ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

PAUL MONTEL

Sur les fonctions méromorphes limites de fractions rationnelles à termes entrelacés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 50 (1933), p. 171-196
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1933_3_50__171_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1933, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

LES FONCTIONS MÉROMORPHES

LIMITES DE FRACTIONS RATIONNELLES A TERMES ENTRELACÉS

Par M. Paul MONTEL

1. Rappelons la définition des fractions rationnelles à termes entrelacés sur une courbe et quelques-unes de leurs propriétés (1).

On dit qu'une fraction rationnelle a ses termes entrelacés sur une courbe fermée lorsque ses zéros et ses pôles sont simples, situés sur cette courbe et placés de manière que l'on rencontre alternativement un zéro et un pôle lorsqu'on parcourt la courbe dans un sens déterminé. Nous nous bornerons dans ce travail au cas où la courbe est une droite que l'on peut toujours supposer être l'axe des quantités réelles, ou le demi-axe des quantités réelles et positives dans le plan de la variable complexe $z = x + iy$.

Soit donc

$$R(z) = \frac{b_0 z^n + b_1 z^{n-1} + \ldots + b_{n-1} z + b_n}{a_0 z^n + a_1 z^{n-1} + \ldots + a_{n-1} z + a_n}$$

une fraction rationnelle à termes entrelacés sur l'axe réel. Nous désignerons par $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$; $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ ses pôles et ses zéros qui sont distincts, réels et alternent sur l'axe des x; on peut supposer que les coefficients a_k et b_k sont réels et l'on peut écrire, si $a_0 \neq 0$,

$$R(z) = A + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \frac{A_2}{z - \alpha_2} + \ldots + \frac{A_n}{z - \alpha_n};$$

(1) *Cf.* Paul Montel, *Sur les fractions rationnelles à termes entrelacés* (*Mathematica*, vol. V, 1931, p. 110-129).

les nombres A_i sont tous de même signe; réciproquement, toute fraction de cette forme a ses termes entrelacés.

Cette fraction constitue une extension de la fonction homographique; elle est toujours croissante ou toujours décroissante, suivant que les A_i sont négatifs ou positifs; elle transforme en eux-mêmes ou permute entre eux les demi-plans $y > 0$ et $y < 0$; sa dérivée ne s'annule pour aucune valeur réelle de la variable. Pour qu'une fraction rationnelle ait ses termes entrelacés, il faut et il suffit que la fraction $R(z) - h$ ait ses zéros réels quel que soit le nombre réel h.

Lorsque a_0 est nul, la fraction se met sous la forme

$$R(z) = A - Bz + \frac{A_1}{z - \alpha_1} + \ldots + \frac{A_{n-1}}{z - \alpha_{n-1}},$$

les nombres A_i et B étant de même signe.

Les substitutions

$$z_1 = R(z)$$

forment un groupe; en d'autres termes, si $R(z)$ et $S(z)$ sont des fractions rationnelles à termes entrelacés, la fraction $R[S(z)]$ est à termes entrelacés.

On peut exprimer que la fraction rationnelle a ses termes entrelacés au moyen de n inégalités relatives aux coefficients a_k et b_k. Écrivons le déterminant de Sylvester relatif aux polynomes placés au numérateur et au dénominateur de $R(z)$:

$$\begin{vmatrix}
b_0 & b_1 & b_2 & \ldots & b_{n-1} & b_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
a_0 & a_1 & a_2 & \ldots & a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & \ldots & 0 \\
0 & b_0 & b_1 & \ldots & b_{n-2} & b_{n-1} & b_n & 0 & \ldots & 0 \\
0 & a_0 & a_1 & \ldots & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \ldots & 0 \\
0 & 0 & b_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\
0 & 0 & a_0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\
. & . & .. & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & . & \ldots & . \\
0 & 0 & 0 & \ldots & b_0 & b_1 & b_2 & b_3 & \ldots & b_n \\
0 & 0 & 0 & \ldots & a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & \ldots & a_n
\end{vmatrix}$$

et désignons par Δ_k le déterminant formé par les termes placés dans les $2k$ premières lignes et les $2k$ premières colonnes. Les conditions nécessaires et suffisantes pour que $R(z)$ ait ses termes entrelacés sont

$$\Delta_1 > 0, \quad \Delta_2 > 0, \quad \ldots, \quad \Delta_n > 0$$

en supposant Δ_1 positif, ce que l'on peut toujours obtenir en remplaçant au besoin $R(z)$ par $-R(z)$.

Ces conditions se déduisent aisément de celles que j'ai données précédemment [1].

Voici une autre propriété relative à la transformation $z_1 = R(z)$. Désignons par

$$L = \int_A^B \frac{ds}{|y|},$$

la distance non euclidienne de deux points A et B situés dans le même demi-plan, par

$$L_1 = \int_{A_1}^{B_1} \frac{ds_1}{|y_1|},$$

la distance non euclidienne de leurs points homologues A_1 et B_1, les intégrales étant calculées sur des arcs de cercles orthogonaux à l'axe réel. Si z se déplace sur cet arc, z_1 se déplace sur une courbe dont on désignera l'arc par σ. Or, on a

$$\frac{d\sigma}{ds} = \left|\frac{dz_1}{dz}\right| = \left|\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(z-\alpha_1)^2}\right| \leqq \sum_{i=1}^{n} \frac{|A_i|}{|z-\alpha_i|^2} = \left|\frac{y_1}{y}\right|;$$

donc $\frac{d\sigma}{|y_1|} \leqq \frac{ds}{|y|}$, l'égalité ne pouvant avoir lieu que si $R(z)$ est homographique. Donc

$$L_1 \leqq \int \frac{d\sigma}{|y_1|} \leqq L.$$

2. Soit $f(z)$ une fonction définie dans tout le plan; supposons qu'elle soit limite de fractions rationnelles $R_n(z)$ à termes entrelacés : cela signifie que, dans tout domaine borné, la suite $R_n(z)$ converge uniformément vers $f(z)$, la convergence uniforme autour d'un pôle étant définie comme d'habitude par la convergence uniforme vers $\frac{1}{f(z)}$ de la suite $\frac{1}{R_n(z)}$: $f(z)$ est méromorphe dans tout le plan ouvert. Les

