ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

A. MARCHAUD

Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 49 (1932), p. 113-136
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1932_3_49__113_0>

SUR DIVERSES EXTENSIONS

DE LA

NOTION DE CONTINU D'ORDRE BORNÉ

PAR M. A. MARCHAUD.

Introduction.

Dans un travail précédent (¹), cherchant à généraliser le plus possible la notion de courbe algébrique, j'ai appelé *continu d'ordre borné* tout continu borné de l'espace euclidien à n dimensions, rencontré en un nombre borné de points par toute multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions. Le maximum du nombre de ces points est l'*ordre* du continu. Un continu d'ordre borné est nécessairement une courbe, et celle-ci est d'autant plus simple que l'ordre du continu se rapproche davantage du nombre des dimensions de l'espace qui le contient. Je me propose de montrer dans le présent Mémoire qu'un continu est encore une courbe quand on fait sur lui des hypothèses analogues à la précédente, mais beaucoup moins restrictives. On considérera non plus toutes les multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions, mais simplement certaines familles d'entre elles et les sections du continu par ces multiplicités pourront se compliquer jusqu'à être seulement punctiformes. Enfin il s'agira de continus bornés ou non de l'espace projectif.

Je vais esquisser brièvement les résultats auxquels nous serons conduits. La notion qui interviendra est celle d'*ordre* (d'un ensemble) par rapport à un faisceau. Un *faisceau d'arête* ω est un système de

(¹) A. MARCHAUD, *Sur les continus d'ordre borné* (*Acta math.*, t. 55, p. 67 et 115).

multiplicités linéaires à $n-1$ dimensions ayant en commun la multiplicité linéaire à $n-2$ dimensions ω, située à une distance finie ou non. Les expressions : *faisceau complet*, *faisceau partout dense* s'entendent d'elles-mêmes.

Un ensemble est d'*ordre borné*, d'ordre *fini* ou d'ordre *punctiforme* par rapport à un faisceau, si la section de l'ensemble par chaque multiplicité (à $n-1$ dimensions) du faisceau contient un nombre borné ou fini de points, ou bien est un ensemble punctiforme (ne renfermant aucun continu).

Ceci posé, voici les principales conclusions du Mémoire :

I. Un continu d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau complet est une courbe cantorienne (continu de dimension *un* au sens de P. Urysohn).

II. Si, de plus, le continu est d'ordre fini par rapport à un faisceau partout dense, de même arête, c'est aussi une courbe de Jordan.

III. Un continu d'ordre fini par rapport à un faisceau complet est décomposable en une infinité dénombrable d'arcs simples tels que deux quelconques d'entre eux aient au plus un point commun, extrémité pour chacun d'eux, laquelle ne peut appartenir à un troisième arc.

IV. Si un continu d'ordre borné par rapport à un faisceau complet n'a pas de point sur l'arête et possède seulement un nombre fini de points de ramifications [1], il est la somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant deux à deux en commun que des extrémités.

Dans les trois derniers cas, le continu se réduit à une courbe simple s'il n'a pas de point de ramification.

J'avais obtenu des proportions analogues aux deux dernières, en supposant le continu borné, et d'ordre borné par rapport à n faisceaux dont les arêtes sont à l'infini sur les faces d'un n-èdre [2] dont le sommet est à distance finie.

---

(1) *Voir* plus loin [n° 3].

(2) Un n-èdre est un système de n mulitplicités linéaires à $n-1$ dimensions ayant un seul point commun, le sommet.

Dans ce cas les arcs qui interviennent sont rectifiables ([1]). Il est bien évident qu'on ne peut obtenir un tel résultat en faisant des hypothèses sur un seul faisceau : une courbe non rectifiable $y = f(x)$ est un continu d'ordre *un* par rapport au faisceau parallèle à l'axe des y. Dans un travail, qui paraîtra dans un autre recueil, j'étudie les arcs simples d'ordre fini par rapport à n faisceaux complets convenablement choisis.

