POTRON

Sur les normalisants des s_2 dans les groupes gauche et quadratique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 51 (1934), p. 141-151
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1934_3_51__141_0>

SUR LES NORMALISANTS DES s_2

DANS

LES GROUPES GAUCHE ET QUADRATIQUE

PAR M. POTRON

L'objet de ce travail est de donner une démonstration plus courte et plus simple de quelques-uns des résultats obtenus par M. de Séguier dans son Mémoire *Les susbstitutions d'ordre* 2 *des groupes linéaire, hermitien, gauche et quadratique dans un champ de Galois*. Quelques-uns de ces résultats seront en outre précisés [1].

Généralités.

1. Les classes de s_2 de seconde espèce du groupe homogène total $\mathfrak{A}'$ d'une forme gauche ou quadratique a ayant été déterminées, il s'agit, pour un représentant de chaque classe, de déterminer son normalisant $\mathfrak{N}'$ dans le groupe homogène total $\mathfrak{A}'$, et son normalisant $\mathfrak{N}$ dans le groupe homogène spécial $\mathfrak{A}$ de la forme a.

Dans le Mémoire cité ont été obtenus, relativement aux s_2 du groupe linéaire homogène $\mathcal{L}(n, \pi)$, les résultats suivants. Si (s), forme homogène de s, est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{L}(n, \pi)$ (n pair $= 2\nu$), c'est-à-dire si s^2 est la similitude $[\iota^{2h+1}]$, la subtitution s est conjuguée, dans $\mathrm{L}(n, \pi^2)$ de la substitution $[\iota^h \iota_0]\varphi$, φ désignant une s_2 qui multiplie ν des variables par -1 et les autres par 1, et ι_0 désignent $\iota^{(\pi+1)/2}$ ($\iota_0^2 = \iota$). On peut dire aussi que $[\iota^h \iota_0]\varphi$, dont les multiplicateurs sont $\pm \iota^h \iota_0$, est la forme canonique de s. Il existe donc n nouvelles

---

(1) Toutes les notations de ce Mémoire seront conservées.

variables,

$$(1)\qquad u_i=\sum_{k=1}^{k=n}\rho_{ik}x_k,\qquad \dot{u}_i=\sum_{k=1}^{k=n}\dot{\rho}_{ik}x_k\qquad (i=1,\ldots,\nu),$$

telles que la substitution s devienne $\Pi_1^\nu s_i$, $s_i=\begin{vmatrix} u_i & \iota^h\iota_0 u_i \\ \dot{u}_i & -\iota^h\iota_0\dot{u}_i \end{vmatrix}$.

Pour qu'une subtitution de $L(n,\pi)$ soit permutable à s, il faut et suffit qu'elle opère, sur les variables canoniques de s, une substitution $\alpha=\Pi_1^\nu\alpha_i$, avec

$$(2)\qquad \alpha_i=\begin{vmatrix} u_i & \Sigma_1^\nu\alpha_{ik}u_k \\ \dot{u}_i & \Sigma_1^\nu\dot{\alpha}_{ik}\dot{u}_k \end{vmatrix}.$$

2. Comme $\mathcal{A}'(n,\pi)$ divise $\mathcal{L}(n,\pi)$, si (s) est une s_2 de seconde espèce de $\mathcal{A}'(n,\pi)$, on pourra donner à s sa forme canonique $[\iota^h\iota_0]\varphi$ en effectuant, sur les variables de la forme gauche ou quadratique a, un changement de variables tel que (1). Les substitutions α du normalisant N' de s dans $A'(n,\pi)$ auront alors la forme (2) et devront multiplier la forme a par un facteur constant f. Le normalisant N de s dans $A(n,\pi)$ sera le diviseur de N' correspondant à $f=1$.

