des considérations du paragraphe précédent.

La section de l'ensemble $\mathcal{C}_\rho$ par un plan dont la trace sur Ox fait partie de e a d'autre part une section supérieure à $2\rho\varepsilon$; on a donc

$$v_\rho(\mathcal{C}) \geqq 2\rho\varepsilon m(e),$$

c'est-à-dire que la variation de $\mathcal{C}$ au sens de Minkowski est infinie.

Supposons maintenant que $\mathcal{E}$ soit à variation x nulle, c'est-à-dire que $\mathcal{C}$ soit capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues, on a vu qu'on avait alors

$$V_x(\mathcal{C}) = \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mathcal{C}}(x)\,dx.$$

Mais, dans un plan perpendiculaire à Ox et pour lequel $N_{\mathcal{C}}(x)$ est fini, c'est-à-dire pour presque toutes les valeurs de x, la section de $\mathcal{C}_\rho$ par ce plan a une aire non supérieure à $\pi\rho^2 N_{\mathcal{C}}(x)$; de là, en appliquant le théorème relatif à la réduction des intégrales

$$v_\rho(\mathcal{C}) \leqq \pi\rho^2 \int_{-\infty}^{+\infty} N_{\mathcal{C}}(x)\,dx,$$

(¹) Il suffit de reprendre le raisonnement du n° 10.

c'est-à-dire

$$\frac{v_\rho(\mathcal{C})}{\pi\rho^2} \leqq V_x(\mathcal{C}),$$

d'où, en faisant tendre ρ vers zéro,

$$\overline{V_x^{(M)}}(\mathcal{C}) \leqq V_x(\mathcal{C}).$$

En comparant cette inégalité avec celle obtenue précédemment (12), nous en tirons

$$V_x^{(M)}(\mathcal{C}) = V_x(\mathcal{C}).$$

Chaque fois que $V_x^{(M)}(\mathcal{C})$ existe, cette quantité est donc égale à $V_x(\mathcal{C})$ et ce cas se présente seulement lorsque le continu $\mathcal{C}$ est capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues.

14. **Variation x d'un ensemble de points.** — Soit E un ensemble de points, nous avons déjà indiqué dans le premier Chapitre, quelles voies s'offraient à nous pour définir la variation x de cet ensemble; quoiqu'une voie nouvelle, celle de Minkowski, vienne encore s'ouvrir, nous n'étudierons pas les conséquences des différentes définitions que nous venons de poser ni les propriétés qui en résultent pour les ensembles mesurables x suivant ces définitions.

Une telle étude n'est en effet susceptible de son plein épanouissement que dans le cadre de la théorie de la mesure de Carathéodory [1] et, d'ailleurs, elle ferait double emploi avec celle, très complète, élaborée par M. Schauder [2] dans sa Thèse à propos de l'aire des surfaces : les résultats obtenus par M. Schauder, dans le premier Chapitre de son travail, sont en effet tous valables pour la variation x après quelques modifications évidentes d'énoncé. Une conséquence immédiate d'un résultat de l'auteur est que la variation x de E au sens de M. Banach est la plus petite de toutes les fonctionnelles qui satisfont aux conditions de Carathéodory et qui ne sont pas inférieures à la mesure supé-

---

(1) CARATHÉODORY, *Vorlesungen über reelle Funktionen*, p. 246-258.

(2) J. P. SCHAUDER, *The theory of surface measure* (*Fund. Math.* t. 8, p. 1-48). Il suffit, pour traduire les résultats de cet auteur dans notre langage, de changer les mots « mesurable Φ » par « mesurable x », suivant telle ou telle définition, et de considérer seulement les projections d'un ensemble sur l'axe des x.

rieure de la projection de E sur Ox; à ce titre cette fonctionnelle mérite une attention particulière.

15. Nous allons reprendre, en vue d'une application, la théorie de l'intégrale sur un continu $\mathcal{C}$ irréductible entre deux points A et B et capable d'une intégrale dans le champ des fonctions continues.

