Annales scientifiques de l'É.N.S.

Bertrand Gambier
Charles H. Rowe

Tétraèdres inscrits dans une quadrique Q et circonscrits à une autre quadrique $Q1$

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 153-198
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__153_0>

TÉTRAÈDRES

INSCRITS DANS UNE QUADRIQUE Q

ET

CIRCONSCRITS A UNE AUTRE QUADRIQUE Q_1

Par M. B. GAMBIER
(Lille)

et M. Charles H. ROWE
(Dublin).

1. **Introduction.** — Nous allons montrer que, deux quadriques Q, Q_1 *quelconques* étant données, *il existe* ∞^4 *tétraèdres dont les sommets* A, B, C, D *sont situés sur* Q, *tandis que les faces opposées* α, β, γ, δ *sont tangentes à* Q_1; *il existe un seul cas exceptionnel où l'on obtient* ∞^5 *tétraèdres : c'est celui où* Q *et* Q_1 *ont quatre génératrices communes.* Dans le cas des quadriques *quelconques*, les quatre paramètres permettent de choisir arbitrairement deux sommets sur Q ou, ce qui revient au même, deux faces tangentes à Q_1 : on obtient alors, *en général*, deux tétraèdres seulement; nous préciserons, par une discussion minutieuse le cas où la donnée de A, B ou des deux faces γ, δ permet d'obtenir ∞^1 ou même ∞^2 tétraèdres. D'autre part, bien que la donnée de A et de la face opposée α mette en jeu quatre paramètres, on ne peut choisir arbitrairement A et α : *si* A *est donné*, *la face* α *doit passer par un point fixe* A_1 ; *corrélativement*, *si* α *est donnée*, A *doit se trouver dans un plan fixe* α_1 ; les correspondances (A, A_1) ou (α, α_1) sont comprises dans *deux homographies*, *inverses l'une de l'autre*, conservant chaque sommet du tétraèdre conjugué commun, homographies

qui restent les mêmes si l'on prend tous les couples de quadriques d'un certain groupe donnant le même tétraèdre conjugué et le même module pour leur intersection (ou leur développable circonscrite).

L'idée de ce travail est due à M. Rowe, qui a obtenu le résultat fondamental relatif au cas de ∞^4 ou ∞^5 tétraèdres et donné les démonstrations géométriques correspondantes; M. Rowe a signalé aussi divers résultats relatifs aux tétraèdres de l'espèce indiquée dont les sommets doivent, non seulement être sur Q, mais encore sur une cubique gauche ou sur une biquadratique donnée *a priori* sur Q. M. Gambier a eu l'idée de reprendre, pour le cas de ∞^4 tétraèdres, les démonstrations imaginées par M. Rowe pour ∞^5 tétraèdres et est ainsi arrivé à l'homographie (A, A_1) ou (α_1, α). Un échange de vues, par correspondance entre les deux auteurs, a conduit à la forme actuelle du Mémoire (1).

L'un des résultats de ce travail est que, si p équations renferment $p+q$ inconnues (q entier positif ou nul), la solution générale ne dépend pas nécessairement de q paramètres : elle peut, par exemple, ne pas exister, sauf si les coefficients des équations sont assujettis à certaines conditions en nombre h, et alors elle dépend de $q+h$ arbitraires (2). La détermination du nombre h est l'une des plus grosses difficultés : on verra la méthode employée dans le cas d'une cubique au paragraphe 11.

2. **Dénombrements à priori.** — Comparons le plan et l'espace à

---

(1) Aux *Nouvelles Annales de Mathématiques*, 3e série, 18, 1899, p. 67-69, Fontené démontre très rapidement par voie *analytique* le résultat relatif à ∞^5 tétraèdres, et signale pour le cas de ∞^4 tétraèdres, la correspondance (A, A_1); mais il n'indique aucune des démonstrations géométriques de M. Rowe et n'étudie pas à fond la figure si intéressante que l'on obtient. Au tome 2, 4e série, 1902, de la même Collection, Duporcq signale par une voie analytique le résultat retrouvé géométriquement par M. Rowe sur les tétraèdres inscrits dans une cubique et circonscrits à une quadrique; mais bien qu'extrêmement élégante, la démonstration de Duporcq ne donne pas le résultat complet.

(2) Ces considérations s'appliquent non seulement au problème traité dans ce Mémoire, mais encore à un problème différent qui s'introduit au cours de la discussion relative aux tétraèdres ayant une arête commune. Il s'agit du problème suivant : on donne deux quadriques Q, Q_1; on cherche une génératrice G de Q, une génératrice G_1 de Q_1, telles que les plans menés par G et par les points où G_1 perce Q soient tangents à Q_1 (en un point non situé sur G_1). On a deux équations pour deux inconnues et le problème est, en général, impossible.

trois dimensions. Dans un plan, le total d'un triangle ABC (6 paramètres), d'une conique Γ circonscrite (2 paramètres), d'une conique Γ_1 inscrite (2 paramètres), dépend évidemment de 10 paramètres indépendants, tels que la variation de l'un quelconque modifie le total. Sans entrer plus avant dans l'étude, deux hypothèses seules sont possibles (sans savoir si elles sont ou non réalisées):

a. les 10 paramètres en jeu permettent de choisir arbitrairement Γ et Γ_1; il existe un nombre *fini* de triangles associés à Γ et Γ_1;

b. Γ, Γ_1 ne peuvent être choisies arbitrairement et satisfont à p conditions *a priori*; par contre, à un tel couple Γ, Γ_1 correspondent ∞^p triangles; d'ailleurs, le choix de A sur Γ fixe les tangentes AB, AC à Γ_1 de sorte que p est égal à 1.

L'étude classique montre que *les deux hypothèses sont réalisées, mais que la première donne des triangles impropres* (A, B *confondus avec le point de contact avec* Γ *d'une tangente commune à* Γ *et* Γ_1)*; la seconde seule donne des triangles véritables*. On peut mettre le problème en équation ainsi : du point inconnu A de Γ, on mène les tangentes à Γ_1 qui recoupent Γ en B et C; la droite BC enveloppe une conique et a des coefficients exprimés rationnellement au moyen du paramètre unicursal t de A; exprimant que BC touche Γ_1, on a une équation en t, de degré 4, ne différant de l'équation donnant les points de contact avec Γ des tangentes communes, *que par un facteur numérique en* t, *mais fonction des coefficients de* Γ *et* Γ_1. Suivant que ce facteur est nul ou non, on obtient la seconde hypothèse, ou simplement la première. Rappelons, pour la suite, la forme de ce facteur. Si l'on définit Γ, Γ_1 par leurs équations *ponctuelles*,

$$(\Gamma) \qquad A\, x^2 + A' y^2 + A'' z^2 + 2 B y z + 2 B' z x + 2 B'' x y = 0,$$

$$(\Gamma_1) \qquad A_1 x^2 + \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots = 0,$$

appelons Δ, Δ_1 les discriminants de Γ, Γ_1, puis a, a', a'', b, b', b'' les coefficients de A, ..., B″ dans le développement de Δ suivant une rangée, et de même a_1, ...; l'équation en λ exprimant que $\Gamma - \lambda\Gamma_1 = 0$ représente deux droites est

$$\Delta - \lambda(A_1 a + \ldots + 2 B_1 b + \ldots) + \lambda^2(A a_1 + \ldots) - \lambda^3 \Delta_1 = 0.$$

La condition des triangles *propres* (l'autre cas étant désormais exclu) est

$$(\Sigma\lambda_1)^2 - 4\Sigma\lambda_2\lambda_3 = 0,$$

ou

$$(Aa_1 + \ldots + 2Bb_1 + \ldots)^2 - 4\Delta_1(A_1 a + \ldots + 2B_1 b + \ldots) = 0.$$

Si Γ_1 *se réduit à deux droites,* Δ_1 *est nul et l'équation* $Aa_1 + \ldots = 0$, *trouvée dans ce cas, exprime que le point de concours de ces deux droites est sur* Γ; si c'est au contraire Γ qui dégénère en deux droites, on peut supposer $\lambda_3 = 0$, la relation devient $(\lambda_1 - \lambda_2)^2 = 0$: l'une des deux droites est tangente à Γ_1; (si $\lambda_3 = 0$ est racine double, on trouve $\lambda_1 = 0$ de sorte que, finalement, on obtient deux droites concourant sur Γ_1, l'une étant tangente à Γ_1).

Si l'on définit au contraire Γ, Γ_1 par leurs équations *tangentielles*

$$(\overline{\Gamma}) \qquad \overline{A}u^2 + \ldots + 2\overline{B}\,vw + \ldots = 0,$$

$$(\overline{\Gamma}_1) \qquad \overline{A_1}u^2 + \ldots + 2\overline{B_1}\,vw + \ldots = 0,$$

on forme l'équation en μ du faisceau tangentiel $\overline{\Gamma} - \mu\overline{\Gamma_1} = 0$ et la condition est cette fois

$$(\Sigma\mu_2\mu_3)^2 - 4\mu_1\mu_2\mu_3\Sigma\mu_1 = 0,$$

ou

$$(\overline{A_1}\overline{a} + \ldots)^2 - 4\overline{\Delta}(\overline{A}\overline{a_1} + \ldots) = 0.$$

Si donc Γ *dégénère en deux points* $(\overline{\Delta} = 0)$, *la droite qui les joint est tangente à* Γ_1; *si* Γ_1 *dégénère en deux points, l'un d'eux est situé sur* Γ.

Dans l'espace, la donnée du tétraèdre ABCD (12 paramètres), de la quadrique Q circonscrite (5 paramètres), de la quadrique Q_1 inscrite (5), fait jouer 22 paramètres irréductibles. Or la donnée de deux quadriques *quelconques* fait jouer 18 paramètres : cette fois, nous pouvons choisir Q et Q_1 *arbitrairement et il existe* ∞^4 *tétraèdres associés à* Q *et* Q_1; on peut ensuite choisir arbitrairement l'arête AB (ce qui fixe à la fois A et B et les faces γ, δ); *mais, par analogie avec le plan, on ne peut choisir simultanément* A *et* α, *bien que* A *d'une part,* α *de l'autre fassent jouer séparément deux paramètres* : en effet, soit Γ la conique section de Q par α, S le cône de sommet A et base Γ, S_1 le cône de sommet A circonscrit à Q_1, Γ_1 la conique section de S_1 par α; le triangle BCD est inscrit dans Γ et circonscrit à Γ_1; l'invariant, précédemment calculé, relatif à Γ et Γ_1 (ou aux sections de S et S_1 par un même plan) est nul et ceci donne une relation entre A et α.

Les calculs donnant explicitement cette relation sont assez pénibles et ont sans doute arrêté les auteurs précédents; pour arriver à les faire aisément, il suffit de faire une *expérience* simple; en supposant Q et Q_1 se raccordant le long d'une conique; double avantage : d'abord confirmer les prévisions, puis découvrir certaines particularités du calcul du cas général.

3. **Couple de quadriques Q, Q_1 ayant une conique de rapport.** — Une transformation homographique nous donne deux sphères concentriques (distinctes) :

$$(Q) \qquad x^2+y^2+z^2-R^2=0.$$

$$(Q_1) \qquad x^2+y^2+z^2-r^2=0 \qquad (R^2\neq r^2).$$

On peut se borner au point A(o, o, R); *si α n'a pas sa trace horizontale isotrope*, une rotation d'ensemble autour de Oz ramène α à avoir sa trace horizontale parallèle à Oy, d'où

$$(\alpha) \qquad x\cos\varphi+z\sin\varphi-r=0.$$

On forme sans peine les équations de S, S_1 et nous nous bornons à leur section S′ ou S'_1 par le plan de l'infini

$$(S') \qquad (R\sin\varphi-r)(x^2+y^2+z^2)-2Rz(x\cos\varphi+z\sin\varphi)=0,$$

$$(S'_1) \qquad (x^2+y^2)(R^2-r^2)-r^2z^2=0.$$

L'équation en λ du faisceau $S'-\lambda S'_1=0$ est

$$\begin{aligned}&[R\sin\varphi-r+\lambda(R^2-r^2)]\\ &\quad\times[\lambda^2r^2(R^2-r^2)+\lambda\{(R^2-r^2)(R\sin\varphi+r)+r^2(R\sin\varphi-r)\}\\ &\qquad\qquad+R^2-r^2]=0.\end{aligned}$$

L'équation de condition se décompose

$$(R\sin\varphi+3r)(R\sin\varphi-r)=0.$$

La solution $R\sin\varphi-r=0$ est à rejeter : elle exprime que le plan α passe en A; *ce facteur parasite se présente dans le cas général* (Γ_1 se réduirait alors à une droite double issue de A, joignant A au point où α

touche Q_1). Nous prenons donc

$$\sin\varphi = \frac{-3r}{\Omega}.$$

Cela exprime que le point de contact de α avec Q_1 est dans le plan horizontal $z = -\frac{3r^2}{R}$, *donc que le plan* α *passe par le point* $A_1\left(o, o, -\frac{R}{3}\right)$; si l'on remplace Q_1 par une autre sphère concentrique, A_1 *ne change pas*. Tous ces résultats confirment nos prévisions : elles sent donc vraies, *même dans le cas général.*

La correspondance (A, A_1) *est une homothétie de pôle* O *et de rapport d'homothétie* $(\overline{OA} : \overline{OA_1}) = -3$; inversement, α étant donné, A se trouve dans un plan α_1 tel que *la correspondance* (α_1, α) *soit la même homothétie que la correspondance* (A, A_1). Donc dans le cas général, quand Q et Q_1 sont deux quadriques quelconques se raccordant le long d'une conique d'un plan ω, le cône circonscrit commun ayant son sommet en O, *la correspondance* (A, A_1) *ou* (α_1, α) *est l'homologie de pôle* O, *de plan directeur* ω; OAA_1 *perçant en* ω *en* O', *le rapport anharmonique* $(OO'AA_1)$ *est égal à* (-3).

On remarque, en revenant au cas des sphères concentriques, que O est à la distance r de chaque face, et en vertu de $\overline{OA} : \overline{OA_1} = -3$, chaque sommet est à la distance $4r$ de la face opposée; *les quatre faces sont équivalentes*, O *est centre de gravité du tétraèdre;* B' étant milieu de l'arête AB, B'' celui de l'arête CD, les droites telles que B'B'', C'C'', D' D'' se coupent en O et sont de plus perpendiculaires communes du couple d'arêtes opposées correspondant; elles sont donc axes de symétrie (deux à deux rectangulaires) du tétraèdre ABCD, de sorte que les arêtes opposées sont égales et les faces toutes *égales* et non simplement équivalentes. Les plans menés par les arêtes parallèlement à l'arête opposée forment un parallélépipède rectangle; réciproquement si dans un parallélépipède rectangle on prend dans deux faces parallèles, les diagonales non parallèles, elles donnent les 4 sommets d'un tétraèdre de l'espèce indiquée ici. De même, si dans un tétraèdre, deux des 3 points : centre de gravité, centre de la sphère inscrite, centre de la sphère circonscrite, coïncident, le troisième est lui-même réuni aux précédents. Ces tétraèdres ne sont réels que si R surpasse $3r$

et ont des faces à angles tous aigus. Le tétraèdre possède trois séries de géodésiques fermées, comme on le voit en développant le tétraèdre sur un plan de façon à obtenir un parallélogramme.