Remarquons enfin que le théorème IV permet d'étendre aux continus non bornés de l'espace projectif, les propriétés des continus bornés d'ordre borné, et en particulier celles des continus plans d'ordre 2 et 3, et des continus gauches d'ordre 3 et 4, étudiés plus spécialement dans le Mémoire cité. Je compte d'ailleurs revenir sur ce sujet dans une étude systématique des courbes et surfaces d'ordre borné, définies d'une manière aussi immédiate que possible à partir de la notion de continu.

Les principales conclusions de ce Mémoire ont été communiquées à l'Académie des Sciences ([2]).

Définitions et propositions préliminaires.

1. Comme on l'a dit, il s'agira dans ce travail d'ensembles bornés ou non, situés dans un *espace euclidien projectif à n dimensions* ($n \geqq 2$). Pour commencer nous préciserons la définition des éléments qui interviendront : domaine, continu, courbe de Jordan, courbe cantorienne, etc., lorsqu'on ne considère pas seulement des points à distance bornée.

Les notions classiques de la théorie des ensembles se définissent à partir des notions locales de point isolé, de point d'accumulation, de point intérieur. Il suffira donc d'étendre celles-ci. Un point à l'infini a, d'un ensemble E, sera dit : *point isolé*, *point d'accumulation* de l'ensemble, ou bien *point intérieur* à l'ensemble, s'il existe une transfor-

---

([1]) A. Marchaud, Mémoire cité, p. 76 et 78.

([2]) A. Marchaud, *Sur diverses extensions de la notion de continu d'ordre borné* (*C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 9 novembre 1931, p. 807). *Voir* aussi *C. R. Acad. Sc.*, t. 193, 30 novembre 1931, p. 1050.

mation homographique, dans laquelle le transformé de a est à distance finie, et possède, au sens ordinaire, la propriété en question par rapport au transformé de E. Ces définitions sont évidemment indépendantes de la transformation choisie.

Les notions précédentes sont des invariants projectifs, et par suite aussi celles qui s'en déduisent immédiatement : ensemble fermé, ensemble parfait, domaine. Nous appellerons *domaine* un ensemble ayant un point intérieur. Un point est extérieur à un domaine s'il est intérieur à son complémentaire. La *frontière* d'un domaine est l'ensemble des points de l'espace qui ne sont ni intérieurs ni extérieurs au domaine. Il est immédiat qu'un ensemble de points non extérieurs [non intérieurs] ne peut avoir un point d'accumulation extérieur [intérieur].

2. *Continu.* — On appelle *continu* tout ensemble fermé, contenant plus d'un point, qui ne peut être décomposé en deux ensembles fermés disjoints — c'est-à-dire sans point commun. La définition adoptée ici est celle de Jordan. On sait qu'elle est équivalente à celle de Cantor quand on considère des ensembles bornés.

Un ensemble dont aucun sous-ensemble n'est un continu est dit : *punctiforme*. (On dit aussi : partout discontinu.)

3. *Courbes de Jordan.* — La définition des courbes de Jordan fait intervenir celle de correspondance continue. Pour étendre cette notion au cas où l'on considère les points à l'infini, on remarquera que, pour des ensembles bornés, la définition habituelle est équivalente à celle-ci [1] — qui s'étend d'elle-même.

Une transformation univoque entre les points m d'un ensemble fermé e, et ceux M d'un ensemble E, est continue dans le sens m — M, si, quel que soit le point d'accumulation m_0 de e, à tout de suite m_1, m_2, ..., ayant pour point d'accumulation unique m_0, correspond la suite M_1, M_2, ..., ayant pour point d'accumulation unique l'homologue M_0 de m_0 — à moins que M_1, M_2, ..., soient tous confondus avec M_0.

---

[1] On pourra aussi consulter l'ouvrage de M. HAUSDORFF, *Grundzüge der Mengenlehre* (Leipzig, 1914, p. 360).

L'ensemble E est évidemment fermé et l'on voit aisément que si la correspondance est biunivoque, elle est bicontinue.

Ceci posé, une *courbe de Jordan* ouverte [fermée] est l'image univoque et continue d'un segment de droite [d'un cercle (1)]. Si la correspondance est biunivoque, on obtient une *courbe simple*. Un *arc simple* est une courbe simple ouverte. Un continu somme d'un nombre fini de courbes de Jordan est évidemment une courbe de Jordan.