pôles α_i de $f(z)$ sont alors tous réels puisque chacun d'eux est la limite d'une suite de pôles α_i^n de $R_n(z)$; ces pôles sont simples, car, si α_i était un pôle multiple de $f(z)$, il y aurait dans le voisinage de ce point deux pôles au moins de $R_n(z)$ pour n assez grand; soient $\alpha_i^{(n)}$ et $\alpha_{i+1}^{(n)}$ ces deux pôles; entre ces deux points, il y a un zéro $\beta_j^{(n)}$ de $R_n(z)$: α_i serait donc aussi un point d'accumulation des zéros de $R_n(z)$, ce qui est impossible puisque la convergence est uniforme en α_i. De même, les zéros β_i de $f(z)$ sont simples et réels; et il en est de même des zéros de $f(z) - h$, quel que soit le nombre réel h. Les zéros β_i séparent les pôles α_i et, plus généralement, les zéros de $f(z) - h$ séparent les zéros de $f(z) - h'$ si h et h' sont deux nombres réels différents.

Ainsi, la fonction méromorphe $f(z)$ a des pôles et des zéros simples et réels que l'on rencontre alternativement en parcourant l'axe réel. Nous dirons que c'est une fonction méromorphe à termes entrelacés. Mais toute fonction méromorphe à termes entrelacés n'est pas nécessairement limite de fractions à termes entrelacés; par exemple, la fonction $z \operatorname{tang} z$ est à termes entrelacés, mais, elle n'est pas limite de fractions à termes entrelacés, car elle prend une valeur réelle pour $z = iy$.

Toute fonction $f(z)$ limite de fractions à termes entrelacés transforme en lui-même l'axe réel et ne prend de valeur réelle que sur cet axe. Cette propriété caractérise-t-elle les fonctions méromorphes $f(z)$ de l'espèce considérée? J'avais cru pouvoir affirmer que cette condition n'est pas suffisante, mais ce point appelle de nouvelles recherches.

3. Déterminons la forme des fonctions $f(z)$. Soit A_i le résidu relatif à α_i, ces résidus étant rangés par ordre de modules non décroissants; ce nombre est la limite du résidu $A_i^{(n)}$ relatif au pôle $\alpha_i^{(n)}$ de $R_n(z)$ qui tend vers α_i, comme on le voit aussitôt en calculant l'intégrale de Cauchy de $R_n(z)$ et celle de $f(z)$ étendues à une petite circonférence de centre α_i. Comme $f(z)$ a tous ses résidus de même signe, il en sera de même pour $R_n(z)$ lorsque n est assez grand; nous les supposerons, par exemple, tous positifs. Enfin, pour nous placer dans le cas le plus général, nous écrirons

$$R_n(z) = A_n - B_n z + \sum_1^n \frac{A_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}},$$

les nombres $A_i^{(n)}$ et B_n étant positifs ou nuls, et les nombres A_n et $\alpha_i^{(n)}$ réels. Le nombre

$$R'_n(0) = -B_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2}$$

a pour limite $f'(0)$ si, ce qu'on peut toujours supposer, $f(z)$ est régulière à l'origine; le second membre est donc borné et l'on peut écrire

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2} < M,$$

M désignant un nombre fixe. Écrivons alors

$$R_n(z) = \left[A_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{\alpha_i^{(n)}}\right] - z\left[B_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2}\right]$$
$$+ \sum_{i=1}^{n} A_i^{(n)} \left[\frac{1}{z - \alpha_i^{(n)}} + \frac{1}{\alpha_i^{(n)}} + \frac{z}{[\alpha_i^{(n)}]^2}\right].$$

Les deux premiers termes forment

$$R_n(0) + zR'_n(0)$$

et ont pour limite

$$f(0) + zf'(0);$$

le dernier peut s'écrire

$$z^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2} \frac{1}{z - \alpha_i^{(n)}} = z^2 \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}} \qquad \text{avec} \qquad \sum_{i=1}^{n} B_i^{(n)} < M.$$

Je dis que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2}$$

est convergente. On a, en effet, si p est un entier fixe,

$$\sum_{i=1}^{p} \frac{A_i}{\alpha_i^2} = \lim_{n=\infty} \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2} \leqq M.$$

Posons

$$B_i = \frac{A_i}{\alpha_i^2};$$

la fonction

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{n} \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}}$$

converge uniformément vers la fonction méromorphe

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{z - \alpha_i}.$$

Soit, en effet, z_0 un point du plan distinct des points α_i et traçons un petit cercle (γ) de centre z_0 et de rayon r. Prenons n assez grand pour qu'aucun des $\alpha_i^{(n)}$ ne soit intérieur à (γ). Considérons un cercle concentrique (Γ), de rayon R, tel que $R - r = \frac{M}{\varepsilon}$, ε étant un nombre arbitrairement petit. Soient $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ tous les pôles de $f(z)$ intérieurs à (Γ), en changeant au besoin leurs indices; on a, si z est intérieur à (γ),

$$\varphi(z) = \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i}{z - \alpha_i} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{B_i}{z - \alpha_i},$$

avec

$$\left| \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{B_i}{z - \alpha_i} \right| < \frac{\sum_{i=p+1}^{\infty} B_i}{R - r} < \varepsilon.$$

Prenons n assez grand pour que $R_n(z)$ n'ait dans (Γ) que les pôles $\alpha_1^{(n)}, \alpha_2^{(n)}, \ldots, \alpha_p^{(n)}$ voisins de $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$. On aura de même

$$r_n(z) = \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}},$$

le second terme ayant aussi un module inférieur à ε, D'autre part, la différence

$$\sum_{i=1}^{p} \left[\frac{B_i}{z - \alpha_i} - \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}} \right]$$

a pour limite zéro lorsque, z restant dans (γ), le nombre n croît indéfiniment; on peut donc choisir un entier N tel que l'inégalité $n > N$

ait pour conséquence que le module de cette différence soit inférieur à ε. On aura alors, pour $n > N$,

$$|\varphi(z) - r_n(z)| < 3\varepsilon.$$

La convergence est uniforme dans (γ). Si z_0 coïncide avec un pôle α_i, il suffit de supprimer dans les calculs précédents le terme relatif à α_i et celui relatif à $\alpha_i^{(n)}$ pour obtenir le même résultat, car

$$\frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}}$$

converge uniformément dans (γ) vers

$$\frac{B_i}{z - \alpha_i}.$$

On peut donc écrire

$$f(z) = f(0) + z f'(0) + z^2 \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i}{z - \alpha_i},$$

et, comme

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i z^2}{z - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} + \frac{z}{\alpha_i^2}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right] + z \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2},$$

$$f(z) = f(0) + \left[f'(0) + \sum \frac{A_i}{\alpha_i^2}\right] z + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right].$$

