Annales scientifiques de l'É.N.S.

Tullio Viola

Étude sur la détermination d'une fonction discontinue par sa dérivée unilatérale

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 71-125

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__71_0>

ÉTUDE

SUR LA

DÉTERMINATION D'UNE FONCTION DISCONTINUE

PAR SA DÉRIVÉE UNILATÉRALE

PAR M. TULLIO VIOLA

Introduction.

1. Parmi les recherches que les analystes ont poussées dans tous les champs de la théorie des fonctions de variable réelle, aucune étude approfondie et complète des fonctions continues à droite en tout un intervalle, c'est-à dire des fonctions $F(x)$ qui, pour tout point x_0 d'un intervalle $\overline{ab}$, satisfassent à la condition

$$\lim_{x \to x_0 + 0} F(x) = F(x_0),$$

n'a été faite jusqu'ici.

J'ai récemment publié quelques recherches qui mettent en lumière les principales propriétés de ces fonctions, par rapport à leur dérivabilité unilatérale. Dans les *Annali di Matematica pura e applicata* (4e série, t. 9, 1931) j'ai montré que, par l'extension facile d'un théorème fondamental de M. Denjoy [1], l'on tire d'importantes consé-

---

[1] A. DENJOY, *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues*, (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, t. 1, 1915, p. 149).

quences et j'ai démontré quelques propositions relatives à l'ensemble des points de discontinuité. Dans les *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (t. 55, décembre 1931) j'ai analysé un exemple particulier de fonction continue à droite, en trouvant effectivement les ensembles des valeurs de la variable pour lesquelles les théorèmes démontrés dans le Mémoire précédent sont vérifiés. Dans cette étude je me suis par hasard rencontré avec M. Laberenne qui a étudié ([1]) des fonctions continues à droite du même type mais plus générales, du point de vue de l'intégration suivant Riemann. Dans les *Rendiconti della R. Accademia Naz. dei Lincei* (6e série, vol. XIII, fasc. 11-12-13, mai, juin 1931) j'ai poussé plus loin un résultat précédemment obtenu ([2]), en démontrant que, *si* P *est un ensemble parfait quelconque contenu en* a^-b *et si l'ensemble des points de* P *où* $F(x)$ *est discontinue par rapport à* P *est dense en* P, *alors l'ensemble des points de* P *où l'on a*

$$\overline{D}_+ F(x) - \underline{D}_+ F(x) = \infty \quad (^3)$$

est, lui aussi, dense en P. Dans le présent travail (§ III, n° 1) cette proposition sera complétée. J'ai démontré aussi, en utilisant la condition nécessaire et suffisante bien connue donnée par M. Baire ([4]) pour qu'une fonction soit ponctuellement discontinue, que *si* $F(x)$ *est dérivable à droite en tout* a^-b, *alors sa dérivée droite est une fonction de première classe, c'est-à-dire limite d'une suite de fonctions continues.* De cette dernière proposition je donnerai une autre démonstration plus complète dans un article publié dans la *Mathematische Zeitschrift* ([5]), en donnant un procédé pour la *construction effective d'une suite de fonctions continues bilatéralement et dérivables à droite en* a^-b

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

telles que

$$\lim_{n\to\infty} \varphi_n(x) = F(x), \qquad \lim_{n\to\infty} D_+ \varphi_n(x) = D_+ F(x)$$

---

(1) *Bollettino dell' Unione Mat. Italiana*, année XI, n° 1, février 1932.

(2) *Annali di Matematica, loc. cit.*, n° 5, p. 253.

(3) J'indique d'une façon générale, par $D_+ F(x)$ la dérivée droite de $F(x)$ (si elle existe), par $\overline{D}_+ F(x)$, $\underline{D}_+ F(x)$ les nombres dérivés droits (supérieur et inférieur) de $F(x)$.

(4) *Leçons sur les fonctions discontinues* (Collection Borel, 1905), p. 98.

(5) Bd. 36, Heft. 3-4, p. 377-393.

et que $D_+ F(x)$ *soit limite de quotients différentiels des respectives* $\varphi_n(x)$, *que l'on peut aisément déterminer.* Dans ce même Mémoire je démontrerai aussi que, dans le cas où la fonction $F(x)$ continue à droite en a^-b n'est pas dérivable à droite mais où les fonctions-nombres dérivés à droite $\overline{D}_+ F(x)$, $\underline{D}_+ F(x)$ sont finies en tout a^-b, *on peut construire une suite de fonctions bilatéralement continues*

$$\varphi_1(x), \quad \varphi_2(x), \quad \ldots, \quad \varphi_n(x), \quad \ldots,$$

telles que

$$\lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = F(x), \qquad \lim_{n \to \infty} \overline{D}_+ \varphi_n(x) = \overline{D}_+ F(x), \qquad \lim_{n \to \infty} \underline{D}_+ \varphi_n(x) = \underline{D}_+ F(x),$$

en tout a^-b; je démontrerai aussi que, toujours dans le cas où les fonctions $\overline{D}_+ F(x)$, $\underline{D}_+ F(x)$ sont finies en tout a^-b, *elles sont de la seconde classe en* a^-b, *c'est-à-dire limites de suites de fonctions de la première classe.*

2. Il se pose maintenant le problème de la recherche d'une primitive d'une dérivée droite donnée. Il est bien connu que, pour le cas des fonctions bilatéralement continues, ce problème a été complètement résolu par M. Denjoy (1), avec le procédé de *totalisation* qu'il a imaginé. Le problème analogue, dans notre cas, peut être exactement énoncé comme il suit :

Étant donnée une fonction $f(x)$, *dérivée droite en* a^-b (*d'une fonction continue à droite inconnue*), *en trouver une primitive, c'est-à-dire une fonction* $F(x)$ *continue à droite et dérivable vers la droite en* a^-b, *telle que*

$$D_+ F(x) = f(x).$$

La première question qui se pose à ce propos est celle de l'indétermination du problème ou de la classe des fonctions $F(x)$. On voit tout de suite que l'indétermination est bien plus vaste que pour le cas des fonctions continues bilatéralement, car on peut seulement affirmer, en général, que $F(x)$ *est déterminée à une fonction additive près, ayant une dérivée droite nulle en tout* a^-b.

(1) *Mémoire sur la totalisation des nombres dérivés non sommables* (*Annales scientifiques de l'École Normale supérieure*, 3e série, t. 33, 1916, p. 127).

3. Le présent travail découle de l'étude de ce problème. Quoique n'ayant pas obtenu la solution que j'avais espérée, je présente plusieurs questions préliminaires qui pourraient être utiles à des études ultérieures. Il m'a semblé d'abord nécessaire d'approfondir, plus que je ne l'ai fait dans les travaux précités, la nature de l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue à droite et dérivable vers la droite ou précisément à dérivée droite nulle. Dans ce but je présente une étude soigneuse des « *ensembles clairsemés droits* [*gauches*] », c'est-à-dire des ensembles tels que tout sous-ensemble contient un point isolé du côté droit [gauche]. Cette étude est conduite exactement sur les traces de celle, analogue, de M. Denjoy [1] sur les ensembles clairsemés, c'est-à-dire tels que tout sous-ensemble contient un point isolé.

Au deuxième paragraphe du présent Mémoire j'examine plusieurs questions relatives aux fonctions à dérivée droite nulle.

Au dernier paragraphe j'étudie essentiellement le dit problème de la recherche d'une primitive et je montre *la possibilité de le résoudre presque partout en* a^-b. *Il en reste exclu un ensemble* E *de mesure nulle* (*non dense en tout* a^-b), *mais la fonction trouvée est telle que ses nombres dérivés à droite en* E *diffèrent de moins d'un nombre arbitrairement donné* $\varepsilon > 0$ *de la dérivée droite donnée* (E *étant indépendant de* ε).

Nous croyons que ces pages mettront bien en évidence les grandes difficultés que le probléme présente, et nous serions très heureux si cette étude pouvait suggérer l'idée décisive et finale que nous n'avons su trouver. Pour faciliter des recherches ultérieures nous avons cru utile de ne pas négliger certains détails que l'on trouvera par exemple aux nos 3, 11, 13, du paragraphe III.

Je dois ma plus profonde gratitude à ceux qui ont rendu possibles ces recherches, au gouvernement italien qui m'a donné les moyens pour mon long séjour à Paris et surtout à M. Arnaud Denjoy qui a voulu me guider avec une bienveillance dont je conserverai le souvenir pour toute ma vie.

---

(1) A. Denjoy, *Sur les ensembles clairsemés* (*Proceedings of the Section of Sciences de la Koninklijke Akademie van Wetenschappen.* Te Amsterdam, 1920, vol. XXII, Part. 2, nos 6-10, p. 882). Voir aussi M. Fréchet, *Les espaces abstraits* (Collection Borel, 1928, p. 65, 174, 267); N. Lusin, *Leçons sur les ensembles analytiques* (Collection Borel, 1930, p. 104-111).

I. — Les ensembles clairsemés droits [gauches].

1. Appelons dans un ensemble E linéaire point *isolé du côté droit* [*gauche*], ou point *isolé droit* [*gauche*], un point de E, extrémité gauche [droite] d'un intervalle totalement étranger à E.

Un ensemble E sera dit *clairsemé droit* [*gauche*] si tout sous-ensemble de E contient un point isolé droit [gauche].

2. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'un ensemble* E *soit clairsemé droit* [*gauche*] *est que* E *soit non dense sur chaque ensemble parfait* P *lorsqu'on néglige les points de* P. E *qui sont extrémités gauches* [*droites*] *des intervalles contigus de* P.

a. La condition est nécessaire. — En effet, si elle n'était pas satisfaite, il existerait un sous-ensemble E_1 de E partout dense sur l'ensemble Q qu'on obtient d'une portion P_1 de P [1] lorsqu'on néglige les extrémités gauches [droites] des intervalles contigus à P_1. Tout point de E_1 serait limite de Q du côté droit [gauche], donc aussi limite de E_1 du côté droit [gauche]. Il y a contradiction.

b. La condition est suffisante. — En effet, soit E_1 un sous-ensemble quelconque de E. Il faut montrer que E_1 a des points isolés du côté droit [gauche]. Si E_1 a un point isolé bilatéralement, c'est fait. Sinon E_1 est dense en lui-même. Soit P son dérivé (parfait). E_1 est partout dense sur P. Par hypothèse E_1 est non dense sur P lorsqu'on néglige les extrémités gauches [droites] des intervalles contigus. Donc E_1 contient des extrémités gauches [droites] d'intervalles contigus à P. Ces points sont isolés droits [gauches] dans E_1.

3. *La condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible d'affecter à chaque point a d'un ensemble* E *un intervalle* $i(a)$ *duquel a soit l'extrémité gauche* [*droite*], *de manière qu'aucun point de la droite ne soit intérieur à une infinité d'intervalles* $i(a)$, *est que l'ensemble* E *soit clairsemé droit* [*gauche*] [2]

---

[1] P_1 est l'ensemble des points de P contenus dans un intervalle.

[2] Voir A. Denjoy, *Sur les ensembles clairsemés*, *loc. cit.*

a. La condition est nécessaire. — En effet, si E n'est pas clairsemé droit [gauche], il existe un ensemble parfait P sur lequel l'ensemble E_1 des points de E qui ne sont pas extrémités gauches [droites] d'intervalles contigus à P est dense. Soit a_1 un point quelconque de E_1. Il y a à l'intérieur de $i(a_1)$ des points de P, donc aussi des points de E_1. Soit a_2 un point quelconque de E_1 à l'intérieur de $i(a_1)$. Il y a, à l'intérieur de la partie commune aux intervalles $i(a_1)$, $i(a_2)$, des points de P, donc aussi des points de E_1. Soit a_3 un point quelconque de E_1 à l'intérieur de cette partie. Ayant choisi le point a_r, on observera que, à l'intérieur de la partie commune aux intervalles $i(a_1)$, $i(a_2)$, ..., $i(a_r)$, il y a des points de P, donc aussi des points de E_1. Soit a_{r+1} un point quelconque de E_1 à l'intérieur de cette partie. Les points a_1, a_2, ..., a_r, a_{r+1}, ... forment une suite croissante [décroissante] dont la limite est un point α de P qui est intérieur à une infinité d'intervalles $i(a)$ (¹).

Remarque. — Pour déterminer un de ces points α qui sont intérieurs à une infinité d'intervalles $i(\alpha)$ nous avons fait une infinité dénombrable de choix arbitraires. Voilà de quelle manière il est possible de régulariser ces choix. Étant donné un nombre $k > 0$ quelconque, on peut avoir deux cas : ou il y a une infinité d'intervalles $i(a)$ de longueur $\geqq k$, ou il y a seulement un nombre fini.

1° S'il y a une infinité d'intervalles $i(a)$ de longueur $\geqq k$, soit m un point limite des extrémités gauches [droites] de ces $i(a)$. Tous les points à droite [gauche] de m et suffisammet près de m (c'est-à-dire tels que $x - m < k$) sont intérieurs à une infinité de $i(a)$.

2° S'il y a seulement un nombre fini d'intervalles $i(a)$ de longueur $\geqq k$ (et cela quel que soit k), les points de E_1 sont tout au plus une infinité dénombrable. Alors il est évident que les choix sont possibles (en admettant que cet ensemble soit effectivement énumérable).

b. La condition est suffisante (²). — Supposons que E soit clairsemé

(¹) Un raisonnement de M. Denjoy (*Journal de Mathématiques*, 7ᵉ série, t. 1, 1915, p. 149) montre que l'ensemble des points α de P qui sont intérieurs à une infinité d'intervalles $i(a)$ forme un *résiduel* de P, c'est-à-dire le sous ensemble de P qui reste quand on exclut de P successivement une infinité dénombrable d'ensembles non denses en P.

(²) Voir *Annali di Matematica, loc. cit.*, n° 8, p. 256.

droit [gauche]. Soit E_1 l'ensemble des points de E qui sont limites à E du côté droit [gauche]. Soit α un nombre ordinal quelconque. Si α est de première espèce, soit E_α l'ensemble des points de $E_{\alpha-1}$ qui sont limites à $E_{\alpha-1}$ du côté droit [gauche]. Si α est de seconde espèce, soit E_α l'ensemble des points communs à tous les E_α, de rang inférieur à α. Chacun des E_α contient tous les ensembles suivants. Je dis que tous les E_α sont nuls à partir d'un certain rang de α.

En effet $E_{\alpha+1}$ est contenu dans l'ensemble E'_α dérivé de E_α. Donc l'ensemble E'_α contenant $E_{\alpha+1}$ contient tous les ensembles E_λ d'indices λ supérieurs à α. Comme E'_α est fermé, E'_α contient tous les ensembles E'_λ, si $\lambda > \alpha$. Donc, d'après un théorème connu, il existe un rang β tel que $E'_{\beta'} > E'_\beta$, si $\beta' < \beta$, et tel que $E'_\beta = E'_{\beta+1} = \ldots E_\lambda$ étant situé dans E'_α pour $\lambda > \alpha$, E'_λ est situé dans le dérivé E''_α de E'_α. Donc l'ensemble E'_β est nécessairement nul, car s'il n'était pas nul, il serait parfait, puisqu'il coïncide avec un ensemble $E'_{\beta+1}$ contenu dans son dérivé E''_β. Or il est impossible que E'_β soit parfait, parce que $E'_{\beta+1}$ serait en ce cas-là non dense en E'_β.

E'_β étant nul, E_β a un nombre fini de points ou est nul. En tout cas, $E_{\beta+1}$ est nul.

L'ensemble E est dénombrable. Car, l'ensemble Q des points au voisinage desquels un ensemble D est non dénombrable, est parfait, et l'ensemble des points de D qui sont limites à Q du côté droit [gauche] est partout dense sur Q.

Cela posé, nous envisageons pour un point quelconque a de E, deux sortes de rangs. D'abord, E étant dénombrable, nous pouvons attribuer à a un rang entier propre n. D'autre part, dans la suite des ensembles E_α, formée comme il a été expliqué, considérons ceux de ces ensembles qui ne contiennent pas a. L'un d'eux a un rang inférieur à tous les autres, soit γ ce rang. γ ne peut être un nombre de seconde espèce. Car a, étant situé dans $E_{\gamma'}$, quel que soit $\gamma' < \gamma$, serait dans E_γ, si γ était de seconde espèce. On peut donc poser $\gamma = \delta + 1$. a est dans E_δ, mais non pas dans $E_{\delta+1}$. Donc, a est dans E_δ mais n'est pas point limite du côté droit [gauche]. a est un point de E_δ isolé du côté droit [gauche]. Cela étant, $\varphi(n)$ étant une fonction quelconque de n tendant vers zéro quand n croît, nous prenons pour $i(a)$ un intervalle ayant pour extrémité gauche [droite] a et une longueur $l(a)$ inférieure d'une part à $\varphi(n)$, d'autre part à la distance de a à la partie de E'_δ qui est située à droite [gauche] de a.

Je dis qu'un point quelconque ξ de la droite n'est intérieur qu'à un nombre limité d'intervalles $i(a)$. En effet, si ξ était intérieur à une infinité d'intervalles $i(a)$, soient $a^{(1)}, a^{(2)}, \ldots, a^{(p)}, \ldots$ les extrémités gauches [droites] de ces intervalles, $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$ les ordres analogues à δ correspondant à ces divers points, $n_1, n_2, \ldots, n_p, \ldots$ leurs rangs dans le premier classement des a en suite unilinéaire, et enfin l_p la longueur de $i(a^{(p)})$. Puisque les n_p sont distincts, n_p croît indéfiniment avec p, donc $l_p < \varphi(n_p)$ tend vers zéro, donc ξ est point limite des $a^{(p)}$.