Enfin, on dira qu'un point O est *point de ramification* d'un continu, si l'on peut trouver sur lui trois arcs simples n'ayant en commun deux à deux que O.

4. *Courbes cantoriennes.* — Nous adopterons pour les courbes cantoriennes la définition donnée par P. Urysohn, dans son remarquable Mémoire sur les multiplicités cantoriennes (2) : *continu de dimension un*. Je rappellerai brièvement les définitions et les résultats de cet auteur, qui nous seront utiles ici.

Un point M d'un ensemble E est dit ε-*séparé* (3) de E, par l'ensemble B, s'il existe une décomposition

$$E = A + B + D$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A contient M;
2° $A \times \overline{D} + \overline{A} \times D = 0$ (4);
3° $A + B$ est intérieur à la sphère de centre M et de rayon ε (5).

Un point de E qui peut être ε-séparé de E, quel que soit ε, par un ensemble vide est de dimension zéro (par rapport à E). Un ensemble dont tous les points sont de dimension zéro, par rapport à lui, est de dimension zéro (2).

(1) Ou d'une droite, car une droite est une courbe simple fermée.

(2) P. Urysohn, *Sur les multiplicités cantoriennes* (*Fund. Math.*, t. VIII, p. 93).

(3) *Ibid.*, p. 65.

(4) Suivant l'usage $\overline{G}$ désigne la somme de l'ensemble G et de son dérivé.

(5) C'est-à-dire à une distance de M moindre que ε. La sphère de centre M et de rayon ε est l'ensemble des points dont la distance à M égale ε.

(6) P. Urysohn, Mémoire cité, p. 65.

Il résulte immédiatement de la condition 2° de l'ε-séparation, qu'un continu n'a pas de point de dimension zéro.

Les dimensions supérieures se définissent par induction. Un point d'un ensemble E, qui n'est pas de dimension $< k$ (par rappport à E) est de dimension k, par rapport à cet ensemble, si, quel que soit ε, il peut être ε-séparé de E par un ensemble de dimension $k-1$. Un ensemble est de dimension k s'il contient un point de dimension k (par rapport à lui) et aucun de dimension supérieure ([1]).

Un ensemble fermé punctiforme est de dimension zéro ([2]).

Tout ensemble de l'espace euclidien à n dimensions sans point intérieur est de dimension $\leqq n-1$ ([3]).

Les considérations de P. Urysohn s'appliquent seulement à toute portion bornée de l'espace; mais comme la dimension d'un point est une propriété locale ([4]), on en étendra aisément la définition aux ensembles de l'espace projectif.

On dira qu'un point à l'infini m, d'un ensemble E, est de dimension k par rapport à E, s'il existe une transformation homographique dans laquelle le transformé de m est à distance finie et de dimension k par rapport au transformé de E.

Cette définition est indépendante de la transformation choisie, car la dimension est un invariant topologique ([5]).

5. Il est immédiat que toutes les notions définies dans les numéros précédents sont des invariants projectifs. Je terminerai ces généralités par deux propositions préliminaires qui nous seront utiles. La première est l'extension à l'espace projectif du théorème de Weierstrass-Bolzano :

Tout ensemble contenant une infinité de points à l'extérieur de toute sphère, possède au moins un point d'accumulation à l'infini.

Soient, en effet, E un tel ensemble, O un point fixe à distance finie.

([1]) P. Urysohn, Mémoire cité page 66.
([2]) *Ibid.*, p. 75.
([3]) *Ibid.*, p. 81.
([4]) *Ibid.*, p. 68.
([5]) *Ibid.*, p. 68.

On peut trouver sur E une suite de points M_n, telle que la distance OM_n soit infinie ou supérieure à n. L'ensemble borné des points μ_n et μ'_n, où chaque droite OM_n rencontre la sphère de rayon *un* de centre O admet au moins un point d'accumulation α. Le point à l'infini de $O\alpha$ est évidemment un point d'accumulation de E.

Il résulte immédiatement de l'énoncé précédent que *tout ensemble fermé sans point à l'infini est borné*, et encore que l'*espace projectif est compact*.