Une fonction de point $f(\mathrm{P})$ sera dite mesurable x sur $\mathcal{C}$ si l'ensemble des points P tels que $f(\mathrm{P}) > \mathrm{A}$ (ou $\geqq$, ou $\leqq$, ou $<$) est mesurable x quelle que soit la constante A; $f(\mathrm{P})$ étant supposée bornée on définira alors l'intégrale de Lebesgue : $\int_{\mathcal{C}} f(\mathrm{P})\,|dx|$; et de là on passera, par le procédé habituel, à la définition des fonctions sommables sur $\mathcal{C}$, et l'on étendra la notion d'intégrale.

Par définition nous poserons

$$\int_{\mathcal{C}} f(\mathrm{P})\,|dx| = \int_{\mathrm{AB}} f(\mathrm{P})\,|dx| = -\int_{\mathrm{BA}} f(\mathrm{P})\,|dx|.$$

D'après la formule (11) qui nous donne la mesure x d'un ensemble de tranches, on a d'ailleurs pour cette intégrale

$$\int_{\mathrm{AB}} f(\mathrm{P})\,|dx| = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\mathrm{abs\,P}=x} f(\mathrm{P}) \right\} dx, \tag{13}$$

la sommation étant étendue à tous les points P qui ont x pour abscisse, si le nombre de ces points est fini.

Venons maintenant à la définition de l'intégrale

$$\int_{\mathrm{AB}} f(\mathrm{P})\,dx$$

pour les fonctions $f(\mathrm{P})$ sommables sur $\mathcal{C}$, c'est-à-dire telles que l'intégrale

$$\int_{\mathcal{C}} |f(\mathrm{P})| . |dx|$$

ait un sens. Si nous appelons, comme auparavant $v(t)$ la variation de l'ensemble des tranches dont les indices sont compris entre o et t, la fonction $v(t)$ étant continue, on voit de suite qu'en repérant la tranche t au moyen du nombre $v(t)$, l'abscisse $x(v)$ d'une tranche est une fonction absolument continue de v, d'après la définition même de la variation. On a donc

$$\mathrm{V}_x(\mathcal{C}) = \int_0^{\mathrm{V}_x(\mathcal{C})} |x'(v)|\,dv,$$

la fonction $x'(v)$ est donc définie presque partout et égale à ± 1. Pour un point P du continu, nous appellerons *signe du point* (sgnP) la quantité

$$sgn\,\mathrm{P} = x'(v),$$

lorsque la tranche à laquelle appartient P n'a qu'un seul point et si $x'(v)$ existe; ailleurs nous ne définirons pas $x'(v)$; mais ce que nous venons de dire suffit pour définir

$$\int_{\mathrm{E}} dx = \int_{\mathrm{E}} x'(v)\,dv = \int_{\mathrm{E}} \operatorname{sgn}\mathrm{P}\,|dx|$$

pour un ensemble E de points de $\mathcal{C}$ mesurable x.

Cela étant, et pour une fonction $f(x)$ sommable x, nous poserons

$$\int_{\widehat{\mathrm{AB}}} f(\mathrm{P})\,dx = \int_{\widehat{\mathrm{AB}}} f(\mathrm{P}) \operatorname{sgn}\mathrm{P}\,|dx| = \int_0^{\mathrm{V}_x(\mathcal{C})} f[\mathrm{P}(v)]\,x'(v)\,dv.$$

En vertu de la formule (13) nous avons aussi

$$(14)\qquad \int_{\mathrm{AB}} f(\mathrm{P})\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\{ \sum_{\mathrm{abs}\,\mathrm{P}=x} f(\mathrm{P}) \operatorname{sgn}\mathrm{P} \right\} dx.$$

16. Remarquons à présent que si l'on considère un continu irréductible AB à variation x bornée un point C lui appartenant, les deux continus irréductibles AC et CB n'ont de points communs que sur la tranche de AB contenant C; inversement d'ailleurs si deux continus irréductibles AC et BC à variation x bornée n'ont d'autres points communs que ceux des tranches qui contiennent C, leur somme est un continu irréductible AB à variation x bornée.