Je considère deux cas :

1° Il y a dans la suite $\delta_1, \ldots, \delta_p, \ldots$ une infinité de termes égaux à une même valeur δ. Alors ξ est un point limite de points E_δ, c'est-à-dire ξ appartient à E'_δ. Mais ceci est impossible puisqu'à chaque point a de E_δ nous avons fait correspondre un intervalle $i(a)$ qui ne contient aucun point de E'_δ.

2° Il n'y a pas dans la suite $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_p, \ldots$ une infinité de termes égaux. Nous pouvons supposer que telle suite soit toujours croissante, car on se réduit tout de suite à ce cas en choisissant une suite partielle. Chacun des $a^{(p)}$ appartient à tous les E_{δ_q}, avec $q \leq p$. Donc ξ est un point limite de chacun des ensembles E_{δ_p}, c'est-à-dire il appartient à chacun des E'_{δ_p}. Mais ceci est impossible, pour la même raison que plus haut.

La condition est donc suffisante.

II. — Les fonctions à dérivée droite nulle.

1. Nous démontrerons au paragraphe III, n° 1 que l'ensemble des points de discontinuité d'une fonction continue à droite et dérivable vers la droite est clairsemé gauche. Cette propriété vaut en particulier pour les fonctions à dérivée droite nulle. Une fonction $F(x)$ à dérivée droite nulle en a^-b est constante sur chaque intervalle contigu à l'ensemble de ses points de discontinuité, y compris l'extrémité gauche

de ce contigu. Ces intervalles contigus forment un ensemble partout dense en a^-b. Si ξ est un point de discontinuité isolé, il existe un intervalle $\overline{\alpha\beta}$ tel que $\alpha < \xi < \beta$ et un nombre positif $\omega[=\omega(\xi)]$, discontinuité de $F(x)$ en ξ, tels que, pour tout couple de points x', x'' tels que

$$\alpha \leqq x' < \xi, \qquad \xi \leqq x'' \leqq \beta,$$

l'on ait

$$F(x'') - F(x') = \varepsilon.\omega,$$

avec $\varepsilon = \pm 1$.

Inversement, étant donné un ensemble clairsemé gauche quelconque, existe-t-il toujours une fonction à dérivée droite nulle qui l'admet pour ensemble des points de discontinuité? Pour résoudre ce problème il suffit de trouver un exemple particulier de fonction semblable. C'est ce que nous allons faire.

Problème. — *Étant donné en a^-b un ensemble* E *clairsemé gauche quelconque, construire une fonction* $F(x)$ *continue à droite et ayant la dérivée droite nulle en tout point de a^-b, discontinue en tout point de* E *et continue hors de* E.

Nous reprenons les notations du paragraphe I, n° 3, et nous posons, pour chaque indice transfini α de première espèce,

$$K_\alpha = E_{\alpha-1} - E_\alpha \qquad (K_1 = E - E_1).$$

Posons en correspondance biunivoque les éléments ξ de E, desquels chacun appartient à un et un seul des K_α, avec les termes d'une série absolument convergente (d'ailleurs quelconque) $\Sigma u(\xi)$, et indiquons par $\delta(\xi)$ la distance de ξ au point limite de $E_{\alpha-1}$ plus voisin du côté gauche. La fonction

$$F(x) = \sum_{\substack{\xi \\ a \leqq \xi \leqq x}} u(\xi)\,\delta(\xi)$$

est continue à droite en tout a^-b. En effet, pour $x > x_0$, on a

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{\substack{\xi \\ x_0 < \xi \leqq x}} u(\xi)\,\delta(\xi) < (b-a) \sum_{\substack{\xi \\ x_0 < \xi \leqq x}} u(\xi),$$

donc

$$\lim_{x \to x_0 + 0} [F(x) - F(x_0)] = 0.$$

De plus $F(x)$ a la dérivée droite nulle en tout point de $a\text{-}b$. Démontrons-le en distinguant deux cas :

1° x_0 isolé vers droite par rapport à E. On a, pour $x > x_0$ et $x - x_0$ suffisamment petit,

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{\substack{\xi \\ x_0 < \xi \leqq x}} u(\xi)\,\partial(\xi) = 0.$$

2° x_0 point limite de E du côté droit. J'indique par α'_λ le plus petit des indices des E_α auxquels n'appartiennent pas les points ξ de l'intervalle $\overline{x_0 \quad x_0 + \frac{1}{2^\lambda}}$ (*ouvert*, c'est-à-dire $x_0 < \xi < x_0 + \frac{1}{2^\lambda}$). La suite $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_\lambda, \ldots$ ne peut être croissante, donc, au moins à partir d'un certain terme, elle est constante. Soit $\bar{\alpha}$ sa limite.

Il s'ensuit que x_0 est un point limite du côté droit pour chaque E_α avec $\alpha < \bar{\alpha}$. D'autre part il existe un nombre entier n tel que chaque point ξ de $\overline{x_0 \, x_0 + \frac{1}{2^n}}$ appartient à un K_α avec $\alpha \leqq \bar{\alpha}$. Donc, pour chaque ξ en $\overline{x_0 \quad x_0 + \frac{1}{2^n}}$, on a $\partial(\xi) \leqq \xi - x_0$. Il s'ensuit, pour $x_0 < x < x_0 + \frac{1}{2^n}$,

$$F(x) - F(x_0) = \sum_{\substack{\xi \\ x_0 < \xi \leqq x}} u(\xi)\,\partial(\xi) \leqq (x - x_0) \sum_{\substack{\xi \\ x_0 < \xi \leqq x}} u(\xi),$$

d'où

$$\lim_{x \to x_0 + 0} \frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = 0.$$

De plus la fonction $F(x)$ est évidemment discontinue en tout point de E et continue hors de E.

Remarque. — Pour un indice quelconque α de première espèce, les points ξ de K_α qui appartiennent à $E'_{\alpha-1}$ (indiquons-les par ξ_α) sont extrémités droites d'intervalles contigus à $E'_{\alpha-1}$. Donc les nombres $\partial(\xi_\alpha)$ correspondants sont les longueurs des intervalles contigus à $E'_{\alpha-1}$ dont les ξ_α sont extrémités droites. $E'_{\alpha-1}$ contient E'_α. La série $\Sigma^* \partial(\xi_\alpha)$ des longueurs ∂ relatives aux points ξ_α qui sont contenus dans un même intervalle contigu à E'_α ne peut pas être supérieure à la longueur de l'intervalle contigu. Donc, si l'extrémité droite de cet intervalle contigu est un point $\xi_{\alpha+1}$, on a nécessairement

$$\Sigma^* \partial(\xi_\alpha) \leqq \partial(\xi_{\alpha+1}).$$

Donc les nombres $\delta(\xi)$ constituent une suite de nombres positifs qui ne sont pas indépendants l'un de l'autre.

2. Sur les fonctions à dérivée droite nulle on peut se poser différents problèmes de plusieurs points de vue. Un de ces problèmes, dans le but de rendre moins particulier l'exemple du n° 1, peut être formulé dans les termes suivants : *étant donnés en* a^-b *un ensemble* E *clairsemé gauche quelconque et pour chacun des points* ξ *qui le compose un nombre positif* $\omega[=\omega(\xi)]$, *quelles conditions doivent être satisfaites pour qu'il existe une fonction* $F(x)$ *à dérivée droite nulle en* a^-b, *dont l'ensemble des points des discontinuités soit* E *et telle que sa discontinuité en chacun des points* ξ *soit précisément* $=\omega(\xi)$? *Ces conditions étant admises, construire une telle fonction* $F(x)$.

N'ayant pas réussi à résoudre ce problème, nous nous bornerons, dans les numéros suivants, à quelques considérations préliminaires et très particulières.

On voit d'abord tout de suite que, pour la continuité à droite de $F(x)$ en tout point de a^-b, il est nécessaire que, pour tout nombre positif K, l'ensemble des points ξ de E pour lesquels on a $\omega(\xi)\geqq K$ soit bien ordonné de gauche à droite [1].

Ceci revient à supposer que, pour toute suite décroissante $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n, \ldots$, de points de E, l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}\omega(\xi_n)=0.$$

Si x_0 est la limite de cette suite, pour la dérivabilité vers droite en x_0 il est aussi nécessaire que, ayant posé $\delta_n=\xi_n-x_0$ pour chaque valeur de l'indice n, l'on ait

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\omega(\xi_n)}{\delta_n}=0 \quad [2].$$

3. Étudions le cas particulier où E est formé d'une suite croissante

$$\xi_1, \quad \xi_2, \quad \ldots, \quad \xi_n, \quad \ldots$$

---

[1] Il est aussi nécessaire que cet ensemble soit fermé. Si les discontinuités sont toutes de première espèce, cet ensemble est toujours fini.

[2] Voir *Annali di Matematica*, *loc. cit.*, n° 2, p. 251.

et de son point limite $x_0 (< b)$. Posons

$$\omega(x_0) = \omega_0, \qquad \omega(\xi_n) = \omega_n,$$

pour toutes les valeurs de $n = 1, 2, 3, \ldots$.

Il est évident que chacune des discontinuités ω_n peut être arbitrairement donnée. Au contraire l'ensemble de *toutes* les discontinuités ω_0, $\omega_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ ne peut pas être arbitrairement donné. On voit par exemple tout de suite que la condition $\omega_0 \geqq \overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \omega_n$ est nécessaire. Mais elle n'est pas toujours suffisante : par exemple, si

$$\omega_{2n} = a, \qquad \omega_{2n+1} = b \qquad (a, b \text{ constantes arbitraires}; \ a \neq b; \ n = 1, 2, 3, \ldots),$$

c'est la condition $\omega_0 \geqq a + b$ qui est nécessaire et suffisante.

Nous nous proposons la recherche de la relation nécessaire et suffisante qui doit exister entre ω_0 et la suite des ω_n.

A toute suite

$$\varepsilon_1, \quad \varepsilon_2, \quad \ldots, \quad \varepsilon_n, \quad \ldots$$

de nombres chacun égal à ± 1, correspond une fonction

$$F(x) = \sum_{n=1}^{m} \varepsilon_n \omega_n,$$

pour x tel que $\xi_m \leqq x < \xi_{m+1}$. Cette fonction, qui est définie pour tout x tel que $\xi_1 \leqq x < x_0$, résout le problème en tout l'intervalle $\overline{\xi_1 x_0}$. On voit donc que, si le problème est résoluble en tout $\overline{ab}$, il l'est d'une infinité de manières [même indépendamment du choix arbitraire des valeurs de $F(x)$ en a et en x_0], parce que la solution ne dépend pas du choix d'un groupe fini quelconque de valeurs ε_n. Inversement, à toute fonction $F(x)$ qui résout le problème en $\overline{\xi_1 x_0}$, correspond [à une constante additive $F(\xi_1)$ près] une suite $\{\varepsilon_n\}$ bien déterminée. On voit donc que la possibilité de résoudre le problème équivaut à celle de trouver une suite $\{\varepsilon_n\}$ telle que l'oscillation de la série $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \omega_n$ soit $\leqq \omega_0$.

A un autre point de vue le problème proposé, dans ce cas particulier, n'est qu'un problème sur les séries à termes réels et nous le pouvons énoncer comme il suit :

a. Quelle est la limite inférieure U des oscillations des séries qui ne diffèrent entre elles que par les signes des termes?

b. Cette limite inférieure est-elle un minimum atteint?

c. Dans le cas affirmatif, construire une série dont l'oscillation soit minimum.

Quelle que soit la fonction $F(x)$ [la suite $\{\varepsilon_n\}$], nous indiquerons par $\Omega(F)$ l'oscillation de $F(x)$ à gauche de x_0 $\left[\text{l'oscillation de la série } \sum_{n=1}^{\infty}\varepsilon_n\omega_n\right]$. On a pour $\Omega(F)$ l'expression

$$\Omega(F) = \overline{\lim_{(x', x'')\to x_0-0}} |F(x'') - F(x')| = \overline{\lim_{n\to\infty}} \left|\sum_{k=n}^{n+p}\varepsilon_k\omega_k\right|$$

(p variant indifféremment avec n).

4. Deux nombres positifs n, p étant donnés arbitrairement, considérons un groupe

$$\varepsilon_n, \quad \varepsilon_{n+1}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n+p}$$

de $p+1$ nombres, chacun $=\pm 1$. Indiquons par

$$\mu(n, p, \varepsilon_k) \qquad (k = n, n+1, \ldots, n+p)$$

la plus grande valeur absolue des $\dfrac{(p+1)(p+2)}{2}$ sommes

$$\varepsilon_{n+h}\omega_{n+h} + \varepsilon_{n+h+1}\omega_{n+h+1} + \ldots + \varepsilon_{n+h+k}\omega_{n+h+k},$$

que l'on obtient en choisissant de toutes les façons possibles les entiers non négatifs h, k tels que $0 \leqq h + k \leqq p$.

Soit $\lambda(n, p)$ le minimum de $\mu(n, p, \varepsilon_k)$ pour tous les 2^{p+1} choix distincts des ε_k $(k = n, n+1, \ldots, n+p)$. Ces nombres $\lambda(n, p)$ peuvent être définis pour chaque couple de nombres entiers positifs n, p. Évidemment l'on a

$$\lambda(n, p) \leqq \lambda(n, p')$$

pour $p < p'$.

Posons

$$v_n = \lim_{p \to \infty} \lambda(n, p).$$

5. Nous voulons montrer de quelle façon l'on peut construire, pour un indice n quelconque, une suite

$$\bar{\varepsilon}_n, \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}, \quad \bar{\varepsilon}_{n+2}, \quad \ldots$$

de nombres chacun $= \pm 1$, telle que l'on ait

$$v_n = \max_{h,\, k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m} \omega_{n+m} \right|,$$

c'est-à-dire telle que l'oscillation en $\overline{\xi_{n-1} x_0}$ de la fonction correspondante $F(x)$ soit $= v_n$. A tel but choisissons (ce qui est possible), pour chaque entier $p > 0$, un groupe

$$\varepsilon_n^{(p)}, \quad \varepsilon_{n+1}^{(p)}, \quad \varepsilon_{n+2}^{(p)}, \quad \ldots, \quad \varepsilon_{n+p}^{(p)}$$

de $p+1$ nombres chacun $= \pm 1$ et tels que

$$\mu(n, p, \varepsilon_{n+k}^{(p)}) = \lambda(n, p) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

c'est-à-dire que

$$\max_{\substack{i,\, j \text{ quelconque} \\ i+j \leqq p}} \left| \sum_{k=i}^{i+j} \varepsilon_{n+k}^{(p)} \omega_{n+k} \right| = \lambda(n, p).$$

Considérons ensuite le tableau

$$(1) \qquad \left\{ \begin{array}{lllll} \varepsilon_n^{(0)}, & & & & \\ \varepsilon_n^{(1)}, & \varepsilon_{n+1}^{(1)}, & & & \\ \varepsilon_n^{(2)}, & \varepsilon_{n+1}^{(2)}, & \varepsilon_{n+2}^{(2)}, & & \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & & \\ \varepsilon_n^{(p)}, & \varepsilon_{n+1}^{(p)}, & \varepsilon_{n+2}^{(p)}, & \ldots, & \varepsilon_{n+p}^{(p)}; \\ \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, & \ldots, \end{array} \right.$$

et extrayons-en une suite unique

$$\bar{\varepsilon}_n, \quad \bar{\varepsilon}_{n+1}, \quad \bar{\varepsilon}_{n+2}, \quad \ldots, \quad \bar{\varepsilon}_{n+p}, \quad \ldots$$

selon la loi suivante. Les nombres $\varepsilon_n^{(p)}$ $(p = 0, 1, 2, \ldots)$ étant chacun $= \pm 1$, il y en a sûrement une infinité qui sont égaux entre eux. Soit $\bar{\varepsilon}_n$ cette valeur commune [1]. Supprimons du tableau (1) toutes les lignes qui ne commencent pas par $\bar{\varepsilon}_n$ et raisonnons d'une manière analogue sur la seconde colonne du tableau restant : c'est-à-dire indiquons par $\bar{\varepsilon}_{n+1}$ une valeur commune à une infinité de nombre $\varepsilon_{n+1}^{(p)}$ (qui figurent dans ce second tableau) et supprimons toutes les lignes dont le second élément est $\neq \bar{\varepsilon}_{n+1}$. Ainsi nous continuons indéfiniment.