Le cas $R = 3r$ *donne* ∞^3 *tétraèdres réguliers; il y a à expliquer le paradoxe apparent, car on semble n'avoir plus les* ∞^4 *tétraèdres du cas général.* L'emploi du paramètre φ donne en effet simplement $\sin\varphi = -1$; mais l'emploi de la cote z du point de contact de α avec Q_1 donne $z = -r$, de sorte que l'on retrouve ∞^1 points de contact répartis sur les deux génératrices isotropes issues sur Q_1 du point $(0, 0, -r)$: mais alors le plan α a sa trace horizontale isotrope, et l'on ne peut plus employer la marche adoptée pour simplifier les calculs.

4. **Cas général; correspondances** (A, A_1) **et** (α, α_1). — Voici d'abord un PREMIER LEMME évident : *un quadrilatère gauche et une conique, qui en rencontre chacun des côtés en un point, déterminent une quadrique et une seule.*

SECOND LEMME. — *On donne une quadrique* Q_1, *une conique* q *située dans un plan tangent* α *de* Q_1 *et ne passant pas au point de contact* ω *de* Q_1 *et* α; *par les côtés* CD, DB, BC *d'un triangle variable* BCD *inscrit dans* q *on mène à* Q_1 *les plans tangents autres que* α : *leur point commun* A *a pour lieu la quadrique* $\overline{Q}$ *déterminée par* q *et les quatre génératrices de* Q_1, *non situées dans* α, *issues des points où* q *perce* Q.

Laissons C et D fixes sur q; faisons mouvoir B sur q; les rayons CB et DB se correspondent homographiquement; le plan CDA est le plan fixe β tangent à Q_1, autre que α, issu de CD; le plan CBA enveloppe le cône de sommet C circonscrit à Q_1, de sorte que les traces de ce plan CB et CA sur les deux plans tangents fixes α et β de ce cône se correspondent homographiquement; de même DB et DA. Conclusion : dans le plan fixe β, les rayons CA et DA se correspondent homographiquement *et* A *engendre une conique* q_1 *passant en* C *et* D [1]. Si le point B

---

[1] ω étant le point où α touche Q_1, le rayon $C\omega$ perce q en un point B_1 que nous avons supposé distinct de ω; le rayon CA prend alors la direction CD; quant au rayon DA, il prend, puisque DB_1 est distinct de $D\omega$, une direction autre que DC; par suite la conique q_1 est indécomposable. Au contraire, si q passe en ω, le rayon CD a pour homologue le rayon DC et q_1 se réduit à une droite (en dehors de CD) : ce cas sera examiné à part.

vient en l'un des 4 points *distincts* (puisque q ne passe pas au point ω où α touche Q_1) M, N, P, R où q rencontre les deux génératrices MN, PR de Q_1 situées dans α, les plans tangents à Q_1 menés par CM et DM contiennent tous deux la génératrice MM', autre que MN, de Q_1 issue de M; donc la conique q_1 passe au point M_1 où MM' perce le plan β et a 6 points (C, D, M_1, N_1, P_1, R_1) communs avec $\overline{Q}$: elle n'est donc autre que la section de $\overline{Q}$ par le plan tangent à Q_1 (autre que α) issu de CD.

Ce raisonnement prouve, en passant, que si deux quadriques $\overline{Q}$ *et* Q_1 *ont quatre génératrices communes, il existe* ∞^5 *tétraèdres inscrits dans* $\overline{Q}$ *et circonscrits à* Q_1*;* on coupe en effet Q_1 par un plan tangent α dont le point de contact ω n'est pas sur l'une des génératrices communes; $\overline{Q}$ est coupée suivant une conique q ne passant pas en ω et l'on choisit arbitrairement B, C, D sur q : par le second lemme, on déduit de B, C, D le point A. *Corrélativement*, on peut choisir A sur $\overline{Q}$, puis les plans β, γ, δ issus de A et tangents à Q_1 : B, C, D étant les points où les droites (γ, δ), (δ, β), (β, γ) recoupent $\overline{Q}$, le plan BCD est tangent à Q_1.

Soit maintenant une quadrique Q n'ayant pas avec Q_1 quatre génératrices communes; considérons une droite *quelconque*, qui coupe Q en C, D et par laquelle on peut mener à Q_1 deux plans tangents α, β. Le plan α coupe Q suivant une conique q sur laquelle nous faisons mouvoir un point B' : les plans tangents à Q_1, autres que α, menés par CD, CB', DB' se recoupent en un point A' dont le lieu est la section q_1, par le plan β, de la quadrique $\overline{Q}$ précédemment définie, associée à q et Q_1. La quadrique $\overline{Q}$ est distincte de Q, car Q_1 et $\overline{Q}$ ont quatre génératrices communes; donc, *en général*, q_1 n'est pas située sur Q [1] et la

[1] Nous étudierons avec soin le cas d'exception, qui correspond à ∞^1 tétraèdres ayant en commun les sommets C, D et les plans des faces issues de l'arête CD. On voit *a priori* que la quadrique $\overline{Q}$ ne se décomposant pas, c'est-à-dire la conique q ne passant pas au point ω où MN et PR concourent, la quadrique Q peut contenir q_1. En effet donnons-nous *a priori* Q_1, le plan α tangent à Q_1, puis la conique q située dans α mais ne passant pas en ω, et enfin une corde CD quelconque de q; la quadrique Q pour l'instant est simplement assujettie à contenir q; or la conique q_1, qui résulte des données, est bisécante à q; si nous choisissons la quadrique Q dans le faisceau des quadriques contenant q et q_1 la propriété annoncée est obtenue. Dans ce cas le plan α_1 coïncide avec le plan β et la quadrique Q_2 qui interviendra plus bas coïncide avec Q_1.

perce en deux points A', A'', correspondant à deux points B', B'' de q; les tétraèdres $CDA'B'$ et $CDA''B''$ sont les deux seuls tétraèdres de l'espèce cherchée ayant C, D pour sommets, et α, β pour faces. On remarque que A', A'' sont sur la partie de l'intersection de Q et $\overline{Q}$ autre que q : *cette partie est une conique;* or les génératrices déjà étudiées, de Q_1 issues de M, N, P, R recoupent la biquadratique $\mathcal{B}$, commune à Q et Q_1, en des points M', N', P', R' situés sur le complément de l'intersection de Q et $\overline{Q}$, *donc dans un même plan* α_1. *Le plan* α_1 *ainsi obtenu correspond d'une façon univoque au plan* α *tangent à* Q_1 *et ne change pas si* Q_1 *restant fixe, on remplace* Q *par une quadrique du faisceau ponctuel* Q, Q_1. La conclusion importante qui se dégage de ce résultat est la suivante : *quand on se donne le plan* α, *tangent à* Q_1, *le sommet opposé* A *se trouve sur la conique découpée sur* Q *par le plan* α_1 *correspondant à* α. Si donc on donne à la fois α et β (ce qui donne C et D sur Q), A est situé d'une part dans α_1, de l'autre dans β, donc aux points où la droite (α_1, β) coupe Q.

Enonçons maintenant la propriété corrélative : on sait que Q et Q_1 étant données, il existe 8 quadriques dont chacune, par polarité, échange Q avec Q_1 et réciproquement; H étant l'une, (A, B, C, D), $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$ deviennent respectivement $(\overline{\alpha}, \overline{\beta}, \overline{\gamma}, \overline{\delta})$ plans tangents de Q_1 et $(\overline{A}, \overline{B}, \overline{C}, \overline{D})$ points de Q; d'un tétraèdre de l'espèce étudiée, on en déduit donc 8 autres de la même espèce (j'entends inscrits dans Q, et circonscrits à Q_1). Nous pouvons énoncer les résultats suivants :

Quand on se donne le point A *de* Q, *le plan* α *passe en un point* A_1 *correspondant univoquement à* A *et enveloppe le cône circonscrit de* A_1 *à* Q_1. Si l'on se donne de plus le sommet B sur Q, le plan α passe par A_1 et par B : on mène donc par B l'un ou l'autre des plans tangents au cône en question.

La construction de A_1 *est la suivante : en* A *se croisent sur* Q *deux génératrices* G', G''; *de* G' *on peut mener à* Q_1 *deux plans tangents recoupant* Q *suivant deux génératrices* g'', h''; *de même* G'' *fournit* g', h'; *par chacune de ces génératrices* g'', h'', g', h' *on mène à* Q_1 *le nouveau plan tangent respectif : ces quatre plans concourent en* A_1.

Il est nécessaire, pour la suite, d'étudier plus en détail ces correspondances (A, A_1), (α, α_1). Nous allons d'abord le faire analytiquement, de façon à prévoir plus aisément les résultats purement géométriques.

5. **Formules relatives aux correspondances** (A, A_1), (α, α_1). — Dans le cas où Q et Q_1 ont leur intersection formée d'une biquadratique sans point double, ou de deux coniques non décomposées (distinctes ou confondues), ou d'un quadrilatère gauche, on peut réduire leurs équations à la forme simultanée

$$(Q) \qquad x^2+y^2+z^2+t^2=0.$$

$$(Q_1) \qquad \frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}=0.$$

(Si ultérieurement, on a besoin, de prendre pour Q la forme $Ax^2+By^2+Cz^2+Dt^2=0$ au lieu de $\Sigma x^2=0$, il suffira, dans les calculs qui vont être faits, de remplacer, après achèvement, x, y, z, t par $x\sqrt{A}, y\sqrt{B}, z\sqrt{C}, t\sqrt{D}$; u, v, w, h par $\frac{u}{\sqrt{A}}, \frac{v}{\sqrt{B}}, \frac{w}{\sqrt{C}}, \frac{h}{\sqrt{D}}$; a, b, c, d par Aa, Bb, Cc, Dd). Nous choisissons un point $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ de Q, un plan α, (u_0, v_0, w_0, h_0), tangent à Q_1 : on a $\Sigma x_0^2=0$, $\Sigma a u_0^2=0$. Si l'on pose

$$(1) \qquad P_0\equiv\sum u_0x_0, \qquad \Pi_0\equiv\sum\frac{x_0^2}{a}$$

les équations des cônes S, S_1 sont

$$(S) \qquad P_0(x^2+y^2+z^2+t^2)$$
$$-2(u_0x+v_0y+w_0z+h_0t)(x_0x+y_0y+z_0z+t_0t)=0,$$

$$(S_1) \qquad \Pi_0\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}+\frac{t^2}{d}\right)-\left(\frac{xx_0}{a}+\frac{yy_0}{b}+\frac{zz_0}{c}+\frac{tt_0}{d}\right)^2=0,$$

et nous pouvons nous borner aux coniques s, s_1 sections de ces cônes par le plan $t=0$

$$(s) \qquad P_0(x^2+y^2+z^2)-2(u_0x+v_0y+w_0z)(x_0x+y_0y+z_0z)=0,$$

$$(s_1) \qquad \Pi_0\left(\frac{x^2}{a}+\frac{y^2}{b}+\frac{z^2}{c}\right)-\left(\frac{xx_0}{a}+\frac{yy_0}{b}+\frac{zz_0}{c}\right)^2=0.$$

Pour préparer le calcul de l'invariant relatif à s et s_1 écrivons

$$(2)\qquad \begin{cases} A = P_0 - 2u_0x_0, & B = -(v_0z_0 + w_0y_0), \\ A' = P_0 - 2v_0y_0, & B' = -(w_0x_0 + u_0z_0), \\ A'' = P_0 - 2w_0z_0, & B'' = -(u_0y_0 + v_0x_0). \end{cases}$$

La quantité a est égale à

$$P_0^2 - 2P_0(v_0y_0 + w_0z_0) - (v_0z_0 - w_0y_0)^2;$$

les résultats déjà obtenus permettent de prévoir que seuls les groupes u_0x_0, v_0y_0, w_0z_0, h_0t_0 doivent rester dans le résultat final, de sorte que nous n'utiliserons les relations

$$(3)\qquad x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 + t_0^2 = 0, \qquad au_0^2 + bv_0^2 + cw_0^2 + dt_0^2 = 0$$

que dans la mesure où elles doivent contribuer à faire apparaître ces groupes u_0x_0, v_0y_0, w_0z_0, h_0t_0. Nous écrivons :

$$(4)\qquad \begin{cases} a = (u_0x_0 + h_0t_0)^2 - (v_0y_0 + w_0z_0)^2 - (v_0z_0 - w_0y_0)^2, \\ a' = (v_0y_0 + h_0t_0)^2 - (w_0z_0 + u_0x_0)^2 - (w_0x_0 - u_0z_0)^2, \\ a'' = (w_0z_0 + h_0t_0)^2 - (u_0x_0 + v_0y_0)^2 - (u_0y_0 - v_0x_0)^2, \\ b = (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)y_0z_0 - v_0w_0t_0^2 + h_0t_0(v_0z_0 + w_0y_0), \\ b' = (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)z_0x_0 - w_0u_0t_0^2 + h_0t_0(w_0x_0 + u_0z_0), \\ b'' = (u_0^2 + v_0^2 + w_0^2)x_0y_0 - u_0v_0t_0^2 + h_0t_0(u_0y_0 + v_0x_0). \end{cases}$$

De même, pour s_1, nous avons

$$(5)\qquad \begin{cases} A_1 = \dfrac{\Pi_0}{a} - \dfrac{x_0^2}{a^2}, & B_1 = -\dfrac{y_0z_0}{bc}, & a_1 = \dfrac{\Pi_0}{bc}\left(\dfrac{x_0^2}{a} + \dfrac{t_0^2}{d}\right), & b_1 = \dfrac{\Pi_0 y_0 z_0}{abc}, \\ A'_1 = \dfrac{\Pi_0}{b} - \dfrac{y_0^2}{b^2}, & B'_1 = -\dfrac{z_0x_0}{ca}, & a'_1 = \dfrac{\Pi_0}{ca}\left(\dfrac{y_0^2}{b} + \dfrac{t_0^2}{d}\right), & b'_1 = \dfrac{\Pi_0 z_0 x_0}{abc}, \\ A''_1 = \dfrac{\Pi_0}{c} - \dfrac{z_0^2}{c^2}, & B''_1 = -\dfrac{x_0y_0}{ab}, & a''_1 = \dfrac{\Pi_0}{ab}\left(\dfrac{z_0^2}{c} + \dfrac{t_0^2}{d}\right), & b''_1 = \dfrac{\Pi_0 x_0 y_0}{abc}. \end{cases}$$

L'équation à former est

$$(6)\qquad (Aa_1 + \ldots)^2 - 4\Delta_1(A_1a + \ldots) = 0.$$

On a aisément

$$(7)\qquad \Delta_1 = \frac{\Pi_0^2 t_0^2}{abcd}.$$

Un calcul, un peu long, mais toujours guidé par l'intention de ne conserver, autant que possible, que les groupes $u_0 x_0, \ldots, h_0 t_0$, donne

$$(8)\quad \frac{A a_1 + \ldots}{\Pi_0 t_0^2} = \sum u_0 x_0 \left[\frac{1}{abc} + \frac{1}{acd} + \frac{1}{adb} - \frac{1}{bcd}\right] = \frac{\left\{\begin{array}{l} u_0 x_0 (b+c+d-a) + v_0 y_0 (a+c+d-b) \\ + w_0 z_0 (a+b+d-c) + h_0 t_0 (a+b+c-d) \end{array}\right\}}{abcd},$$

$$(9)\quad \frac{A_1 a + \ldots}{t_0^2} = \frac{\Sigma u_0^2 x_0^2 (cd + db + bc - ab - ac - ad + a^2) + 2 \Sigma u_0 x_0 v_0 y_0 cd}{abcd}.$$

L'équation (6) devient donc, en supprimant le facteur $\Pi_0 t_0$ et posant

$$(10)\quad X = u_0 x_0, \qquad Y = v_0 y_0, \qquad Z = w_0 z_0, \qquad T = h_0 t_0,$$

$$(11)\quad [(a+b+c+d)^2 - 4(bc+cd+db) - 4a^2] X^2 + \ldots + 2XY[(c-d)^2 - (a-b)^2] + \ldots = 0.$$

On vérifie aussitôt que cette équation se décompose en deux facteurs dont l'un $X + Y + Z + T = 0$ est à rejeter (prévu, grâce à l'exemple simple des deux sphères concentriques) et dont l'autre est

$$(12)\quad [(a+b+c+d)^2 - 4(bc+cd+db) - 4a^2] X + \ldots = 0.$$

La vérification est faite complètement; le plan α_1 a pour coordonnées

$$(13)\quad u_1 = u_0[(a+b+c+d)^2 - 4(bc+cd+db) - 4a^2], \qquad v_1 = \ldots,$$

et l'on vérifie sans peine que ces formules ne changent pas si l'on remplace a, b, c, d par $a+\lambda, b+\lambda, c+\lambda, d+\lambda$; de même les coordonnées du point $A_1(x_1, y_1, z_1, t_1)$ s'obtiennent par les formules

$$(14)\quad x_1 = x_0[(a+b+c+d)^2 - 4(bc+cd+db) - 4a^2] \ldots.$$

Les formules (13), (14) montrent bien que les correspondances (α, α_1) et (A, A_1) sont deux *homographies* inverses l'une de l'autre, conservant le tétraèdre conjugué. Si Q reste fixe et si Q_1 décrit le faisceau *tangentiel* (Q, Q_1) l'homographie (A, A_1) ne change pas, non plus que l'homographie (α, α_1).