Soient maintenant dans un plan deux axes de coordonnées rectangulaires Ox et Oy et deux continus irréductibles entre deux points A et B : $(\mathrm{AB})_1$ et $(\mathrm{AB})_2$ tous les deux à variation x bornée et capables d'une intégrale; supposons qu'ils n'aient pas de point commun en dehors de ceux qui appartiennent aux tranches contenant respectivement A et B. La réunion de ces deux continus forme, comme on le voit facilement, un continu $\mathcal{C}$ qui partage le plan en deux régions; la région intérieure étant d'ailleurs un domaine quarrable d'après ce que nous avons montré précédemment au sujet de la frontière.

Pour la commodité des raisonnements qui vont suivre, nous pouvons supposer, en vertu des remarques précédentes, que le point A est parmi ceux dont l'abscisse a est minimum sur $\mathcal{C}$ et le point B parmi ceux dont l'abscisse b est maximum.

Puisque $\mathcal{C}$ est à variation x bornée, presque toutes les parallèles à l'axe des y dont l'abscisse est comprise entre a et b coupent ce continu en un nombre fini (mais non borné) de points; nous allons voir que ce nombre est presque toujours pair.

Numérotons en effet les points de $\mathcal{C}$, qui ont la même abscisse, par ordre d'ordonnées croissantes : cela est possible pour presque toutes les abscisses, et de plus les points qui ont le même numéro forment un ensemble mesurable x d'après M. Schauder (*loc. cit.*). De plus, pour presque toutes les abscisses pour lesquelles le numérotage est possible, la dérivée $x'(v)$ existe tant sur $(AB)_1$ que sur $(AB)_2$, et est égale à ± 1. Par conséquent, en un point P où une telle droite rencontre $\mathcal{C}$, il y a au voisinage de P et de part et d'autre de cette droite des points de $\mathcal{C}$. Soient P′ et P″ deux points tels que le segment P′P″ contienne P et ne rencontre $\mathcal{E}$ qu'au point P; je dis que les deux points P′ et P″ n'appartiennent pas à la même région; en effet, s'il en était ainsi on pourrait trouver un polygone fermé, dont P′P″ serait l'un des côtés et qui n'aurait aucun point commun avec le continu $\mathcal{C}$ en dehors de P, or cela est impossible puisqu'il existe des points de $\mathcal{C}$ de part et d'autre de la droite P′P″. Donc, lorsqu'on se déplace sur la droite en question, dans le sens des ordonnées croissantes, on passe d'une région à une autre chaque fois qu'on rencontre la courbe; or, comme on part de la région extérieure pour y revenir, il suit de là que le nombre des points d'intersection de la droite avec $\mathcal{C}$ est pair. Pour la même raison, le nombre des points où une telle droite rencontre l'un ou l'autre des continus $(AB)_1$ ou $(AB)_2$ est impair pour presque toutes les droites d'abscisses x $(a < x < b)$; enfin en traversant $\mathcal{C}$ aux points dont le numéro est impair, on passe en général de l'extérieur à l'intérieur, et en la traversant aux points dont le numéro est pair, on passe de l'intérieur à l'extérieur.

Supposons que le continu $(AB)_1$ contienne les points de $\mathcal{C}$ dont l'ordonnée est minimum et allons de A à B suivant $(AB)_1$ puis revenons à A suivant $(AB)_2$; nous avons ainsi décrit $\mathcal{C}$ suivant un sens que nous appellerons positif $(\mathcal{C}^+)$; nous allons établir qu'en désignant par m le numéro d'un point P, on a, presque partout sur $\mathcal{C}^+$,

$$sgn\,P = (-1)^{m-1}.$$

Montrons-le pour les points qui ont le numéro 1; soit P un tel point d'abscisse x, pour lequel sgnP existe et est égal à ± 1; il est situé sur $(AB)_1$ et il nous faut montrer que $sgn\,P = 1$. On a

$$(AB)_1 = AP + PB;$$

si sgnP était égal à -1, PB admettrait des points à gauche de la droite d'abscisse et PA des points à droite; pour aller à B le continu PB devrait donc couper soit AP, soit l'une des deux droites d'abscisse x ou a, ce qui est impossible. Pour les autres numéros, la démonstration n'est pas plus difficile, il n'y a que des longueurs de raisonnement.