S'il était

$$\rho_n > \max_{h,\, k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m} \omega_{n+m} \right|,$$

il devrait exister un entier $\bar{p} > 0$ tel que, pour chaque $p > \bar{p}$, l'on ait

$$\left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m} \omega_{n+m} \right| < \lambda(n, p),$$

quels que soient h, k non négatifs, avec $h + k \leq p$. Ceci est impossible à cause de la définition même de $\lambda(n, p)$. S'il était

$$\rho_n < \max_{h,\, k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m} \omega_{n+m} \right|,$$

il devrait exister un couple de nombres entiers positifs h_1, k_1 tels que, pour chaque p, l'on ait

$$\lambda(n, p) < \left| \sum_{m=h_1}^{h_1+k_1} \bar{\varepsilon}_{n+m} \omega_{n+m} \right|.$$

Il existe une ligne du tableau (1) (il en existe même une infinité) à laquelle appartient le groupe

$$\bar{\varepsilon}_{n+h_1}, \quad \bar{\varepsilon}_{n+h_1+1}, \quad \ldots, \quad \bar{\varepsilon}_{n+h_1+k_1},$$

soit par exemple la ligne $\{\varepsilon_{n+j}^{(p)}\}$ $(j = 0, 1, 2, \ldots, p)$. Étant alors par construction

$$\mu(n; p; \varepsilon_{n+j}^{(p)}) = \lambda(n, p) \qquad (j = 0, 1, 2, \ldots, p),$$

---

[1] S'il y en a une infinité pour chacune des deux valeurs, nous posons $\bar{\varepsilon}_n = +1$.

il s'ensuit

$$\lambda(n,p) \geqq \left| \sum_{m=h_1}^{h_1+k_1} \bar{\varepsilon}_{n+m}\,\omega_{n+m} \right|.$$

Il y a contradiction. Donc

$$v_n = \max_{h,\,k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m}\,\omega_{n+m} \right|. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Ce raisonnement montre en outre que, pour chaque n, v_n est la limite inférieure des oscillations en $\overline{\xi_{n-1}\,x_0}$ de toutes les fonctions $F(x)$, c'est-à-dire la limite inférieure des expressions

$$\max_{h,\,k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \varepsilon_{n+m}\,\omega_{n+m} \right|$$

pour toutes les suites $\varepsilon_n,\ \varepsilon_{n+1},\ \varepsilon_{n+2},\ \ldots.$

Il s'ensuit $v_n \geqq v_{n'}$, pour $n < n'$. Posons

$$\lim_{n \to \infty} v_n = V.$$

Je dis que $V = U$ (n° 3, a). En effet, un nombre $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement, il existe des v_n (*tous* les v_n pour n suffisamment élevé) telles que $v_n < V + \varepsilon$. Pour un quelconque de ces v_n l'on peut construire, comme nous l'avons vu tout à l'heure, une suite

$$\{\bar{\varepsilon}_{n+m}\} \qquad (m = 0, 1, 2, \ldots)$$

telle que

$$\max_{h,\,k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h=k} \bar{\varepsilon}_{n+m}\,\omega_{n+m} \right| = v_n < V + \varepsilon.$$

Mais l'on a

$$\overline{\lim_{h \to \infty}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m}\,\omega_{n+m} \right| \leqq \max_{h,\,k \text{ quelconque}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \bar{\varepsilon}_{n+m}\,\omega_{n+m} \right|$$

(k variant indifféremment avec h),

donc $U < V + \varepsilon$. D'autre part, pour la définition de U, il existe une suite $\{\varepsilon_m\}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ telle que

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \left| \sum_{m=h}^{h+k} \varepsilon_m\,\omega_m \right| < U + \varepsilon$$

(k variant indifféremment avec h).

Il existe donc un entier n_0 tel que, pour chaque indice $n > n_0$ et pour chaque p, l'on ait

$$\mu(n, p, \varepsilon_m) < U + \varepsilon \qquad (m = n, n+1, \ldots, n+p).$$

Donc, pour chaque $n > n_0$ et pour chaque p, l'on a aussi

$$\lambda(n, p) < U + \varepsilon, \qquad \rho_n \leqq U + \varepsilon, \qquad V \leqq U + \varepsilon.$$

Donc $V = U$. C. Q. F. D.

6. Nous avons montré au n° 5 de quelle manière on peut construire une suite de fonctions $F(x)$, dont les oscillations à gauche de x_0 forment une suite ayant U pour limite. Voilà des limitations pour cette limite inférieure U,

$$\overline{\lim_{n \succ \infty}}\, \omega_n \leqq U \leqq 2 \overline{\lim_{n \succ \infty}}\, \omega_n.$$

La première partie de cette relation est évidente. Pour la seconde partie il suffit de montrer qu'il est possible de trouver une suite ε_1, $\varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots$ de nombres, chacun $= \pm 1$, telle que

$$\overline{\lim_{n \succ \infty}} \left| \sum_{k=n}^{n+p} \varepsilon_k \omega_k \right| \leqq 2 \overline{\lim_{n \succ \infty}}\, \omega_n$$

(p variant indifféremment avec n),

c'est-à-dire telle que

$$\overline{\lim_{\substack{n' \succ \infty \\ n'' \succ \infty}}} |F(\xi_{n'}) - F(\xi_{n''})| \leqq 2 \overline{\lim_{n \succ \infty}}\, \omega_n.$$

En effet, posons $\varepsilon_1 = 1$ et en général (pour tout $h > 1$) $\varepsilon_h = 1$ si $F(\xi_{h-1}) \leqq 0$, $\varepsilon_h = -1$ si $F(\xi_{h-1}) > 0$. Alors, pour tout $h > 1$, on a

$$-\omega_k < F(\xi_h) \leqq \omega_k,$$

k étant le plus grand indice $\leqq h$ tel que $F(\xi_{k-1})$ a signe contraire à $F(\xi_h)$ (o étant considéré comme négatif). Il s'ensuit l'énoncé.

7. Voici quelques cas où l'on peut répondre affirmativement aux questions b, c que nous nous sommes posées à la fin du n° 3.

1° Tous les ω_n sont égaux.

2° Il existe deux nombres $a, b\,(a \neq b)$ tels que, pour chaque n, l'on ait $\omega_n = a$ ou $\omega_n = b$. Soit en effet $a > b$. Si les termes $\omega_n = b$ se présentent selon des groupes dont chacun est formé d'un nombre pair de termes consécutifs, l'on a $U = a$; et une série dont l'oscillation $= U$ peut être obtenue en posant $\varepsilon_n = \pm 1$ selon que n est pair ou impair. Dans l'éventualité contraire on peut distinguer trois cas : α. $a \geqq 2b$; β. $a < 2b$ et une infinité de groupes impairs de termes $\omega_n = a$ alternant avec les groupes impairs de termes $\omega_n = b$; γ. autres hypothèses. Dans les cas α, β l'on a $U = a + b$ et une série dont l'oscillation est $= U$ peut être obtenue de la manière suivante : on imagine de supprimer dans la suite $\{\omega_n\}$ tous les groupes qui sont formés d'un nombre impair de termes consécutifs $= b$ et l'on attribue alternativement les signes ± 1 séparément à la suite supprimée et à celle non supprimée. Dans le cas γ l'on a $U = 2a - b$ et la construction est la même que dans la première éventualité [1].

3° Les ω_n sont tous multiples d'un même nombre, c'est-à-dire il existe un nombre k tel qu'à chaque indice n corresponde un entier $I_n > 0$ tel que $\omega_n = I_n k$. En effet, dans ce cas, toute série formée avec les ω_n en oscillation qui est, elle aussi, multiple de k et par conséquent la limite inférieure U de telles oscillations doit être un minimum. Le procédé que nous avons indiqué au n° 5 nous sert à construire une série dont l'oscillation soit $= U$.

4° Il existe, déterminée et finie, la $\lim\limits_{n \to \infty} \omega_n = L$. Si $L = 0$ la solution est évidente [2]. Supposons donc $L > 0$ et posons

$$\omega_n = L + (-1)^n \eta_n, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \eta_n$$

étant une série à termes $\to 0$. Étudions d'abord la fonction

$$F(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \omega_m = L \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} - \sum_{m=1}^{n} \eta_m$$
$$(\text{pour } x \text{ tel que } \xi_n \leqq x < \xi_{n+1}).$$

---

(1) Il ne semble pas que l'on puisse donner un procédé semblable dans le cas où les ω_n peuvent prendre seulement un nombre fini, mais > 2, de valeurs différentes.

(2) Nous reviendrons sur ce cas (*voir* le n° 8).

Pour n pair l'on a

$$F(x) = -\sum_{m=1}^{n} \eta_m;$$

pour n impair, l'on a

$$F(x) = L - \sum_{m=1}^{n} \eta_m.$$

Soient x', x'' deux points quelconques ($x' < x''$) et

$$\xi_{n'} \leqq x' < \xi_{n'+1} \leqq \xi_{n''} \leqq x'' < \xi_{n''+1}.$$

Si n', n'' ont la même parité, on a

$$|F(x') - F(x'')| = \left| \sum_{m=n'+1}^{n''} \eta_m \right|.$$

Si n' est pair, n'' impair, on a

$$|F(x') - F(x'')| = \left| L - \sum_{m=n'+1}^{n''} \eta_m \right|.$$

Si n' est impair, n'' pair, on a

$$|F(x') - F(x'')| = \left| L + \sum_{m=n'+1}^{n''} \eta_m \right|.$$

Donc on a

$$\overline{\lim_{\substack{x' \to x_0 - 0 \\ x'' \to x_0 - 0}}} |F(x') - F(x'')| = L + \overline{\lim_{n' \to \infty}} \left| \sum_{\substack{m=n'+1 \\ n'' \text{ quelconque} > n'}}^{n''} \eta_m \right|.$$

Donc l'oscillation $\Omega(F)$ à gauche de x_0, de la fonction $F(x)$, est $= L + \lambda$, étant

$$\lambda = \overline{\lim_{n' \to \infty}} \left| \sum_{\substack{m=n'+1 \\ n'' \text{ quelconque} > n'}}^{n''} \eta_m \right| = \overline{\lim} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m - \underline{\lim} \sum_{m=1}^{\infty} \eta_m.$$

Nous avons démontré (n° 6) que $U \leqq 2L$. D'autre part, si pour une quelconque $F^\star(x)$ des fonctions à dérivée droite nulle avec les discontinuités $= \omega_n$ aux points ξ_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) il y a une infinité de couples de points ξ_n, ξ_{n+1} où elle varie dans le même sens [c'est-à-dire si l'on a

$$|F^\star(x') - F^\star(x'')| = \omega_n + \omega_{n+1}, \qquad \text{pour } \xi_{n-1} \leqq x' < \xi_n, \qquad \xi_{n+1} \leqq x'' < \xi_{n+2}],$$

alors on a $\Omega(F^*) \geqq 2L$. Donc si $\lambda \geqq L$, il est impossible qu'une fonction admettant les discontinuités ω_n données ait une discontinuité $< 2L$ à gauche de x_0. Dans ce cas on a donc $U = 2L$.

Si l'on a $\lambda < L$, la fonction $F(x)$ construite selon la règle donnée réalise en x_0 la discontinuité minimum : c'est-à-dire que l'on a $U = L + \lambda$ (¹). Mais il est facile de voir que, même dans le cas $\lambda \geqq L$, il est toujours possible de construire une fonction qui réalise en x_0 la discontinuité minimum, c'est-à-dire telle que l'on ait $\Omega(F) = 2L$. A tel but choisissons une suite $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots$ de nombres chacun $= \pm 1$, de manière que la série

$$\sum_{m=1}^{\infty} \alpha_m (\eta_{2m-1} + \eta_{2m})$$

soit convergente [ce qui est sûrement possible, puisque

$$\lim_{m \to \infty} (\eta_{2m-1} + \eta_{2m}) = 0],$$

et posons

$$\alpha_m \eta_{2m-1} = \eta'_{2m-1}, \qquad \alpha_m \eta_{2m} = \eta'_{2m} \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Je dis que la fonction

$$F(x) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m-1} \frac{\eta'_m}{\eta_m} \omega_m, \qquad \text{pour } x \text{ tel que } \xi_n \leqq x < \xi_{n+1}$$

$\left(\text{donc } \varepsilon_m = \alpha_{\frac{m+1}{2}} \text{ pour } m \text{ impair, } \varepsilon_m = -\alpha_{\frac{m}{2}} \text{ pour } m \text{ pair}\right)$ est telle que $\Omega(F) = 2L$. Pour le démontrer, il suffit d'examiner les valeurs prises par $F(x)$ en faisant varier n. Si n est impair, on a

$$F(x) = \alpha_{\frac{n+1}{2}} L - \sum_{m=1}^{n} \eta'_m.$$

Si n est pair, on a

$$F(x) = -\sum_{m=1}^{n} \eta'_m.$$

(¹) La condition $\lambda < L$ n'exige pas que la $\lim_{n \to \infty} \omega_n$ existe, c'est-à-dire que l'on ait $\lim_{n \to \infty} \eta_n = 0$. Donc la fonction $F(x)$ construite selon la règle donnée peut réaliser en x_0 la discontinuité minimum, même dans d'autres cas.

Donc, en raisonnant d'une façon analogue à ce que nous avons fait plus haut, on trouve

$$\Omega(\mathrm{F}) = \overline{\lim_{\substack{x' \to x_0 - 0 \\ x' < x'' < x_0}}} \,|\,\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x'')\,| = 2\mathrm{L} + \overline{\lim_{\substack{n' \to \infty \\ n'' \text{ quelconque } > n'}}} \left| \sum_{m=n'}^{n''} \eta'_m \right| = 2\mathrm{L} \quad (^1).$$

C. Q. F. D.

On trouverait le même résultat avec la construction du n° 6 ([2]).

8. Avant de quitter la question dont nous nous sommes occupés dans les derniers numéros, nous voulons ajouter une observation à propos du cas 4°, n° 7. Pour $\mathrm{L} = 0$, quelles valeurs limites $\mathrm{F}(x_0 - 0)$ peuvent être prises par les fonctions $\mathrm{F}(x)$ qui résolvent le problème ? En d'autres termes : *quelles peuvent être les sommes des séries convergentes* $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \omega_n$, *dont les termes sont donnés en valeur absolue et tendent vers zéro ?*

C'est un résultat démontré dans les éléments que, si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ est divergente, chaque nombre réel $\mathrm{K} \gtreqless 0$ peut être somme de telles séries. En effet, si $\mathrm{K} \geqq 0$, soient :

n_1 le plus petit entier positif tel que

$$\sum_{n=1}^{n_1} \omega_n > \mathrm{K},$$

n_2 le plus petit entier positif $> n_1$ tel que

$$\sum_{n=1}^{n_1} \omega_n - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \omega_n \leqq \mathrm{K},$$

([1]) Il est vraisemblable que ce genre de procédé pourrait résoudre le problème même dans le cas où les ω_n ont deux valeurs limites et deux seulement. Mais on rencontrerait tout de suite de graves complications.

([2]) Nous avons donné la seconde construction comme type de raisonnement qui pourrait servir pour résoudre des problèmes plus compliqués (*voir* la note précédente).

n_3 le plus petit entier positif $> n_2$ tel que

$$\sum_{n=1}^{n_1} \omega_n - \sum_{n=n_1+1}^{n_2} \omega_n + \sum_{n=n_2+1}^{n_3} \omega_n > \mathrm{K}, \qquad \ldots,$$

Il suffit de poser $\varepsilon_n = +1$ pour $n \leqq n_1$, $\varepsilon_n = -1$ pour $n_1 < n \leqq n_2$, $\varepsilon_n = +1$ pour $n_2 < n \leqq n_3$, etc. De même si $\mathrm{K} < 0$.

Si la série $\sum_{n=1}^{\infty} \omega_n$ est convergente et si S est sa somme, on voit facilement que les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \omega_n$ forment un ensemble parfait P, dont les extrémités sont en $-\mathrm{S}$, $+\mathrm{S}$. Si $\omega_n > \sum_{n+1}^{\infty} \omega_p$ quel que soit n, alors P est partout non dense en $\overline{-\mathrm{S}+\mathrm{S}}$: les points de première espèce de P sont les sommes des séries $\sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_n \omega_n$ dans lesquelles tous les ε_n sont égaux à partir d'un certain rang.

III. — Recherche d'une primitive d'une dérivée droite finie.

1. Le but de ce dernier paragraphe est la recherche d'une primitive d'une dérivée droite finie donnée. Nous examinerons d'abord quelques questions préliminaires.

Soit $\mathrm{F}(x)$ *une fonction dont les nombres dérivés à droite sont partout finis sur un intervalle* $\overline{a\,b}$. *L'ensemble* $\mathfrak{N}$ *des points de discontinuité de* $\mathrm{F}(x)$ *est clairsemé gauche en* $\overline{a\,b}$ (¹).

En effet il est déjà connu que $\mathfrak{N}$ est partout non dense en $\overline{a\,b}$ (²). Il suffit donc de démontrer que, si P est un ensemble parfait quelconque non dense en $\overline{a\,b}$, l'ensemble des points de $\mathfrak{N}$ appartenant à P et qui ne sont pas extrémités droites d'intervalles contigus à P est partout non dense en P.

(¹) Les théorèmes que j'ai donnés successivement au paragraphe 2, n° 5, p. 253 de l'article cité des *Annali di Mat.*, au n° 1, p. 731 de la première des notes citées des *Rendiconti dei Lincei* et le présent contiennent chacun le précédent comme corollaire.

(²) *Annali di Mat., loc. cit.* à la note (¹).