La propriété corrélative est que ces correspondances ne changent pas si Q_1 restant fixe, on remplace Q par une quadrique du faisceau *ponctuel* (Q, Q_1).

[Si nous revenons un instant aux notations

$$\text{(Q)} \qquad \Sigma A x^2 = 0,$$

$$(\text{Q}_1) \qquad \sum \frac{x^2}{a} = 0,$$

les formules de correspondance deviennent

$$(13') \qquad u_1 = u_0[(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 - 4(BbCc + CcDd + DdBb) - 4A^2a^2]\ldots,$$

$$(14) \qquad x_1 = x_0[(Aa + Bb + Cc + Dd)^2 - 4(BbCc + CcDd + DdBb) - 4A^2a^2]\ldots,$$

laisser Q fixe, faire varier Q_1 dans le faisceau tangentiel (Q, Q_1) revient à laisser A, B, C, D fixes et remplacer a, b, c, d par

$$a_1 = a + \frac{\lambda}{A}, \qquad b_1 = b + \frac{\lambda}{B}, \qquad c_1 = c + \frac{\lambda}{C}, \qquad d_1 = d + \frac{\lambda}{D},$$

de sorte que Aa, Bb, Cc, Dd sont remplacés par $Aa_1 = Aa + \lambda + \ldots$; de même laisser Q_1 fixe et faire varier Q dans le faisceau ponctuel (Q, Q_1) revient à conserver a, b, c, d et à remplacer A, B, C, D par $A_1 = A + \frac{\lambda}{a} + \ldots$, de sorte que l'on a encore

$$A_1 a = Aa + \lambda + \ldots,$$

Si l'on remarque que, multiplier par un facteur constant le premier membre de l'équation de Q ou Q_1, multiplie Aa, Bb, Cc, Dd par une même constante, on voit qu'au cours des opérations qui consistent à laisser Q fixe et remplacer Q_1 par une quadrique Q'_1 du faisceau *tangentiel* (Q, Q_1), ou laisser Q_1 fixe et remplacer Q par une quadrique du faisceau ponctuel (Q, Q_1), et à répéter ces opérations un nombre quelconque de fois, *les racines de l'équation en* λ, $Q - \lambda Q_1 = 0$, *subissent les opérations du groupe* $\lambda' = \mu\lambda + \nu$ *où* μ *et* ν *sont deux constantes arbitraires;* si l'on considère λ_1, λ_2, λ_3, λ_4 (racines de l'équation en λ) comme les coordonnées homogènes d'un point par rapport à un certain tétraèdre de référence, *le groupe obtenu revient à déplacer arbitrairement le point* (λ_1, λ_2, λ_3, λ_4) *sur la droite qui le réunit au point de coordonnées* (1, 1, 1, 1); le rapport anharmonique des quatre racines λ ne change pas au cours de ces opérations : c'est le *module* des fonctions elliptiques qui interviennnent pour la représentation paramétrique de la biquadratique (Q, Q_1) ou de la développable circonscrite à Q et Q_1 (ou du moins une certaine fonction de ce module); dans le tétraèdre en question, c'est le *rapport anharmonique des quatre points où la droite en jeu perce les faces du tétraèdre* (ou des quatre plans joignant les sommets du tétraèdre à la droite).]

Cette digression faite, examinons dans quel cas le plan α et le point A peuvent être choisis arbitrairement l'un et l'autre : posons, pour abréger,

$$(15) \qquad \begin{cases} A=(a+b+c+d)^2-4(bc+cd+db)-4a^2, \\ \quad B=\ldots, \qquad C=\ldots, \qquad D=\ldots. \end{cases}$$

(Le lecteur ne sera pas troublé par l'emploi des lettres A, B, C, D pour désigner d'une part les sommets de notre tétraèdre, d'autre part pour désigner certaines quantités numériques.) La question posée revient à voir si l'on peut obtenir des valeurs de a, b, c, d satisfaisant aux équations homogènes et quadratiques $A=0$, $B=0$, $C=0$, $D=0$. Ces équations reviennent à trois seulement, car on a l'identité $A+B+C+D\equiv 0$; il suffit donc que ces quatre expressions soient égales pour que chacune soit nulle : or on a

$$(16) \qquad \begin{cases} A-B=4(a-b)(c+d-a-b), \\ A-C=4(a-c)(b+d-a-c), \\ A-D=4(a-d)(b+c-a-d). \end{cases}$$

On ne peut supposer b, c, d tous égaux à a, car les deux quadriques doivent différer; si l'on suppose $a=b$, l'équation $A-B=0$ est vérifiée, et les deux équations $A-C=0$, $A-D=0$ reviennent alors à $(a-c)(c-d)=0$, $(a-d)(c-d)=0$ de sorte que l'on trouve la solution $a=b$, $c=d$ et celles analogues qui expriment que deux des quatre nombres a, b, c, d sont égaux ainsi que les deux restants; ce sont les seules solutions; $a=b$, $c=d$ exprime que les deux quadriques ont en commun les génératrices $x+\varepsilon iy=0$, $z+\varepsilon' it=0$. Ce cas a été élucidé : écartons-le désormais, tout au moins dans ce paragraphe.

Quand le plan α enveloppe Q_1, le plan α_1 enveloppe la quadrique Q_2

qui a pour équations tangentielle et ponctuelle

$$(Q_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{au^2}{A^2}+\frac{bv^2}{B^2}+\frac{cw^2}{C^2}+\frac{dh^2}{D^2}=0,\\ &A^2\frac{x^2}{a}+B^2\frac{y^2}{b}+C^2\frac{z^2}{c}+D^2\frac{t^2}{d}=0. \end{aligned} \right.$$

Quand le point A décrit Q, le point A_1 décrit la quadrique $\overline{Q}_2$ qui a pour équations ponctuelle et tangentielle

$$(\overline{Q}_2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}+\frac{t^2}{D^2}=0,\\ &A^2u^2+B^2v^2+C^2w^2+D^2h^2=0. \end{aligned} \right.$$

Si la quadrique Q_2 *coïncide avec* Q_1, *la quadrique* $\overline{Q}_2$ *coïncide avec* Q et réciproquement. Cela exige $A^2=B^2=C^2=D^2$; or nous avons vu que $A=B=C=D$ conduit au cas où le point A et le plan α sont arbitraires, et où il n'y a pas lieu de parler de la quadrique Q_2 ni de $\overline{Q}_2$. Essayons donc d'abord d'avoir trois quantités A, B, C, D égales entre elles et égales à la restante changée de signe : par exemple $A=B=C=-D$: la relation $A+B+C+D=0$ entraîne alors en remplaçant A, B, C par $(-D)$ le résultat $D=0$ et l'on retombe sur le cas déjà écarté; il n'y a donc plus qu'à écrire des égalités telles que

$$A=B=-C=-D \quad \text{ou} \quad A=-B=C=-D \quad \text{ou} \quad A=-B=-C=D.$$

On peut se borner, en changeant de notations, au premier de ces trois groupes; il suffit d'ailleurs d'écrire

$$(17) \qquad A=B, \qquad C=D,$$

car $A+B+C+D=0$ donne ensuite $A+C=0$; on a ainsi le système

$$(18) \qquad (a-b)(c+d-a-b)=0, \qquad (c-d)(c+d-a-b)=0.$$

La solution $a=b$, $c=d$ donne toujours le cas des quatre génératrices communes; il faut donc prendre

$$(19) \qquad a+b=c+d.$$

Or si l'on se reporte au Mémoire de M. Gambier, *Journal de Mathématiques*, t. XII, 1933, p. 309-336 (*Transformations homographiques* *changeant une biquadratique en elle-même*), on voit que *cette condition* (19) *exprime que la quadrique* Q_1 *reste invariante dans l'une ou l'autre de quatre involutions biaxiales échangeant la biquadratique* $\mathcal{B}$ *avec elle-même, pendant que les deux cônes de sommets* (1, 0, 0, 0) *et* (0, 1, 0, 0) *contenant* $\mathcal{B}$ *s'échangent entre eux, ainsi que les deux cônes de sommets* (0, 0, 1, 0) *et* (0, 0, 0, 1) : *sur ces quatre involutions, deux ont leurs axes constitués par des génératrices de* Q_1, *les deux autres ont leurs axes situés sur la seconde quadrique, contenant* $\mathcal{B}$, *qui reste aussi invariante* [1]. Les conditions (17), (19) étant remplies, la correspondance (A, A_1) devient

$$\frac{x_1}{x_0} = \frac{y_1}{y_0} = = \frac{-z_1}{z_0} = \frac{-t_1}{t_0}.$$

C'est l'involution biaxiale dont les axes sont les deux couples d'arêtes opposées du tétraèdre conjugué joignant les sommets des deux cônes qui s'échangent; cette fois l'homographie (A, A_1) ou (α, α_1) est à elle-même son inverse.

Nous devons remarquer que la quadrique Q_2, *enveloppe du plan* α_1, *appartient, dans le cas général, au faisceau ponctuel* (Q, Q_1) : cela est lié à cette propriété que le plan α_1 ne change pas si Q décrit le faisceau ponctuel (Q, Q_1); *la quadrique* $\overline{Q}_2$ *appartient au faisceau tangentiel* (Q, Q_1) : cela revient à vérifier que dans le tableau

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \end{vmatrix}$$

tous les déterminants d'ordre 3 sont nuls; or la relation

$$A^2(b-c) + B^2(c-a) + C^2(a-b) = 0,$$

(1) En même temps Q reste invariante par l'une ou l'autre de quatre involutions biaxiales (différentes) laissant invariante la développable circonscrite simultanément à Q et Q_1 : c'est la propriété corrélative. Dans le cas où l'on a, de plus, $a+b=0$, $c+d=0$, Q et Q_1 sont les deux quadriques qui restent *toutes deux invariantes dans l'involution qui laisse* $\mathcal{B}$ *inaltérée;* mais alors la développable reste aussi inaltérée, et, si l'on considère les tétraèdres *circonscrits* à Q, *inscrits* à Q_1, on retrouve la même involution (A, A_1), (α, α_1).

obtenue en supprimant la dernière colonne, peut s'écrire

$$(B^2 - A^2)(c-a) + (C^2 - A^2)(a-b) = 0.$$

Les décompositions

$$B - A = 4(a-b((a+b-c-d),$$
$$B + A = 2(c-d+a-b)(c-d-a+b)$$

et analogues conduisent immédiatement à la vérification. Cela explique pourquoi *il a suffi d'une seule relation pour que* Q_2 *coïncide avec* Q_1 (*et* $\overline{Q}_2$ *avec* Q).

Il suffit d'une seule relation pour que Q_2 *coïncide avec* Q (*et par suite* $\overline{Q}_2$ *avec* Q_1), *toujours pour la même raison*. Cela se traduit par les égalités

$$\frac{A^2}{a} = \frac{B^2}{b} = \frac{C^2}{c} = \frac{D^2}{d}. \tag{20}$$

Remplaçons a, b, c, d par α^2, β^2, γ^2, δ^2 : les racines carrées α, β, γ, δ peuvent être choisies de sorte que les relations (20) deviennent

$$\frac{A}{\alpha} = \frac{B}{\beta} = \frac{C}{\gamma} = \frac{D}{\delta}. \tag{20'}$$

et l'identité $A + B + C + D \equiv 0$ exige que l'on ait

$$\alpha + \beta + \gamma + \delta = 0. \tag{21}$$

Comme on sait, *a priori*, qu'il suffit d'une condition, la relation (21) est nécessaire et suffisante : d'ailleurs, tenant compte des relations de définition

$$A \equiv (\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 + \delta^2)^2 - 4(\beta^2\gamma^2 + \gamma^2\delta^2 + \delta^2\beta^2) - 4\alpha^4 \ldots,$$

un calcul simple donne

$$A\beta - B\alpha \equiv [(\alpha+\beta)^2 - (\gamma+\delta)^2][(\alpha+\beta)^2 - (\gamma-\delta)^2],$$

de sorte que la nullité de $\alpha + \beta + \gamma + \delta$ entraîne bien celle des expressions $A\beta - B\alpha$ .... On remarque que la quadrique

$$\frac{x^2}{\alpha} + \frac{y^2}{\beta} + \frac{z^2}{\gamma} + \frac{t^2}{\delta} = 0 \tag{H}$$

donne une polarité transformant Q en Q_1 et réciproquement.

Toutes ces remarques vont nous servir à l'instant.

6. **Étude plus approfondie de la correspondance** (A, A_1) **ou** (α, α_1). — Rappelons que le plan α coupe Q_1 suivant deux génératrices, dont l'une coupe la conique (Q, α) en M et N, et l'autre en P, R. Nous avons utilisé la quadrique auxiliaire $\overline{Q}$ pour démontrer que M′, N′, P′, R′ sont dans un même plan : on peut le voir en remarquant que les quadriques suivantes : 1° Q; 2° Q_1; 3° l'ensemble des 2 plans (MM′, PP′) et (NN′, RR′); 4° l'ensemble analogue (MM′, RR′) et (NN′, PP′) ont en commun ces 8 points M, N, P, R; M′, N′, P′, R′. *Or les quatre premiers sont coplanaires, donc les quatre derniers le sont; (toutes les quadriques qui contiennent sept d'entre eux contiennent le huitième).* Nous connaissons encore deux autres quadriques de ce réseau : $\overline{Q}$ et les deux plans (α, α_1).