On sait qu'une susbtitution (σ) de $\mathcal{A}'(n,\pi)$ est permutable à (s) toujours et seulement si $\sigma^{-1}s\sigma=s$ ou ds. Si donc $A(n,\pi)$ contient une telle substitution σ, $\mathfrak{N}'$ et $\mathfrak{N}$ seront les groupes homogènes déduits respectivement des groupes $N'+\sigma N'$ et $N+\sigma N$, ce que l'on écrira $\mathfrak{N}'=(N'+\sigma N')$, $\mathfrak{N}=(N+\sigma N)$.

On voit que, si $\varphi_i=\begin{vmatrix} u_i & \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & -u_i \end{vmatrix}$ et $d_i=\begin{vmatrix} u_i & -u_i \\ \dot{u}_i & -\dot{u}_i \end{vmatrix}$, la substitution réelle σ_i la plus générale telle que $\varphi_i\sigma_i=\sigma_i d_i\varphi_i$ est $\sigma_i=\begin{vmatrix} u_i & \rho\dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \rho u_i \end{vmatrix}$. Le multiplicateur ρ sera déterminé par la condition que $\sigma=\Pi\sigma_i$ conserve la forme a.

3. J'aurai à faire usage du théorème suivant. *Si x_i et x'_i $(i=1,\ldots,n)$ désignent $2n$ variables parcourant $\mathcal{C}'$, une identité de la forme*

$$\Sigma_i\Sigma_k\rho_{ik}x_i x'_k=h\,\Sigma_i\Sigma_k\dot{\rho}_{ik}\dot{x}_i\dot{x}'_k,$$

où h désigne un facteur constant, ne peut avoir lieu que si les coefficients ρ_{ik} sont tous nuls, autrement dit, si chacun des deux membres se *réduit séparément à* o. Soit en effet υ un élément définissant $\mathcal{C}'$; exprimons les variables x_i et x'_i, en fonction de variables y_i, z_i, y'_i, z'_i parcourant $\mathcal{C}$, par

$$x_i = y_i + \upsilon z_i, \qquad x'_i = y'_i + \upsilon z'_i,$$

en sorte que

$$\dot{x}_i = y_i + \dot{\upsilon} z_i, \qquad \dot{x}'_i = y'_i + \dot{\upsilon} z'_i.$$

L'identité considérée s'écrit

$$\Sigma_i \Sigma_k \rho_{ik}(y_i + \upsilon z_i)(y'_k + \upsilon z'_k) = h \Sigma_i \Sigma_k \dot{\rho}_{ik}(y_i + \dot{\upsilon} z_i)(y'_k + \dot{\upsilon} z'_k).$$

Écrivant que les coefficients de $y_i y'_k$ sont égaux, ainsi que ceux de $y_i z'_k$, on obtient

$$\rho_{ik} - h\dot{\rho}_{ik} = \rho_{ik}\upsilon - h\dot{\rho}_{ik}\dot{\upsilon} = 0;$$

comme $h(\upsilon - \dot{\upsilon}) \neq 0$, il faut $\rho_{ik} = \dot{\rho}_{ik} = 0$.

4. Soient $n = 2\nu$ variables x_i et y_i $(i = 1, \ldots, \nu)$ parcourant $\mathcal{C}$, et n variables z_i et $\dot{z}_i$, parcourant $\mathcal{C}'$, définies par $z_i = \Sigma_k(\rho_{ik} x_k + \rho'_{ik} y_k)$, $\dot{z}_i = \Sigma_k \dot{\rho}_{ik} x_k + \dot{\rho}'_{ik} y_k$. Si $\breve{\alpha}$ et $\breve{\dot{\alpha}}$ sont les substitutions

$$|z_i \quad \Sigma_k(\alpha_{ik} z_k + \beta_{ik} \dot{z}_k)| \qquad \text{et} \qquad |\dot{z}_i \quad \Sigma_k(\dot{\beta}_{ik} z_k + \dot{\alpha}_{ik} z_k)|,$$

$\bar{\alpha}$ désignera le produit $\breve{\alpha}\breve{\dot{\alpha}}$, substitution sur les variables x_i et y_i à coefficients dans $\mathcal{C}$. Si $\breve{\alpha}$ parcourt un groupe $\breve{\Gamma}$, $\bar{\alpha}$ parcourt un groupe, $\bar{\Gamma}$ complètement déterminé par le groupe $\breve{\Gamma}$ et les formules

$$z_i = \Sigma_k(\rho_{ik} x_k + \rho'_{ik} y_k)$$

du changement de variables.