Soit, si possible, $\overline{mn}$ un intervalle partiel de a^-b, contenant des points de P et tel que l'ensemble des points de $\mathfrak{N}$ appartenant à P et qui ne sont pas extrémités droites d'intervalles contigus à P, est partout dense sur la portion de P qui est contenue en $\overline{mn}$. Soit x_0 un de ces points en $\overline{mn}$ et soit ξ un point de P limite vers la droite et situé à gauche de x_0. Posons

$$L' = \overline{\lim_{x \to x_0}} F(x), \qquad L'' = \underline{\lim_{x \to x_0}} F(x),$$

et indiquons par x', x'' deux variables (à droite de ξ) qui tendent vers x_0 de manière que

$$\lim_{x' \to x_0} F(x') = L', \qquad \lim_{x'' \to x_0} F(x'') = L''.$$

On aura alors

$$\lim_{x' \to x_0} \frac{F(x') - F(\xi)}{x' - \xi} = \frac{L' - F(\xi)}{x_0 - \xi}, \qquad \lim_{x'' \to x_0} \frac{F(x'') - F(\xi)}{x'' - \xi} = \frac{L'' - F(\xi)}{x_0 - \xi}.$$

Maintenant faisons tendre ξ vers $x_0 - 0$. La différence

$$\frac{L' - F(\xi)}{x_0 - \xi} - \frac{L'' - F(\xi)}{x_0 - \xi}$$

tend vers ∞. On peut donc choisir trois valeurs x', x'', ξ telles que la différence

$$\frac{F(x') - F(\xi)}{x' - \xi} - \frac{F(x'') - F(\xi)}{x'' - \xi}$$

soit plus grande qu'un nombre positif A arbitrairement donné ([1]). En répétant ce choix pour tous les points comme x_0 et en attribuant successivement à A des valeurs indéfiniment croissantes, on construit une suite d'intervalles de manière que ces intervalles et les quotients différentiels de $F(x)$ correspondants se trouvent dans les conditions d'un théorème fondamental de M. Denjoy ([2]). Ce théorème fonda-

---

([1]) Le choix d'un point x' qui soit aussi proche qu'on veut de x_0 et tel que $F(x')$ soit aussi proche qu'on veut de L' peut être régularisé en utilisant la continuité à droite de $F(x)$. De même pour x''.

([2]) *Mémoire sur les nombres dérivés des fonctions continues* (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1915. t. I, p. 149). Voir aussi T. Viola (*Annali di Mat., loc. cit.*, paragraphe 1, n° 2, p. 245, et n° 7, p. 250).

mental permettrait de conclure que l'ensemble des points de $a^{-}b$ où l'on a $\overline{\mathrm{D}}_{+}\mathrm{F}(x) - \underline{\mathrm{D}}_{+}\mathrm{F}(x) = \infty$ soit non seulement partout dense sur la portion de P qui est contenue en $\overline{mn}$, mais aussi un résiduel de cette portion, ce qui est absurde.

Remarque. — La démonstration que nous avons donnée peut être exactement répétée en prenant comme base non le continu, mais un ensemble parfait Q quelconque. La fonction $\mathrm{F}(x)$ sera définie et continue à droite en Q; les nombres dérivés droits seront définis seulement par rapport à Q [1]; l'ensemble que nous avons indiqué par P sera un sous-ensemble de Q, partout non dense en Q; etc.

Si $\mathrm{F}(x)$ a spécialement à Q, en chaque point (non isolé du côté droit) une dérivée droite finie, l'ensemble des points de discontinuité de $\mathrm{F}(x)$ est clairsemé gauche (évidemment il est situé sur Q). Pour être ramené au premier cas, il suffit de considérer $\mathrm{F}(x, \mathrm{Q}) \equiv \mathrm{F}(x)$ sur Q et linéaire sur tout intervalle contigu à Q.

2. Il nous convient d'étudier une simple transformation à laquelle il est possible de soumettre une fonction continue à droite quelconque, sans en altérer les nombres dérivés droits. Il nous semble plus expressif, pour cela, d'adopter le langage géométrique : on le traduira facilement, si l'on veut, en langage analytique.

Soit $\mathrm{F}(x)$ une fonction continue à droite quelconque en $a^{-}b$. Soit MNP un triangle quelconque, dont les sommets M, N aient l'abscisse a, le sommet P l'abscisse b, comme dans la figure. Nous voulons construire une autre fonction continue à droite en $a^{-}b$, soit $\mathrm{F}^{*}(x)$, dont les points représentatifs soient tous situés dans le triangle MNP et dont les nombres dérivés droits coïncident avec ceux de $\mathrm{F}(x)$ en tout $a^{-}b$.

A cette fin, indiquons par Q le milieu de $\overline{\mathrm{MN}}$. $\mathrm{F}(x)$ étant continue à droite en a, les points représentatifs de la fonction

$$(\mathrm{Q}) + \mathrm{F}(x) - \mathrm{F}(a) \quad ([2]),$$

(1) Si la discontinuité en x_0 est de première espèce et si x_0 est extrémité gauche d'un intervalle contigu à Q, il faudra prendre constamment, pour l'un ou l'autre des points x', x'', le point x_0.

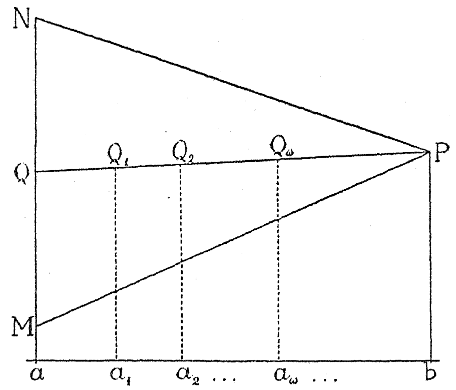
(2) Une lettre majuscule entre parenthèses représente l'ordonnée du point représenté par cette lettre sans parenthèses.

dans tout un voisinage $\overline{aa'}$ à droite de a, sont contenus dans le triangle MNP. Soient a_1 la limite supérieure de tels points a', et Q_1 l'intersection de l'ordonnée en a_1 avec la droite $\overline{QP}$. Posons

$$F^*(x) = (Q) + F(x) - F(a) \qquad \text{pour } a \leqq x < a_1.$$

De même (en supposant $a_1 < b$) soit a_2 la limite supérieure des

Fig. 1.



points $a' > a_1$ tels que les points représentatifs de la fonction $(Q_1) + F(x) - F(a_1)$, en $\overline{a_1 a'}$ soient contenus dans le triangle MNP, et soit Q_2 l'intersection de l'ordonnée en a_2 avec la droite QP. Posons

$$F^*(x) = (Q_1) + F(x) - F(a_1) \qquad \text{pour } a_1 \leqq x < a_2.$$

Ainsi nous continuons indéfiniment. La suite $\{a_n\}(n = 1, 2, \ldots)$ est croissante : soit a_ω sa limite. Si $a_\omega = b$, le problème est résolu. Si $a_\omega = b$, soit Q_ω l'intersection de l'ordonnée en a_ω avec la droite $\overline{QP}$. Posons $F^*(a_\omega) = (Q_\omega)$ et, à partir du point a_ω, opérons de la même façon que nous l'avons fait à partir de a. Ainsi nous continuons transfiniment jusqu'à b. En distinguant les discontinuités de $F(x)$ en discontinuités de première et de seconde sorte, selon que $F(x-0)$ existe ou non, on voit facilement que les points $a_\mu < b$, pour lesquels les indices μ sont des transfinis de seconde espèce, peuvent être seulement des points où $F(x)$ à des discontinuités de seconde sorte, ou tels que

$$\lim_{x \to a_\mu - 0} F(x) = \pm \infty.$$

Nous donnerons maintenant une première application de cette construction.

3. Soit $F(x)$ une fonction continue à droite et dérivable à droite en tout point de $\overline{ab}$. Nous nous proposons d'*éliminer de* $F(x)$ *toutes les discontinuités de seconde sorte, c'est-à-dire de construire une autre fonction continue à droite et dérivable à droite soit* $F^{\star}(x)$, *en* $a^{-}b$, *telle que* $D_{+}F^{\star}(x)=D_{+}F(x)$ *en tout point de* $a^{-}b$ *et que* $F(x-0)$ *existe et soit fini en chaque point de* $a^{-}b$.

L'ensemble des points x_0 de discontinuité de $F(x)$ étant clairsemé gauche, on peut attacher à chaque x_0 un voisinage gauche $i(x_0)$ de manière que tout point de l'axe $\overline{Ox}$ ne soit intérieur tout au plus qu'à un nombre fini d'intervalles $i(x_0)$ (§ I, n° 3).

Soit $\{x_n\}$ $(n=1, 2, \ldots)$ la suite des points de discontinuité de seconde sorte de $F(x)$ en $a^{-}b$ et des points tels que $\lim\limits_{x \to x_n - 0} F(x)=\pm\infty$. Nous supposons que les intervalles $i(x_n)$ soient soumis à la condition supplémentaire suivante. Les $i(x_r)$ avec $r<n$ étant choisis, si x_n est intérieur à l'un d'eux, soit $i(x_{\bar{r}})$, $i(x_n)$ sera aussi complètement intérieur à $i(x_{\bar{r}})$; dans le cas contraire $i(x_n)$ sera complètement extérieur à tous les $i(x_r)$, avec $r<n$. En $i(x_1)$ (voir la figure, où l'on a $x_0\equiv x_1$) choisissons deux points x', x'' $(x'<x'')$ tels que les points répresentatifs

$$A\equiv[x', F(x')], \qquad B\equiv[x'', F(x'')], \qquad C\equiv[x_1, F(x_1)].$$

ne soient pas alignés ([1]). Construisons en $\overline{x''x_1}$, selon le n° 2, une autre fonction, continue à droite et dérivable vers droite, soit $\varphi(x)$ telle que

$$D_{+}\varphi(x)=D_{+}F(x)$$

en tout $\overline{x''x_1}$ et dont les points représentatifs soient tous contenus dans le triangle ABC. Ensuite posons

$$F_1(x)=\begin{cases} F(x) \text{ pour } a\leqq x<x'' \text{ et pour } x_1\leqq x<b, \\ \varphi(x) \text{ pour } x''\leqq x<x_1. \end{cases}$$

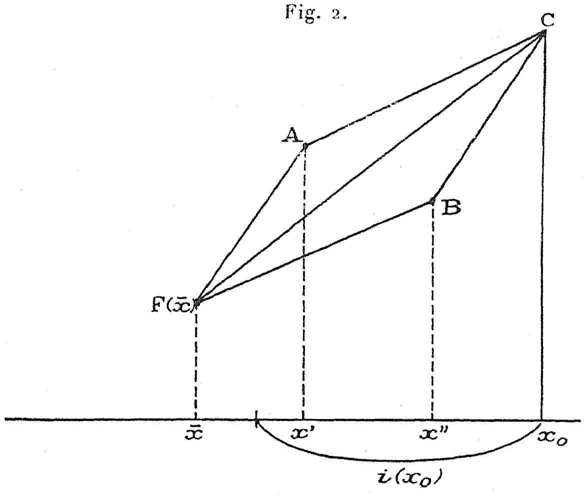
Continuons ainsi indéfiniment en modifiant successivement chaque

---

([1]) Voir la note ([1]), p. 93.

$F_n(x)$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ dans l'intervalle $i(x_{n+1})$ (ou plutôt dans une partie de cet intervalle) comme nous l'avons déjà fait pour $F(x)$ en $i(x_1)$ et en indiquant par $F_{n+1}(x)$ la fonction que l'on obtient par cette opération. De sorte que $F_{n+1}(x)$ ne diffère de $F_n(x)$ qu'à l'intérieur de $i(x_{n+1})$. Toutes les transformations ultérieures laisseront

Fig. 2.



$F_n(x)$ intérieure au triangle ABC pour $x''<x<x_1$: sur l'intervalle $\overline{x''x_1}$ l'oscillation de chaque $F_n(x)$ sera inférieure à celle de $F_1(x)$ [qui dans le cas de la figure est $\geqq F(x_1)-F(x'')$].

Aucun point de l'axe $\overline{Ox}$ n'étant intérieur à une infinité d'intervalles $i(x_n)$, il existe la $\lim\limits_{n\to\infty} F_n(x)=F^\star(x)$ en tout a^-b. $F^\star(x)$ satisfait aux conditions énoncées. En effet il est d'abord évident que $F^\star(x)$ est continue à droite et n'a pas de discontinuités de seconde sorte. $F^\star(x)$ est aussi bornée en tout a^-b. Si $\bar{x}$ est un point de a^-b qui n'est pas limite vers la droite d'intervalles $i(x_n)$, il est également évident que $D_+F^\star(\bar{x})=D_+F(\bar{x})$. Si $\bar{x}$ est limite vers la droite d'intervalles $i(x_n)$, soit $i(x_K)$ un de ceux-ci, étant $K>\nu$, si $F_n(\bar{x})=F^\star(\bar{x})$ pour $n\geqq\nu$ (voir la figure, $x_0\equiv x_K$). Le quotient aux différences finies $\dfrac{F^\star(x)-F^\star(\bar{x})}{x-\bar{x}}$, pour x tel que $x''\leqq x<x_0$, est compris entre les

rapports

$$\frac{F_K(x') - F_K(\bar{x})}{x' - \bar{x}}, \quad \frac{F_K(x'') - F_K(\bar{x})}{x'' - \bar{x}}, \quad \frac{F_K(x_0) - F_K(\bar{x})}{x_0 - \bar{x}}.$$

Ces trois rapports tendent tous, pour $K \to \infty$, c'est-à-dire pour $x_0 \to \bar{x} + 0$, vers $D_+F(\bar{x})$. Donc $D_+F^*(\bar{x}) = D_+F(\bar{x})$.

C. Q. F. D.

4. Soit $F(x)$ une fonction continue à droite et dérivable à droite en tout point de a^-b, bornée et dont les discontinuités soient toutes de première sorte. Si x_0 est un point de discontinuité de $F(x)$, la fonction

$$F^*(x) = \begin{cases} F(x) & \text{pour } x \text{ tel que } a \leqq x < x^0, \\ F(x) - [F(x_0) - F(x_0 - 0)] & \text{pour } x \text{ tel que } x_0 \leqq x \leqq b \end{cases}$$

est continue en x_0 et a la même dérivée droite que $F(x)$ en tout a^-b.

Il s'ensuit que, $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement, il suffit d'éliminer toutes les discontinuités $> \varepsilon$ (qui sont nécessairement en nombre fini) pour obtenir une fonction qui ait la même dérivée droite et dont les discontinuités soient toutes $\leqq \varepsilon$.

On pourrait même très facilement démontrer que, étant donnée une fonction $F(x)$ continue à droite et dérivable à droite en tout point de a^-b quelconque, il est toujours possible de construire une autre fonction $F^*(x)$ qui ait la même dérivée droite et qui soit constante à ε près. Mais nous ne voulons pas nous arrêter davantage sur ces questions.

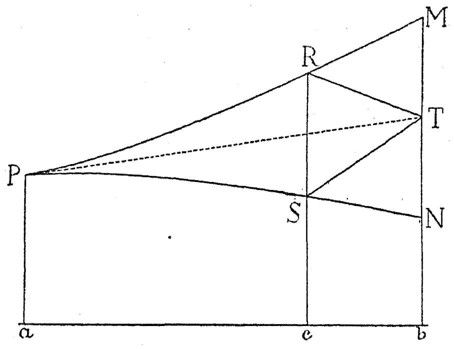
5. Un raisonnement analogue à celui du n° 2 nous permettrait, étant donnés arbitrairement en a^-b une fonction $F(x)$ continue à droite, bornée et sans discontinuités de seconde sorte, et un triangle MNP, dont les sommets MN aient l'abscisse b et le sommet P l'abscisse a, de construire une autre fonction $F^*(x)$ continue à droite, dont les points représentatifs seraient tous contenus dans ledit triangle et dont les nombres dérivés droits seraient égaux à ceux de $F(x)$ pour tout x tel que $a < x < b$. On peut se rapporter tout simplement au n° 2, en appliquant cette construction à la fonction

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(-x) & \text{pour chaque } x \text{ où } F(-x) \text{ est continue}, \\ F(-x-0) & \text{pour chaque } x \text{ où } F(-x) \text{ est discontinue}, \end{cases}$$

en $\overline{-b-a}$, et au triangle P'M'N' symétrique de PMN par rapport à l'axe $\overline{Oy}$. La suite analogue à $\{a_\mu\}$ est simplement infinie (à cause de la continuité à droite).

La construction est évidemment la même si le triangle MNP est mixtiligne, étant précisément limité par deux courbes $\widehat{PM}$, $\widehat{PN}$ (par exemple deux paraboles), sortant du point P avec la même tangente,

Fig. 3.



comme dans la figure. Alors la fonction $F^\star(x)$ est dérivable à droite en a et sa dérivée droite en a est égale au rapport directif de ladite tangente.

Si l'on sait seulement que la fonction $F(x)$ est bornée, continue vers la droite et sans discontinuités de deuxième sorte *à l'intérieur de* a^-b, c'est-à-dire si l'on ignore l'existence des limites $F(a+o)$, $F(b-o)$, soit c un point tel que $a<c<b$. Soient R, S les points des courbes $\widehat{PM}$, $\widehat{PN}$, dont l'abscisse est c. Le procédé du n° 2 peut alors être appliqué sur l'intervalle a^-c, relativement au triangle PRS, en faisant une suite simplement infinie d'opérations de droite à gauche. Le même procédé peut être appliqué sur l'intervalle $\overline{cb}$, relativement au trapèze mixtiligne RSMN, en faisant une suite simplement infinie d'opérations de gauche à droite. Donc la construction de la fonction $F^\star(x)$ sur a^-b est possible aussi dans ce dernier cas plus général. On peut même préciser cette construction de façon à éliminer la discontinuité de deuxième sorte qui éventuellement pourrait subsister au point b. En effet il suffit de remplacer, dans la suite des opérations

qu'on effectue de gauche à droite sur $\overline{cb}$, un triangle tel que RST (voir la figure) au trapèze RSMN. Nous supposerons tacitement dans la suite, toutes les fois que nous aurons besoin de constructions semblables, qu'on aura soin d'éliminer la discontinuité de deuxième sorte à l'extrémité droite de l'intervalle.