Si la biquadratique $\mathcal{B}$ commune à Q et Q_1 est indécomposable et de genre *un*, les coordonnées du point courant de $\mathcal{B}$ s'expriment en fonction elliptique d'un argument u tel que la somme des arguments relatifs à quatre points d'un même plan soit *constante :* on peut même la supposer *nulle;* de la sorte la relation $u_1 + u_2 = a$, où a est une constante numérique donnée, définit sur $\mathcal{B}$ une correspondance involutive M_1, M_2, la corde M_1M_2 engendre une surface réglée R_a; or on voit aussitôt que toute génératrice de R_a est coplanaire avec toute génératrice de la surface analogue R_{-a} : donc R_a et R_{-a} sont deux semi-quadriques complémentaires.

Or les paramètres des 8 points M, ..., R′ peuvent être pris ainsi :

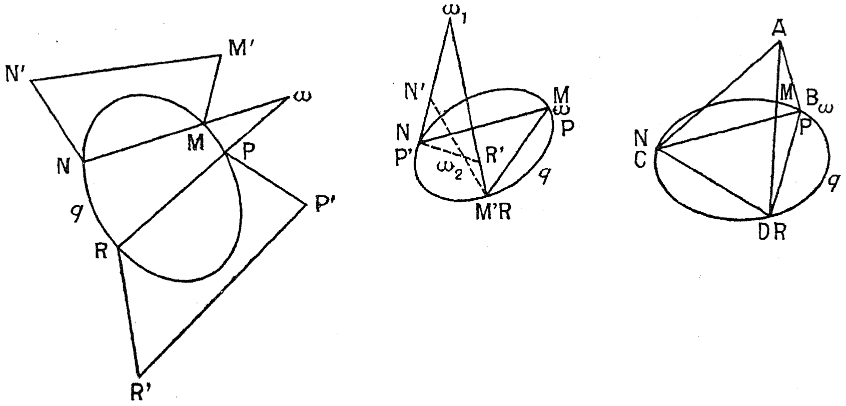
M.	M′.	N.	N′.	P.	P′.	R.	R′.
u	$-u-a$	$-u+a$	$u-2a$	v	$-v+a$	$-v-a$	$v+2a$

Cela prouve que M′N′ *est une génératrice de la semi-quadrique* R_{-3a} *et* P′Q′ *de la semi-quadrique* R_{3a}. La quadrique, appelée Q_2, enveloppe du plan α_1, est donc le support des semi-quadriques R_{3a} et R_{-3a}; nous avons de plus appris à construire les génératrices de Q_2.

La coïncidence de Q_2 et Q_1 exige soit $R_{3a} = R_a$ soit $R_{3a} = R_{-a}$; dans le premier cas, $2a = 0$ (à un multiple près des périodes) et R_a, R_{-a} coïncident, de sorte que Q_1 est un cône; le problème ne se pose plus, car les faces des tétraèdres seraient concourantes en un point; donc on doit prendre $R_{3a} = R_{-a}$, d'où $4a = 0$; si l'on appelle 2ω, $2\omega'$ les périodes fondamentales, on doit avoir $2a = \omega$, ou ω, ou $\omega + \omega'$; or $2a = \omega$ donne l'un des systèmes de quatre semi-quadriques auxquelles il a été fait allusion plus haut : *chacune des six quadriques auxquelles on arrive possède* ∞^1 *quadrilatères gauches tracés sur elle et inscrits dans* $\mathcal{B}$.

Nous allons maintenant examiner ce qui se passe quand le point de contact ω du plan α avec Q_1 vient sur $\mathcal{B}$. Nous faisons la figure dans les deux cas, pour pouvoir comparer (*fig.* 1).

Fig. 1.



Quand ω est venu sur $\mathcal{B}$, on doit faire coïncider M, P avec ω, M' avec R, P' avec N; le plan M'N'P'R' devient le plan des deux génératrices NN'RR' : *il est donc tangent simultanément à* Q_1 *et* Q_2 : son point de contact avec Q_1 est ω_1 point de concours de NN' et RR', son point de contact avec Q_2 est le point ω_2 où concourent RN' et NR'. Dans le cas plus particulier où Q_2 coïncide avec Q_1, les quatre points R', N', ω_1 et ω_2 sont confondus et la quadrique Q_2 contient ∞^1 quadrilatères gauches tracés sur elle et inscrits dans $\mathcal{B}$ (1).

(1) Nous venons d'obtenir les plans α_1 tangents simultanément à Q_1 et Q_2, ils enveloppent une développable de quatrième classe déduite de l'ensemble des plans tangents à Q_1 aux divers points ω situés sur $\mathcal{B}$; dans le cas d'exception donné en note au paragraphe 4 [cas où la quadrique Q contient la conique q_1 sans que $\overline{Q}$ se décompose] on trouve un plan α_1 particulier tangent à Q_1 et Q_2, autre que les plans précédents : donc cette fois Q_1 et Q_2 coïncident.

Nous sommes maintenant en mesure de traiter la question suivante : *quelles sont les droites qui au, lieu d'être arêtes de deux tétraèdres seulement, sont arêtes de* ∞^1 (*ou même* ∞^2 *tétraèdres*).

7. **Examen du cas où il existe ∞^1 tétraèdres ayant une arête commune.** — Opérons d'abord synthétiquement : étudions la figure 1 dans le cas où ω est sur $\mathcal{B}$, M et P étant confondus avec ω; nous reprenons le raisonnement du second lemme du n° 4; si nous traçons une corde CD de la conique q, autre que NR, le plan β, nouveau plan tangent à Q_1 mené par CD, coupe le plan α_1 suivant une droite unique qui coupe Q en deux points A′, A″ et l'on obtient deux tétraèdres CDA′B′, CDA″B″ (¹).

Supposons que CD coïncide avec NR (*fig.* 1); mettons C en N et D en R; si B′ est un point de q autre que ω, les plans tangents à Q_1 menés par CB′ et DB′, autres que α, sont $CB'\omega_1$ et $DB'\omega_1$: on trouve toujours le point ω_1; si B vient en ω, les plans tangents sont respectivement un plan *quelconque* mené par ωN ou ωR : on trouve donc un point d'intersection *quelconque* dans le plan NN′, RR′; ceci explique pourquoi la quadrique $\overline{Q}$ du lemme se décompose en le plan α et le plan α_1 du cas actuel. *Si donc on prend un point quelconque* A *de la section de* Q *par ce plan* α_1 *actuel*, on a un tétraèdre CDAB, $(B = \omega)$ répondant à la question; il y a ∞^1 tétraèdres de cette espèce construits sur le même triangle CBD, de sorte que par chaque arête CB, DB, CD passent ∞^1 tétraèdres.

Ceci nous renseigne sur la position du point C_1 correspondant à C dans la correspondance (A, A_1) lorsque le point C vient sur la biquadratique $\mathcal{B}$; le plan BDA est l'un des plans associés à C; ce plan pivote autour de la génératrice BD de Q_1, donc C_1 est sur cette génératrice; autrement dit, si l'on considère un point C de la biquadratique $\mathcal{B}$, on prend une des deux génératrices de Q_1 issue de C, CB par exemple; on en prend le nouveau point B de rencontre avec $\mathcal{B}$ et par B on mène la nouvelle génératrice de Q_1 : C_1 est sur cette nouvelle

(¹) Si C vient en N, sans que D soit en R, la droite (β, α_1) est la génératrice $N\omega_1$ et l'un des deux points A′, A″ est confondu avec N : il correspond à un tétraèdre aplati NωDN, tandis que l'autre solution est un tétraèdre véritable.

génératrice; en partant de C avec l'autre génératrice, on obtient C_1 par intersection de deux génératrices de Q_1. En particulier si l'on applique cette construction à ω, on trouve ω_1 précisément; ω décrivant $\mathcal{B}$, le point ω_1 décrit la biquadratique $(Q_1, \overline{Q}_2)$, *si toutefois* $\overline{Q}_2$ *est distincte de* Q_1; si $\overline{Q}_2$ coïncide avec Q_1, le point ω_1 décrit une biquadratique, *transformée toujours de* $\mathcal{B}$ *par l'homographie* (A, A_1) (mais elle ne peut être définie par $\overline{Q}_2$, puisque $\overline{Q}_2$ coïncide avec Q_1).

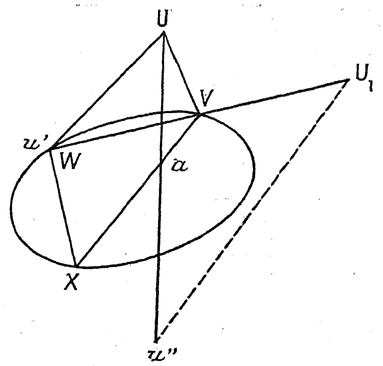
Par dualité, au lieu des plans α *tangents à* Q_1 *en un point de la biquadratique* (Q, Q_1), *nous aurons les points* A *où le plan tangent à* Q *appartient à la développable* (Q, Q_1).

Traitons maintenant le problème annoncé : nous avons une infinité de tétraèdres ayant une arête commune; le raisonnement peut se faire soit en considérant les points U, V où cette arête perce Q, soit les plans u, v menés par cette arête tangentiellement à Q_1. Adoptons les points U, V, *ce qui exige que l'arête ne soit pas génératrice de* Q. *Supposons d'abord que* U, V *ne soit pas génératrice de* Q_1 : donc les deux faces issues de l'arête UV sont connues; l'une au moins des faces VWX ou UWX est variable; *supposons* VWX *variable :* cette face passe d'abord en V, puis par U_1 : *donc elle ne peut varier que si* U_1V *est une génératrice de* Q_1 *ou si* U_1 *et* V *sont confondus.*

Nous traitons le premier cas : UV *non génératrice de* Q_1 (*ni de* Q), U_1V *génératrice de* Q_1. Ceci entraîne comme conséquence nécessaire et suffisante pour U que U_1 soit sur Q_1, car on prendra ensuite V sur l'une des deux génératrices de Q_1 issues de U_1. Le lieu de U_1 est la biquadratique $(Q_1, \overline{Q}_2)$, *si* $\overline{Q}_2$ *est distincte de* Q_1; le point U décrit donc aussi une biquadratique, et nous avons reconnu synthétiquement que c'est la biquadratique (Q, Q_1); cela résulte d'ailleurs aussi de ce que, par la transformation (A, A_1), qui coïncide avec (α_1, α), la quadrique Q_2 a pour transformée Q_1, et Q pour transformée $\overline{Q}_2$ et que Q_2, Q, Q_1 appartiennent à un même faisceau linéaire.

Nous marquons donc (*fig.* 2) un point U de $\mathcal{B}$, les deux génératrices Uu', Uu'' de Q_1 issues de U avec leur nouveau point de rencontre u' ou u'' avec $\mathcal{B}$, puis les nouvelles génératrices $u'U_1$ et $u''U_1$, issues sur Q_1 de u' et u''; *si nous supposons aussi* $\overline{Q}_2$ *différente de* Q, le point U_1 n'est pas sur $\mathcal{B}$; le point V peut être supposé sur $U_1 u'$ et puisque UV n'est pas génératrice de Q_1, V est le point de rencontre, autre que u', de $U_1 u'$ avec $\mathcal{B}$; par $u'VU_1$ nous menons un plan quelconque donnant sur Q une conique Γ passant en u' et V; le cône circonscrit de U à Q_1 dégénère en deux droites Uu' et Uu'', de sorte que

Fig. 2.



la conique Γ_1, trace de ce cône sur le plan de Γ dégénère en deux points; l'un est u', l'autre est le point a où Uu'' rencontre le plan de Γ; pour avoir le triangle inscrit dans Γ, de sommet V, circonscrit à Γ_1, nous menons de V les tangentes Vu', Va à Γ_1 et prenons leur point de rencontre, autre que V, avec Γ : cela donne W coïncidant avec u' et X sur Va; le tétraèdre UVWX a trois sommets fixes U, V, W et un sommet variable X; la face UVW est fixe à tous points de vue (sommets fixes et plan fixe); le plan des sommets UVX est fixe, mais le sommet X est variable; les deux faces UWX et VWX pivotent autour de l'arête UW ou VW; nous retrouvons ce qui a été prévu *a priori* dans la figure 1, en partant d'un point W de $\mathcal{B}$ et des deux génératrices WU, WV.

Si la quadrique $\overline{Q}_2$ coïncide avec Q, le point U_1 est aussi sur $\mathcal{B}$ et V coïncide avec U_1 : à part cette particularité il n'y a rien de changé si l'on met W en u'; mais on peut mettre W aussi en u'', de sorte que cette fois il y a *deux séries* ∞^1 de tétraèdres ayant UV pour arête.

Enfin il faut examiner à part le cas où $\overline{Q}_2$ *coïncide avec* Q_1 : le point U, cette fois peut être *quelconque* sur Q (si U était sur $\mathcal{B}$, il n'y aurait rien de changé à ce qui précède). Présentons le résultat synthétiquement : nous avons vu que l'on peut prendre convenablement une racine carrée α de a, β de b, γ de c, δ de d de sorte que par polarité relativement à la quadrique H,

$$(\mathrm{H}) \qquad \frac{x^2}{\alpha}+\frac{y^2}{\beta}+\frac{z^2}{\gamma}+\frac{t^2}{\delta}=0,$$

la quadrique Q s'échange avec Q_1 ; les nombres α, β, γ, δ sont liés par la relation $\alpha+\beta+\gamma+\delta=0$ et les nombres a, b, c, d par la relation

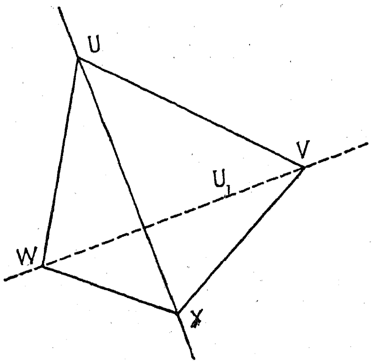
$$(\Sigma a^2-2\Sigma ab)^2-64abcd=0$$

ou

$$\Sigma a^4+6\Sigma a^2b^2-4\Sigma a^3b+4\Sigma a^2bc-40abcd=0.$$

Une génératrice G de Q devient une génératrice de G_1 de Q_1 ; si par G l'on mène les deux plans tangents à Q_1, ces deux plans deviennent chacun par polarité un point commun à Q et Q_1 et la droite joignant ces deux points est la génératrice G_1. Cela posé, prenons sur Q une génératrice G (*fig.* 3) et marquons les points V, W où G_1 perce Q;

Fig. 3.



sur G marquons deux points arbitraires U, X; le tétraèdre UVWX a ses quatre faces tangentes à Q_1, car UXW, UXV sont les deux plans tangents à Q_1 menés par G; d'autre part les faces WVU et WVX pivotent autour de G_1 ; *ici on obtient* ∞^2 *tétraèdres ayant une arête portée par* G (*avec deux sommets variables sur* G), *ou* ∞^2 *tétraèdres ayant une arête portée par* G_1 (*avec deux faces variables pivotant autour de* G_1 ; *les* ∞^2 *tétraèdres ont* G *et* G_1 *pour support commun de deux arêtes opposées*. On peut remarquer que, si U reste fixe, V et W restent fixes aussi et la face VWX pivote autour de WV, de sorte que le point U_1 est nécessairement porté par la génératrice G_1 ; U *et* V *restant fixes, on a* ∞^1 *tétraèdres ayant les sommets* U, V *en commun (ainsi que le sommet* W) : mais il y a une différence essentielle avec la figure 2 où nous avions aussi ∞^1 tétraèdres ayant en commun les sommets U, V, ainsi que le sommet W : *dans la figure* 2, UV *n'étant pas génératrice de* Q_1, UW *est génératrice de* Q_1 : *dans la figure* 3, *ni* UV *ni* UW *ne sont génératrices de* Q_1 ; dans la figure 2, le lieu de X est une conique, section de Q par le plan fixe UVu'' et U est sur $\mathcal{B}$; dans la figure 3, le lieu de X est une génératrice de Q et U n'est pas sur $\mathcal{B}$.