GROUPE GAUCHE.

5. Les variables sont choisies de manière à donner à l'invariant a la forme

$$g = \Sigma_1^\nu g_i, \qquad g_i = (x_i y'_i - y_i x'_i),$$

Les variables x'_i et y'_i étant cogrédientes aux variables x_i et y_i.

Les classes de s_2 de seconde espèce du groupe homogène total $\mathcal{G}'(n, \pi)$

$(n=2\nu)$ sont représentées par les formes homogènes des substitutions suivantes :

$$\tau\gamma=\Pi_1^\nu\tau_i\gamma_i,\qquad \tau_i\gamma_i=\begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}\qquad (\pi\equiv 1 \bmod 4),$$

$$\tau=\Pi_1^\nu\tau_i,\qquad \tau_i=\begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & -x_i \end{vmatrix}\qquad (\pi=3 \bmod 4),$$

$$\Theta=\Pi_1^{\nu/2}\theta_i,\qquad \theta_i=\begin{vmatrix} x_{2i-1} & \iota y_{2i} \\ y_{2i-1} & -x_{2i} \\ x_{2i} & -\iota y_{2i-1} \\ y_{2i} & x_{2i-1} \end{vmatrix}\qquad (\nu \text{ pair}).$$

Normalisant de $(\tau\gamma)$.

6. Si $\eta=\iota^{(\pi+1)^2/4}(\eta^2=-\iota)$, le changement de variables

$$(3)\qquad u_i=x_i-\eta y_i,\qquad \dot u_i=x_i+\eta y_i$$

donne à $\tau_i\gamma_i$ la forme canonique $\begin{vmatrix} u_i & u_i \\ \dot u_i & -\dot u_i \end{vmatrix}$. Si l'on introduit les variables cogrédientes

$$u'_i=x'_i-\eta y'_i,\qquad \dot u'_i=x'_i+\eta y'_i,$$

la forme g_i devient

$$g_i=\frac{1}{2\eta}(u_i\dot u'_i-\dot u_i u'_i).$$

Les substitutions du normalisant N′ seront $\alpha=\Pi_1^\nu\alpha_i$, avec

$$\alpha_i=\begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k\alpha_{ik}u_k=\mathrm{U}_i \\ \dot u_i & \Sigma_k\dot\alpha_{ik}\dot u_k=\dot{\mathrm{U}}_i \end{vmatrix}$$

et

$$\Sigma_1^\nu(\mathrm{U}_i\dot{\mathrm{U}}'_i-\mathrm{U}'_i\dot{\mathrm{U}}_i)=f\Sigma_1^\nu(u_i\dot u'_i-u'_i\dot u_i).$$

Cette identité entraîne (3) l'identité

$$\Sigma_1^\nu\mathrm{U}_i\dot{\mathrm{U}}'_i-f\Sigma_1^\nu u_i\dot u'_i=0,$$

qui exprime que la substitution $\breve\alpha=\Pi_1^\nu\breve\alpha_i$, où $\breve\alpha_i=\left| u_i\ \sum\alpha_{ik}u_k\right|$, appartient au groupe total de la forme hermitienne $e = \Sigma_1^{\nu} u_i \dot{u}_i$. Pour obtenir le normalisant N, il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, *les normalisants* N′ *et* N *de* $\tau\gamma$ *dans* $G'(n, \pi)$ *et* $G(n, \pi)$ *sont respectivement transformés, par* (3), *en les groupes* $\overline{\Gamma}'$ *et* $\overline{\Gamma}$ *correspondant aux groupes hermitiens* $\check{\Gamma}' = E'(\nu, \pi)$ *et* $\check{\Gamma} = E(\nu, \pi)$.