17. Passons maintenant à la formule de Green.

Considérons un domaine D *borné limité par une courbe $\mathcal{C}$ à variation x bornée et capable d'une intégrale dans le chanp des fonctions continues; soit $f(x, y)[=f(\mathrm{P})]$ une fonction définie presque partout dans* D *et sur $\mathcal{C}$ et absolument continue par rapport à y pour presque toutes les valeurs de x, supposons que $\frac{\partial f}{\partial y}$ soit sommable dans le domaine* D *et sur sa frontière, et que f soit sommable x sur $\mathcal{C}$, je dis que l'on a alors*

$$(15) \qquad -\int_{\mathcal{C}^+} f(x, y)\,dx = \int\int \frac{\partial f}{\partial y}\,dx\,dy,$$

$\mathcal{C}$ étant la somme de deux continus irréductibles entre deux points A et B, nous poserons comme précédemment

$$\mathcal{C}^+ = (AB)_1 + (BA)_2,$$

où A se trouve parmi les points d'abscisse minimum a, B parmi ceux d'abscisse maximum b de la frontière de D. D'après nos hypothèses, et le théorème sur la réduction des intégrales, on a

$$\int\int_{\mathrm{D}} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = \int_a^b \mathrm{F}(x)\, dx$$

avec

$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{\partial}{\partial y}\, dy$$

pour presque toutes les valeurs de x comprises entre a et b; c'est-à-dire pour les valeurs de x pour lesquelles non seulement $\frac{\partial f}{\partial y}$ est absolument continue, mais encore pour lesquelles l'intégrale précédente existe. Parmi ces valeurs de x nous ne conserverons que celles pour lesquelles $\mathcal{C}$ a un nombre fini pair de points d'abscisse x, la dérivée $x'(v)$ étant d'ailleurs en chacun d'eux égale à ± 1, tant sur $(\mathrm{AB})_1$ que sur $(\mathrm{AB})_2$. Après ces diverses suppressions il nous reste presque toutes les valeurs de l'intervalle (a, b).

Pour chacune de ces valeurs de x on a, en désignant par y_1, $y_2, \ldots, y_{2n}$ les ordonnées des divers points de $\mathcal{C}$ d'abscisse x,

$$\mathrm{F}(x) = \int \frac{\partial f}{\partial y}\, dy = -f(y_1, x) + f(y_2, x) - \ldots + f(y_{2n-1}, x) - f(y_{2n}, x).$$

Or, d'après les remarques précédentes, nous pouvons écrire

$$\mathrm{F}(x) = -\sum_{\mathrm{abs\,P} = x} \operatorname{sgn} \mathrm{P} f(\mathrm{P}),$$

de là

$$\int\int_{\mathrm{D}} \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_a^b \left\{ \sum_{\mathrm{abs\,P} = x} \operatorname{sgn} \mathrm{P} f(\mathrm{P}) \right\} dx = -\int_{\mathcal{C}^+} f(x, y)\, dx,$$

c'est la formule que nous avions annoncée.

De plus, nous avons obtenu la limite d'application de cette formule dans le champ des fonctions qui satisfont aux conditions énoncées ci-dessus : ce champ est si vaste que son élargissement me paraît à peu près impossible.

18. Par un simple changement de coordonnées on obtient la

formule :

$$\int\int_D \frac{\partial g}{\partial x}\, dx\, dy = \int_{\mathcal{C}^+} g(x, y)\, dy$$

ainsi que ses conditions d'application.

Des considérations précédentes nous déduisons aussi que la formule obtenue, en combinant les deux précédentes,

$$\int_{\mathcal{C}^+} (f\, dx + dy) + \int\int_D \left(\frac{\partial f}{\partial y} - \frac{\partial g}{\partial x}\right) dx\, dy = 0$$

ne pourra être appliquée, dans le domaine des fonctions f et g telles que $\frac{\partial f}{\partial y}$ et $\frac{\partial g}{\partial x}$ sont continues dans D et sur $\mathcal{C}$, que quand $\mathcal{C}$ est une courbe rectifiable.