D'ailleurs, l'inégalité

$$B_n + \sum_{i=1}^{p} \frac{A_i^{(n)}}{[\alpha_i^{(n)}]^2} < -f'(0) + \varepsilon$$

entraine

$$f'(0) + \sum \frac{A_i}{[\alpha_i^2]^2} \leqq 0.$$

Ainsi, $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = A - Bz + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right],$$

les nombres A_i et B ayant le même signe et la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2}$ étant convergente. Réciproquement, toute fonction de cette forme est limite des fractions à termes entrelacés

$$R_n(z) = A - Bz + \sum_{i=1}^{n} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right],$$

ou

$$R_n(z) = A_n - Bz + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - \alpha_i},$$

avec

$$A_n = A - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{\alpha_i}.$$

On peut donc énoncer le théorème suivant :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe soit limite de fractions rationnelles à termes entrelacés est qu'elle soit de la forme

$$A - Bz + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right],$$

les nombres A, A_i, B, α_i *étant réels, les nombres* B *et* A_i *de même signe, et la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2}$ *étant convergente.*

On peut remarquer que la convergence uniforme dans un petit cercle de centre $z = 0$ entraîne la convergence uniforme autour de tout point complexe et même autour de tout point réel qui n'est pas limite des points $\alpha_i^{(n)}$, car les fonctions $\sum \frac{B_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}}$ sont bornées autour de ce point.

Montrons que le rapport $\frac{f(z)}{z}$ a pour limite $-B$ lorsque z s'éloigne indéfiniment en restant dans l'angle de sommet origine dont les côtés ont pour arguments θ et $\pi - \theta$ ou dans son opposé, θ désignant un nombre positif arbitrairement petit. Il suffit de montrer que le quotient du dernier terme par z a pour limite zéro ; or

$$\frac{1}{z} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right] = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2} \frac{\alpha_i}{z - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i \alpha_i}{z - \alpha_i}.$$

Prenons p assez grand pour que

$$\sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i^2} < \varepsilon,$$

et écrivons

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i \alpha_i}{z - \alpha_i} = \sum_{i=1}^{p} \frac{B_i \alpha_i}{z - \alpha_i} + \sum_{i=p+1}^{\infty} \frac{B_i \alpha_i}{z - \alpha_i}.$$

Comme

$$\left| \frac{\alpha_i}{z - \alpha_i} \right| \leqq \frac{1}{\sin\theta},$$

le module du second terme est inférieur à $\frac{\varepsilon}{\sin\theta}$. Le premier a pour limite zéro avec $\frac{1}{z}$, il est donc en module inférieur à ε pour $|z| > R$. Par conséquent, pour $|z| > R$,

$$\left| \sum_{i=1}^{\infty} \frac{B_i \alpha_i}{z - \alpha_i} \right| < \varepsilon \left(1 + \frac{1}{\sin\theta} \right).$$

— B est la dérivée angulaire de $f(z)$; c'est aussi la limite de $f'(z)$.

Par exemple, la fonction tang z est du type considéré; au contraire la fonction e^z tang z n'appartient pas à ce type puisque le rapport $\frac{f(z)}{z}$ ne tend pas vers une limite unique lorsque z s'éloigne indéfiniment dans les angles indiqués.

4. Plaçons-nous dans le cas où les fractions rationnelles sont à termes entrelacés avec des pôles tous positifs. On voit aisément qu'une telle fraction est nécessairement de la forme

$$-A + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - \alpha_i},$$

les nombres α_i étant positifs et les nombres A et A_i de même signe, ou de la forme

$$A - Bz + \sum_{i=1}^{n-1} \frac{A_i}{z - \alpha_i},$$

en supposant A_i positif, et B positif ou nul.

Soit $f(z)$ une fonction méromorphe limite de fractions à termes entrelacés et à pôles positifs; admettons qu'elle soit régulière à l'origine, ce qu'on peut toujours obtenir par une translation des axes. Supposons d'abord que $f(z)$ soit limite des fractions du premier type :

$$R_n(z) = -A_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}}.$$

Nous pouvons admettre que tous les $A_i^{(n)}$ et les A_n soient positifs.

$$R_n(0) = -A_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{\alpha_i^{(n)}},$$

a pour limite $f(0)$. Donc

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{\alpha_i^{(n)}} < M.$$

On en déduit comme précédemment que la série

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i}$$

est convergente et que $f(z)$ est de la forme

$$f(z) = -A + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{z - \alpha_i}.$$

Réciproquement, toute fonction de cette forme est limite des fractions

$$R_n(z) = -A + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{z - \alpha_i}.$$

Donc :

La condition nécessaire et suffisante pour qu'une fonction méromorphe soit limite de fractions rationnelles du premier type à termes entrelacés et à pôles positifs est qu'elle soit de la forme

$$-A + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{z - \alpha_i},$$

les nombres α_i *étant positifs, les nombres* A_i *et* A *réels et de même signe, et la série* $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{A_i}{\alpha_i}$ *étant convergente.*

On verrait de même que les fractions du second type conduisent à des fonctions de la forme

$$A - Bz + \sum A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right],$$

α_i étant positif, A, B, A_i de même signe et la série $\sum \frac{A_i}{\alpha_i^2}$ convergente.

Une fonction est du premier type ou du second suivant que les zéros suivent les pôles ou inversement.

5. Donnons quelques applications des résultats précédents. Si nous supposons $A_i = 1$, la fonction méromorphe $f(z)$ est la dérivée logarithmique d'une fonction entière $g(z)$.