7. Une substitution $\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \rho \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & \dot{\rho} u_i \end{vmatrix}$ transforme g_i en $-\rho\dot{\rho} g_i$ (2). Il lui correspond une substitution de $G(n, \pi)$ si

$$\rho\dot{\rho} = -1 \quad \text{ou} \quad \rho = \iota^{\prime(\pi-1)/2} = j_0 \qquad (j_0^{\pi} = j_0^{-1}).$$

On a alors

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & j_0 \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & -j_0^{-1} u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \beta y_i \\ y_i & \beta_i^{-1} x_i - \alpha y_i \end{vmatrix} \quad (2\alpha = j_0 - j_0^{-1},\ 2\beta = \eta j_0 + \eta j_0^{-1}).$$

Normalisant de (τ).

8. Il suffit, dans ce qui précède, de remplacer partout η par

$$\varepsilon = \iota^{\prime(\pi^2-1)/4}.$$

On obtient les mêmes résultats pour les normalisants N et N′; et ensuite

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & j_0 \dot{u}_i \\ \dot{u}_i & -j_0^{-1} u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \alpha x_i + \beta y_i \\ y_i & \beta x_i - \alpha y_i \end{vmatrix} \quad (2\alpha = j_0 - j_0^{-1},\ 2\beta = \varepsilon j_0 + \varepsilon j_0^{-1}).$$

Normalisant de (Θ).

9. Le changement de variables

$$(4) \qquad \begin{cases} u_i = x_{2i-1} + \iota_0 y_{2i}, & v_i = -\iota_0 y_{2i-1} + x_{2i}, \\ \dot{u}_i = x_{2i-1} - \iota_0 y_{2i}, & \dot{v}_i = \iota_0 y_{2i-1} + x_{2i}, \end{cases}$$

i parcourant $1, \ldots, \nu/2$ donne

$$\theta_i = \begin{vmatrix} u_i & \iota_0 u_i \\ \dot{u}_i & -\iota_0 \dot{u}_i \\ v_i & \iota_0 v_i \\ \dot{v}_i & -\iota_0 \dot{v}_i \end{vmatrix}.$$

Si l'on introduit les variables accentuées cogrédientes, la forme g_i devient

$$-\frac{1}{2\varepsilon}\Sigma_1^{\nu/2}[u_i v'_i - v_i u'_i - (\dot{u}_i \dot{v}'_i - \dot{u}_i \dot{u}'_i)].$$

Les substitutions du normalisant N' seront $\alpha = \Pi_1^{\nu/2}\alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \left| \begin{array}{ll} u_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}u_k + \alpha'_{ik}v_k) = \mathrm{U}_i \\ \dot{u}_i & \Sigma_k(\dot{\alpha}_{ik}\dot{u}_k + \dot{\alpha}'_{ik}\dot{v}_k) = \dot{\mathrm{U}}_i \\ v_i & \Sigma_k(\beta_{ik}u_k + \beta'_{ik}v_k) = \mathrm{V}_i \\ \dot{v}_i & \Sigma_k(\dot{\beta}_{ik}\dot{u}_k + \dot{\beta}'_{ik}\dot{v}_k) = \dot{\mathrm{V}}_i \end{array} \right|,$$

et

$$\Sigma_1^{\nu/2}[\mathrm{U}_i\mathrm{V}'_i - \mathrm{V}_i\mathrm{U}'_i - (\dot{\mathrm{U}}_i\dot{\mathrm{V}}'_i - \dot{\mathrm{V}}_i\dot{\mathrm{U}}'_i)] = f\Sigma_1^{\nu/2}[u_i v'_i - v_i u'_i - (\dot{u}_i\dot{v}'_i - \dot{v}_i\dot{u}'_i)].$$