De la formule de Green, nous venons de donner ici la démonstration sous la forme classique, mais les considérations précédentes permettent d'aller plus loin dans la transformation d'une intégrale double en une intégrale curviligne, et inversement ; ainsi, dans certains cas simples, lorsqu'un continu D quarrable est limité par un continu $\mathcal{C}$ admettant seulement un cercle centré à l'origine comme continu de condensation, alors on a, en choisissant convenablement le sens de parcours,

$$\int_{\mathcal{C}^+} f(x, y)\,(x\, dx + y\, dy) + \int\int_D \left(x \frac{\partial f}{\partial y} - y \frac{\partial f}{\partial x}\right) dx\, dy = 0.$$

Toutefois les méthodes précédentes ne nous fournissent aucune indication pour poser le problème de la réduction d'une intégrale double en une intégrale curviligne, dans le cas général d'un domaine D quarrable limité par un continu pouvant être décomposé en tranches suivant un ordre cyclique, la décomposition étant semi-continue ; la principale difficulté réside dans la définition de la notion destinée à remplacer celle de signe d'un point introduite ci-dessus.

19. **Variation xy d'une surface.** — Dans l'espace euclidien ordinaire où sont tracés trois axes de coordonnées rectangulaires, reprenons une surface de Jordan, sans point double, image d'un carré du plan

des (u, v),

$$(S) \quad x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v) \qquad (0 \leqq u \leqq 1,\ 0 \leqq v \leqq 1).$$

En prenant comme fonctions U(P) et V(P) d'un point $P(u, v)$ de la surface, les coordonnées x et y, et suivant la définition donnée au n° 8, nous dirons que *la surface* S *est à variation xy bornée si la correspondance*

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v)$$

est à variation bornée. Nous avons donné deux définitions de cette variation et rappelé que, dans ce cas, elles sont équivalentes; ainsi l'on a, par exemple, en désignant par π le plan des xy et par $N_S(xy)$, le nombre des points de S qui se projettent au point (xy) :

$$V_{xy}(S) = \int\int_{\pi} N_S(x, y)\, dx\, dy.$$

Il est aussi possible de donner d'autres définitions de cette quantité; ainsi, en menant de chaque point de S un segment centré en ce point, parallèle à Oz et de longueur 2ρ, ces segments formeront un ensemble fermé; soit $v_\rho(S)$ sa mesure, on démontre que :

$$(16) \qquad V_{xy}(S) = \lim_{\rho \to 0} \frac{v_\rho(S)}{2\rho},$$

cela se fait comme à propos de la variation x d'un continu irréductible (n° 13) et cette définition de la variation est conforme aux idées de Minkowski.

20. Une autre définition que nous étudierons encore se rattache aux idées de M. Lebesgue sur l'aire des surfaces courbes.

Considérons une suite de surfaces polyédrales S_n homéomorphes, elles aussi à un carré et qui, lorsque n augmente indéfiniment, tendent vers la surface S. La somme des projections des faces de S_n sur le plan xy sera appelée la variation xy [1] de S_n et désignée par $V_{xy}(S_n)$.

---

[1] Il est immédiat que cette définition est conforme aux précédentes; si nous l'avons mise sous cette forme c'est pour rendre plus intuitive et plus géométrique la définition de la variation.

Considérons la plus petite limite des variations xy des S_n, lorsque n augmente indéfiniment, et concevons ensuite toutes les suites possibles de surfaces polyédrales S_n qui tendent vers S, et prenons la plus petite limite de toutes ces plus petites limites, soit $V_{xy}^{(L)}(S)$: c'est ce nombre que nous appellerons la variation xy de S :

$$V_{xy}^{(L)}(S) = \underline{\lim}\{\underline{\lim}\, V_{xy}(S_n)\}. \tag{17}$$

Il est facile de démontrer que la quantité $V_{xy}^{(L)}(S)$ ne dépasse pas $V_{xy}(S)$. Comme pour l'aire, on peut démontrer que, sur une surface S à variation bornée, il existe des courbes planes à variation bornée suivant une direction choisie du plan des xy, à condition toutefois qu'il existe un point de cette surface dont les points voisins (au sens u, v) se projettent sur le plan des xy suivant un domaine contenant la projection du point en question. On peut aussi décomposer une telle surface en morceaux de variation xy aussi petite que l'on veut, ce qui permettra de définir sur celle-ci une mesure $|dxdy|$ et par suite de donner un sens à l'intégrale

$$\int\!\!\int_S f(P)\,|\,dx\,dy\,|,$$

ce sens étant évidemment différent de celui que l'on peut lui donner au moyen des considérations antérieures.