6. Venons maintenant au problème central de notre étude, c'est-à-dire à la recherche d'une primitive d'une dérivée droite finie donnée. Ce problème peut être exactement énoncé dans les termes suivants :

Soit $f(x)$ une fonction finie, dérivée droite d'une fonction (inconnue) $F(x)$ continue à droite et dérivable à droite en $a^{-}b$. Nous nous proposons de construire une primitive de $f(x)$, c'est-à-dire une fonction $\Phi(x)$ continue à droite et dérivable à droite, telle que $D_{+}\Phi(x) = f(x)$ en $a^{-}b$, c'est-à-dire telle que la fonction $F(x) - \Phi(x)$ soit, en tout $a^{-}b$, à dérivée droite nulle.

D'après ce que nous avons vu, on ne restreint pas la généralité en supposant que $\Phi(x)$ soit bornée et ne possède que des discontinuités de première sorte.

7. La fonction inconnue $F(x)$ est discontinue tout au plus sur un ensemble clairsemé gauche en $a^{-}b$. Dans chaque intervalle intérieur à $a^{-}b$ il existe donc un intervalle partiel $\alpha^{-}\beta$ où $F(x)$ est continue, donc dans lequel $f(x)$ est complètement totalisable et est la dérivée droite de sa totale indéfinie (¹). Par conséquent l'ensemble des points au voisinage desquels $f(x)$ est non totalisable, ou bien n'est pas la dérivée droite de sa totale, cet ensemble est partout non dense en $a^{-}b$.

8. Supposons d'abord que $f(x)$ soit totalisable dans tout intervalle partiel de $a^{-}b$ et que l'ensemble O des points de $a^{-}b$ où la totale indéfinie n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite soit réductible.

L'ensemble $\overline{O} = O + O'$ est réductible, donc clairsemé en $\overline{ab}$. Énumérons-le (en faisant exclusion, dans la numération, des points a, b s'ils appartiennent à $\overline{O}$) et enfermons chaque c_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$) de ses points dans un intervalle $i(c_n) \equiv (c_n - \delta_n, c_n + \delta_n)$, de manière que

(¹) A. Denjoy, *loc. cit.* à la note (¹), p. 73.

tout point de $\overline{ab}$ ne soit pas intérieur à une infinité de tels intervalles [1]. D'autre part les nombres $|c_n - c_{n'}|$ formant un ensemble dénombrable D, l'ensemble complémentaire est partout dense. Soient les nombres positifs δ_n, soumis à la condition supplémentaire suivante :

$$|f(c_n)|\,\delta_n + \delta_n^2 < \frac{l_n^2}{2^n},$$

l_n étant la distance de c_n au plus voisin des points a, b, c_r avec $r < n$; et enfin les δ_n seront étrangers à D.

Indiquons par $T(x)$ la totale de $f(x)$, avec $T\left(\frac{a+b}{2}\right) = 0$. Construisons, selon le n° 5, une fonction $T_0(x)$, continue à droite et ayant les mêmes nombres dérivés droits que $T(x)$ pour $a < x < b$, $= T(x)$ pour $\frac{a+b}{2} \leqq x < b$ et dont les points représentatifs pour $a < x < \frac{a+b}{2}$ soient tous contenus à l'intérieur du triangle mixtiligne ayant un sommet en $[a, 0]$, les deux autres sommets sur l'ordonnée en $\frac{a+b}{2}$ et les deux côtés curvilignes paraboliques exprimés par les équations $y = f(a)(x-a) \pm (x-a)^2$. En outre nous posons $T_0(a) = 0$. Alors on a

$$D_+ T_0(a) = f(a).$$

Pour chaque indice $n = 1, 2, 3, \ldots$ posons $\xi_n = c_n + \delta_n$, s'il n'existe aucun entier $r (0 < r < n)$ tel que $c_r < c_n < \xi_r$ (l'égalité $c_n = \xi_r$ est exclue par une hypothèse faite plus haut).

S'il existe, au contraire, de tels entiers r, indiquons par ξ_n le plus à gauche des ξ_r correspondants et de $c_n + \delta_n$.

Il est visible dès lors que, si $n' < n$ et si $(c_n, c_n + \delta_n)$ et $(c_{n'}, c_{n'} + \delta_{n'})$ ont un point commun, $(c_{n'}, c_{n'} + \delta_{n'})$ contient $(c_n, c_n + \delta_n)$ en totalité.

Ensuite, à partir de $T_0(x)$, nous construisons une suite de fonctions $T_n(x) (n = 1, 2, 3, \ldots)$ comme il suit : $T_{n-1}(x)$ étant supposée définie nous posons $T_n(x) = T_{n-1}(x)$ pour $a \leqq x \leqq c_n$, ou $\xi_n \leqq x < b$; pour $c_n \leqq x < \xi_n$ la fonction $T_n(x)$ est construite de façon que tous ses points représentatifs soient contenus à l'intérieur du triangle mixtiligne ayant un sommet dans le point $[c_n, T_{n-1}(c_n)]$, les deux autres sommets sur

(1) A. Denjoy, *loc. cit.* à la note (1), p. 74.

l'ordonnée en ξ_n et les deux côtés curvilignes paraboliques exprimés par les équations

$$y = T_{n-1}(c_n) + f(c_n)(x - c_n) \pm (x - c_n)^2.$$

Cette construction doit être effectuée selon le n° 5. Chaque $T_n(x)$ satisfait aux propriétés suivantes :

a. Elle est continue à droite pour tout x tel que $0 \leqq x < b$;

b. Elle est dérivable à droite pour tout x de $\overline{ab}$ qui n'appartient pas à $\overline{O}$ ou qui est un c_r avec $r \leqq n$, et l'on a de plus $D_+ T_n(x) = f(x)$;

c. Elle est bornée dans tout intervalle intérieur à $a^- b$ (ou ayant tout au plus le point a comme extrémité gauche);

d. Elle n'a pas de discontinuités de seconde sorte.

Il existe la $\lim\limits_{n \to \infty} T_n(x) = \Phi(x)$, parce que chaque point x de $a^- b$ n'est intérieur qu'à un nombre fini d'intervalles $i(c_n)$. En particulier, l'on a pour chaque indice $n = 1, 2, 3, \ldots, \Phi(c_n) = T_n(c_n)$. La fonction $\Phi(x)$, ainsi que chacune des $T_n(x)$, n'a pas de discontinuités de seconde sorte et est bornée dans tout intervalle intérieur à $a^- b$ ou ayant l'extrémité gauche en a. *Je dis que $\Phi(x)$ est une des fonctions primitives de $f(x)$.* En effet, si x n'est pas limite vers la droite de points de $\overline{O}$, l'on a tout de suite $D_+ \Phi(x) = f(x)$ [propriété (b)]. De même pour un point c_h qui soit limite vers la droite de points c_n on a $D_+ \Phi(c_h) = f(c)$. Il suffit en effet de considérer un de ces c_h et d'étudier le quotient aux différences finies $\dfrac{\Phi(x) - \Phi(c_h)}{x - c_h}$, pour $x \to c_h + 0$. Si, pour un x tel que $c_h < x < \xi_h$, il n'existe aucun c_n tel que $c_h < c_n \leqq x < \xi_n \leqq \xi_h$, on a

$$\Phi(x) = T_h(x),$$

donc

$$\begin{gathered} |\Phi(x) - [\Phi(c_h) + f(c_h)(x - c_h)]| = \\ = |T_h(x) - [T_h(c_h) + f(c_h)(x - c_h)]| \leqq (x - c_h)^2, \end{gathered}$$

$$\left| \frac{\Phi(x) - \Phi(c_h)}{x - c_h} - f(c_h) \right| \leqq x - c_h. \tag{2}$$

Si, au contraire, il existe des points c_n tels que $c_h < c_n \leqq x < \xi_n \leqq \xi$, soient $n, n_1, \ldots, n_p, h$ les indices rangés par ordre de grandeur décroissante des $i(c_m)$ contenant x. Puisque

$$i(c_n) < i(c_{n_1}) < \ldots < i(c_h),$$

on a

$$c_h < c_{n_p} < c_{n_{p-1}} < \ldots < c_{n_1} < c_n \leqq x < \xi_n < \xi_{n_1} < \ldots < \xi_{n_{p-1}} < \xi_{n_p} \leqq \xi_h,$$
$$l_n \leqq c_n - c_{n_1}, \qquad l_{n_1} \leqq c_{n_1} - c_{n_2}, \qquad \ldots, \qquad l_{n_p} \leqq c_{n_p} - c_h.$$

On a les relations suivantes :

$$|\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_n(c_n)| < |f(c_n)|(x - c_n) + (x - c_n)^2 < \frac{l_n^2}{2^n} \leqq \frac{(c_n - c_{n_1})^2}{2^n},$$
$$|\mathrm{T}_{n_1}(c_n) - \mathrm{T}_{n_1}(c_{n_1})| < \frac{l_{n_1}^2}{2^{n_1}} \leqq \frac{(c_{n_1} - c_{n_2})^2}{2^{n_1}},$$
$$|\mathrm{T}_{n_1}(x) - \mathrm{T}_{n_1}(c_{n_1})| < \frac{l_{n_1}^2}{2^{n_1}} \leqq \frac{(c_{n_1} - c_{n_2})^2}{2^{n_1}}.$$

Donc, puisque $\mathrm{T}_n(c_n) = \mathrm{T}_{n_1}(c_n)$,

$$|\mathrm{T}_n(x) - \mathrm{T}_{n_1}(x)| < (c_n - c_{n_2})^2\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n_1-1}}\right) < (x - c_h)^2\left(\frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n_1-1}}\right).$$

De même

$$|\mathrm{T}_{n_1}(x) - \mathrm{T}_{n_2}(x)| < (x - c_h)^2\left(\frac{1}{2^{n_1}} + \frac{1}{2^{n_2-1}}\right),$$
$$|\mathrm{T}_{n_2}(x) - \mathrm{T}_{n_3}(x)| < (x - c_h)^2\left(\frac{1}{2^{n_2}} + \frac{1}{2^{n_3-1}}\right),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$|\mathrm{T}_{n_p}(x) - \mathrm{T}_h(x)| < (x - c_h)^2\left(\frac{1}{2^{n_p}} + \frac{1}{2^{h-1}}\right).$$

Ensuite

$$|\mathrm{T}_h(x) - \mathrm{T}_h(c_h)| \leqq |f(c_h)|(x - c_h) + (x - c_h)^2,$$
$$\Phi(x) = \mathrm{T}_n(x), \qquad \Phi(c_h) = \mathrm{T}_h(c_h).$$

Donc

$$|\Phi(x) - \Phi(c_h) - f(c_h)(x - c_h)| < (x - c_h)^2\left(1 + \frac{1}{2^{h-3}}\right) \leqq 5(x - c_h)^2,$$

(3) $$\left|\frac{\Phi(x) - \Phi(c_h)}{x - c_h} - f(c_h)\right| \leqq 5(x - c_h).$$

Pour $x \to c_h + 0$, les seconds membres des relations (2), (3) tendent vers zéro.

On a donc

$$\mathrm{D}_+ \Phi(c_h) = f(c_h). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

9. Nous reportant maintenant au cas général étudié au n° 7, si $\overline{\alpha\beta}$ est un intervalle à l'intérieur duquel $f(x)$ est totalisable, l'ensemble fermé des points de $\overline{\alpha\beta}$ au voisinage desquels la totale indéfinie n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite a en général un noyau parfait P (1). Dans chaque intervalle $\overline{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ partiel de $\overline{\alpha\beta}$ et contigu à P, effectuons les constructions du n° 8 de façon à obtenir une fonction $\Phi_n(x)$ à l'intérieur et à l'extrémité gauche de $\overline{a_n b_n}$ $[\Phi_n(a_n) = 0]$. Nous pouvons supposer même que $\Phi_n(x)$ ait, en $\overline{a_n b_n}$, oscillation $< b_n - a_n$ (car on peut toujours satisfaire à cette condition en ajoutant éventuellement une réduction du type indiqué à la fin du n° 4). La fonction $G(x) = 0$ sur P, $= \Phi_n(x)$ en $\overline{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, continue à droite en tout $\overline{\alpha\beta}$, a la dérivée droite égale à $f(x)$ en tous les points de $\overline{\alpha\beta}$ qui n'appartiennent pas à P. Alors, si nous arrivons à considérer l'ensemble des points de $\overline{ab}$ au voisinage desquels $f(x)$ n'est pas complètement totalisable, cet ensemble aura lui aussi, en général, un noyau parfait Q. Dans chaque intervalle $\overline{c_n d_n}$ contigu à Q, l'ensemble U des points où $f(x)$ n'est pas complètement totalisable est réductible. Nous connaissons, dans chaque segment intérieur à $\overline{c_n d_n}$ et contigu à U, sans que son extrémité gauche soit c_n, la fonction continue à droite $G(x)$ définie il y a un instant. Nous pouvons répéter sur $G(x)$ des constructions *analogues* à celles du n° 8 (2) de façon à obtenir une fonction $H(x)$ à l'intérieur de chaque $\overline{c_n d_n}$, nulle sur U, continue à droite et telle que $D_+ H(x) = f(x)$ hors d'un ensemble qui est encore parfait, pouvant être obtenu en ajoutant à une suite d'ensembles parfaits les points limites de cette suite. Toutes ces constructions peuvent être effectuées de façon que $H(x)$ soit dépourvue de discontinuités de seconde sorte.

Donc, en résumé, *nous connaissons une primitive de $f(x)$ en tout $\overline{ab}$, exception faite tout au plus d'un ensemble parfait et non dense.*

Nous passons maintenant à une propriété remarquable des fonctions continues à droite et dérivables vers la droite, par rapport aux ensembles parfaits et non denses.

---

(1) Voir l'exemple du n° 13.

(2) Maintenant, dans ces constructions, U prend la place de $\overline{O}$.

10. $F(x)$ étant, comme toujours, une primitive de $f(x)$ en $\overline{ab}$, P un ensemble parfait quelconque non dense en $\overline{ab}$, $\overline{a_n b_n}$ $(n=1, 2, 3, \ldots)$ les intervalles contigus à P, ε un nombre positif quelconque; je dis que *l'ensemble* A *des points* a_n, *où l'on a*

$$\left|\frac{F(b_n)-F(a_n)}{b_n-a_n}-f(a_n)\right| \geqq \varepsilon,$$

est clairsemé. En effet, si A n'était pas clairsemé, il existerait un sous-ensemble parfait Q de P sur lequel A serait partout dense. L'ensemble des points de discontinuité de $F(x)$ étant clairsemé gauche en $\overline{ab}$, il existe un intervalle contenant une portion $\overline{Q}$ de Q, tel que $F(x)$ n'a pas en $\overline{Q}$ des points de discontinuité par rapport à $\overline{Q}$. Les points de $A.\overline{Q}$ sont tous des extrémités gauches d'intervalles contigus à $\overline{Q}$. Alors (¹), sur un résiduel de $\overline{Q}$, l'on aurait

$$|\overline{D}_+ F(x) - \underline{D}_+ F(x)| \geqq \varepsilon,$$

ce qui est absurde (voir le n° 13, 2°).

11. Rappelons (²) que, si $\varphi(x)$ est une fonction quelconque complètement totalisable dans un intervalle $\overline{mn}$, il est défini dans $\overline{mn}$ une suite transfinie bien déterminée d'ensembles fermés C_μ, chacun desquels est contenu et non dense dans les précédents, selon les lois suivantes :

1° C_0 coïncide avec $\overline{mn}$;

2° Pour chaque transfini μ de première espèce, C_μ est l'ensemble des points de $C_{\mu-1}$ dans l'entourage desquels $\varphi(x)$ n'est pas intégrable selon Lebesgue sur $C_{\mu-1}$, ou la série ΣV_n des oscillations de la totale sur les contigus de $C_{\mu-1}$ (où cette totale est supposée connue) n'est pas absolument convergente;

3° Pour chaque transfini μ de seconde espèce, C_μ est l'ensemble commun à tous les C_ν, avec $\nu < \mu$.

La totalisation consiste alors à calculer la totale de $\varphi(x)$ successi-

(¹) T. Viola, *Annali di Mat.*, *loc. cit.*, paragraphe 1, n° 7, p. 250.
(²) A. Denjoy, *loc. cit.*, à la note (¹), p. 73.

vement sur les ensembles $C_{\mu-1} - C_\mu$. Inversement, c'est la totalisation même qui peut servir à la définition de la suite transfinie d'ensembles C_μ en $\overline{mn}$.

Mais, de ce second point de vue, étant donné un ensemble quelconque K, fermé et non dense en $\overline{mn}$, il est toujours possible de changer dans le calcul totalisant la définition de cette suite d'ensembles fermés de manière que K en fasse partie. Il suffit, en effet, de commencer par calculer la totale de $\varphi(x)$ séparément sur chacun $\overline{a_n b_n}$ des contigus à K. Quand on a obtenu les variations V_n de la totale sur ces contigus, on continue le calcul à partir de K, c'est-à-dire que l'on définit une nouvelle suite transfinie d'ensembles fermés K_ν, chacun contenu et non dense dans les précédents, selon les lois suivantes :

1° $K_0 \equiv K$;

2° Pour chaque transfini μ de première espèce, K_μ est l'ensemble des points de $K_{\mu-1}$, dans l'entourage desquels $\varphi(x)$ n'est pas intégrable sur $K_{\mu-1}$, ou la série ΣW_n des variations de la totale sur les contigus de $K_{\mu-1}$ n'est pas absolument convergente;

3° Pour chaque transfini μ de seconde espèce, K_μ est l'ensemble commun à tous les K_ν, avec $\nu < \mu$.