Cette identité entraîne (3) l'identité

$$\Sigma_1^{\nu/2}(\mathrm{U}_i\mathrm{V}'_i - \mathrm{V}_i\mathrm{U}'_i) = f\Sigma_1^{\nu/2}(u_i v'_i - v_i u'_i),$$

qui exprime que la substitution $\breve{\alpha} = \Pi_1^{\nu/2}\breve{\alpha}_i$, où

$$\breve{\alpha}_i = \left| \begin{array}{ll} u_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}u_k + \alpha'_{ik}v_k) = \mathrm{U}_i \\ v_i & \Sigma_k(\beta_{ik}u_k + \beta'_{ik}v_k) = \mathrm{V}_i \end{array} \right|,$$

dont les coefficients sont dans $\mathcal{C}'$, appartient au groupe total, dans le champ $\mathcal{C}'$, de la forme gauche $\Sigma_1^{\nu/2}(u_i v'_i - v_i u'_i)$. Pour obtenir le normalisant N, il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, les normalisants N' *et* N *de* Θ *dans* $\mathrm{G}'(n, \pi)$ *et* $\mathrm{G}(n, \pi)$ *sont respectivement transformés par* (4) *en les groupes* $\overline{\Gamma}'$ *et* $\overline{\Gamma}$ *correspondant aux groupes gauches* $\breve{\Gamma}' = \mathrm{G}'(\nu, \pi^2)$ *et* $\breve{\Gamma} = \mathrm{G}(\nu, \pi^2)$.

10. La substitution $\sigma = \Pi_1^{\nu/2}\sigma_i$, où

$$\sigma_i = \left| \begin{array}{ll} u_i & \dot{v}_i \\ \dot{u}_i & v_i \\ v_i & \dot{u}_i \\ \dot{v}_i & u_i \end{array} \right| = \left| \begin{array}{ll} x_{2i-1} & x_{2i} \\ y_{2i-1} & y_{2i} \\ x_{2i} & x_{2i-1} \\ y_{2i} & y_{2i-1} \end{array} \right|$$

conserve g et transforme Θ en $d\Theta$,

GROUPE QUADRATIQUE.

11. Les variables sont choisies de manière à donner à l'invariant a la forme

$$g = \Sigma_1^{\nu} x_i y_i + \psi, \qquad \psi = cx^2 + bxy + c'y^2 = x_{\nu'} y_{\nu'},$$

les variables $x_{\nu'}$ et $y_{\nu'}$, $(\nu' = \nu + 1)$ étant réelles ou imaginaires et conjuguées suivant que ψ est réductible ou irréductible dans $\mathcal{C}$.

Les classes de s_2 du groupe homogène total $\mathfrak{Q}'(n, \pi)$ $(n = 2\nu')$ sont représentées par les formes homogènes des substitutions suivantes :

1° $$t_{1\ldots\nu'}\gamma, \quad t_{1,\ldots\nu'} = \Pi_1^{\nu'} t_i, \qquad t_i = \begin{vmatrix} x_i & y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix},$$

$$\gamma = \Pi_1^{\nu'}\gamma_i, \qquad \gamma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota x_i \\ y_i & y_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu),$$

$$\gamma_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & y_{\nu'} \end{vmatrix} \ (\psi \text{ réd.}); \qquad \gamma_{\nu'} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota' x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & \iota'^{\pi} y_{\nu'} \end{vmatrix} \ (\psi \text{ irréd.});$$

2° $\Theta_{\nu'}$, pour $n \equiv 0 \pmod 4$, ψ réductible, et $\pi \equiv 3 \pmod 4$ en posant

$$\Theta_{2k} = \Pi_1^k \theta_i, \qquad \theta_i = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & y_{2i} \\ y_{2i-1} & x_{2i} \\ x_{2i} & -y_{2i-1} \\ y_{2i} & -x_{2i-1} \end{vmatrix};$$

3° $\Theta_{\nu'}\gamma$ pour $n \equiv 0 \pmod 4$, ψ réductible, et $\pi \equiv 1 \pmod 4$;

4° $\Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$, $m_{\nu'\varepsilon} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \varepsilon x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & -\varepsilon y_{\nu'} \end{vmatrix}$, pour $n \equiv 2 \pmod 4$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 3 \pmod 4$.