Si $g(z)$ est limite de polynomes à zéros réels, $f(z) = \frac{g'(z)}{g(z)}$ est limite de fractions à termes entrelacés à résidus entiers pour lesquelles le coefficient $-B_n$ du terme en z est nul. Réciproquement, si $f(z)$ est limite de telles fractions, $g(z)$ est limite de polynomes à zéros réels. Donc, $f(z)$ est de la forme

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = A - Bz + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right] \qquad (B \geqq 0),$$

la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{\alpha_i^2}$ étant convergente, les α_i n'étant plus nécessairement tous différents.

Réciproquement, une fonction méromorphe de la forme précédente est limite des fractions rationnelles

$$R_n(z) = A + n \left[\frac{1}{z - \sqrt{\frac{2n}{B}}} + \frac{1}{z + \sqrt{\frac{2n}{B}}} \right] + \sum_{i=1}^{n} \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right],$$

du type considéré. On peut donc écrire

$$g(z) = e^{-\frac{Bz^2}{2}} G_1(z),$$

$G_1(z)$ désignant une fonction entière de genre *un* à zéros et à coefficients réels. C'est un résultat connu [1].

De même, pour qu'une fonction entière $g(z)$ soit limite de polynomes à zéros positifs, il faut et il suffit que $\frac{g'(z)}{g(z)}$ soit limite de fractions à termes entrelacés à pôles positifs, à résidus entiers et du premier type. Cette fonction méromorphe est alors de la forme

$$-A+\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{z-\alpha_i} \qquad (A \geqq 0),$$

la série $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_i}$ étant convergente. Réciproquement, une fonction méromorphe de cette forme est limite des fractions du premier type

$$R_n(z)=-A+\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{z-\alpha_i}.$$

Par conséquent $g(z)$ est de la forme

$$g(z)=e^{-Az}G_0(z) \qquad (A \geqq 0).$$

$G_0(z)$ désignant une fonction entière de genre zéro dont tous les zéros sont positifs.

On peut remarquer que la convergence uniforme autour du point $z=0$ entraîne la convergence uniforme dans tout le plan.

6. Considérons une expression de la forme

$$\frac{b_0+b_1z+\ldots+b_nz^n+\ldots}{a_0+a_1z+\ldots+a_nz^n+\ldots},$$

nous dirons qu'elle est convergente dans un cercle de centre origine

---

(1) *Œuvres de Laguerre*, t. I, p. 174. — G. Pólya, *Ueber Annäherung durch Polynome mit lauter reellen Wurzeln* (*Rendiconti del. Circ. Mat. di Palermo*, t. XXXVI, 1913, p. 279). — P. Montel, *Sur les familles normales de fonctions analytiques* (*Annales sc. de l'École Normale supérieure*, t. 33, 1916, p. 279).

si la suite des fractions rationnelles

$$\frac{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n}{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n} = \mathrm{R}_n(z)$$

converge uniformément dans ce cercle.

Supposons que les fractions $\mathrm{R}_n(z)$ soient à termes entrelacés. Alors, les polynomes

$$\mathrm{P}_n(z) = a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n,$$
$$\mathrm{Q}_n(z) = b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n$$

ont leurs zéros réels; on en déduit que les séries

$$a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n + \ldots,$$
$$b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n + \ldots,$$

représentent des fonctions entières de genre au plus égal à *un* (1). Par conséquent, la fraction $\mathrm{R}_n(z)$ converge uniformément dans tout le plan vers une fonction méromorphe nécessairement de la forme

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}z + \sum_{i=1}^{\infty} \mathrm{A}_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right],$$

la série $\sum_{i=1}^{\infty} \frac{\mathrm{A}_i}{\alpha_i^2}$ étant convergente.

Il n'y a pas de difficultés pour les points z où les polynomes $\mathrm{P}_n(z)$ et $\mathrm{Q}_n(z)$ convergeraient l'un et l'autre vers zéro à condition de prendre comme limite du quotient $\mathrm{R}_n(z)$ le quotient simplifié des limites de $\mathrm{P}_n(z)$ et de $\mathrm{Q}_n(z)$; mais la convergence n'est pas uniforme en ces points.

Le résultat demeure le même si une suite infinie de fonctions $\mathrm{R}_n(z)$, correspondant aux valeurs $n_1, n_2, \ldots, n_k, \ldots$ de l'indice, est formée de fractions à termes entrelacés, mais le genre de la fonction pourra être égal à deux (2). Ainsi :

S'il existe une infinité de fractions à termes entrelacés parmi les fractions de la suite

$$\mathrm{R}_n(z) = \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_n z^n}{b_0 + b_1 z + \ldots + b_n z^n},$$

(1) *Cf.* G. Pólya, *loc. cit.*, p. 182.
(2) *Cf.* P. Montel, *loc. cit.*, p. 182.

cette suite converge uniformément, sauf en certains points en nombre fini ou en infinité dénombrable, vers une fonction méromorphe de genre deux au plus et de la forme

$$\mathrm{A} - \mathrm{B}z + \sum \mathrm{A}_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right].$$

Si l'on suppose que les fractions $\mathrm{R}_n(z)$ sont à termes entrelacés avec des pôles positifs, on en déduit de même que cette suite converge uniformément, sauf en certains points en nombre fini ou en infinité dénombrable, vers une fonction méromorphe de genre zéro et de la forme

$$-\mathrm{A} + \sum \frac{\mathrm{A}_i}{z - \alpha_i}.$$

S'il n'y a qu'une suite partielle infinie extraite de la suite $\mathrm{R}_n(z)$ qui soit formée de fractions à termes entrelacés sur $\mathrm{O}x$, le résultat demeure le même, mais la fonction limite pourra être du premier type ou du second type et de genre zéro ou *un*.

7. Désignons par (E) l'ensemble des fonctions méromorphes $f(z)$ limites de fractions rationnelles à termes entrelacés sur l'axe réel. Si $f(z)$ appartient à cet ensemble, toute transformée homographique de $f(z)$ à coefficients constants appartient à (E). Si $f_1(z)$ et $f_2(z)$ appartiennent à (E), la fonction $f_1[f_2(z)]$ appartient aussi à (E).

En particulier, les itérées

$$f_1(z) = f(z), \qquad f_2(z) = f[f_1(z)], \qquad \ldots, \qquad f_p(z) = f[f_{p-1}(z)], \qquad \ldots,$$

d'une fonction $f(z)$ de l'ensemble (E) appartiennent à cet ensemble.