Parmi les surfaces dont on peut affirmer qu'elles sont à variation bornée au sens précédent, citons les surfaces telles que toute courbe rectifiable du plan des (u, v) se transforme en une courbe de S dont la projection sur le plan des xy est également rectifiable : ces surfaces sont les analogues, dans notre théorie, des surfaces rectifiables de M. Lebesgue. Pour une telle surface les fonctions x et y doivent satisfaire à une condition de Lipschitz d'ordre un, et cette condition est également suffisante. On peut démontrer alors la relation [1]

$$V_{xy}^{(L)}(S) = V_{xy}(S) = \int_0^1\int_0^1 \left|\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right| du\,dv, \tag{18}$$

[1] La démonstration peut se déduire des considérations développées par M. T. Radó à propos des surfaces rectifiables. T. Radó, *Ueber das Flächenmass rektifizierbarer Flächen* (*Math. Ann.*, t. 100, 1928, p. 445-479).

car le déterminant fonctionnel figurant sous le signe d'intégration existe pour presque tous les couples de valeurs (u, v).

21. Remarquons à présent que la variation $V_{xy}(S_n)$ d'une surface polyèdrale est inférieure à son aire; par suite la quantité $V_{xy}^{(L)}(S)$ ne dépasse pas l'aire de S au sens de M. Lebesgue; en permutant les variables x, y, z, nous avons donc le résultat suivant, semblable à un résultat relatif à la rectification des courbes :

Pour qu'une surface S soit quarrable, il est nécessaire qu'elle soit à variation bornée suivant les trois plans de coordonnées (et même suivant n'importe quelle direction de plan).

Cette condition n'est d'ailleurs, sans doute, pas suffisante; elle sera cependant dans tous les cas où l'on pourra trouver une suite de surfaces polyèdrales S_n dont les trois variations sur les plans de coordonnées restent bornées chacune par un nombre fixe, lorsque n augmente indéfiniment.

Nous touchons ici à la raison qui fait le problème de la quarrabilité des surfaces beaucoup plus difficile que celui de la rectification des courbes. Dans les deux cas les conditions géométriques de la variation sont analogues, mais, outre qu'elles ne sont pas suffisantes pour la quarrabilité, on ne sait pas les traduire analytiquement dans ce dernier cas.

22. Voici cependant un résultat donnant une condition nécessaire pour qu'une surface soit à variation $V_{xy}^{(L)}$ bornée et, par surcroît, pour qu'elle soit quarrable.

Soit la transformation

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v);$$

considérons un système de valeurs (u, v) tel que tout domaine du plan des (u, v) contenant ce point à son intérieur se transforme en un domaine du plan de xy contenant son image à son intérieur. Soit $P(u, v)$ le point de S correspondant, désignons par $n_S(x, y)$ le nombre des points de S qui se projettent au point (x, y) et qui possèdent la propriété précédente, je dis que

$$V_{xy}^{(L)}(S) \geqq \int\int_{\pi} n_S(x, y)\, dx\, dy.$$

L'ensemble des points où $n_S(x, y)$ prend une valeur donnée étant ouvert, l'intégrale précédente à un sens ou est infinie. Une surface S ne sera donc pas à variation $V_{xy}^{(L)}(S)$ bornée lorsque cette intégrale sera infinie, elle ne pourra donc être quarrable.

Nous démontrerons seulement ce résultat lorsque l'intégrale ci-dessus est finie; on verra facilement comment on peut conduire la démonstration dans le cas contraire. Considérons une suite de surfaces polyédrales S_n, qui tendent vers S et qui sont celles que les nombres $V_{xy}(S_n)$ ont $V_{xy}^{(L)}(S)$ pour limite (ou augmentent, indéfiniment si la surface n'est pas à variation bornée). On a évidemment, en désignant par E_p l'ensemble où $n_S(x, y)$ prend la valeur p et par $m(E_p)$ sa mesure,

$$\iint_\pi n_S(x, y)\, dx\, dy = m(E_1) + 2m(E_2) + \ldots + pm(E_p) + \ldots.$$

Quels que soient p et les nombres positifs donnés $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_p$, on peut déterminer un nombre N tel que, pour $n \geqq N$, la surface polyédrale S_n admette q points, qui jouissent de la propriété précédente sur un ensemble convenu dans E_q et dont la mesure diffère de celle de E_q d'un nombre inférieur à ε_q, pourvu que q ne dépasse pas p.