5° $\Theta_\nu \gamma m_{\nu'\sigma}$, $\sigma = \iota^{(\pi-1)/4}\iota'^{(\pi+1)/2}$, pour $n \equiv 2 \pmod 4$, ψ irréductible, et $\pi \equiv 1 \pmod 4$.

Normalisant de $s = t_{1\ldots\nu'}\gamma$.

12. Le changement de variables

$$u_i = x_i + \iota_0 y_i, \qquad \bar{u}_i = x_i - \iota_0 y_i$$

donne

$$t_i\gamma_i = \begin{vmatrix} x_i & \iota y_i \\ y_i & x_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & \iota_0 u_i \\ \bar{u}_i & -\iota_0 \bar{u}_i \end{vmatrix} \qquad (i = 1, \ldots, \nu).$$

Si ψ est réductible, on a le même résultat pour $i=\nu'$, et la forme $x_i y_i\,(i=1,\ \ldots,\ \nu')$ devient

$$q_i=\frac{1}{4\iota_0}(u_i^2-\dot{u}_i^2).$$

Si ψ est irréductible, le changement de variables

$$u_{\nu'}=j_0\,x_{\nu'}+y_{\nu'},\qquad \dot{u}_{\nu'}=x_{\nu'}-j_0^{-1}y_{\nu'}$$

donne

$$t_{\nu'}\gamma_{\nu'}=\begin{vmatrix} x_{\nu'} & \iota' y_{\nu'} \\ y_{\nu'} & \iota'^{\pi} x_{\nu'} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_{\nu'} & \iota_0 u_{\nu'} \\ \dot{u}_{\nu'} & \iota_0 \dot{u}_{\nu'} \end{vmatrix}.$$

et les formes $x_i y_i\,(i=1,\ \ldots,\ \nu)$ et $x_{\nu'}y_{\nu'}$ deviennent respectivement

$$q_i=\frac{1}{4\iota_0}(u_i^2-\dot{u}_i^2),\qquad q_{\nu'}=j_0^{-1}u_{\nu'}^2-j_0\,\dot{u}_{\nu'}^2.$$

Les substitutions du normalisant N′ de s seront $\alpha=\Pi_1^{\nu'}\alpha_i$, avec

$$\alpha_i=\begin{vmatrix} u_i & \Sigma_k\alpha_{ik}u_k=\mathrm{U}_i \\ \dot{u}_i & \Sigma_k\dot{\alpha}_{ik}u_k=\dot{\mathrm{U}}_i \end{vmatrix}.$$

Pour que α multiplie g par f, il faut et suffit (3) que l'on ait l'identité

$$\Sigma_1^{\nu'}\mathrm{U}_i^2=f\Sigma_1^{\nu'}u_i^2\qquad (\psi \text{ réductible}),$$

$$\frac{1}{4\iota_0}\Sigma_1^{\nu}\mathrm{U}_i^2+j_0^{-1}\mathrm{U}_{\nu'}^2=f\left[\frac{1}{4\iota_0}\Sigma_1^{\nu}u_i^2+j_0^{-1}u_{\nu'}^2\right]\qquad (\psi \text{ irréductible});$$

autrement dit, que la substitution $\breve{\alpha}=\Pi_1^{\nu'}\breve{\alpha}_i$, où

$$\breve{\alpha}_i=|\ u_i\qquad \Sigma\alpha_{ik}u_k=\mathrm{U}_i\ |,$$

dont les coefficients sont dans $\mathcal{C}'$, appartienne au groupe total, semblable à $\mathrm{Q}'(\nu',\pi^2)$, de la forme quadratique

$$\Sigma_1^{\nu'}u_i^2\qquad \text{ou}\qquad \frac{1}{4\iota_0}\Sigma_1^{\nu}u_i^2+j_0^{-1}u_{\nu'}^2.$$

Pour obtenir le normalisant N, il suffit de faire $f=1$.

En conséquence, *les normalisants* N′ *et* N *de* $t_{1\ldots\nu'}\gamma$ *sont respectivement isomorphes aux groupes quadratiques* $\mathfrak{Q}'(\nu',\pi^2)$ *et* $\mathfrak{Q}(\nu',\pi)$.