Cette discussion conduit à la solution de la question suivante : *étant données deux quadriques* Q, Q_1 *peut-on trouver sur* Q *une génératrice* G, *sur* Q_1 *une génératrice* G_1, *telles que* V *et* W *étant les points où* G_1 *perce* Q, *les plans* GV *et* GW *soient tangents à* Q_1 ? (La propriété géométrique se transforme en elle-même dans la polarité qui échange Q et Q_1). *A priori*, si l'on donne G, G_1, les points V, W sur G_1 (ce qui revient à donner les plans GV, GW passant par G), la quadrique Q contenant G, V, W, puis la quadrique Q_1 contenant G_1 et tangente aux plans GV, GW (en des points autres que V ou W), on fait jouer un nombre de paramètres égal à $4 + 4 + 2 + 4 + 4$, soit 18. Si l'on donne *a priori* Q, Q_1, ce qui fait disposer de 18 paramètres, la recherche de G et G_1 introduit deux inconnues (une pour déterminer chaque génératrice G ou G_1), avec un total de deux équations (le plan GV doit contenir un nouveau point de la génératrice autre que G_1 issue de V sur Q_1 ; de même GW) : *ces deux équations à deux inconnues ne sont pas compatibles dans le cas général;* car si le couple G, G_1 existe, on peut choisir U, X arbitrairement sur G, obtenir ainsi le tétraèdre de la figure 3 et alors U restant fixe, X variant sur G on voit que le point U_1 est sur Q_1 sans que U appartienne à $\mathcal{B}$, de sorte que les quadriques $\overline{Q}_2$ et Q_1 ont en commun, outre la biquadratique transformée de $\mathcal{B}$, un nouveau point U_1 : *elles coïncident donc.* Les racines de l'équation en λ du faisceau $Q - \lambda Q_1 = 0$ sont donc liées par la relation $\Sigma\sqrt{\lambda} = 0$, ce qui fait que le couple (Q, Q_1) ne dépend plus que de 17 paramètres, au lieu de 18; par contre on obtient ∞^1 couples G, G_1 avec Q, Q_1 fixées ainsi (et même deux séries ∞^1 en prenant successivement les génératrices de chaque système de Q).

Revenons à notre second cas : UV *non génératrice de* Q_1, U_1 *et* V *confondus*. Comme V est sur Q et U_1 sur $\overline{Q}_2$, le point U_1 ou V du cas actuel est sur la courbe Q, $\overline{Q}_2$, *si nous supposons* $\overline{Q}_2$ *et* Q *distinctes* (nous étudierons plus loin le cas $\overline{Q}_2$ et Q confondues). Le point U_1 dans le cas actuel satisfait aux deux équations

$$(U_1)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \\ (\overline{Q}_2) & \dfrac{x^2}{A^2}+\dfrac{y^2}{B^2}+\dfrac{z^2}{C^2}+\dfrac{t^2}{D^2}=0, \end{array}\right.$$

et le point U aux deux équations

$$(U)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \\ & A^2x^2+B^2y^2+C^2z^2+D^2t^2=0. \end{array}\right.$$

Nous avons remarqué que le tableau

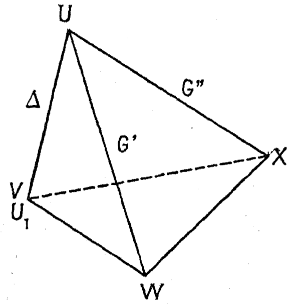
$$\left|\begin{array}{cccc} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ A^2 & B^2 & C^2 & D^2 \end{array}\right|$$

a tous ses déterminants d'ordre 3 nuls; donc on peut remplacer les deux équations qui déterminent U par

$$(U)\qquad \left\{\begin{array}{ll} (Q) & x^2+y^2+z^2+t^2=0, \\ & ax^2+by^2+cz^2+dt^2=0. \end{array}\right.$$

la dernière exprime que le plan tangent en U *à* Q, *plan qui a pour coordonnées* (x, y, z, t) *est tangent à* Q_1; *donc le point* U *est sur la courbe*

Fig. 4.

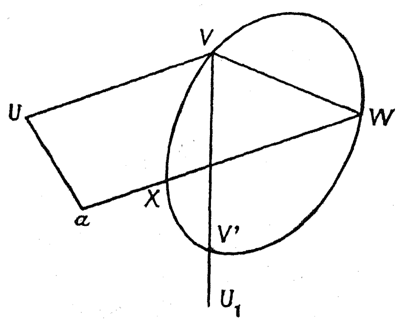


de contact avec Q *de la développable circonscrite à* Q *et* Q_1. On obtient les tétraèdres qui se déduisent par dualité de ceux de la figure 2 (ou figure 1). La construction synthétique est la suivante : par le point U pris sur la courbe de contact en jeu, on trace les deux génératrices de Q (*fig.* 4), soit G′ et G″; par G′ et G″ on mène le plan tangent à Q_1 autre que le plan G′, G″; les deux plans obtenus se croisent suivant une droite Δ qui recoupe Q en V, lequel est en même temps le point U_1 associé à U. Un plan tangent *quelconque* à Q_1 mené par V forme la quatrième face du trièdre cherché, les trois autres étant fixes (G′, G″; Δ, G″; Δ, G′).

Si $\overline{Q}_2$ coïncide avec Q (auquel cas Q_2 coïncide avec Q_1) le point U peut être quelconque sur Q; nous avons vu que la correspondance (U, U_1) est une involution biaxiale, de sorte que V coïncidant avec U_1, V_1 coïncide avec U; les quadriqnes Q et Q_1 se conservent dans l'involution biaxiale en jeu; les ∞^1 tétraèdres obtenus se correspondent deux à deux dans l'involution biaxiale en jeu. Ce type de tétraèdres se correspond à lui-même par dualité, car les deux points U et V de Q se correspondent dans cette involution et les deux plans UVW et UVX tangents à Q_1 aussi. Nous avons vu, en notes, aux paragraphes 4 et 5 comment ce cas se prévoit *a priori*.

Passons maintenant au cas réservé dès le début : UV *génératrice*

Fig. 5.

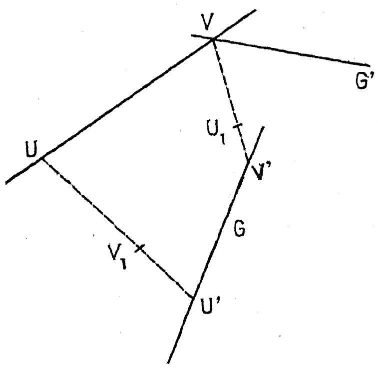


de Q_1 (de sorte que pour une telle arête, on peut prendre les deux points où elle perce Q, mais non les plans tangents menés à Q_1 qui sont indéterminés autour de l'arête). U et V sont sur la biquadratique $\mathcal{B}$; nous savons que U_1 est sur la nouvelle génératrice de Q_1 issue de V; donc par U_1 V menons un plan *quelconque ;* nous obtenons la figure 5 où nous avons marqué la conique Γ de section de Q par ce plan; la conique Γ_1 trace, sur ce plan, du cône circonscrit à Q_1 par U se réduit au point V et au point a; d'un point W quelconque de Γ on mène Wa qui recoupe Γ en X; le tétraèdre UVWX répond aux conditions; il y a ∞^1 plans tels que le plan choisi autour de $VV'U_1$, et dans chacun d'eux il y a ∞^1 points W; *on obtient donc* ∞^2 *tétraèdres ayant pour arête une génératrice de* Q_1.

Par dualité, on obtient ∞^2 *tétraèdres ayant pour arête une génératrice de* Q, ce qui était le cas réservé aussi dès le début.

Il reste encore un léger paradoxe à liquider; dans le cas où Q et Q_1 sont telles que les racines de l'équation en λ du faisceau $Q - \lambda Q_1 = 0$ donnent la relation $\Sigma\sqrt{\lambda} = 0$, nous avons remarqué qu'il y avait ∞^2 tétraèdres ayant pour arête une génératrice de Q_1. Dans le cas de la figure 5 (en supposant que $\overline{Q}_2$ ne coïncide pas avec Q_1, ni la quadrique Q_2 avec Q) on n'obtient jamais pour l'arête WX une génératrice de Q, car si cela avait lieu on aurait précisément le couple WX génératrice de Q, UV génératrice de Q_1, tel que les plans WXU, WXV reliant WX aux points d'intersection de UV avec Q soient tangents à Q_1 (contenant en effet la génératrice Ua, ou $VV'U_1$ de Q_1). Dans le cas où $\overline{Q}_2$ coïncide avec Q_1, et Q_2 avec Q on obtient d'abord, pour

Fig. 6.

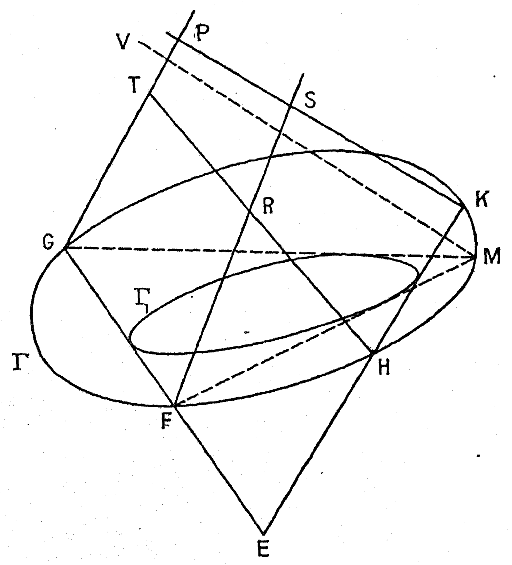


toute génératrice de Q_1, les ∞^2 tétraèdres de la figure 5 puis les ∞^2 tétraèdres particuliers où l'arête WX est génératrice de Q; pour le voir marquons en effet sur la figure 6 la génératrice UV de Q_1, les points U, V où elle perce $\mathcal{B}$, puis U_1 et V_1 situés sur les nouvelles génératrices de Q_1 issues de V et U, puis les points V′ et U′ où VU_1 et UV_1 percent à nouveau Q; la droite V′U′ est la génératrice de Q associée à UV; le plan particulier $U'V'U_1V$ donne comme conique Γ une conique dégénérée en deux droites dont l'une est G, l'autre une droite G′ issue de V; *la section de* Γ_1 *se réduit à deux points l'un* V *sur* G′, *l'autre* U′ *sur* G, de sorte que, *dans ce cas particulier,* il y a ∞^2 triangles dont les sommets sont sur G ou G′ et dont les côtés passent par V ou U′.

8. **Intersection de Q et Q_1 formée de quatre génératrices.** — Nous avons reconnu directement, grâce au raisonnement géométrique de M. Rowe, employé comme lemme au n° 4, que les quadriques Q et Q_1 ayant en commun quatre génératrices fournissent ∞^3 tétraèdres. L'étude de la correspondance (A, A_1), ou (α, α_1) a de nouveau signalé ce cas. Il va être instructif de donner de nouvelles démonstrations géométriques, intuitives, dues aussi à M. Rowe.

Dessinons (*fig.* 7) le quadrilatère PTRS formé par les quatre géné-

Fig. 7.



ratrices communes; en un point E de Q_1 menons le plan tangent à Q_1

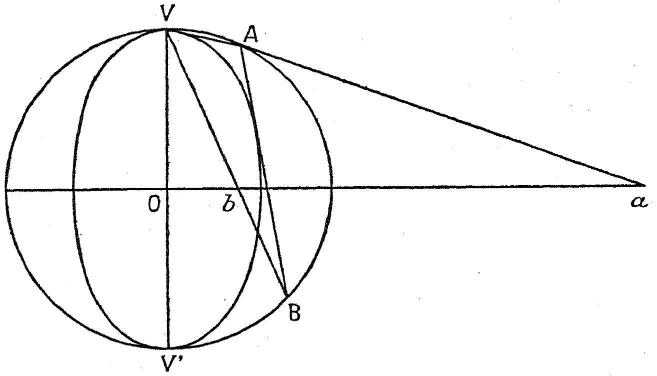
coupant Q_1 suivant les génératrices EHK, EFG; la conique Γ, section de Q par ce plan passe en FGHK. D'autre part, par un point V de Q passe une génératrice de Q s'appuyant sur PT et SR, ayant son pied en M sur Γ; MG est la perspective de PT sur le plan de Γ, MF celle de SR; donc le triangle MFG est inscrit dans Γ et circonscrit à la conique Γ_1, trace sur le plan adopté du cône circonscrit de V à Q_1 : donc Γ et Γ_1 admettent une infinité de triangles inscrits dans Γ et circonscrits à Γ_1 et l'on retrouve les ∞^5 tétraèdres.

On peut remarquer qu'il y a deux séries ∞^4 de tétraèdres inscrits et circonscrits à Q, et aussi à Q_1 simultanément. En effet, menons par PT deux plans arbitraires, et deux autres par RS; ces quatre plans forment un tétraèdre de l'espèce indiquée, dont on peut dire qu'ils sont légèrement dégénérés, en ce sens que les quatre points de contact sont deux sur une arête, deux sur l'arête opposée. Le couple PS, TR livre de même une autre série ∞^4; le tétraèdre PRST est commun aux deux séries.

Cette remarque permet d'expliquer ce que deviennent les ∞^5 tétraèdres quand Q restant fixe, Q_1 varie dans le faisceau déterminé par le quadrilatère PSRT de façon à venir coïncider avec Q : on trouve cette fois ∞^6 tétraèdres obtenus en prenant deux génératrices arbitraires du même système de Q, deux plans arbitraires par l'une et deux plans arbitraires par l'autre.

Donnons encore une autre démonstration géométrique qui nous permettra de passer du cas de quatre génératrices distinctes à celui de deux génératrices doubles. Par une homographie, on peut se borner au cas d'une sphère Q et d'une quadrique Q_1 de révolution tangente à la sphère aux deux extrémités d'un diamètre VV'; occupons-nous simplement des plans tangents à Q_1 aux divers points d'une méridienne (*fig.* 8); une tangente à cette méridienne perce le méridien de la sphère en deux points A, B tels que les rayons VA, VB se correspondent homographiquement, VV' et la tangente en V étant les rayons doubles; par perspective sur le diamètre perpendiculaire à VV', on a donc deux points a, b tels que $\frac{Oa}{Ob}$ soit une constante; le cercle Γ section de Q par le plan tangent considéré a pour perspective le cercle décrit sur ab comme diamètre, autrement dit est vu de O sous un angle constant. La question est donc ramenée à la suivante : *on considère dans un plan un point fixe* O *et les* ∞^2 *cercles tels que leur diamètre passant en* O *les coupe en deux points* a, b *tels que* $\frac{Oa}{Ob}$ *soit égal à une constante donnée* (*ou tels que chacun d'eux soit vu de* O *sous un*

Fig. 8.



angle fixe); *par un point* α *du plan passent* ∞^1 *cercles de cette espèce; si l'on en prend trois au hasard, les points* β, γ, δ *où ces trois cercles se recoupent* 2 *à* 2 *en dehors de* α *sont sur un nouveau cercle appartenant à la famille* ∞^2 *envisagée.* Nous laissons au lecteur le soin de démontrer cette proposition.