Donc, une généralisation du calcul totalisant déjà énoncée par M. Denjoy lui-même peut consister en ceci : que ce calcul peut être effectué à partir non de tout l'intervalle d'intégration $\overline{mn}$, mais à partir d'un ensemble quelconque K fermé et non dense en $\overline{mn}$, pourvu que soient données des variations V_n sur les contigus de K. Ces variations V_n peuvent être absolument quelconques (données d'un problème ou résultats d'autres calculs précédents) pourvu qu'elles satisfassent à certaines conditions, comme $\varphi(x)$ doit satisfaire à certaines conditions sur K.

Cette généralisation suggère alors, pour notre problème de la recherche d'une primitive d'une dérivée droite donnée, la question suivante : si K est un ensemble fermé et non dense de $\overline{ab}$ et si l'on connaît, dans tout intervalle $\overline{a_n b_n}$ contigu à K, la valeur de $F(b_n) - F(a_n)$, de quelle manière et jusqu'à quel point le calcul totalisant sur K peut-il être défini et quel en est le résultat?

Nous ne répondrons pas à cette question, d'abord parce que nous n'avons pas réussi à trouver une construction qui puisse donner les valeurs $F(b_n) - F(a_n)$ [ou d'autres variations du même type relatives à une primitive quelconque de $f(x)$]; et aussi parce que, en faisant ce calcul totalisant, on rencontrerait toujours la même difficulté pour chacun des ensembles fermés et non denses en K que l'on définirait.

Mais la question nous semble intéressante et d'autant plus utile à poser que, dans le numéro suivant, nous en examinerons une autre toute semblable.

12. Dans les hypothèses du n° 10, l'ensemble H des points de P où $F(x)$ est discontinue par rapport à P est non dense en P. Je veux construire en $\overline{ab}$ à partir de $F(x)$ (que pour le moment je suppose connaître) *une fonction* $\Phi(x)$, *coïncidant avec* $F(x)$ *sur* P, *discontinue aux seuls points de* H *et telle que, dans tout intervalle partiel* $\overline{\alpha\beta}$ *de* $\overline{ab}$ *qui ne contient pas de points de* H, *l'on ait* $D_n\Phi(x) = f(x)$ *sur* P.

A cette fin soient A_0 l'ensemble des points a_n tels que

$$\left| \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} - f(a_n) \right| \geqq 1,$$

et, pour chaque indice entier positif ν, A_ν l'ensemble des points a_n tels que

$$\frac{1}{\nu} > \left| \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} - f(a_n) \right| \geqq \frac{1}{\nu + 1}.$$

Indiquons par n_ν les indices de ces a_n. Chaque $A_\nu (\nu \geqq 0)$ étant clairsemé (n° 10), on peut renfermer chacun a_{n_ν} de ses points dans un intervalle $I(a_{n_\nu})$ de manière qu'aucun point de l'axe $\overline{Ox}$ ne soit intérieur à une infinité d'intervalles $I(a_{n_\nu})$ (¹). Faisons ensuite correspondre à chaque $a_n (n = 1, 2, 3, \ldots)$ un intervalle i_n de longueur l_n, ayant a_n pour extrémité droite et tel que :

1° i_n soit entièrement contenu dans $I(a_n)$;

(¹) A. Denjoy, *loc. cit.* à la note (¹), p. 74. La construction des intervalles $I(a_n)$ peut être, dans ce cas, simplifiée si l'on pose, comme première condition,

$$\text{longueur de } I(a_n) \leqq b_n - a_n$$

[choix de la fonction $\varphi(n)$ telle que $\lim\limits_{n \to \infty} \varphi(n) = 0$].

2° Si $F(x)$ est continue en a_n par rapport à P et si a_n est un a_{n_ν}, soit

$$\left| \frac{F(b_{n_\nu}) - F(x)}{b_{n_\nu} - x} - f(a_{n_\nu}) \right| < \frac{1}{\nu},$$

pour tout x de P en i_{n_ν}.

Ceci posé, pour chaque n tel que

$$f(a_n) \neq \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n},$$

nous choisissons en $\overline{a_n b_n}$ un point c_n tel que

$$\left| f(a_n) - \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} \right| (c_n - a_n) < \frac{l_n}{n},$$

et posons

$$\Phi(x) = \begin{cases} F(x) \text{ sur } P; \\ \text{linéaires pour} \begin{cases} \left.\begin{matrix} a_n \leqq x \leqq c_n \\ c_n \leqq x \leqq b_n \end{matrix}\right\} \text{avec } D\Phi(x) = f(a_n) \left\{ \begin{matrix} \text{dans les intervalles } \overline{a_n b_n} \\ \text{pour lesquels sont dé-} \\ \text{finis les points } c_m, \end{matrix} \right. \\ a_m \leqq x \leqq b_m, \text{ dans les autres intervalles } \overline{a_m b_m}. \end{cases} \end{cases}$$

$\Phi(x)$ est évidemment continue à droite en tout $\overline{a\,b}$ et discontinue à gauche aux seuls points de H. De plus, pour chaque indice $= n$, si l'on a $D_+\Phi(a_n) = f(a_n)$ par définition. Soit x un point de P limite du côté droit de points de P, mais non de points de H. On a

$$\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x' - x} = \frac{F(x') - F(x)}{x' - x}$$

pour tout x' de P à droite de x. Quant au quotient différentiel $\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x' - x}$ pour x' à la droite de x et hors de P, l'on peut considérer deux cas distincts :

1° x intérieur à un nombre fini d'intervalles i_n. Pour x' à droite de x et dans un intervalle $\overline{a_n b_n}$ tel que x ne soit pas dans i_n, on a

$$\Phi(x') - \Phi(x) = \mu(x')(x' - x) + h(x'),$$

$\mu(x')$ étant un nombre compris entre

$$\frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x} \quad \text{et} \quad \frac{F(a_n) - F(x)}{a_n - x},$$

$h(x')$ étant tel que

$$|h(x')| < \left| f(a_n) - \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} \right| (c_n - a_n) < \frac{l_n}{n},$$

$$\left| \frac{h(x')}{x' - x} \right| < \frac{1}{n} \frac{l_n}{x' - x}.$$

On a $x' - x > l_n$, et par conséquent

$$\left|\frac{h(x')}{x'-x}\right| < \frac{1}{n} \to 0 \qquad \text{pour} \quad x' \to x+0,$$

$$\lim_{x' \to x+0} \frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x'-x} = \lim_{x' \to x+0} \mu(x') = f(x),$$

parce que les rapports

$$\frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x}, \quad \frac{F(a_n) - F(x)}{a_n - x}$$

tendent, tous deux, pour $x' \to x+0$, vers $f(x)$.

2° x intérieur à une infinité d'intervalles i_n. Toutefois, étant donné un nombre entier positif $\bar{\nu}$ quelconque, x ne peut être intérieur qu'à un nombre fini d'intervalles i_{n_ν} avec $\nu < \bar{\nu}$. Donc, un nombre positif ε quelconque étant donné, pour tout x' à droite de x, suffisamment près de x et intérieur à un $\overline{a_n b_n}$ dont l'intervalle i_n correspondant contient x, on a

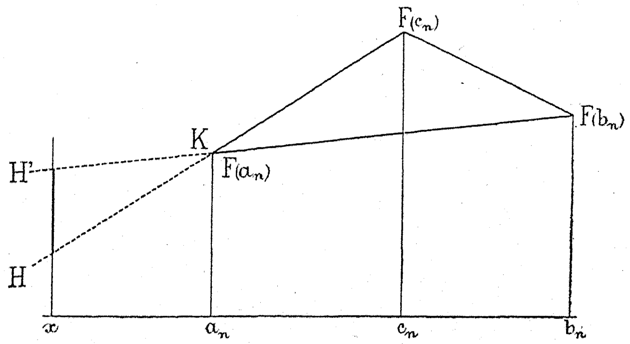
$$\left|\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x'-x} - \frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x}\right| < \varepsilon \quad (^1).$$

Mais ε peut être choisi arbitrairement petit. Par conséquent, si $x' \to x+0$ en parcourant une suite d'intervalles $\overline{a_n b_n}$ telle que x soit

---

(1) Si le point $[x, \Phi(x)]$ est compris entre les droites HK, H'K, le quotient différentiel $\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x'-x}$ est compris entre $\frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x}$ et $f(a_n)$.

Fig. 4.



Dans le cas contraire, il est compris entre $\frac{F(b_n) - F(x)}{b_n - x}$ et $\frac{F(a_n) - F(x)}{a_n - x}$.

intérieur à tous les $i(a_n)$, le quotient aux différences finies $\frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x' - x}$ tend vers $f(x)$.

Donc, en tout cas,

$$\lim_{x' \to x+0} \frac{\Phi(x') - \Phi(x)}{x' - x} = f(x). \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

On voit aisément comment on peut trouver la fonction $\Phi(x)$ par totalisation d'une fonction qui est égale à $f(x)$ pour tout x de P et qui prend une valeur constante (ou successivement *deux* valeurs constantes) dans tout intervalle contigu à P. Donc, et ceci se rapproche de la question du n° 11, *dans tout intervalle* $\overline{\alpha\beta}$ *partiel de* $\overline{a\,b}$ *qui ne contient pas des points de* H, $f(x)$ *est totalisable à partir de* P *et des valeurs* $F(b_n) - F(a_n)$, *et sa totale sur* P *est la primitive* $F(x)$.

Aux numéros suivants nous appliquerons ce résultat.

13. *Remarques :*

1° Sur un ensemble parfait P, situé dans un intervalle $\overline{\alpha\beta}$ où $f(x)$ est totalisable, est-il possible que $T(x)$ totale de $f(x)$ ait un au moins de ses nombres dérivés droits différant de $f(x)$ d'au moins $K > 0$?

L'exemple suivant va montrer que la réponse est affirmative.

Soit P un ensemble parfait non dense, ayant mesure nulle et d'ailleurs quelconque (¹); soient $\overline{a_n b_n}$ les contigus de P. Pour chaque indice $n (= 1, 2, 3, \ldots)$ définissons en $\overline{a_n b_n}$ une suite décroissante de points $\xi_{n,\nu}$ $(\nu = 0, 1, 2, \ldots)$ selon la loi suivante :

$$\xi_{n,0} = b_n; \qquad \xi_{n,\nu} = \xi_{n,\nu-1} - \frac{1}{k}(\xi_{n,\nu-1} - a_n)^2 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \ldots)$$

($k >$ le plus grand des $\overline{a_n b_n}$).

On a $\lim\limits_{\nu \to \infty} \xi_{n,\nu} = a_n$ pour chaque n. Ensuite, définissons en $\overline{a_n b_n}$ la fonction auxiliaire

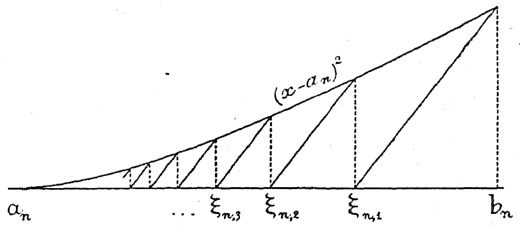
$$\varphi_n(x) = k(x - \xi_{n,\nu}) \qquad \text{pour} \qquad \xi_{n,\nu} \leqq x < \xi_{n,\nu-1}$$

(¹) Voir T. Viola, *Annali di Mat.*, *loc. cit.*, n° **14**, 1°, p. 265.

(voir la figure). Enfin, nous définissons en $\overline{0\,1}$ la fonction

$$F(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } P; \\ \varphi_n(x) & \text{pour} \quad a_n < x < b_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

Fig. 5.



On a

$$D_+ F(x) = \begin{cases} 0 & \text{sur } P, \\ k & \text{hors de } P, \end{cases}$$

$$T(x) = \int_\alpha^x D_+ F(x)\,dx = k(x-\alpha) + \text{const.}, \qquad D_+ T(x) = k, \qquad \text{en tout } \overline{\alpha\beta} \quad (^1).$$

(¹) Si l'on suppose $m(P) > 0$, alors on a $\overline{D}_+ T(x) = k$ sur un ensemble ayant mesure nulle, partout dense en P (et même résiduel de P) et contenant tous les points a_n.

On pourrait développer des considérations métriques dont l'utilité nous semble, pourtant, très douteuse. Nous nous bornons seulement à énoncer les deux résultats suivants :

1° Soient $F(x)$ continue à droite et dérivable vers la droite en $\overline{a\,b}$; $f(x) = D_+F(x)$ bornée sur P (et $|f(x)| \leqq M$ sur P), P étant un ensemble parfait et non dense sur $\overline{a\,b}$. Soient $\overline{a_n b_n}$ les contigus de P; $\overline{x}$ un point de P limite du côté droit et tel que, pour chaque $\overline{a_n b_n}$ à droite de $\overline{x}$ et suffisamment près de $\overline{x}$, on ait

$$\frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} \geqq f(\overline{x}) + \varepsilon.$$

Alors l'épaisseur droite de P en $\overline{x}$, si elle existe, est $\geqq \dfrac{\varepsilon}{2M + \varepsilon}$.

2° Si $f(x)$ est bornée en P; si, pour chaque $n = 1, 2, 3, \ldots$, on a

$$\left| \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} - f(a_n) \right| \geqq \varepsilon,$$

et si en un point $\overline{x}$ de P limite du côté droit, l'épaisseur inférieure droite est $\geqq \eta\ (0 \leqq \eta \leqq 1)$, alors on a

$$|\overline{D}_+ G(\overline{x}) - f(\overline{x})| \leqq \varepsilon(1-\eta), \qquad |\underline{D}_+ G(\overline{x}) - f(\overline{x})| \leqq \varepsilon(1-\eta),$$

étant $G(x) = \int_{(P)a}^{x} f(x)\,dx + (a\,\Sigma\,x)[F(b_n) - F(a_n)]$ (fonction définie seulement en P). On rencontrera plus loin (nos 14 et suivants) des fonctions semblables à $G(x)$.

2° Le résultat du n° 10 peut être, à un certain point de vue, précisé davantage. En correspondance de chaque $\overline{a_n b_n}$ contigu à P, indiquons par λ_n, μ_n respectivement la plus petite limite et la plus grande limite des différences

$$\frac{F(\xi) - F(a_n)}{\xi - a_n} - \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n}$$

pour ξ tel que $a_n < \xi \leqq b_n$. On a

$$\lambda_n \leqq f(a_n) - \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - c_n} \leqq \mu_n, \quad \lambda_n \leqq 0 \leqq \mu_n.$$

Soient x un point de P; $\lambda(x)$ et $\mu(x)$ respectivement la plus petite limite de λ_n et la plus grande limite de μ_n quand $\overline{a_n b_n}$ tend vers x; $\rho(x)$ le plus grand de $-\lambda(x)$ et de $\mu(x)$. Évidemment, $\rho(x)$ ne peut pas être négatif. ε étant un nombre positif quelconque, l'ensemble B_ε des points x de P où $\rho(x) \geqq \varepsilon$, évidemment fermé, est partout non dense sur P. En effet, dans le cas contraire, B_ε contiendrait une portion Q de P. L'ensemble des points a_n tels que $-\lambda_n > \frac{\varepsilon}{2}$ ou $\mu_n > \frac{\varepsilon}{2}$ serait alors partout dense sur Q. $F(x)$ étant continue à droite, pour chacun de ces a_n, on pourrait choisir un ξ_n, intérieur à $\overline{a_n b_n}$, tel que

$$\left| \frac{F(\xi_n) - F(a_n)}{\xi_n - a_n} - \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} \right| > \frac{\varepsilon}{2}.$$

Alors, sur un résiduel de Q, l'on aurait

$$\left| \overline{D}_+ F(x) - \underline{D}_+ F(x) \right| \geqq \frac{\varepsilon}{2},$$

ce qui est absurde.

14. R étant un ensemble quelconque, nous dirons qu'un sous-ensemble S de R est *non dense en* R, si dans tout intervalle contenant des points de R il existe un intervalle partiel qui contient des points de R, mais pas des points de S. Les points isolés de R appartiendront nécessairement à R — S.

Soit, comme toujours, $f(x)$ la dérivée droite (supposée finie) d'une fonction (inconnue) $F(x)$ continue à droite et dérivable vers la droite en $\overline{a b}$ (n° 6). K étant un ensemble fermé quelconque contenu et non dense sur a^-b, $\overline{a_n b_n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ les contigus à K, *supposons* $f(x)$ *bornée en* K. Il existe alors l'intégrale de Lebesgue de $f(x)$ sur K, que nous indiquons par $\int_{(K)_a^b} f(x)\,dx$, et la série $(a\Sigma b)\, f(a_n)(b_n - a_n)$ est absolument convergente. Considérons la fonction (continue unilatéralement)

$$F_K(x) = \begin{cases} \displaystyle\int_{(K)_a^x} f(x)\,dx + (a\Sigma x)\, f(a_n)\,(b_n - a_n), & \text{si } x \text{ est en K}, \\ F_K(a_n) + f(a_n)\,(x - a_n), & \text{pour } a_n \leqq x \leqq b_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \end{cases}$$

ε étant un nombre positif quelconque, je dis que *l'ensemble des points de* K, *où l'on a*

$$|\overline{D}_+ F_K(x) - f(x)| > \varepsilon, \qquad \text{ou bien } |\underline{D}_+ F_K(x) - f(x)| > \varepsilon,$$

est non dense en K.