13. Une substitution $\sigma_i = \begin{vmatrix} \dot u_i & \rho_i u_i \\ \dot u_i & \dot\rho_i u_i \end{vmatrix}$ (2) transforme q_i en

$$\frac{1}{4\iota_0}(\rho_i^2 \dot u_i^2 - \dot\rho_i^2 u_i^2),$$

et, pour ψ irréductible, $\sigma_{\nu'}$ transforme $q_{\nu'}$ en $j_0^{-1}\rho_{\nu'}^2 \dot u_{\nu'}^2 - j_0 \dot\rho_{\nu'}^2 u_{\nu'}^2$. La substitution $\sigma = \Pi_1^{\nu'}\sigma_i$ conserve donc la forme q si $\rho_i^2 = -1$, et, pour ψ irréductible $\rho_{\nu'}^2 = -j$, soit $\rho_i = \varepsilon$ et $\rho_{\nu'} = \varepsilon j_0$. Alors, si π est $\equiv 1 \pmod 4$, on a

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & \varepsilon \dot u_i \\ \dot u_i & \varepsilon u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \varepsilon x_i \\ y_i & -\varepsilon y_i \end{vmatrix};$$

et, pour ψ irréductible,

$$\sigma_{\nu'} = \begin{vmatrix} u_{\nu'} & -\varepsilon j_0 \dot u_{\nu'} \\ \dot u_{\nu'} & \varepsilon j_0^{-1} u_{\nu'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \varepsilon j_0^{-1} y_{\nu'} \\ y_{\nu'} & -\varepsilon j_0 x_{\nu'} \end{vmatrix}.$$

Si π est $\equiv 3 \pmod 4$, on a

$$\sigma_i = \begin{vmatrix} u_i & -\varepsilon \dot u_i \\ \dot u_i & \varepsilon u_i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_i & \eta y_i \\ y_i & \eta^{-1} x_i \end{vmatrix},$$

et, pour ψ irréductible,

$$\sigma_{\nu'} = \begin{vmatrix} u_{\nu'} & \varepsilon j_0 \dot u_{\nu'} \\ \dot u_{\nu'} & \varepsilon j_0^{-1} u_{\nu'} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \varepsilon x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & -\varepsilon y_{\nu'} \end{vmatrix}.$$

Normalisants de $s = \Theta_{\nu'}$ ou $\Theta_{\nu'}\gamma$ (ν' pair et ψ réductible).

14. Si $s_i = \theta_i$ ou $\theta_i\gamma_i$, en désignant par ρ soit ε si $s_i = \theta_i$ [$\pi \equiv 3 \pmod 4$], soit η si $s_i = \theta_i\gamma_i$ [$\pi \equiv 1 \pmod 4$], le changement de variables

$$\begin{aligned} u_i &= x_{2i-1} - \rho y_{2i}, & v_i &= \rho y_{2i-1} + x_{2i} \\ \dot u_i &= x_{2i-1} + \rho y_{2i}, & \dot v_i &= -\rho y_{2i-1} + x_{2i} \end{aligned} \qquad \left(i = 1, \ldots, \frac{\nu'}{2}\right)$$

donne

$$s_i = \begin{vmatrix} x_{2i-1} & -\rho^2 y_{2i} \\ y_{2i-1} & x_{2i} \\ x_{2i} & \rho^2 y_{2i-1} \\ y_{2i} & -x_{2i-1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u_i & \rho u_i \\ \dot u_i & -\rho \dot u_i \\ v_i & \rho v_i \\ \dot v_i & -\rho \dot v_i \end{vmatrix};$$

et la forme $x_i y_i$ devient

$$q_i = -\frac{1}{2\rho}(u_i \dot{v}_i - v_i \dot{u}_i).$$

Les substitutions du normalisant N′ de s seront $\alpha = \Pi_1^{\nu'/2}\alpha_i$, avec

$$\alpha_i = \left|\begin{array}{ll} u_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}u_k + \alpha'_{ik}v_k) = \mathrm{U}_i \\ \dot{u}_i & \Sigma_k(\dot{\alpha}_{ik}\dot{u}_k + \dot{\alpha}'_{ik}\dot{v}_k) = \dot{\mathrm{U}}_i \\ v_i & \Sigma_k(\beta_{ik}u_k + \beta'_{ik}v_k) = \mathrm{V}_i \\ \dot{v}_i & \Sigma_k(\dot{\beta}_{ik}\dot{u}_k + \dot{\beta}'_{ik}\dot{v}_k) = \dot{\mathrm{V}}_i \end{array}\right|.$$