Dans le cas de deux génératrices communes doubles, on ramène de même la figure à une sphère Q et à une quadrique de révolution Q_1 dont la méridienne est surosculée en V par le cercle méridien de la sphère; cette fois le segment ab (mêmes notations que précédemment) a une longueur constante; on obtient donc la propriété suivante bien connue : *dans un plan, si trois cercles de même rayon passent par un point* a, *leurs nouveaux points communs* b, c, d *sont encore sur un cercle de même rayon.*

9. **Quadriques ayant une cubique gauche commune.** — Les seuls cas où l'étude *analytique* de la correspondance (A, A_1) ou (α, α_1) faite par le tétraèdre conjugué commun est en défaut sont les suivants :

1° Intersection (Q, Q_1) constituée par une biquadratique à point double;

2° Intersection (Q, Q_1) constituée par une cubique gauche et une génératrice ;

3° Intersection (Q, Q_1) constituée par une conique et deux génératrices de système opposé.

Les explications géométriques subsistent; les correspondances (A, A_1), (α, α_1) sont encore des homographies inverses l'une de l'autre, laissant inaltérés les sommets des cônes du second ordre contenant *toute* l'intersection.

Donnons quelques explications relatives au cas de la cubique gauche Γ et de la génératrice G communes à Q et Q_1; un plan α tangent à Q_1 coupe la génératrice G en M et la cubique Γ en N, R, P; MN sont sur une génératrice de Q_1 de système opposé à G, R et P sur une génératrice du même système; donc R' et P' sont sur G, tandis que N' est sur la cubique Γ; le plan α_1 déterminé par $N'P'R'$ pivote autour de G; il coupe Q d'abord suivant G, puis suivant une génératrice G' de système opposé à G; le second plan β mené par CD tangentiellement à Q_1 coupe G en un point A' qui, réuni à $B'(=M)$, donne le tétraèdre $A'B'CD$ qui répond aux conditions, les plans $A'B'C$ et $A'B'D$ ayant leur point de contact avec Q_1 sur le périmètre de la face; le point A où β coupe G' et le point B correspondant à A sur la conique q, commune à α et Q, donne un tétraèdre ABCD répondant aussi à la question, les points de contact avec Q_1 étant tous à l'intérieur de la face correspondante. A chacun des ∞^2 plans α correspond sur Q une génératrice G'; on peut remarquer que si α pivote autour d'une génératrice de Q_1, de système opposé à G, la génératrice G' reste fixe; *on a ainsi réalisé une correspondance biunivoque entre les génératrices de système opposé à* G *sur* Q *et* Q_1.

10. **Quadriques ayant en commun une conique et deux génératrices sécantes.** — Ce cas est compris comme dégénérescence dans le précédent; la quadrique auxiliaire $\overline{Q}$ du n° 4 contient les deux génératrices sécantes communes à Q et Q_1, de sorte que le résultat est le suivant : CD étant une corde quelconque de Q, par CD on mène les deux plans tangents à Q_1; l'une des génératrices communes rencontre ces plans en A_1, B_1; A_1B_1CD est l'un des tétraèdres cherchés; l'autre

génératrice donne de même A_2B_2CD; on a ∞^4 tétraèdres; mais il n'y a plus lieu de parler de la correspondance (α, α_1) car le plan de α_1 est toujours celui des deux génératrices communes.

11. **Tétraèdres dont les sommets sont sur une cubique gauche ou sur une biquadratique et dont les faces sont tangentes à une quadrique (ne passant pas par la courbe).** — Cette question est, si l'on veut, comprise dans celle qui a été étudiée ici : les faces du tétraèdre sont tangentes à une quadrique Q_1 pendant que les sommets sont à la fois sur l'une et l'autre de deux quadriques Q, Q'.

J'indique, synthétiquement, quelques résultats, réservant l'étude complète pour un Mémoire séparé.

Considérons une cubique gauche Γ et une quadrique Q_1 *quelconques :* il existe un tétraèdre et un seul T de sommets situés sur Γ et de faces tangentes à Q_1. Pour mettre le problème en équation, on peut supposer, par une homographie préalable, que Γ est la cubique d'équations $y = x^2$, $z = x^3$ (ce qui laisse encore 3 paramètres disponibles pour l'homographie, mais peu importe). Du point $A(t, t^2, t^3)$ de Γ, comme sommet commun, sont issus le cône S ayant Γ pour directrice, le cône S_1 circonscrit à Q_1; en exprimant que le cône S est capable d'un trièdre circonscrit à S_1, on trouve une équation qui (débarrassée du facteur, de degré 12, carré du polynome en t donnant les points communs à Γ et Q_1) *est de degré 4 exactement* [1]; je dis que *les 4 points correspondants* A, B, C, D *sont les sommets du tétraèdre cherché.* En effet, sur le cône S^A je puis prendre AB comme première génératrice d'un trièdre inscrit dans S^A, circonscrit à S_1^A; les deux faces issues de AB ne sont autres que les deux plans tangents menés à Q_1 par AB : elles recoupent Γ en C' et D' et le plan $C'AD'$ est tangent à S_1^A, donc à Q_1; mais le même raisonnement fait avec le point B et les cônes S^B, S_1^B prouve que le plan $C'BD'$ est tangent à Q_1; donc C' et D' ne sont autres que C et D et le résultat est démontré. L'ensemble Γ, Q dépend de $12 + 9$ ou 21 paramètres et le tétraèdre T est unique; si l'on part d'un tétraèdre T quelconque (12 paramètres), d'une cubique Γ

---

(1) Certains auteurs affirment que le degré est 10 : ils ont sans doute oublié de vérifier que le polynome en t de degré 6, relatif aux points (Γ, Q_1) est en facteur *au carré*.

circonscrite à T (4 paramètres nouveaux), d'une quadrique Q inscrite dans T (5 paramètres nouveaux) on retrouve le nombre 21 pour l'ensemble des paramètres.

Sur la cubique Γ prenons deux tétraèdres T(ABCD) et T'(A'B'C'D'); si nous considérons une quelconque, Q_1, des ∞^2 quadriques tangentes aux 4 faces de T et aux 3 faces de T' issues de A', *l'équation de degré 4, relative à Γ et Q_1 formée à l'instant se réduit à une identité*, car elle admet pour racines les t des 5 points A, B, C, D, A'; donc le raisonnement qui vient d'être fait peut s'appliquer à deux points *quelconques* M_1, M_2 de Γ et fournit un tétraèdre $M_1M_2M_3M_4$ inscrit dans Γ et circonscrit à Q_1. Il y a deux conséquences à tirer de là :

1° Si deux tétraèdres sont inscrits dans une cubique gauche, toute quadrique tangente à 7 faces prélevées sur les 8, est tangente à la huitième : *nous allons voir que ces 8 faces sont tangentes à une même développable Δ de classe 3, admettant avec Γ ∞^1 tétraèdres de cette espèce, inscrits dans Γ, circonscrits à Δ*;

2° *Si une cubique Γ et une quadrique Q_1 admettent deux tétraèdres inscrits dans Γ, circonscrits à Q_1, ils en admettent une double infinité.*

Duporcq avait indiqué à ce sujet un résultat *exact*, mais incomplet (*Nouvelles Annales*, 4e série, t. II, 1902, p. 166) : il n'avait pas remarqué le premier des deux résultats qui viennent d'être indiqués; pour le second, il le signale en admettant que Γ et Q_1 admettent *trois* tétraèdres de cette espèce, tandis qu'il suffit de *deux* (1).

Nous allons, tout de suite, en utilisant la remarque que M. Rowe a faite sur un couple de quadriques Q, Q_1 ayant 4 génératrices communes, montrer que *les conditions nécessaires et suffisantes pour que le couple Γ, Q_1 admette ∞^2 tétraèdres (au lieu d'un seul) se réduisent à 3 (bien que l'équation à rendre identique soit de degré 4), dont l'interprétation géométrique est la suivante : les 6 points où Γ perce Q_1 sont répartis, par couples de 2, sur 3 génératrices (de même système) de Q_1*. En effet, soit M l'un des 6 points en question : le cône S_1^M, au point de

(1) Duporcq connaissait peut-être le résultat erroné donnant, comme degré de l'équation indiquée plus haut, 10 au lieu de 4 (et alors pour rendre l'équation identique, il eût fallu au moins 11 solutions, de sorte que 2 tétraèdres n'auraient pas suffi).

vue tangentiel, se réduit aux deux génératrices de Q_1 issues de M; l'une est sur S^M; les 6 points offrent donc la particularité annoncée (*condition nécessaire*). Quand cette condition est remplie, appelons G', G'', G''' les 3 génératrices en jeu; appelons Q', Q'', Q''' les 3 quadriques contenant toutes les trois la cubique Γ, puis respectivement le couple (G'', G''') ou (G''', G') ou (G', G''); chacune coupe Q_1 suivant quatre génératrices; donc si nous prenons un plan tangent *quelconque* α de Q_1, ce plan coupe Γ en 3 points B, C, D et les plans, autres que α, menés tangentiellement à Q_1 par CD, DB et BC se recoupent en A situé *à la fois* sur Q', Q'', Q''', donc sur Γ (*condition suffisante*).

Vérifions que le couple spécial Γ, Q_1 dépend bien de 18 paramètres (au lieu de 21). Donnons-nous Γ (12 paramètres), le tétraèdre T (4), le tétraèdre T' (4); une quadrique Q_1 tangente à 7 des faces de T et T' dépend encore de 2 paramètres; le *total* Γ, T, T', Q_1 fait donc intervenir $12+4+4+2$ soit 22 paramètres que nous pouvons obtenir aussi en donnant *d'abord* Γ et Q_1, soit x paramètres, puis T (2), puis T' (2); $x+4=22$, dont le nombre x est bien égal à 18.

Duporcq, dans l'article cité, emploie le procédé suivant : T_1, T_2, T_3 sont trois trièdres inscrits dans Γ; leurs sommets sont donnés respectivement par $f_1(t)=0$, $f_2(t)=0$, $f_3(t)=0$, où f_1, f_2, f_3 sont 3 polynomes en t de degré 4; l'équation $\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)+\lambda_3 f_3(t)=0$ représente *les sommets de* ∞^2 *tétraèdres inscrits dans* Γ (λ_1, λ_2, λ_3 étant des constantes), *dont les faces restent tangentes à une même quadrique* Q_1, car, de chaque corde M_1M_2 de Γ partent seulement 2 de ces faces.

Il y a lieu de compléter le raisonnement de Duporcq en considérant l'équation à *un* paramètre, au lieu de *deux*, $\lambda_1 f_1(t)+\lambda_2 f_2(t)=0$: par un point M arbitraire de Γ passent *trois* faces d'un trièdre emprunté à la série ∞^1 de trièdres considérés; *donc les faces des* ∞^1 *trièdres ainsi obtenus sont tangentes à une développable* Δ *de classe* 3 *et réciproquement, si une cubique gauche* Γ *et une développable* Δ *de classe* 3 *admettent deux trièdres inscrits dans* Γ, *circonscrits à* Δ, *elles en admettent une série* ∞^1. Cherchons de combien de paramètres dépend un tel couple Γ, Δ; on donne d'abord Γ (12 paramètres) puis T_1 (4), puis T_2 (4); la développable Δ est, par suite, complètement connue (déterminée, par exemple, par 6 des 8 faces de T_1 et T_2); l'ensemble

$\Gamma + T_1 + T_2 + \Delta$ dépend donc de 20 paramètres; en le prenant dans l'ordre $\Gamma + \Delta + T_1 + T_2$ on trouve $x + 2 = 20$, donc $x = 18$. Si l'on considère une cubique Γ, une développable de classe 3, Δ, *quelconques*, leur ensemble dépend de 24 paramètres; si l'on cherche un tétraèdre T inscrit dans Γ, circonscrit à Δ, on a 4 inconnues (les t des sommets) liées par 8 équations : notre analyse prouve qu'*en général* ces équations sont incompatibles, car si l'on donne d'abord T (12 paramètres), la cubique Γ fait intervenir 4 paramètres nouveaux, Δ aussi 4 : de sorte que Γ et Δ ne font intervenir que 20 paramètres au lieu de 24; les 8 équations à 4 inconnues deviennent donc compatibles, moyennant quatre relations [1]. Moyennant *six* relations, l'équation de degré 8, se réduit à une identité. L'interprétation de ces six relations s'obtient aussitôt en remarquant que le paramètre $\lambda_1 : \lambda_2$ admet *six* valeurs pour chacune desquelles l'équation $\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) = 0$ a une racine double; si A, A, B, C sont les points ainsi obtenus sur Γ pour une telle valeur de $\lambda_1 : \lambda_2$, nous avons deux plans BAA, CAA tangents à Δ, se coupant suivant une tangente AA de Γ; nous avons aussi deux plans BCA, BCA *confondus*, tangents à Δ, issus de BC, qui est donc une génératrice de la surface Δ. *Donc les six conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une cubique gauche* Γ *et une développable* Δ *de classe* 3 *admettent une série* ∞^1 *de tétraèdres inscrits à* Γ, *circonscrits à* Δ, *est que les* 12 *points où* Γ *rencontre la surface* Δ (*qui est de degré* 4) *soient répartis par couples de deux sur* 6 *génératrices de* Δ, *ou, ce qui est équivalent, que les* 12 *plans tangents simultanément à* Γ *et* Δ *se répartissent en* 6 *couples se croisant, dans chaque couple, suivant une tangente de* Γ. Remarquons, pour les deux formes de cet énoncé, qu'une dua-

---

[1] Pour que le raisonnement soit parfaitement convaincant, il faut encore être assuré que Γ et Δ n'ont dans le cas étudié que l'unique tétraèdre T. Pour voir qu'il existe effectivement des couples Γ, Δ ayant un tétraèdre unique, donnons-nous Γ puis T; soient A, B, C trois points *quelconques* de Γ; les développables de classe 3 tangentes aux 4 faces de T et au plan ABC forment une série ∞^2; or si l'on donne un plan *arbitraire* passant par BC (*un* paramètre), il existe *une* développable Δ de classe 3 tangente aux 4 faces de T, au plan ABC et au nouveau plan; donc, en opérant de même avec CA et AB, nous obtenons seulement 3 séries ∞^1 de développables Δ, comprises dans notre série ∞^2 précédente, et admettant plus qu'un unique tétraèdre inscrit dans Γ, circonscrit à Δ; donc les développables obtenues en retranchant de la série ∞^2 les trois séries ∞^1 en jeu n'ont bien, avec Γ qu'un seul tétraèdre, à savoir T.

lité transforme Γ en une développable $\overline{\Delta}$, Δ en une cubique $\overline{\Gamma}$, un tétraèdre de sommets A, B, C, D, de faces α, β, γ, δ inscrit à Γ, circonscrit à Δ, en un tétraèdre de faces $\overline{\alpha}$, $\overline{\beta}$, $\overline{\gamma}$, $\overline{\delta}$ et sommets $\overline{A}$, $\overline{B}$, $\overline{C}$, $\overline{D}$ inscrit à $\overline{\Gamma}$, circonscrit à $\overline{\Delta}$; la première forme de l'énoncé devient la seconde : *or, on peut s'arranger pour que* $\overline{\Gamma}$ *coïncide avec* Γ *et* $\overline{\Delta}$ *avec* Δ; en effet, pour chaque tétraèdre ABCD, il est clair que les coordonnées du plan BCD s'expriment rationnellement par rapport au t de A ou aux coordonnées de A et que réciproquement les coordonnées de A s'expriment rationnellement au moyen du paramètre θ qui individualise un plan α tangent à Δ; cette correspondance (A, α) est la dualité annoncée, où chaque tétraèdre se correspond à lui-même.