Or on a visiblement

$$V_{xy}(S_n) = \iint_\pi n_{S_n}(x, y)\, dx\, dy \geqq \sum_{i=1}^{p} i[m(E_i) - \varepsilon_i].$$

En passant à la limite, on aura donc, quels que soient les nombres p et ε_i,

$$V_{xy}^{(L)}(S) \geqq \sum_{i=1}^{p} i[m(E_i) - \varepsilon_i].$$

Choisissons les ε_i suffisamment petits pour que, ε étant un nombre donné à l'avance,

$$\sum_{0}^{\infty} i\varepsilon_i < \varepsilon,$$

puis p suffisamment grand de façon à satisfaire à

$$\iint_\pi n_S(x, y)\, dx\, dy - \sum_{i}^{p} im(E_i) < \varepsilon,$$

on obtient

$$V_{xy}^{(L)}(S) > \int\int_{\pi} n_S(x, y)\, dx\, dy - 2\varepsilon,$$

ε étant quelconque, on en déduit l'inégalité annoncée.

23. Dans l'application dont nous allons nous occuper à présent, nous n'utiliserons plus que la première définition de la variation xy d'une surface, sans nous occuper davantage de celle qui est conforme aux idées de M. Lebesgue. Je ne veux pas dire que cette dernière ne saurait rendre aucun service dans les applications de la théorie précédente, mais il faudrait approfondir davantage cette notion pour pouvoir l'utiliser.

Soit E un ensemble de points P mesurable à variation xy bornée; la notion de fonction $f(P)$ mesurable et de fonction sommable xy se transpose immédiatement à partir des définitions de M. Lebesgue. On peut alors parler, pour une fonction $f(P)$ sommable xy sur E, de l'intégrale

$$\int\int_{E} f(P)\, |dx\, dy|.$$

En vertu des résultats de M. Schauder (*loc. cit.*, p. 30), on montre que cette intégrale est égale à

$$\int\int_{\pi} \left\{ \sum_{P_i = P(x, y, z_i)} f(P_i) \right\} dx\, dy,$$

la sommation étant étendue à tous les points qui se projettent au point x, y.

Démontrons à présent le théorème de Green dans l'espace. Soient D un domaine borné et E sa frontière dont nous supposerons qu'elle est à variation xy bornée. Les points P de E seront divisés en trois classes en menant par P une parallèle à Oz :

Première classe : ceux pour lesquels on peut trouver sur cette parallèle un segment AB centré en P et tel que l'un des segments AP, ou PB, soit composé de points intérieurs à D, sauf le point P, tandis que l'autre est composé de points extérieurs à D, sauf le point P.

Deuxième classe : ceux pour lesquels on peut trouver sur cette parallèle un segment AB centré en P et dont les points appartiennent à D ou à son extérieur, sauf P lui-même.

Troisième classe : les autres points de E. Sur la parallèle à Oz menée par l'un de ces derniers, il y aura donc une infinité de points de E, leur ensemble sera donc à variation xy nulle puisque E est à variation xy bornée.

A chaque point P de la première classe de E associons alors un nombre égal à $+1$ ou à -1 que nous appellerons son *signe* (sgnP) et cela suivant la règle suivante : sgnP sera égal à $+1$ s'il y a un nombre impair de points de E dont la projection sur le plan xy est la même que celle de P et qui ont une cote plus faible que lui ; il sera égal à -1 si ce nombre est pair et nous renoncerons à le définir s'il y a une infinité de points de E qui ont la même projection que P sur le plan des xy.

Supposons de plus que l'ensemble des points de la deuxième classe de E soit à variation xy nulle, la fonction sgnP est alors définie en tous les points de E sauf peut-être en un ensemble de variation xy nulle. L'ensemble des points de E affectés des signes précédents sera dit le côté extérieur de E (si l'on change tous les signes on aura le côté intérieur de E).