Rappelons les propriétés de la suite des itérées $\mathrm{R}_p(z)$ d'une fraction rationnelle $\mathrm{R}(z)$ à termes entrelacés relativement à la distribution de ses cycles fixes attractifs et de l'ensemble $(\mathcal{E})$ formé par les points fixes répulsifs et leurs points limites [1]. On sait que l'ensemble $(\mathcal{E})$

[1] *Cf.* P. Montel, *Leçons sur les familles normales, etc.* Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1927, p. 213. — P. Fatou, *Sur les substitutions rationnelles* (*Comptes rendus de l'Acad. des Sc.*, t. 165, 1917, p. 992) a introduit les fractions à cercle fondamental, identiques aux fractions à termes entrelacés, et étudié leurs itérées.

est formé par les points autour desquels la famille des fonctions $R_p(z)$ n'est pas normale. Les fonctions $f(z)$ forment une famille normale dans chacun des demi-plans $y > 0$ et $y < 0$, puisqu'elles admettent comme valeurs exceptionnelles toutes celles du demi-plan ou de son symétrique. Il ne peut donc y avoir qu'un seul point fixe de cycle attractif dans chaque demi-plan et l'ensemble $(\mathcal{E})$ est sur l'axe réel.

S'il existe un point fixe complexe z_0 d'un cycle attractif, le point $R(z_0)$ est aussi complexe; alors, ou bien, il est situé dans le même demi-plan que z_0 et

$$R(z_0) = z_0,$$

z_0 est un point double attractif; ou bien, il est dans l'autre demi-plan où se trouve déjà le point fixe $\bar{z}_0$ conjugué de z_0 et

$$R(z_0) = \bar{z}_0,$$

alors

$$R_2(z_0) = z_0$$

et z_0 est un point fixe d'un cycle attractif d'ordre deux. Il ne peut y avoir aucun autre point fixe attractif ni réel, ni complexe. Dans l'un des demi-plans, toute suite extraite de la suite $R_p(z)$ converge uniformément vers z_0 et dans l'autre, vers $\bar{z}_0$. Tous les points de l'axe réel appartiennent à $(\mathcal{E})$ et l'ensemble des points répulsifs est partout dense sur cet axe.

S'il existe un point fixe réel x_0 d'un cycle attractif, toute suite extraite de la suite $R_p(z)$ converge uniformément vers x_0 ou vers $x_1 = R(x_0)$ dans chacun des demi-plans et autour de x_0, et il ne peut y avoir de point fixe complexe, ni d'autre point fixe attractif réel; donc

$$R(x_0) = x_0.$$

Dans ce cas, le point x_0 appartient à un intervalle contigu à $(\mathcal{E})$, tous les antécédents de cet intervalle sont contigus à $(\mathcal{E})$ et comme, autour de chaque point de $(\mathcal{E})$, il y a des antécédents de tout point du plan et par conséquent, des intervalles précédents, l'ensemble $(\mathcal{E})$ est un ensemble fermé non dense situé sur l'axe réel.

Enfin, il existe un cas intermédiaire dans lequel il existe un point fixe x_0 réel, indifférent, pour lequel le multiplicateur est $+1$.

Ces résultats sont encore valables pour une fonction méromorphe de l'ensemble (E). Il ne peut y avoir que deux points fixes complexes conjugués nécessairement attractifs. L'ensemble $(\mathcal{E})$ est toujours formé par l'axe réel entier, ou est un ensemble parfait discontinu situé sur cet axe. Il ne peut y avoir qu'un seul point fixe réel appartenant à un cycle attractif d'ordre *un*, ou un seul point fixe réel indifférent. Ces résultats se déduisent du fait que $f(z)$ est limite de fractions $R(z)$ et que les zéros de $f_1(z) - z$ ou $f_2(z) - z$ situés à distance finie sont limites de zéros de $R_1(z) - z$ ou de $R_2(z) - z$. On peut aussi arriver aux mêmes conclusions en partant de la propriété que possède la transformation $z_1 = R(z)$ de diminuer la distance non euclidienne de deux points d'un même demi-plan. Cette propriété est aussi valable pour la transformation $z_1 = f(z)$ et se démontre de la même manière.

Donnons un exemple de chacun des différents cas qui peuvent se présenter.

Soit $f(z) = \operatorname{tang} \frac{z}{2}$, l'équation

$$\operatorname{tang} \frac{z}{2} - z = 0$$

a toutes ses racines réelles, car $\operatorname{tang} \frac{z}{2}$ est limite de la suite des fractions à termes entrelacés

$$R_n(z) = \sum_{i=-n}^{i=+n} \frac{-2}{z - (2n+1)\pi}$$

et l'équation

$$R_n(z) - z = 0$$

a toutes ses racines réelles. Le point $z = 0$ est un point fixe attractif car

$$f'(0) = \frac{1}{2};$$

la suite des itérées de $\operatorname{tang} \frac{z}{2}$ converge vers zéro pour toute valeur complexe de z et pour toute valeur réelle située dans les intervalles contigus à $(\mathcal{E})$.

Soit encore $f(z) = \operatorname{tang} 2z$; l'équation

$$\operatorname{tang} 2z = z$$

a deux racines imaginaires de la forme $\pm iy$ puisqu'elles sont conjuguées et opposées. Le nombre y est racine de l'équation

$$\operatorname{th} 2y = y$$

qui a une racine y_0 comprise entre $\frac{1}{\sqrt{2}}$ et 1. Les itérées de $\operatorname{tang} 2z$ ont pour limite iy_0 dans le demi-plan supérieur et $-iy_0$ dans le demi-plan inférieur. L'ensemble $(\mathcal{E})$ comprend l'axe réel tout entier.