Pour que α multiplie q par f, il faut et suffit, d'après le n° 2, que l'on ait l'identité

$$\Sigma_1^{\nu'/2}(\mathrm{U}_i\dot{\mathrm{V}}_i - \dot{\mathrm{V}}_i\mathrm{U}_i) = f\Sigma_1^{\nu'/2}(u_i\dot{v}_i - v_i\dot{u}_i),$$

autrement dit que la substitution $\breve{\alpha} = \Pi_1^{\nu'/2}\breve{\alpha}_i$, où

$$\breve{\alpha}_i = \left|\begin{array}{ll} u_i & \Sigma_k(\alpha_{ik}u_k + \alpha'_{ik}v_k) = \mathrm{U}_i \\ v_i & \Sigma_k(\beta_{ik}u_k + \beta'_{ik}v_k) = \mathrm{V}_i \end{array}\right|,$$

appartienne au groupe total $\mathrm{H}(\nu', \pi)$ de la forme hermitienne

$$\rho^{-1}\Sigma_1^{\nu'/2}(u_i\dot{v}_i - v_i\dot{u}_i).$$

Pour avoir le normalisant N, il suffit de faire $f = 1$.

En conséquence, *les normalisants* N′ *et* N *de* s *dans* $\mathrm{Q}'(n, \pi)$ *et* $\mathrm{Q}(n, \pi)$ *sont isomorphes aux groupes hermitiens* $\mathrm{H}'(\nu', \pi)$ et $\mathrm{H}(\nu', \pi)$.

15. On transforme s en ds par une substitution $\sigma = \Pi_1^{\nu'/2}\sigma_i$ de $\mathrm{Q}(n, \pi)$ où

$$\sigma_i = \left|\begin{array}{ll} u_i & \dot{v}_i \\ \dot{u}_i & v_i \\ v_i & \dot{u}_i \\ \dot{v}_i & u_i \end{array}\right| = \left|\begin{array}{ll} x_{2i-1} & x_{2i} \\ y_{2i-1} & y_{2i} \\ x_{2i} & x_{2i-1} \\ y_{2i} & y_{2i-1} \end{array}\right|.$$

Normalisants de $s = \Theta_\nu m_{\nu'\varepsilon}$ ou $\Theta_\nu \gamma m_{\nu'\sigma}$ (ν' impair et ψ irréductible).

16. Pour $i = 1, \ldots, \nu/2$, le changement de variables indiqué au n° 14 canonise la substitution $\Pi_1^{\nu/2}s_i$. On a ensuite, avec les notations

adoptées

$$s_{\nu'} = m_{\nu'\xi} \qquad \text{ou} \qquad \gamma_{\nu'} m_{\nu'\sigma} = \begin{vmatrix} x_{\nu'} & \rho x_{\nu'} \\ y_{\nu'} & -\rho y_{\nu'} \end{vmatrix}.$$

La substitution s est alors mise sous forme canonique, et la forme q est devenue la forme hermitienne

$$-\rho^{-1} \Sigma_1^{\nu/2} (u_i \bar{v}_i - u_i \bar{v}_i) + x_{\nu'} \bar{x}_{\nu'}.$$

Le raisonnement du n° 14 conduit alors aux mêmes résultats pour les normalisants N′ et N de s.

17. On transformera s en ds par la substitution $\sigma = \Pi_1^{\nu/2} \sigma_i t_{\nu'}$, σ_i étant défini comme au n° 15.