La fonction sgnP est sommable xy sur E ; cela est, comme dans le cas correspondant des continus à variation x bornée, une conséquence des travaux de M. Schauder déjà cités.

Soit alors $f(\mathrm{P})$ une fonction sommable xy de P, par définition nous poserons

$$\int\!\!\int_{\mathrm{E}_e} f(\mathrm{P})\,dx\,dy = \int\!\!\int_{\mathrm{E}} f(\mathrm{P})\,\mathrm{sgn}\,\mathrm{P}\,|\,dx\,dy\,|$$

(on définit de même l'intégrale étendue au côté intérieur, ou bien par $\displaystyle\int\!\!\int_{\mathrm{E}_e} + \int\!\!\int_{\mathrm{E}_i} = 0$).

Soit alors $f(\mathrm{P}) = f(x, y, z)$ une fonction définie dans D et sur E, absolument continue par rapport à z pour presque tous les couples de valeurs (x, y), sommable xy sur E et telle de plus que la dérivée $\dfrac{\partial f}{\partial z}$

soit sommable dans $D + E$, on a

$$\iiint_{D} \frac{\partial f}{\partial z} dx\, dy\, dz = \iint_{E_e} f(P)\, dx\, dy.$$

La démonstration de ce résultat est en tous points analogue à celle faite à propos de la formule de Green dans le plan (il suffit de remplacer $x'(v)$ par $sgn\,P$), nous n'y reviendrons pas.

24. A la vérité ce résultat et la méthode de démonstration ne sont que peu différents d'un résultat de M. Schauder (théorème XIV de son travail déjà cité), nous n'avons fait que le restituer dans la métrique introduite qui semble plus naturelle et mieux adaptée à ce résultat.

Parmi les hypothèses précédentes, celles relatives à f semblent les plus générales possibles, mais celle relative aux points de la deuxième classe de E apporte une restriction importante à cet ensemble. Il y aurait donc intérêt à donner des exemples assez généraux de telles frontières; nous citerons seulement celles qui sont constituées par une surface de Jordan homéomorphe à une sphère et celles qu'en chaque point P on puisse trouver une représentation des points voisins au moyen de fonctions de trois variables :

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v),$$

les deux fonctions x et y satisfaisant à une condition de Lipschitz d'ordre un. Cela se fait en remarquant qu'un point où le déterminant fonctionnel $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ n'est pas nul n'appartient pas à la deuxième classe et en se rappelant la formule (18) donnée précédemment pour le calcul de la variation xy d'une telle surface.

25. Enfin les considérations précédentes nous permettent de définir, dans certains cas, un *côté* d'une surface de Jordan non fermée S et sans point double. Cela revient à définir le signe d'un point. Prenons, par exemple, une surface S homéomorphe à un carré et à variation xy bornée et supposons que le bord de cette surface (l'image du contour du carré) soit à variation xy nulle, supposons enfin que par ce bord on puisse faire passer une autre surface S', elle aussi à variation xy

bornée n'ayant que ce bord en commun avec S, la surface de Jordan $S + S'$ étant alors homéomorphe à une sphère et étant frontière d'un domaine.

Si les points de la deuxième classe de $S + S'$ sont à variation xy nulle, nous affecterons les points de S d'un signe suivant la règle donnée précédemment pour E. Tous les points de S, sauf peut-être un ensemble de variation xy nulle, seront affectés d'un signe et de plus deux signes sont possibles pour un même point, ce qui correspond à chacun des deux côtés de la surface. On voit d'autre part facilement que si, au lieu de S', on prend une surface S'', satisfaisant aux mêmes conditions que S', les signes affectés aux points de S au moyen de cette dernière surface seront ceux qui leur sont affectés par S', ou bien ceux-ci changés de signe, sauf, peut être, sur un ensemble de points de variation xy nulle. Autrement dit les côtés de la surface S, définis à la fois par une surface S', ne dépendant pas de cette surface auxiliaire et l'on peut alors parler de l'intégrale

$$\int\!\!\int_{S_c} f(P)\,dx\,dy = \int\!\!\int_{S} f(P)\,\mathrm{sgn}\,P\,|\,dx\,dy\,|$$

étendue à un côté c de la surface; la définition de ce côté exigeant cependant la connaissance d'une surface S'.