Soit enfin $f(z) = \operatorname{tang} z$; l'équation

$$\operatorname{tang} z = z$$

a toutes ses racines réelles; la racine $z = 0$ est triple et l'origine est un point double indifférent. Il est facile de voir qu'il est attractif pour les points de Oy et répulsif pour ceux de Ox. Par exemple, soient iy_p et iy_{p+1} deux conséquents consécutifs d'un point de Oy, on a

$$y_{p+1} = \operatorname{th} y_p$$

et le développement en série de y_p en fonction de y_{p+1} montre que

$$y_{p+1} < \frac{3}{4} y_p.$$

si $y_p < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Donc, sur un segment de Oy, voisin de O, les itérées de $\operatorname{tang} z$ ont pour limite zéro; par conséquent, la limite est zéro pour tous les points complexes. Il n'y a aucun point de convergence uniforme sur l'axe réel et l'ensemble $(\mathcal{E})$ comprend cet axe tout entier.

Prenons encore comme exemple la fonction

$$f(z) = \frac{\Gamma'(z)}{\Gamma(z)},$$

$\Gamma(z)$ désignant la fonction eulérienne de seconde espèce. On sait que $f(z)$ est la limite des fractions à termes entrelacés

$$R_n(z) = \log n - \left[\frac{1}{z} + \frac{1}{z+1} + \ldots + \frac{1}{z+n}\right].$$

L'équation

$$f(z) = z$$

admet deux racines imaginaires conjuguées $\alpha \pm \beta i$. En effet, l'équation

$$R_n(z) = z$$

admet $n-1$ racines réelles et négatives, et deux racines imaginaires. On peut le voir sur un dessin en remarquant que cette équation a $n+1$ racines et que la droite $y = x$ ne peut rencontrer aucune des branches extrêmes de la courbe $y = R_n(x)$ correspondant à $x < -n$ ou à $x > 0$. C'est évident pour la première située au-dessus de la droite $y = \log n$. Pour la seconde, elle admet une tangente parallèle à $y = x$ dont le point de contact a une abscisse x_0, racine de l'équation

$$R'_n(z) = \frac{1}{z^2} + \frac{1}{(z+1)^2} + \ldots + \frac{1}{(z+n)^2} = 1.$$

On a, $1 < x_0 < 2$, et le nombre x_0 croît avec n, car $R'_n(1) > 1$ et $R'_n(2)$ est inférieur à la somme $\frac{\pi^2}{6} - 1$ de la série $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^2}$, donc $R'_n(2) < 1$. La tangente au point x_0 rencontre l'axe des x au point d'abscisse

$$x_0 - R_n(x_0) = x_0 + \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{x_0 + i} - \log n > x_0 - 1 + \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n,$$

car $x_0 < 2$ et, comme $x_0 > 1$, il vient

$$x_0 - R_n(x_0) > \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{i} - \log n,$$

et le second membre tend en décroissant vers la constante d'Euler C lorsque n croît indéfiniment. On voit donc que, pour x positif, la courbe $y = f(x)$ est au-dessous d'une tangente parallèle à $y = x$, dont l'équation est

$$y = x - C.$$

Comme cet arc de courbe rencontre la droite

$$y = x - 2,$$

par exemple, en deux points réels d'abscisses comprises respectivement entre o et 1, et entre 2 et 3, on voit par continuité que la droite $y=x$ coupe la courbe $y=f(x)$ en deux points imaginaires.

On en déduit aussitôt que la suite des itérées de $f(x)$ a pour limite la constante $\alpha+\beta i$ dans l'un des demi-plans séparés par l'axe réel et $\alpha-\beta i$ dans l'autre demi-plan. Ces points sont deux points doubles attractifs. Les points fixes répulsifs forment sur l'axe réel un ensemble partout dense.

Au moyen d'une dilatation de x ou de y on obtiendrait aisément une fonction pour laquelle la convergence ait lieu dans tout le plan vers un nombre réel, sauf pour un ensemble de points parfait discontinu situé sur l'axe réel; on pourra prendre par exemple

$$f(x)=5\frac{\Gamma'(x)}{\Gamma(x)},$$

ou la courbe homothétique

$$f(x)=\frac{\Gamma'(5x)}{\Gamma(5x)}.$$

Dans le premier cas, par exemple, l'équation

$$f(z)=z$$

admet une racine réelle supérieure à 5 pour laquelle la dérivée $f'(z)$ est un nombre réel inférieur à *un*. Cette racine ξ est l'abscisse d'un point double réel attractif et la suite des itérées de $f(x)$ converge uniformément vers ξ en tout point du plan non situé sur l'axe réel ou intérieur à l'un des intervalles contigus à l'ensemble $(\mathcal{E})$.

7. Considérons maintenant les fonctions de la forme

$$R(z)=A+\frac{A_1}{z-\alpha_1}+\ldots+\frac{A_n}{z-\alpha_n},$$

les nombres A et A_i étant réels, les A_i tous de même signe et les α_i situés dans le demi-plan supérieur par exemple. Les zéros de $R_n(z)-h$, h désignant un nombre réel, seront aussi dans le plan $y>0$, car l'égalité

$$R(z)=h$$

entraîne

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{A_i(y - \gamma_i)}{(z - \alpha_i)^2} = 0,$$

γ_i désignant la partie imaginaire de α_i qui est positive; y est d'ailleurs compris entre le plus grand et le plus petit des γ_i, de sorte que si les pôles de $R(z)$ sont situés dans le demi-plan $y \geqq d > 0$, il en est de même des zéros de $R(z) - h$ quel que soit le nombre réel h.

Cherchons la forme des fonctions méromorphes limites de fractions de la forme précédente. Soit

$$R_n(z) = A_n + \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{z - \alpha_i^{(n)}} \qquad [\mathcal{R}(\alpha_i^{(n)}) = \gamma_i^{(n)} \geqq d]$$

une fraction de la suite qui converge vers la fonction méromorphe $f(z)$ que nous supposons toujours régulière à l'origine. Le nombre

$$R_n(0) = A_n - \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{\alpha_i^{(n)}}$$

a pour limite $f(0)$; on en déduit que

$$\mathcal{I}[R_n(0)] = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)} \gamma_i^{(n)}}{|\alpha_i^{(n)}|^2} \geqq d \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i^{(n)}}{|\alpha_i^{(n)}|^2},$$

a pour limite $\mathcal{I}[f(0)]$. Donc

$$\sum \frac{A_i^{(n)}}{|\alpha_i^{(n)}|^2} < M.$$

On en conclut, en répétant à peu près le raisonnement du paragraphe 2, que $f(z)$ est nécessairement de la forme

$$f(z) = A + Bz + \sum_{i=1}^{\infty} A_i \left[\frac{1}{z - \alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i} \right],$$

les nombres A_i étant tous de même signe, les points α_i situés dans le demi-plan $y \geqq d$, et la série $\sum^{\infty} \frac{A_i}{|\alpha_i|^2}$ étant convergente.