Ici encore les ∞^1 tétraèdres relatifs à Δ et Γ se trouvent inscrits dans les ∞^2 quadriques contenant Γ et circonscrits aux ∞^2 quadriques inscrites dans Δ.

Je signale encore, reprenant les idées de Duporcq, diverses propriétés de la série ∞^2 de tétraèdres définis par l'équation

$$\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 = 0;$$

les sommets d'un tel tétraèdre sont définis par la même équation que les points d'intersection de la quartique plane unicursale

$$\gamma[x : y : z :: f_1(t) : f_2(t) : f_3(t)]$$

par la droite de coordonnées $(\lambda_1 : \lambda_2 : \lambda_3)$; aux ∞^2 droites du plan π auxiliaire ainsi introduit correspondent nos ∞^2 tétraèdres; aux ∞^1 droites passant par un point fixe de ce plan π correspondent ∞^1 tétraèdres enveloppant une développable Δ étudiée ici, associée à Γ et circonscrite à Q_1; deux de ces développables ont un seul tétraèdre circonscrit à chacune et inscrit dans Γ, correspondant à la droite joignant les points fixes de π relatifs aux deux développables. Dans cette représentation, à une droite du plan π correspond un tétraèdre T, à un point de π une développable Δ; soit alors le point m_0, de paramètre t_0 sur γ, et l'ensemble des droites issues de ce point dans π, de façon que l'on ait $\lambda_1 f_1(t_0) + \lambda_2 f_2(t_0) + \lambda_3 f_3(t_0) = 0$: les tétraèdres correspondants ont tous le sommet M_0 commun, point de paramètre t_0

sur Γ, de sorte que la développable correspondante dégénère en deux morceaux : d'abord le cône C_0 de sommet M_0, circonscrit à Q_1, puis une droite δ_0 enveloppe des plans $M_1M_2M_3$, tangente au cône C_0 : en effet, quand la droite de π devient la tangente en m_0 à γ, le tétraèdre dégénère en le tétraèdre $M_0M_0M_1M_2$; le plan $M_0M_1M_2$ qui contient δ_0 (si on le regarde comme plan de la face opposée à M_0) est aussi un plan tangent à C_0 (si on le regarde comme plan de deux arêtes issues de M_0); on obtient ainsi, en faisant varier t_0, les ∞^1 cônes circonscrits à Q_1 des points de Γ et les ∞^1 génératrices δ_0 de Q_1, le système correspondant étant celui des génératrices par lesquelles on peut mener *un* plan tangent unique à chacune des développables Δ (on joint en effet le point m_0 au point fixe où se croisent les droites relatives à Δ). Si nous prenons un point double de γ, soit μ, toute droite issue de μ perce γ d'abord en μ, puis en deux autres points μ_1, μ_2 de sorte que les tétraèdres correspondant à la rotation de la droite $\mu\mu_1\mu_2$ ont tous une arête fixe qui est la droite M, M' joignant les points de Γ obtenus pour les deux valeurs de t au point μ sur γ; M_1 et M_2 étant les deux autres sommets de ce tétraèdre T, le plan $MM'M_1$ a pour enveloppe MM', qui est donc une génératrice de Q_1; le plan $M'M_1M_2$ enveloppe une droite, passant par M', qui est donc la génératrice de système opposé à MM' dans Q_1; on a retrouvé la proposition fondamentale : Q_1 *admet* 3 *cordes de* Γ *pour génératrices;* les droites δ_0 engendrent la semi-quadrique complémentaire de celle qui admet les 3 cordes en jeu [la développable correspondant à M dégénère en 3 droites : l'enveloppe du plan $MM'M_1$, qui est MM', l'enveloppe du plan MM_1M_2 qui est la génératrice de système opposé à MM' sur Q_1, issue de M, et enfin la droite enveloppe du plan $M'M_1M_2$; ces deux dernières droites se retrouvent quand on prend la développable dégénérée correspondant à M'].

Il reste à montrer que quatre tétraèdres inscrits dans une cubique gauche Γ définissent, par élimination de l'un d'eux, 4 quadriques associées à Γ et ayant une génératrice commune, *qui est du système opposé aux génératrices δ_0 mises en évidence précédemment sur chacune des quadriques*. Je donne un raisonnement différent de celui de Duporcq : appelons $f_1(t)$, $f_2(t)$, $f_3(t)$, $f_4(t)$ les polynomes ayant pour racines les t des sommets de T_1, T_2, T_3, T_4. La quadrique Q_1 est l'enveloppe des faces des ∞^2 tétraèdres définis par l'équation

$$(1) \qquad 0 + \lambda_2 f_2 + \lambda_3 f_3 + \lambda_4 f_4 = 0,$$

et la quadrique Q_2 celle définie par l'équation

$$(2) \qquad \mu_1 f_1 + 0 + \mu_3 f_3 + \mu_4 f_4 = 0.$$

Q_1 et Q_2 admettent une développable de classe 3, circonscrite à chacune et définie par l'ensemble des tétraèdres

$$(3) \qquad f_3 : f_4 = \text{const.},$$

de sorte que Q_1 et Q_2 ont une génératrice commune G *par laquelle passent deux plans tangents à* Δ; coupons la cubique Γ par un plan *arbitraire* issu de Δ; ce plan est tangent à Q_1, donc les trois points t_1^0, t_2^0, t_3^0 où il coupe Γ peuvent être associés à *un* point u_1 de Γ de façon à obtenir *une* identité :

$$(4) \qquad 0 + \lambda_2^0 f_2 + \lambda_3^0 f_3 + \lambda_4^0 f_4 \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)(t - u_1).$$

On obtient les rapports mutuels de λ_2^0, λ_3^0, λ_4^0 en exprimant que l'équation (1) est vérifiée pour $t = t_1^0$ et $t = t_2^0$; on obtient de même *un* point u_2 tel que

$$(5) \qquad \mu_1^0 f_1 + 0 + \mu_3^0 f_3 + \mu_4^0 f_4 \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)(t - u_2).$$

Mais alors on déduit immédiatement de (4) et (5) les équations

$$(6) \qquad \begin{aligned} & -\lambda_3^0 \mu_1^0 f_1 + \mu_3^0 \lambda_2^0 f_2 + 0 + (\mu_3^0 \lambda_4^0 - \lambda_3^0 \mu_4^0) f_4 \\ & \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)[\mu_3^0(t - u_1) - \lambda_3^0(t - u_2)]. \end{aligned}$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} & -\lambda_4^0 \mu_1^0 f_1 + \mu_4^0 \lambda_2^0 f_2 + (\mu_4^0 \lambda_3^0 - \lambda_4^0 \mu_3^0 f_3 + 0 \\ & \equiv (t - t_1^0)(t - t_2^0)(t - t_3^0)[\mu_4^0(t - u_1) - \lambda_1^0(t - u_2)] \end{aligned}$$

qui démontrent que le plan utilisé est aussi tangent à la quadrique Q_3 définie par la série (T_1, T_2, T_4) et à la quadrique Q_4 définie par la série (T_1, T_2, T_3); comme le plan utilisé est un plan *arbitraire* mené par la droite fixe G, cela prouve que G est aussi génératrice de Q_3 et de Q_4. On peut remarquer que les équations (4), (5), (6), (7) expriment que sur la quartique gauche unicursale auxiliaire $\gamma'\,[f_1(t), f_2(t), f_3(t), f_4(t)]$ les points t_1^0, t_2^0, t_3^0 sont sur une même droite; on remarquera aussi la configuration remarquable des six développables définies par les tétraèdres T_i, T_j ($i = 1, 2, 3, 4$).

Un problème analogue à ceux qui viennent d'être traités est le suivant :

Étant donnée une biquadratique, intersection de deux quadriques Q *et* Q′, *trouver un tétraèdre inscrit dans cette biquadratique et circonscrit soit à une quadrique* Q_1 *soit à une développable de classe* 4 *définie par deux quadriques* Q_1 *et* Q_2.

Nous ne traiterons pas ce problème en détail; nous nous contentons d'indiquer un cas où il y a une série ∞^1 de tétraèdres inscrits dans la biquadratique (Q, Q′) et circonscrits à Q_1; supposons que nous nous donnions la quadrique Q_1 (9 paramètres), 4 génératrices de Q_1, côtés d'un quadrilatère gauche (4 paramètres), puis une quadrique Q contenant ce quadrilatère (1 paramètre), puis que nous recommencions avec un nouveau quadrilatère gauche tracé sur Q_1 pour aboutir à une nouvelle quadrique Q′ (4 + 1 paramètres nouveaux); cela posé un plan tangent α quelconque de Q_1 coupe la biquadratique (Q, Q′) en 4 points, dont nous prenons 3, A, B et C; les nouveaux plans tangents à Q_1 menés par BC, CA, AB se coupent, d'après la remarque de M. Rowe, en un point D qui appartient simultanément à Q et Q′, donc situé aussi sur la biquadratique : on trouve donc ∞^2 tétraèdres T dont les sommets sont sur la courbe (Q, Q′) et dont les faces sont tangentes à Q_1 (¹). L'ensemble (Q_1, Q, Q′) présenté ici fait jouer 19 paramètres; M. Gambier

(¹) Indiquons le nombre de paramètres mis en jeu par la donnée, dans l'ordre indiqué, des éléments suivants : d'abord un tétraèdre T (12), une biquadratique circonscrite (8), une quadrique inscrite (5), soit un total (25) qui est le même que si l'on se donne d'abord une biquadratique (16), puis une quadrique (9).

Maintenant un tétraèdre T (12), un nouveau tétraèdre T′ quelconque par rapport au premier (12); la biquadratique circonscrite à T et T′ (0), une quadrique tangente aux 8 faces (1), total 25 exactement comme pour la donnée d'une biquadratique et d'une quadrique. On ne peut déduire de ces résultats si une biquadratique et une quadrique données *a priori* admettent *un* tétraèdre de l'espèce en jeu ou *deux*. Une étude plus détaillée s'imposerait. En tout cas l'exemple donné dans le texte pour la biquadratique (Q, Q′) et la quadrique Q_1 admettant ∞^2 tétraèdres montre qu'il y a au plus *six* conditions nécessaires et suffisantes pour qu'il existe une infinité de tétraèdres de l'espèce indiquée relatifs à une biquadratique et une quadrique.

a montré dans le Mémoire déjà cité que Q et Q′ ne sont pas quelconques et ne font jouer que 17 paramètres, la quadrique Q_1, pour un couple Q, Q′ déjà donné (satisfaisant à la relation convenable qui abaisse à 17 le nombre de paramètres nécessaires pour obtenir Q et Q′) dépendant de 2 paramètres; dans la biquadratique (Q et Q′) existent deux séries ∞^1 de quadrilatères inscrits dont deux côtés opposés sont génératrices de Q, et les deux autres génératrices de Q′.

12. **Compléments divers.** — 1° Considérons les deux quadriques

$$(Q) \qquad x^2+y^2+z^2-R^2=0,$$
$$(Q_1) \qquad xy-z=0.$$

La symétrie Ox (involution biaxiale d'axes Ox et la droite de l'infini du plan zOy) conserve Q et Q_1 et a pour axes deux génératrices de Q_1; nous sommes dans le cas signalé en note au paragraphe 5; l'équation en λ du faisceau $Q-\lambda Q_1=0$ est bicarrée; la racine $\lambda=\varepsilon(\varepsilon=\pm 1)$ donne un cylindre à génératrices horizontales, parallèles à la bissectrice $x-\varepsilon y=0$ des axes Ox, Oy de xOy; la racine $\lambda=\varepsilon i R$ donne un cône ayant son sommet au point $(0, 0, \varepsilon i R)$ de l'axe Oy. Le calcul relatif à la correspondance (A, α) donne

$$(R^2+1)\left[(h_0 t_0+w_0 z_0)^2-(u_0 x_0+v_0 y_0)^2\right]=0.$$

Le facteur $R^2+1=0$ correspondrait au cas où Q et Q_1 auraient un quadrilatère commun (défini par $x^2+1=0$ ou $y^2+1=0$). Le facteur à conserver $u_0x_0+v_0y_0-h_0t_0-w_0z_0=0$ montre que la correspondance (A, A_1) ou (α, α_1) se réduit à la symétrie Oz. Si l'on cherchait les tétraèdres inscrits dans Q_1 et circonscrits à Q_1, on retrouverait cette même symétrie Oz.

2° On peut se demander quels théorèmes de géométrie plane correspondent à ceux que nous avons obtenus pour l'espace.

Considérons dans le plan une congruence *quadratique* de cercles, c'est-à-dire ∞^2 cercles tels que par deux points quelconques du plan passent *deux* de ces cercles; les cercles de rayon nul de ce système forment une famille simplement infinie dont les centres sont répartis sur une quartique bicirculaire. Dans le cas, et seulement dans le cas où cette quartique dégénère en quatre droites isotropes AI, AJ, BI, BJ, en prenant trois quelconques de ces cercles ayant un point commun, les trois points résiduels d'intersection de ces 3 cercles sont sur un cercle de la famille. En effet, par inversion, ceci revient à considérer une sphère Q et les sections de cette sphère par des plans tangents à une quadrique Q_1 : le cas *spécial* envisagé est celui où Q et Q_1 ont 4 génératrices communes; le cas *général* donne sur Q des cercles de rayon nul dont le centre est réparti sur la biquadratique (Q, Q_1), qui a, pour perspective stéréographique, une quartique bicirculaire.

3° Dans le cas de deux quadriques Q, Q_1 *quelconques* faisons une perspective de la figure, à partir du sommet ω_1 du tétraèdre conjugué commun, sur la face opposée $\omega_2\omega_3\omega_4$ de ce tétraèdre. La courbe B se projette suivant une conique C_2; le contour apparent de Q_1 est une conique C_1, celui de Q une conique C; C, C_1, C_2 sont trois coniques d'un même faisceau linéaire ponctuel. La section de Q par le plan α tangent à Q_1 donne en perspective une conique γ dont deux cordes communes avec C_2 sont tangentes à C_1 ; de plus γ est bitangente à C : *c'est déjà un théorème que les coniques γ définies par ces conditions en nombre égal à 4 dépendent de deux paramètres* et ce résultat tient à ce que C, C_1, C_2 appartiennent à un même faisceau linéaire ponctuel; les coniques γ qui passent en un point fixe m du plan forment un système ∞^1. A une conique γ_0 *donnée* correspond un plan α tangent à Q_1, puis un plan α_1 tangent à une quadrique Q'_1, donc une conique γ' analogue à γ mais relative à C, C_1 et C'_1 où C'_1 est le contour apparent de Q'_1 (nous avons vu que Q'_1 est une quadrique du faisceau ponctuel Q, Q_1); à un point a choisi arbitrairement sur γ' correspondent ∞^1 coniques du système γ, passant en a, et l'on peut en choisir (d'une infinité simple de façons), trois, γ'_0, γ''_0, γ'''_0 de façon que $(\gamma''_0, \gamma'''_0)$, (γ'''_0, γ'_0), (γ'_0, γ''_0) aient un de leurs points d'intersection, autre que a, situé en b, c, ou d sur γ_0.