En effet, si x est un point a_n, on a $D_+ F_K(a_n) = f(a_n)$ par construction. Donc, P étant une portion quelconque de K, si P possède un point isolé x, on a $D_+ F_K(x) = f(x)$. Si P ne contient aucun point isolé, P est parfait. Nous savons (n° 10) que l'ensemble Q des points de P au voisinage desquels il y a des points a_n tels que

$$\left| \frac{F(b_n) - F(a_n)}{b_n - a_n} - f(a_n) \right| \geqq \varepsilon$$

est fermé et non dense en P. Nous savons aussi (n° 1) que l'ensemble R des points de P, au voisinage desquels il y a des points de discontinuité de $F(x)$ par rapport à P, est fermé et non dense en P. L'ensemble $S = Q + R$ est, lui aussi, fermé et non dense en P. Je dis précisément qu'en chaque point x de P qui est limite vers la droite de points de P mais pas de points de S, on a

$$|\overline{D}_+ F_K(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |\underline{D}_+ F_K(x) - f(x)| \leqq \varepsilon.$$

En effet l'on peut définir (n° 12) dans un voisinage à droite de x, tel que $x \leqq x' \leqq \alpha$ (α étant le premier point de R à droite de x), une fonction $\Phi(x')$, égale à $F(x')$ sur P, continue bilatéralement et telle que

$$D_+ \Phi(x') = f(x')$$

en chaque x' de P. L'expression de la variation $\Phi(x') - \Phi(x)$, pour x' en P, est

$$\Phi(x') - \Phi(x) = \int_{\mathrm{P}xx'} f(x)\,dx + (x \Sigma x')[\mathrm{F}(b_n) - \mathrm{F}(a_n)].$$

On a donc

$$|[\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x)] - [\mathrm{F_K}(x') - \mathrm{F_K}(x)]| = |[\Phi(x') - \Phi(x)] - [\mathrm{F_K}(x') - \mathrm{F_K}(x)]|.$$

Alors, si x' est à gauche du premier point de S qui est à droite de x, on a

$$|[\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x)] - [\mathrm{F_K}(x') - \mathrm{F_K}(x)]| < \varepsilon(x \Sigma x')(b_n - a_n) \leqq \varepsilon(x' - x).$$

Donc

$$\left|\frac{\mathrm{F}(x') - \mathrm{F}(x)}{x' - x} - \frac{\mathrm{F_K}(x') - \mathrm{F_K}(x)}{x' - x}\right| < \varepsilon,$$

$$|\overline{\mathrm{D}}_+ \mathrm{F_K}(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |\underline{\mathrm{D}}_+ \mathrm{F_K}(x) - f(x)| \leqq \varepsilon.$$

La proposition est complètement démontrée.

15. Toujours sous les hypothèses du n° 6, *supposons $f(x)$ bornée en tout $\overline{ab}$*. Indiquons par U l'ensemble, fermé et partout non dense, des points de a^-b auxquels, ou au voisinage desquels, l'intégrale

$$\mathrm{I}(x) = \int_a^x f(x)\,dx$$

n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite. La fonction $\mathrm{F_U}(x)$ (n° 14) a sur U ses nombres dérivés droits égaux à $f(x)$ à ε près, en faisant tout au plus exception d'un sous-ensemble $\mathrm{U_1}$ de U, fermé et partout non dense en U. *Supposons* $\mathrm{U_1}$ *vide*. En correspondance de chaque intervalle $\overline{a_n b_n}$ contigu à U, je considère le triangle mixtiligne dont un sommet est le point $[a_n, \mathrm{F_U}(a_n)]$, les deux autres sommets sont sur l'ordonnée en b_n et les deux côtés curvilignes sont représentés par les équations

$$y = \mathrm{F_U}(a_n) + f(a_n)(x - a_n) \pm (x - a_n)^2.$$

Ensuite en $\overline{a_n b_n}$ nous soumettons la fonction $\mathrm{I}(x)$ à une transformation du type du n° 5, de façon à obtenir une fonction, soit $\varphi_n(x)$, dont les points représentatifs soient tous contenus dans ledit triangle mixtiligne. La fonction

$$G_1(x) = \begin{cases} F_U(x) & \text{en } U, \\ \varphi_n(x) & \text{pour } a_n < x < b_n \end{cases}$$

est continue à droite en tout $\overline{ab}$ et ses nombres dérivés droits coïncident avec ceux de $F_U(x)$ en tout U. En effet, si $\bar{x}$ est un point quelconque de U et si $x > \bar{x}$ est un point quelconque hors de $U (a_n < x < b_n)$, on a

$$|[G_1(x) - G_1(\bar{x})] - [F_U(x) - F_U(\bar{x})]| \leqq (x - a_n)^2 \leqq (x - \bar{x})^2.$$

Donc les quotients différentiels

$$\frac{G_1(x) - G_1(\bar{x})}{x - \bar{x}}, \qquad \frac{F_U(x) - F_U(\bar{x})}{x - \bar{x}}$$

ont les mêmes valeurs limites pour $x \to \bar{x} + 0$. Par conséquent *la fonction* $G_1(x)$ *a ses nombres dérivés droits égaux à* $f(x)$, *exactement hors de* U *et aux points de* U *isolés du côté droit, à* ε *près sur* U. $G_1(x)$ est bornée et ses discontinuités sont toutes de première espèce et hors de U.

L'ensemble des points de U où $G_1(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite est de mesure nulle [1].

16. Considérons maintenant le cas général où l'ensemble U_1 des points de U auxquels, ou au voisinage desquels, on a

$$|\overline{D}_+ F_U(x) - f(x)| > \varepsilon,$$

ou bien

$$|\underline{D}_+ F_U(x) - f(x)| > \varepsilon, \qquad \text{pour } x \text{ en } U,$$

est $\neq 0$. U_1 est fermé et non dense en U. De même l'ensemble U_2 des points de U_1 auxquels, ou au voisinage desquels, on a

$$|\overline{D}_+ F_{U_1}(x) - f(x)| > \varepsilon,$$

ou bien

$$|\underline{D}_+ F_{U_1}(x) - f(x)| > \varepsilon, \qquad \text{pour } x \text{ en } U_1,$$

est fermé et non dense en U_1. Ainsi l'on continue indéfiniment. Pour

---

(1) H. LEBESGUE, *Leçons sur l'intégration*, 1928, p. 189.

chaque transfini λ de première espèce, U_λ sera l'ensemble des points de $U_{\lambda-1}$ auxquels, ou au voisinage desquels, on a

$$|\overline{D}_+ F_{U_{\lambda-1}}(x) - f(x)| > \varepsilon,$$

ou bien

$$|\underline{D}_+ F_{U_{\lambda-1}}(x) - f(x)| > \varepsilon, \qquad \text{pour } x \text{ en } U_{\lambda-1}.$$

Pour chaque transfini λ de seconde espèce, U_λ sera l'ensemble commun à tous les U_ν, avec $\nu < \lambda$. Chacun des ensembles U_λ est contenu et non dense dans les précédents. Il existe donc un transfini bien déterminé μ tel que $U_\mu \neq 0$, $U_{\mu+1} = 0$ (¹).

La suite transfinie d'ensembles $U_1, U_2, \ldots, U_\omega, U_{\omega+1}, \ldots, U_\lambda, \ldots, | U_\mu$ est dénombrable : à chacun d'eux il est donc possible d'attribuer un rang entier propre n. Indiquons par $\varphi(n)$ une fonction positive quelconque de n, décroissante et tendant vers zéro quand n croît. Pour chaque indice λ, renfermons U_λ dans un groupe *fini* i_λ d'intervalles, sans points communs deux à deux et tels que $m(i_\lambda) - m(U_\lambda) < \varphi(n)$, n étant le rang correspondant à U_λ, que chaque intervalle de i_λ ait un point de U_λ isolé du côté gauche pour extrémité gauche, un point extérieur à U_λ pour extrémité droite.

17. Le procédé du nº 15 nous apprend à construire, à l'intérieur de chaque intervalle contigu à U_1, une fonction $G_1(x)$ telle que :

a_1. Aux points de U isolés du côté droit, comme aux points extérieurs à U, on a $D_+ G_1(x) = f(x)$;

b_1. Aux autres points de U, on a

$$|\overline{D}_+ G_1(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |\underline{D}_+ G_1(x) - f(x)| \leqq \varepsilon;$$

c_1. $G_1(x)$ n'a pas des discontinuités de seconde sorte.

(¹) Nous avons abandonné les constructions du nº 8 et les observations du nº 9, parce que nous les considérons d'une importance secondaire par rapport à l'idée directive que nous nous proposons de suivre. Ces constructions et ces observations pourraient être intéressantes et utiles à d'autres points de vue, par exemple à celui que nous signalerons au nº 19 (1re remarque). Ici nous considérons une suite transfinie d'ensembles fermés, chacun contenu et non dense dans les précédents, et il nous semble bien plus simple d'opérer directement sur chacun d'eux plutôt que séparément sur son noyau parfait et sur sa composante réductible.

Ensuite nous définissons une suite transfinie de fonctions

$$G_2(x),\ G_3(x),\ \ldots,\ G_\omega(x),\ G_{\omega+1}(x),\ \ldots,\ G_\lambda(x),\ \ldots,\ |G_\mu(x),\ G_{\mu+1}(x).$$

Chaque $G_\lambda(x)$ est définie à l'intérieur de chaque intervalle contigu à U_λ (elle l'est en tout $\overline{a\ b}$, pour λ de première espèce), où elle satisfait aux conditions suivantes :

a_λ. Aux points de U et aux points de chaque $U_{\lambda'}$, avec $\lambda' < \lambda$, isolés du côté droit, comme aux points extérieurs à U, on a $D_+ G_\lambda(x) = f(x)$;

b_λ. Aux autres points de U, on a

$$|\overline{D}_+ G_\lambda(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |\underline{D}_+ G_\lambda(x) - f(x)| \leqq \varepsilon;$$

c_λ. $G_1(x)$ n'a pas de discontinuités de seconde sorte.

De plus, *si λ est de seconde espèce,*

d_λ. On a

$$G_\lambda(x) = \lim_{\lambda \succ \lambda'} G_{\lambda'}(x).$$

Nous entendons par là que, à tout nombre $\varepsilon > 0$ arbitrairement petit, il correspond un indice transfini $\bar\lambda < \lambda$ ($\bar\lambda$ fonction de x et de ε), tel que $|G_\lambda(x) - G_{\lambda'}(x)| < \varepsilon$, pour tout $\lambda' > \bar\lambda$ et $< \lambda$.

On construira $G_\lambda(x)$, pour un λ quelconque de première espèce, à partir de la précédente $G_{\lambda-1}(x)$, qu'il faudra supposer connue et satisfaisant aux conditions énoncées. Les règles sont les suivantes :

1°_λ $\overline{\mu_{\lambda-1}\nu_{\lambda-1}}$ étant un quelconque des intervalles de la suite $i_{\lambda-1}$, $\overline{U}_{\lambda-1}$ la portion de $U_{\lambda-1}$ contenue en $\overline{\mu_{\lambda-1}\nu_{\lambda-1}}$, nous posons

$$G_\lambda(x) = F_{U_{\lambda-1}}(x) - F_{U_{\lambda-1}}(\mu_{\lambda-1})$$

pour x en $\overline{U}_{\lambda-1}$. $\overline{\gamma_n^{(\lambda-1)}\delta_n^{(\lambda-1)}}$ étant un intervalle quelconque, partiel de $\overline{\mu_{\lambda-1}\nu_{\lambda-1}}$, contigu à $\overline{U}_{\lambda-1}$, je considère le triangle mixtiligne dont un sommet est le point $[\gamma_n^{(\lambda-1)}, G_\lambda(\gamma_n^{(\lambda-1)})]$, les deux autres sommets sont sur l'ordonnée en $\delta_n^{(\lambda-1)}$ et les deux côtés curvilignes sont représentés par les équations

$$y = G_\lambda(\gamma_n^{(\lambda-1)}) + f(\gamma_n^{(\lambda-1)})(x - \gamma_n^{(\lambda-1)}) \pm (x - \gamma_n^{(\lambda-1)})^2.$$

Ensuite en $\overline{\gamma_n^{(\lambda-1)}\delta_n^{(\lambda-1)}}$ nous soumettons la fonction $G_{\lambda-1}(x)$ à une transformation du type du n° 5, de manière à obtenir une fonction, soit $\varphi_n^{(\lambda-1)}(x)$, dont les points représentatifs soient tous contenus dans ledit triangle mixtiligne. Enfin, nous posons

$$G_\lambda(x) = \varphi_n^{(\lambda-1)}(x) \qquad \text{pour } \gamma_n^{(\lambda-1)} < x < \delta_n^{(\lambda-1)}.$$

2_λ° Aux points extérieurs aux intervalles de la suite i_λ, de même qu'à leurs extrémités droites, nous posons $G_\lambda(x) = G_{\lambda-1}(x)$.

Nous laissons au lecteur le soin de démontrer (ce qui est d'ailleurs très facile) que la fonction $G_\lambda(x)$ ainsi définie satisfait effectivement aux conditions énoncées.

Pour un indice λ quelconque de deuxième espèce, supposons que *toutes* les $G_{\lambda'}(x)$, avec $\lambda' < \lambda$, soient connues et satisfassent aux conditions énoncées. Soit $\overline{pq}$ un intervalle quelconque contigu à U_λ. Pour chaque entier positif $r (= 1, 2, 3, \ldots)$, posons

$$p_r = p + \frac{1}{3 \cdot 2^{r-1}}(q-p), \qquad q_r = q - \frac{1}{3 \cdot 2^{r-1}}(q-p).$$

La suite $\{p_r\}$ est décroissante et tend vers p, la $\{q_r\}$ est croissante et tend vers q. Soit λ_r le plus petit transfini tel que U_{λ_r} n'a pas de points en $\overline{p_{r+1}q_{r+1}}$. λ_r est de première espèce. La suite $\{\lambda_r\}$ est non décroissante et, pour chaque r, on a $\lambda_r < \lambda$. Soit n_r le plus petit entier > 0 tel que $\varphi(n_r) < \frac{1}{3 \cdot 2^r}(q-p)$. Soit τ_r le plus petit transfini $\geqq \lambda_r$, $< \lambda$, tel que, pour chaque indice ν tel que $\tau_r \leqq \nu < \lambda$, le rang entier n correspondant est $\geqq n_r$: je dis que $G_\nu(x) = G_{\tau_r}(x)$ pour $p_r \leqq x \leqq q_r$. Pour le démontrer, supposons cette relation vérifiée pour tous les indices ν' tels que $\tau_r \leqq \nu' < \nu$ et observons que :

α. Si ν est de première espèce, $G_\nu(x)$ est obtenue en modifiant $G_{\nu-1}(x)$ seulement à l'intérieur et aux extrémités gauches des intervalles de la suite $i_{\nu-1}$. Mais il n'existe aucun point de $U_{\nu-1}$ en $\overline{p_{r+1}q_{r+1}}$ et d'autre part aucun intervalle de la suite $i_{\nu-1}$ ne peut contenir un segment sans points de $U_{\nu-1}$ et ayant une mesure $\geqq \frac{1}{3 \cdot 2^r}(q-p)$. Donc aucun point de $\overline{p_r q_r}$ (ni intérieur, ni au contour) ne peut appartenir à un intervalle de la suite $i_{\nu-1}$. Donc

$$G_\nu(x) = G_{\nu-1}(x) = G_{\tau_r}(x) \qquad \text{pour } p_r \leqq x \leqq q_r.$$

β. Si ν est de seconde espèce, on a, par hypothèse,

$$G_\nu(x) = \lim_{\nu' > \nu} G_{\nu'}(x)$$

à l'intérieur de chaque intervalle contigu à U_ν. $\overline{p_{r+1} q_{r+1}}$ est entièrement contenu dans un intervalle contigu à U_ν. Il s'ensuit l'énoncé.

On en conclut que la fonction

$$G_\lambda(x) = \lim_{\lambda' > \lambda} G_{\lambda'}(x)$$

existe et est égale à $G_{\tau_r}(x)$ en $\overline{p_r q_r}$, pour chaque $r = 1, 2, 3, \ldots$. Les $G_{\tau_r}(x)$ satisfaisant aux conditions énoncées, $G_\lambda(x)$ y satisfait aussi.

Ce que l'on vient de dire peut être appliqué, en particulier, à la fonction $G_{\mu+1}(x)$. Posons $F_\varepsilon(x) = G_{\mu+1}(x)$. La fonction $F_\varepsilon(x)$ est continue vers la droite en tout $\overline{ab}$, sans discontinuité de seconde sorte et telle que

$$D_+ F_\varepsilon(x) = f(x) \qquad \text{hors de } U$$

et

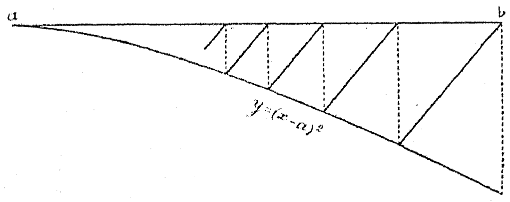
$$|\overline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)| \leqq \varepsilon, \qquad |\underline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)| \leqq \varepsilon \qquad \text{en } U.$$

18. *Exemples élémentaires :*

1°
$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = a, \\ k & \text{pour } a < x < b. \end{cases}$$

La fonction que nous avons indiquée par $G_1(x)$ peut être représentée

Fig. 6.