Proposons-nous de déterminer la forme des fonctions entières $g(z)$ qui sont limites de polynomes dont tous les zéros sont dans le demi-plan $y \geqq d$. La fonction méromorphe $\frac{g'(z)}{g(z)}$ sera de la forme précédente, les nombres A_i étant des entiers positifs, et la série $\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{|\alpha_i|^2}$, dans laquelle chaque zéro α_i de $g(z)$ est compté autant de fois qu'il y a d'unités dans son ordre de multiplicité, étant convergente. De l'égalité

$$\frac{g'(z)}{g(z)} = A + Bz + \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{1}{z-\alpha_i} + \frac{1}{\alpha_i}\right],$$

on déduit que $g(z)$ est une fonction entière de genre deux égale au produit par $e^{\frac{Bz^2}{2}}$ d'une fonction entière de genre *un* (1).

8. L'itération d'une fonction rationnelle ou méromorphe est liée à la résolution de l'équation de Schröder

$$F[R(z)] = sF(z),$$

$F(z)$ désignant la fonction inconnue et s une constante. Soit z_0 un point fixe attractif de la transformation $z_1 = R(z)$. Nous supposerons pour simplifier que z_0 est un point double et que son multiplicateur $R'(z_0)$ a un module compris entre zéro et *un*. Si $F(z)$ est défini dans une région du plan, l'équation fonctionnelle montre qu'il est aussi défini autour de z_0, car on a

$$F[R_n(z)] = s^n F(z);$$

et réciproquement, $F(z)$ étant défini dans le voisinage de z_0, est défini dans tout le plan sauf aux points de l'ensemble $(\mathcal{E})$ situé sur l'axe réel.

En faisant $z = z_0$ dans l'équation de Schröder et dans l'équation obtenue en dérivant membre à membre, on a

$$F(z_0)(s-1) = 0,$$
$$F'(z_0)[R'(z_0) - s] = 0.$$

(1) *Cf.* E. LINDWART et G. PÓLYA, *Ueber einen Zusammenhang zwischen der Konvergenz von Polynomfolgen und der Verteilung ihrer Wurzeln* (*Rendiconti del Circ. mat. di Pal.*, t. XXXVII, 1914, p. 297).

Donc, $F(z_0) = 0$ et $s = R'(z_0)$, si l'on suppose $F'(z_0)$ non nul. On peut prendre $F'(z_0) = 1$, puisque $F(z)$ peut toujours être multiplié par une constante. On sait que, dans le voisinage de z_0, la solution est donnée par

$$F(z) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{R(z_i) - z_0}{s(z_i - z_0)},$$

z_i désignant le $i^{\text{ième}}$ itéré de z. Ce produit est convergent dans tout le demi-plan qui contient z_0, si z_0 est complexe, dans tout le plan, sauf sur $(\mathcal{E})$, si z_0 est réel. Il suffit d'écrire le produit sous la forme

$$\prod_{i=1}^{p} \frac{R(z_i) - z_0}{s(z_i - z_0)} \prod_{i=p+1}^{\infty} \frac{R(z_i) - z_0}{s(z_i - z_0)},$$

p désignant un entier fixe assez grand pour que z_i, pour $i > p$, soit dans le voisinage de z_0, lorsque z est dans la région considérée.

Les points de $(\mathcal{E})$ sont des points singuliers pour $F(z)$, car, dans le voisinage d'un tel point, il y a une infinité d'antécédents de z_0 pour lesquels $F(z) = 0$ et une infinité d'antécédents z_{-n} de z pour lesquels $F(z)$ a un module aussi grand qu'on le veut puisque

$$F(z_{-n}) = s^{-n} F(z).$$

Ces résultats sont valables pour toute fonction méromorphe $f(z)$ de la famille (E). Donc, la solution de l'équation de Schröder

$$F[f(z)] = sF(z),$$

lorsque $f(z)$ est une fraction rationnelle à termes entrelacés ou une fonction méromorphe limite de telles fractions est formée soit par une fonction holomorphe dans chaque demi-plan et possédant sur l'axe réel un ensemble parfait discontinu de points singuliers, soit par une fonction définie dans l'un des demi-plans et admettant l'axe réel comme coupure. Par la transformation $\zeta = \dfrac{z - i}{z + i}$, on en déduit des fonctions $G(\zeta)$ définies dans le cercle unité et vérifiant une équation de Schröder relative à une fonction méromorphe $R(\zeta)$ pour laquelle les zéros de $R(\zeta) \pm 1$ sont entrelacés sur la circonférence $|\zeta| = 1$.

9. Quelques-uns des résultats obtenus au sujet des fonctions $f(z)$ de l'ensemble (E) appartiennent aussi aux fonctions $f(z)$ holomorphes dans le demi-plan supérieur et dont la partie imaginaire a un signe constant.

Bornons-nous, par exemple, aux fonctions $f(z)$ holomorphes pour $\mathcal{I}z > 0$ et telles que $\mathcal{I}f(z)$ soit positif. De telles fonctions ont été étudiées par M. Wolff et M. Valiron [1]. Elles possèdent une dérivée angulaire positive ou nulle, c'est-à-dire que $\frac{f(z)}{z}$ a une limite $B \geqq 0$ lorsque z s'éloigne indéfiniment dans un angle ne contenant aucun point de l'axe réel; $f'(z)$ a pour limite B dans les mêmes conditions.

Les itérées $f_n(z)$ possèdent la même propriété que les fonctions correspondantes de l'ensemble (E). Voici une démonstration très simple de cette proposition qui repose sur le théorème suivant, déjà établi pour l'ensemble (E) :

Si $f(z)$ n'est pas une fonction homographique, la transformation $Z = f(z)$ diminue toujours la distance non euclidienne.