4° Nous devons indiquer comment on vérifie que l'équation formée pour une cubique gauche Γ et une quadrique Q est de degré 4. On a pris la cubique Γ, $(x = t, y = t^2, z = t^3)$; le cône S qui a son sommet en (t, t^2, t^3) et pour directrice Γ, a pour équation, quand on transporte les axes en son sommet

$$t^2 X^2 - tXY + Y^2 - ZX = 0,$$

de sorte que nous pouvons prendre pour ce cône

$$A = 2t^2, \quad A' = 2, \quad A'' = 0, \quad B = 0, \quad B' = -1, \quad B'' = -t,$$
$$a = 0, \quad a' = -1, \quad a'' = 3t^2, \quad b = t, \quad b' = 2, \quad b'' = 0.$$

Nous allons former l'équation du cône S_1 (les axes étant encore transportés en t, t^2, t^3)

$$A_1 x^2 + A'_1 y^2 + A''_1 z^2 + 2 B_1 yz + 2 B'_1 zx + 2 B''_1 xy = 0,$$

et nous aurons à écrire l'équation

$$(1) \quad (2t^2 a_1 + 2a'_1 - 2b'_1 - 2tb''_1)^2 - 4\Delta_1(-A'_1 + 3t^2 A''_1 + 2tB_1 + 4B'_1) = 0.$$

Prenons l'équation de la quadrique Q

$$(Q_1) \qquad \begin{aligned} &Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx \\ &\quad + 2B''xy + 2Cx + 2C'y + 2C''z + D = 0. \end{aligned}$$

[Ayant écrit l'équation (1), il n'y a plus inconvénient à employer pour Q les lettres A,. . . .] L'équation de S_1, après transport des axes, est

$$\begin{aligned} &(At^2 + A't^4 + A''t^6 + 2Bt^5 + 2B't^4 + 2B''t^3 + 2Ct + 2C't^2 + 2C''t^3 + D) \\ &\quad \times (Ax^2 + A'y^2 + A''z^2 + 2Byz + 2B'zx + 2B''xy) - (Atx + A't^2y + A''t^3z \\ &\quad + Bt^2z + Byt^3 + B't^3x + B'zt + B''tz + B''xt^2 + Cx + C'y + C''z)^2 = 0, \end{aligned}$$

de sorte que l'on a en posant

$$(2) \qquad \begin{cases} P \equiv At^2 + A't^4 + \ldots + D, \\ \alpha \equiv B't^3 + B''t_2 + At + C, \\ \alpha' = Bt^3 + A't^2 + B''t + C', \\ \alpha'' = A''t^3 + Bt^2 + B't + C'', \end{cases}$$

les équations

$$(3) \qquad \begin{cases} A_1 = AP - \alpha^2, & A'_1 = A'P - \alpha'^2, & A''_1 = A''P - \alpha''^2, \\ B_1 = BP - \alpha'\alpha'', & B'_1 = B'P - \alpha''\alpha, & B''_1 = B''P - \alpha\alpha'. \end{cases}$$

Nous employons les notations usuelles

$$a = A'A'' - B^2,, \qquad b = B'B'' - AB\ldots,$$

On trouve sans peine

$$(4)\quad \begin{cases} a_1 = A'_1 A''_1 - B_1^2 = P[aP - A'\alpha''^2 - A''\alpha'^2 + 2B\alpha'\alpha''], \\ a'_1 = P[a'P - A\alpha''^2 - A''\alpha^2 + 2B'\alpha''\alpha], \\ b'_1 = P[b'P - B\alpha\alpha' - B''\alpha'\alpha'' + A'\alpha\alpha'' + B'\alpha'^2], \\ b''_1 = P[b''P - B'\alpha'\alpha'' - B\alpha''\alpha + A''\alpha''\alpha + B''\alpha''^2]. \end{cases}$$

$$(5)\quad \begin{cases} \Delta_1 = A_1 a_1 + B''_1 b''_1 + B'_1 b'_1, \\ \quad = P^2[\Delta P - a\alpha^2 - a'\alpha'^2 - a''\alpha''^2 - 2b\alpha'\alpha'' - 2b'\alpha''\alpha - 2b''\alpha\alpha']. \end{cases}$$

L'équation (1) peut donc être débarrassée du facteur $4P^2$, ensuite on a

$$\Delta P - a\alpha^2 - a'\alpha'^2 - a''\alpha''^2 - 2b\alpha'\alpha'' - 2b'\alpha''\alpha - 2b''\alpha\alpha',$$

$$\equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & \alpha \\ B'' & A' & B & \alpha' \\ B' & B & A'' & \alpha'' \\ \alpha & \alpha' & \alpha'' & P \end{vmatrix} \equiv \begin{vmatrix} A & B'' & B' & C \\ B'' & A' & B & C' \\ B' & B & A'' & C'' \\ C & C' & C'' & D \end{vmatrix} \equiv H,$$

H étant le hessien de la quadrique Q_1. L'équation (1) devient donc

$$\frac{1}{P^2}(t^2 a_1 - t b''_1 + a'_1 - b'_1)^2 - H(3t^2 A''_1 + 2tB_1 + 4B'_1 - A'_1) = 0.$$

Ce n'est plus qu'une question de patience de vérifier que les polynomes en t, $\dfrac{t^2 a_1 - t b''_1 + a'_1 - b'_1}{P}$ et $3t^2 A''_1 + 2tB_1 + 4B'_1 - A'_1$ se réduisent le premier à un polynome en t de degré 2 et le second à un polynome de degré 4.

SUR UN PARADOXE.

Voici maintenant un paradoxe que nous a signalé M. Lebel et que, malgré sa simplicité, nous avons eu beaucoup de peine à lever. Soient une quadrique Q et un cône S ayant son sommet en A sur Q. Cherchons l'enveloppe des plans coupant Q suivant une conique q admettant ∞^1 triangles inscrits dans q et circonscrits à la section s de S par le même plan. On trouve aisément une quadrique Σ inscrite dans le cône S. Si donc on imagine une quadrique Q_1 nouvelle *inscrite dans* S, pour obtenir les tétraèdres de sommet A, de faces tangentes à Q_1, on devra prendre les plans tangents communs à Σ et Q_1 comme plans de la face α inconnue opposée à A; ces plans, en dehors de ceux communs à S et Q_1 qui ne conviennent pas, enveloppent un cône du second degré. Ceci est expliqué en supposant Q_1 *quelconque. Supposons* Q_1 *coïncidant avec* Σ; *on aura, pour le point* A ∞^2 *plans* α *et non* ∞^1; *or, ceci n'est possible que si* Q *et* Σ *ont quatre droites communes.* C'est là que se présentent divers paradoxes : *les équations de* Q *et* Σ *ne manifestent pas à première vue l'existence de* 4 *génératrices communes;* Σ *semble dépendre de* 7 *paramètres quand* Q *est donnée* (2 *pour la position du point* A, 5 *ensuite pour le cône* S), *tandis que les quadriques* Σ *ayant avec* Q 4 *génératrices communes ne dépendent que de* 5 *paramètres.* Nous levons aisément les objections en remarquant que la proposition étudiée ici est la transformée par dualité du lemme initial de M. Rowe, transformée que nous avons d'ailleurs explicitée plus loin pour construire le point A_1 associé à A. *Le plan tangent à* Q *en* A *coupe* Q *suivant deux génératrices* γ_1, γ_2; *par* γ_1 (*ou* γ_2) *menons les deux plans tangents à* S, *recoupant chacun* Q *suivant une génératrice nouvelle* G'_1, G''_1 (*ou* G'_2, G''_2); Σ *contient* G'_1, G''_1, G'_2, G''_2. Si l'on prend sur Q un nouveau point A', puis le cône circonscrit de A' à Σ comme cône S', *le même problème posé pour* A' *et* S' (*au lieu de* A *et* S) *redonne la quadrique* Σ, *ce qui explique la présence apparente de deux paramètres supplémentaires.*

NOTE COMPLÉMENTAIRE.

Nous devons aussi indiquer une méthode un peu plus facile pour effectuer le calcul des pages 162-164. Il s'agit d'exprimer que le cône S, qui a pour sommet le point $A(x_0, y_0, z_0, t_0)$ de la quadrique Q et pour base la conique section de Q par le plan $\alpha(u_0, v_0, w_0, h_0)$ tangent à Q_1, est capable de ∞^1 trièdres circonscrits au cône S_1 de même sommet A, circonscrit à la quadrique Q_1. Cette relation a été obtenue en employant le faisceau *ponctuel* de cônes déterminé par S et S_1; nous avons indiqué, page 156, que cette condition peut aussi se trouver au moyen du faisceau *tangentiel* de cônes déterminé encore par S et S_1 : nous allons former l'équation exprimant que l'un des cônes de ce faisceau tangentiel dégénère en deux droites. Pour cela remarquons que la conique (Q, α) a pour équation tangentielle (Q, α)

$$(1)\quad (u^2+v^2+w^2+h^2)(u_0^2+v_0^2+w_0^2+h_0^2)-(uu_0+vv_0+ww_0+hh_0)^2=0,$$

et que la quadrique Q_1 a pour équation tangentielle Q_1

$$au^2+bv^2+cw^2+dh^2=0. \tag{2}$$

Posons pour abréger

$$\sigma=uu_0+vv_0+ww_0+hh_0, \qquad \sigma_0=u_0^2+v_0^2+w_0^2+h_0^2. \tag{3}$$

L'équation tangentielle

$$(u^2+v^2+w^2+h^2)\sigma_0-\sigma^2+\mu(au^2+bv^2+cw^2+dh^2)=0, \tag{4}$$

représente des quadriques telles que les cônes qui leur sont circonscrits à partir d'un point quelconque forment un faisceau tangentiel; si ce point est A, on a le faisceau annoncé; mais alors, *si μ est tel que la quadrique* (4) *passe en* A, *le cône correspondant dégénère.* Formons donc l'équation ponctuelle de cette quadrique (4) : on doit éliminer u, v, w, h, σ, ρ entre les équations

$$\left\{\begin{aligned} &\frac{u\sigma_0-\sigma u_0+\mu au}{x}=\frac{v\sigma_0-\sigma v_0+\mu bv}{y}\\ &\qquad=\frac{w\sigma_0-\sigma w_0+\mu cw}{z}=\frac{h\sigma_0-\sigma h_0+\mu dh}{t}=\rho.\\ &uu_0+vv_0+ww_0+hh_0-\sigma=0, \qquad ux+vy+wz+ht=0. \end{aligned}\right. \tag{5}$$

La première ligne permet d'exprimer u, v, w, h linéairement en ρ, σ; portant dans les deux dernières, on a aussitôt par élimination de ρ, σ l'équation ponctuelle demandée, où nous remplaçons x, y, z, t par x_0, y_0, z_0, t_0. On a ainsi

$$\left(\sum\frac{x_0^2}{\sigma_0+a\mu}\right)\left(\sum\frac{u_0^2}{\sigma_0+a\mu}-1\right)-\left(\sum\frac{u_0x_0}{\sigma_0+a\mu}\right)^2=0. \tag{6}$$

En rendant entier, on a

$$\begin{aligned} x_0^2[(\sigma_0+b\mu)(\sigma_0+c\mu)(\sigma_0+d\mu)-v_0^2(\sigma_0+c\mu)(\sigma_0+d\mu)\\ -w_0^2(\sigma_0+b\mu)(\sigma_0+d\mu)-h_0^2(\sigma_0+b\mu)(\sigma_0+c\mu)]+\ldots\\ +2u_0v_0x_0y_0(\sigma_0+c\mu)(\sigma_0+d\mu)+\ldots=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Cette équation, de la forme $A\mu^3+B\mu^2+C\mu+D=0$, doit être telle que $B\mu^2+C\mu+D$ soit carré parfait. On trouve

$$D=\sigma_0^3(x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2)-\sigma_0^2[(v_0^2+w_0^2+h_0^2)x_0^2+\ldots]+\sigma_0^2(2u_0v_0x_0y_0+\ldots),$$

et tenant compte de $x_0^2+y_0^2+z_0^2+t_0^2=0$, on a aussitôt

$$D=\sigma_0^2(u_0x_0+v_0y_0+w_0z_0+h_0t_0)^2. \tag{8}$$

On a ensuite

$$C=\sigma_0^2[x_0^2(b+c+d)+\ldots]-\sigma_0[x_0^2\{(c+d)v_0^2+(b+d)w_0^2+(b+c)h_0^2\}+\ldots]$$
$$+\sigma_0[2(c+d)u_0v_0x_0y_0+\ldots].$$

Dans le quotient $C:\sigma_0$, le coefficient de x_0^2 est

$$u_0^2(b+c+d)+bv_0^2+cw_0^2+dh_0^2=(b+c+d-a)u_0^2,$$

et l'on constate aussitôt que l'on a

$$(9)\qquad C=\sigma_0(u_0x_0+v_0y_0+w_0z_0+h_0t_0)[(b+c+d-a)u_0x_0+\ldots].$$

On a ensuite

$$B=x_0^2\{\sigma_0(bc+cd+db)-v_0^2cd-w_0^2bd-h_0^2bc\}+\ldots+2u_0v_0x_0y_0cd+\ldots$$
$$=x_0^2\{u_0^2(bc+cd+db)+bv_0^2(c+d)+cw_0^2(d+b)+dh_0^2(b+c)\}+\ldots$$
$$+2u_0v_0x_0y_0cd+\ldots.$$

En ordonnant autrement les termes, on a

$$B=u_0^2x_0^2(bc+cd+db)+\ldots$$
$$+au_0^2\{(c+d)y_0^2+(b+d)z_0^2+(b+c)t_0^2\}+\ldots+2u_0v_0x_0y_0cd+\ldots.$$

Or

$$(c+d)y_0^2+(b+d)z_0^2+(b+c)t_0^2$$
$$=(b+c+d)(y_0^2+z_0^2+t_0^2)-by_0^2-cz_0^2-dt_0^2$$
$$=(a-b-c-d)x_0^2-[ax_0^2+by_0^2+cz_0^2+dt_0^2].$$

On en déduit donc (puisque $\Sigma x_0^2=0$, $\Sigma au_0^2=0$)

$$(10)\qquad B=u_0^2x_0^2[bc+cd+db+a(a-b-c-d)]+\ldots+2u_0v_0x_0y_0cd+\ldots.$$

En écrivant l'équation

$$\frac{4BD-C^2}{[\sigma_0(u_0x_0+v_0y_0+w_0z_0+h_0t_0)]^2}=0,$$

on retrouve l'équation (11) donnée page 164, et les calculs employés avec cette nouvelle méthode sont un peu moins pénibles; nous avons d'autre part une vérification précieuse des résultats.