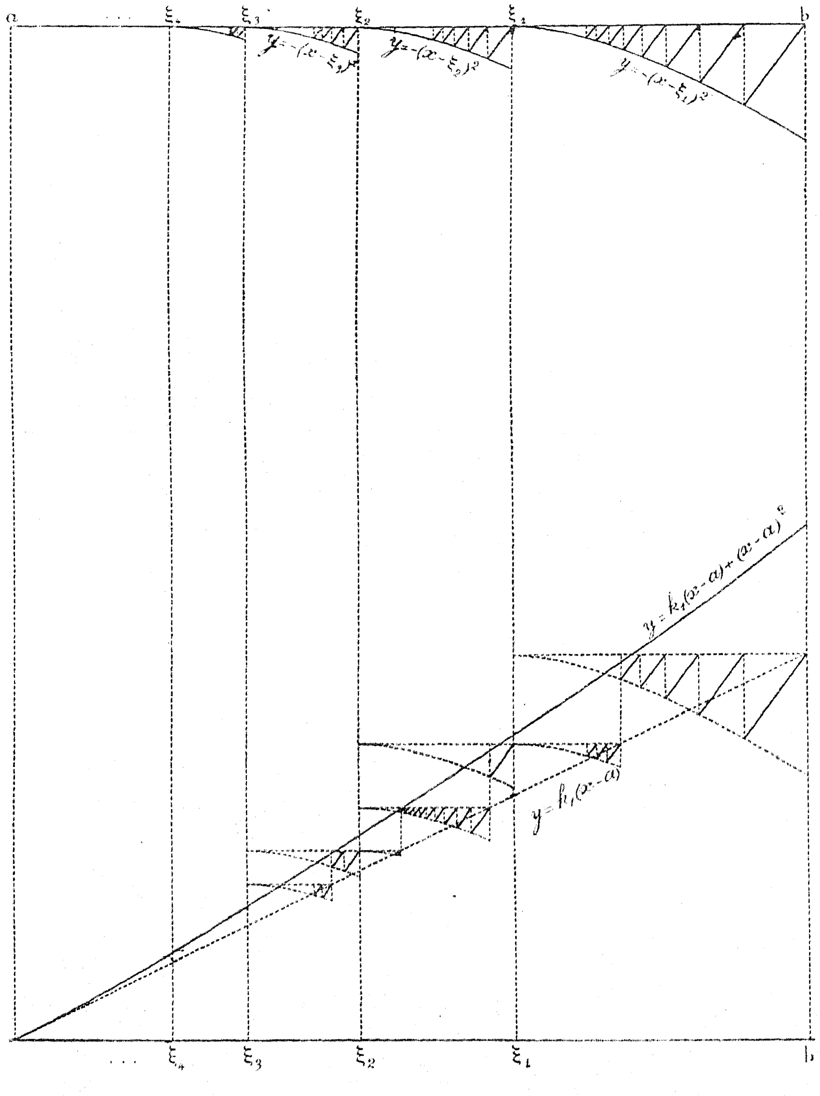


comme en figure (¹) (qui est tout à fait semblable à celle du n° 13, 1°)

(¹) Nous laissons au lecteur le soin d'interpréter ces figures et de vérifier sur elles les constructions que nous avons décrites. Ces figures nous semblent aussi suffisamment claires pour nous dispenser d'indiquer par des formules les propriétés auxquelles satisfont les fonctions qui sont représentées par un trait plus marqué.

(qui est dessinée pour $k=1$) et est, déjà elle-même, une primi-

Fig. 7.



tive $\Phi(x)$, c'est-à-dire une fonction telle que

$$D_+\Phi(x)=f(x) \qquad \text{pour } a \leqq x < b.$$

2° $\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$ suite décroissante $\rightarrow a$,

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{pour } x = \xi_r \quad (r = 1, 2, 3, \ldots), \\ k_1 & \text{pour } x = a, \\ k_2 & \text{en tous les autres points de } a\text{—}b. \end{cases}$$

La partie supérieure de cette figure représente la fonction $G_1(x)$. Si $|k_1| \leqq \varepsilon$, on a $G_1(x) = F_\varepsilon(x)$. Si $|k_1| > \varepsilon$, alors l'ensemble U_1 est formé du seul point a et la partie inférieure de la figure représente la fonction $G_2(x)$ (¹) qui est une primitive de $f(x)$.

A partir de ces simples exemples on pourra en former facilement d'autres, semblables mais plus compliqués, pour lesquels le transfini final μ soit un quelconque arbitrairement choisi.

19. *Remarques.* — 1° Les exemples que nous avons donnés, et d'autres pareils que l'on pourra construire, ne doivent pas impliquer que, si l'on construit une suite de fonctions $F_\varepsilon(x)$, avec $\varepsilon \rightarrow 0$, cette suite ait toujours une primitive $\Phi(x)$ comme limite. Ces cas sont très exceptionnels. Mais dans le cas général la difficulté devient grave justement ici et nous n'avons pas réussi à la vaincre. Un progrès ultérieur dans la solution du problème devrait être probablement atteint moyennant une condition très importante et de laquelle nous n'avons pas tenu compte dans nos raisonnements : c'est la propriété, pour les fonctions de première classe de Baire, d'être ponctuellement discontinues sur tout ensemble parfait. En effet nous avons démontré par ailleurs (voir l'Introduction) qu'une dérivée droite finie est une fonction de première classe, c'est-à-dire limite d'une suite de fonctions continues. En vue d'obtenir la solution complète en utilisant cette propriété, nous avons essayé de construire une suite de fonctions

$$F_{\varepsilon_1}(x), \quad F_{\varepsilon_2}(x), \quad \ldots, \quad F_{\varepsilon_n}(x), \quad \ldots \qquad \left(\varepsilon_n > \varepsilon_{n+1};\ n = 1, 2, 3, \ldots;\ \lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon_n = 0\right),$$

dont la première $F_{\varepsilon_1}(x)$, selon les règles données au n° 16, et les autres se succédant formées chacune par la précédente. Mais ces recherches, très longues et très compliquées, n'ont pas été couronnées de succès

(¹) Nous avons pris l'intervalle a—b tout entier comme intervalle i_1.

et nous ne croyons pas utile de les décrire. La complication diminue notablement si l'on essaye de résoudre le problème d'abord seulement sur un ensemble parfait (ou plus en général fermé) et non dense, c'est-à-dire en faisant abstraction des valeurs qu'une primitive peut prendre sur les contigus (en supposant que sur ces contigus une primitive ait déjà été trouvée). A ce point de vue le problème pourrait donc être énoncé de la manière suivante :

P *étant un ensemble parfait et non dense contenu en* a^-b *et* $f(x)$ *la dérivée droite d'une fonction (inconnue)* $F(x)$ *continue à droite et dérivable vers la droite en tout* a^-b, *construire* EN P *une fonction* $H(x)$ *continue à droite et dérivable vers la droite, telle que* $D_+H(x) = f(x)$ *en tout* P [1].

La solution de ce problème est immédiate seulement dans le cas où $f(x)$ est continue en P.

2° *L'ensemble* (qui est contenu en U) *des points de* a^-b *où* $F_\xi(x)$ *n'a pas* $f(x)$ *pour dérivée droite, a mesure nulle* [2]. En effet chaque $F_{U_\lambda}(x)$ a presque partout en U_λ, donc aussi en $U_\lambda - U_{\lambda+1}$, $f(x)$ pour dérivée droite. Donc cet ensemble est la somme d'une suite d'ensembles dont chacun a mesure nulle.

20. Nous voulons maintenant étendre le résultat du n° 17 au cas général où la fonction donnée $f(x)$ n'est pas bornée, mais seulement finie en tout a^-b.

Dans les *Annali di Mat.*, loc. cit., p. 259 (§ 2, n° 10), j'ai démontré que, en cette hypothèse, *si* C *est un ensemble quelconque fermé et contenu en* a^-b, *l'ensemble des points de* C *où* (c'est-à-dire à l'entourage desquels) $f(x)$ *n'est pas bornée sur* C, *est fermé et partout non dense en* C.

---

(1) Naturellement $H(x)$ étant définie seulement en P, en disant que $H(x)$ est dérivable vers la droite et que $D_+H(x) = f(x)$ en tout P, nous entendons que, si $\bar{x}$ est un point quelconque de P limite du côté droit, le quotient aux différences finies $\dfrac{H(x) - H(\bar{x})}{x - \bar{x}}$ tend vers $f(\bar{x})$ pour $x \to \bar{x} + 0$ *en* P. Aux points de P isolés du côté droit, l'on ne peut pas définir ni la continuité ni la dérivabilité de $H(x)$ du côté droit.

(2) Voir la fin du n° 15.

Indiquons alors par $\mathfrak{M}_1$ l'ensemble des points de a-b où $f(x)$ n'est pas bornée, par $\mathfrak{M}_2$ l'ensemble des points de $\mathfrak{M}_1$ où $f(x)$ n'est pas bornée en $\mathfrak{M}_1$, etc. En général, pour chaque transfini λ de première espèce, indiquons par $\mathfrak{M}_\lambda$ l'ensemble des points de $\mathfrak{M}_{\lambda-1}$ où $f(x)$ n'est pas bornée en $\mathfrak{M}_{\lambda-1}$; pour chaque transfini λ de seconde espèce, indiquons par $\mathfrak{M}_\lambda$ l'ensemble commun à tous les $\mathfrak{M}_\nu$, avec $\nu < \lambda$. Les ensembles $\mathfrak{M}_\lambda$ sont fermés, chacun contenu et non dense dans les précédents. Ils forment donc une suite transfinie qui a un terme, c'est-à-dire qu'il existe un transfini bien déterminé π tel que $\mathfrak{M}_\pi \neq 0$, $\mathfrak{M}_{\pi+1} = 0$.

Nous pouvons imiter les opérations du n° 17. Il est nécessaire de préciser certains détails caractéristiques de ces opérations. Les ensembles $\mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_{\lambda+1}$ ($\lambda = 1, 2, \ldots, \omega, \omega+1, \ldots | \pi$) étant en infinité dénombrable, à chacun d'eux il est possible d'attribuer un rang entier propre n. Chaque $\mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_{\lambda+1}$ de ces ensembles peut être renfermé dans une suite j_λ d'intervalles, sans point commun deux à deux et tels que :

1° Les extrémités de ces intervalles soient des points extérieurs à $\mathfrak{M}_\lambda$;

2° Les points d'accumulation de ces intervalles puissent être seulement des points de $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$;

3° Il n'existe aucun point de $\mathfrak{M}_{\lambda+1}$ dans ces intervalles;

4° L'on ait $m(j_\lambda) - m(\mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_{\lambda+1}) < \varphi(n)$ (n° 16), n étant le rang correspondant à $\mathfrak{M}_\lambda - \mathfrak{M}_{\lambda+1}$.

Le procédé du n° 17 nous apprend à construire, à l'intérieur de chaque intervalle contigu à $\mathfrak{M}_1$, une fonction $F_\varepsilon^{(1)}(x)$ telle que

$$\left|\overline{D}_+ F_\varepsilon^{(1)}(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon, \qquad \left|\underline{D}_+ F_\varepsilon^{(1)}(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon.$$

Ensuite nous définissons une suite transfinie de fonctions

$$F_\varepsilon^{(2)}(x), \quad F_\varepsilon^{(3)}(x), \quad \ldots, \quad F_\varepsilon^{(\omega)}(x), \quad F_\varepsilon^{(\omega+1)}(x), \quad \ldots, \quad F_\varepsilon^{(\lambda)}(x), \quad \ldots, \\ F_\varepsilon^{(\pi)}(x), \quad F_\varepsilon^{(\pi+1)}(x).$$

Chaque $F_\varepsilon^{(\lambda)}(x)$ de ces fonctions est définie à l'intérieur de chaque intervalle contigu à $\mathfrak{M}_\lambda$ et telle que l'on ait

$$\left|\overline{D}_+ F_\varepsilon^{(\lambda)}(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon, \quad \left|\underline{D}_+ F_\varepsilon^{(\lambda)}(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon.$$

Pour construire $F_\varepsilon^{(\lambda)}(x)$, si λ est de première espèce, nous posons

$$F_\varepsilon^{(\lambda)}(x) = F_\varepsilon^{(\lambda-1)}(x)$$

hors des intervalles de la suite $j_{\lambda-1}$ et dans leurs extrémités droites. $\overline{\rho_{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}}$ étant un quelconque des intervalles de la suite $j_{\lambda-1}$, $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$ la portion de $\mathfrak{M}_{\lambda-1}$ contenue en $\overline{\rho_{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}}$, nous définissons, comme nous l'avons déjà fait plusieurs fois, à l'intérieur de $\overline{\rho_{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}}$, une fonction $F^{(\lambda)}(x)$, $= 0$ pour $x = \rho_{\lambda-1}$ et dont les nombres dérivés droits coïncident avec ceux de $F_\varepsilon^{(\lambda-1)}(x)$ hors de $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$, avec $f(x)$ à ε près en $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$ en faisant tout au plus exception d'un ensemble partout non dense en $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$, exactement aux points de $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$ isolés du côté droit. $f(x)$ étant bornée en $\overline{\mathfrak{M}}_{\lambda-1}$, la fonction $F^{(\lambda)}(x)$ pourra être transformée, à l'intérieur de $\overline{\rho_{\lambda-1}\sigma_{\lambda-1}}$, selon les constructions du n° 17 (1), et le résultat sera la fonction $F_\varepsilon^{(\lambda)}(x)$.

Pour λ de seconde espèce, l'on aura

$$F_\varepsilon^{(\lambda)}(x) = \lim_{\lambda' \succ \lambda - 0} F_\varepsilon^{(\lambda')}(x)$$

et l'on raisonnera exactement comme au n° 17.

La fonction

$$F_\varepsilon(x) = F_\varepsilon^{(\pi+1)}(x)$$

sera telle que

$$\left|\overline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon, \qquad \left|\underline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon$$

en tout $\overline{ab}$.

21. L'ensemble des points de $\overline{ab}$ où les nombres dérivés droits de la fonction $F_\varepsilon(x)$ calculée au n° 20 diffèrent de $f(x)$, est partout non dense en $\overline{ab}$. De plus *il a mesure nulle*. En effet il est la somme de l'ensemble des points extérieurs à $\mathfrak{M}_1$ où $F_{\varepsilon_1}^{(1)}(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite, de l'ensemble des points de $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$ où $F_\varepsilon^{(2)}(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite, ..., en général de l'ensemble des points

(1) En effet, au n° 17, la condition pour $f(x)$ d'être bornée en tout $\overline{ab}$, était excessive pour effectuer ces constructions : il eût été suffisant qu'elle le fût en U.

(2) Voir le n° 19, 2°.

de $\mathfrak{M}_r - \mathfrak{M}_{r+1}$ où $F_\varepsilon^{(r+1)}(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite; ensuite de l'ensemble des points de $\mathfrak{M}_\omega - \mathfrak{M}_{\omega+1}$ où $F_\varepsilon^{(\omega+1)}(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite, etc. Chacun de ces ensembles a mesure nulle ([2]) et par conséquent leur somme a aussi mesure nulle.

22. En donnant à ε successivement des valeurs ε_n décroissantes et tendant vers zéro, l'on peut construire une suite de fonctions

$$F_{\varepsilon_1}(x), \quad F_{\varepsilon_2}(x), \quad F_{\varepsilon_3}(x), \quad \ldots.$$

Évidemment, un $\varepsilon > 0$ étant donné arbitrairement, chaque $F_{\varepsilon_n}(x)$, avec $\varepsilon_n < \varepsilon$, est aussi une $F_\varepsilon(x)$. Quel que soit n, l'ensemble E_n des points de a^-b où $F_{\varepsilon_n}(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite, a une mesure nulle (n° 21). Donc l'ensemble $E = \Sigma E_n$ a, lui aussi, mesure nulle. E est, lui aussi, partout non dense en a^-b, car tout intervalle où la primitive (inconnue) $F(x)$ est continue bilatéralement et $f(x)$ est bornée, ne peut contenir aucun des points d'aucun E_n.

Nous avons donc complètement démontré la proposition plus importante de notre travail et que nous avons énoncée à la fin de l'introduction (n° 3). C'est la proposition suivante :

$f(x)$ étant une dérivée droite finie donnée en a^-b (d'une fonction continue à droite et dérivable vers la droite en a^-b), *on connaît un procédé pour construire en a^-b une fonction continue à droite $F_\varepsilon(x)$ telle que*

$$\left|\overline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon, \qquad \left|\underline{D}_+ F_\varepsilon(x) - f(x)\right| \leqq \varepsilon,$$

en tout a^-b et précisément $D_+ F_\varepsilon(x) = f(x)$ presque partout en a^-b. L'ensemble E des points de a^-b où $F_\varepsilon(x)$ n'a pas $f(x)$ pour dérivée droite est de mesure nulle, partout non dense en a^-b et indépendant de ε.