Soient en effet z_0 un point fixe, z un point arbitraire du demi-plan supérieur. Posons toujours

$$z_0 = x_0 + iy_0, \qquad Z_0 = f(z_0) = X_0 + iY_0 \qquad (y_0 > 0,\ Y_0 > 0).$$

La substitution [2]

$$\frac{z - z_0}{z - \bar{z}_0} = \zeta, \qquad \frac{f(z) - f(z_0)}{f(z) - \overline{f(z_0)}} = g(\zeta),$$

définit une fonction $g(\zeta)$ dans le cercle $|\zeta| < 1$, nulle pour $\zeta = 0$, et telle que $|g(\zeta)|$ soit inférieur à *un*. On a donc

$$|g'(0)| \leqq 1,$$

l'égalité ne pouvant être atteinte que dans le cas où $g(\zeta) = e^{i\theta}\zeta$;

---

(1) J. Wolff, *Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 182, 1926, p. 42, 200 et 918. — *Voir* aussi A. Denjoy, *Ibid.*, p. 255. — G. Valiron, *Sur l'itération des fonctions holomorphes dans un demi-plan* (*Bull. des Sc. math.*, t. LV, 1931, p. 105-128).

(2) *Cf* Carathéodory, *Elementarer Beweis für den Fundamentalsatz der konformen Abbildungen* (Math. Abhand. H. A. Schwarz zu seinem Doktorjubiläum gewidmet, 1914).

$f(z)$ est alors une fonction homographique. Ainsi, lorsque $f(z)$ n'est pas une fonction homographique, on a

$$|g'(0)| < 1,$$

or, on obtient aussitôt

$$g'(0) = f'(z_0)\frac{y_0}{Y_0},$$

donc

$$\frac{|dZ_0|}{Y_0} < \frac{|dz_0|}{y_0}.$$

Si le point z_0 décrit l'arc (l) de cercle géodésique allant du point z_1 au point z_2, le point Z_0 décrit un arc (λ) de longueur non euclidienne plus petite puisque

$$\int_{(\lambda)} \frac{|dZ_0|}{Y_0} < \int_{(l)} \frac{|dz_0|}{y_0}.$$

Or, la distance non euclidienne des points Z_1 et Z_2, extrémités de l'arc (λ), est inférieure ou égale à la longueur non euclidienne de (λ) : elle est donc inférieure à la distance non euclidienne de z_1 et z_2. Nous désignerons par la notation $\widehat{AB}$ la distance non euclidienne des points A et B.

Il est alors bien aisé d'établir le théorème de M. Wolff.

Si une suite $f_{n_p}(z)$ a une limite $f_0(z)$ non constante, considérons deux points A et B d'affixes z et z'; désignons par A_0 et B_0 les points limites $f_0(z)$, $f_0(z')$ et par A_n et B_n les conséquents d'ordre n des deux points A et B : $\widehat{A_{n_p}B_{n_p}}$ a pour limite $\widehat{A_0 B_0}$, en décroissant.

La suite $f_{n_p+1}(z)$ a pour limite $f_0[f(z)] = g_0(z)$. Or

$$\widehat{A_{n_p}B_{n_p}} > \widehat{A_{n_p+1}B_{n_p+1}} \geqq \widehat{A_{n_{p+1}}B_{n_{p+1}}};$$

donc, les positions limites A'_0, B'_0 des points A_{n_p+1}, B_{n_p+1} vérifient l'égalité

$$\widehat{A'_0 B'_0} = \widehat{A_0 B_0}.$$

En d'autres termes, on passe de la figure formée par les points $f_0(z)$ à celle formée par les points $g_0(z)$ par une transformation homographique puisque ces figures sont égales au sens non euclidien.

Donc,

$$f_0[f(z)] = f_0\left[\frac{\alpha z + \beta}{\gamma z + \delta}\right],$$

d'où l'on déduirait que $f(z)$ est une fonction homographique, ce qui est écarté. Donc $f_0(z)$ est une constante : toute fonction limite est une constante.

Désignons alors par a l'affixe d'un point limite d'une suite z_{n_p} d'itérés de z. Si $\mathcal{J} a > 0$, l'inégalité

$$|f'(z_0)| < \frac{Y_0}{y_0}$$

établie plus haut, donne, pour $z_0 = a$,

$$|f'(a)| < 1,$$

car

$$f(a) = a,$$

puisque la suite des itérés de $f(z)$ de rang n_p a pour limite $f(a)$ et a; on voit que a est un point double attractif. Comme la famille des fonctions $f_n(z)$ est normale dans le demi-plan, on voit que cette suite converge uniformément dans l'intérieur du demi-plan vers la constante a.

L'inégalité

$$\widehat{a z_n} < \widehat{a z}$$

montre que les points z_n sont à l'intérieur du cercle (Γ) passant par z et pour lequel a et $\bar{a}$ sont images l'un de l'autre.

Supposons maintenant que $f(z) - z$ n'ait aucun zéro dans le demi-plan. Toute suite infinie d'itérés a pour limite une constante réelle et il en est de même de la suite correspondante $f_{n_p}(z)$ quel que soit z. On peut le voir ici directement puisque la famille étant normale et aucune fonction $f_n(z)$ ne prenant de valeur réelle dans le demi-plan, la fonction limite $f_0(z)$ ne peut prendre une valeur réelle que si elle se réduit à une constante.

Considérons alors [1] la fonction

$$F_p(z) = f(z) + \frac{i}{p},$$

---

[1] J. WOLFF, *Sur une généralisation d'un théorème de Schwarz* (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences*, t. 182, 1926, p. 918).

l'équation

$$F_p(z) = z$$

a une racine a_p dans le demi-plan et $\mathcal{I} a_p > 0$. On le voit aussitôt en remarquant que la partie imaginaire de tous les itérés est supérieure à $\frac{1}{p}$. D'ailleurs, lorsque p croît indéfiniment, le nombre a_p a pour limite un nombre réel a puisque $F_p(z)$ a pour limite $f(z)$ et que $f(z) - z$ n'a aucun zéro complexe. Le cercle (Γ) relatif à z et à a_p a pour limite le cercle (Γ_0) passant par z et tangent en a à l'axe réel. Aucun itéré de z n'est extérieur à (Γ_0), donc z_n a pour limite a et il en est de même pour $f_n(z)$ dans tout domaine intérieur au demi-plan.