6. La seconde proposition préliminaire est l'extension aux continus non bornés d'un lemme que j'ai signalé la première fois dans mon Mémoire sur les continus d'ordre borné [1], et dont je me suis servi à plusieurs reprises.

Si un continu, ayant un point intérieur et un point extérieur à un domaine, possède seulement un nombre fini k de points sur la frontière de ce dernier, il est la somme d'un nombre fini de continus distincts, les uns non extérieurs, les autres non intérieurs au domaine. Chacun de ces continus a au moins un point sur la frontière et k au plus. Il n'y a pas plus de k continus dans chaque catégorie.

La démonstration que j'ai donnée de cette proposition dans le cas d'un continu borné ne peut s'étendre d'elle-même, car elle fait intervenir la notion de distance. En voici une, générale, qui est d'ailleurs plus simple.

Soit E un continu satisfaisant aux conditions de l'énoncé par rapport au domaine D. Désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_k$ les points de E situés sur la frontière de D, par E_D l'ensemble des points de E non extérieurs à D, par E^D l'ensemble des points non intérieurs à ce domaine. Ces ensembles sont fermés [n° 1].

Il suffira évidemment d'étudier la structure de E_D, par exemple. Remarquons d'abord que si cet ensemble peut être décomposé en un nombre fini d'ensembles fermés disjoints, $F_1, F_2, \ldots, F_h$, chacun d'eux contient au moins un point A_i. En effet, si F_1, par exemple, ne contenait aucun de ces points, E serait la somme de deux ensembles

(1) *Acta Math.*, t. 55, p. 70.

fermés disjoints F_1 et $E^D + F_2 + \ldots + F_h$. Ce qui est impossible. On a donc $h \leqq k$.

Ceci posé, si E_D n'est pas un continu, il ne peut se réduire à un seul point, car il possède un point intérieur à D; on le décomposera en deux ensembles fermés disjoints. Si l'un d'eux n'est ni un point unique, ni un continu, on le décomposera en deux ensembles fermés disjoints, et ainsi de suite. D'après la remarque précédente, l'opération s'arrêtera nécessairement, au plus tard, au bout de $k - 1$ opérations, car chaque fois le nombre des ensembles augmente au moins d'une unité. On aura alors un nombre fini d'ensembles fermés disjoints indécomposables. Ce sont des continus ou des points isolés, chacun d'eux contenant au moins un A_i. De plus, l'un d'eux au moins est un continu.

On obtient un résultat analogue pour E^D. Or, on a

$$E = E_D + E^D.$$

D'autre part, un point isolé d'un des ensembles E_D ou E^D ne peut être point isolé pour l'autre, sans quoi il serait point isolé de E. On peut donc, dans la décomposition précédente, réduire E_D et E^D aux seuls continus qu'ils contiennent, ce qui achève la démonstration.

De l'étude précédente, il découle aussi qu'*un continu ne peut avoir un point intérieur et un point extérieur à un domaine sans avoir un point sur la frontière.*

Le fait que E_D et E^D sont fermés est, en effet, indépendant de l'hypothèse relative aux points sur la frontière de D. Si E_D et E^D étaient disjoints, E ne serait pas un continu; d'autre part, ils ne peuvent avoir de point commun que sur la frontière du domaine.

Le Théorème I.

7. *Faisceau. Ordre par rapport à un faisceau.* — Nous pouvons maintenant aborder l'étude des continus qui font l'objet de ce travail. J'introduirai d'abord les notions de faisceau et d'ordre par rapport à un faisceau, la dernière a surtout pour but de simplifier les énoncés.

Un *faisceau d'arête* ω (dans l'espace à n dimensions) est un système de multiplicités linéaires à $n - 1$ dimensions ayant en commun la multiplicité à $n-2$ dimensions ω, située à distance finie ou non. Un faisceau est *complet* s'il renferme toutes les multiplicités (linéaires à $n-1$ dimensions) passant par l'arête. Un faisceau est *partout dense* si son dérivé contient tout l'espace.

On dira qu'un ensemble est d'*ordre borné*, d'ordre *fini*, ou bien d'ordre *punctiforme* par rapport à un faisceau si la section de l'ensemble par chaque multiplicité du faisceau contient un nombre borné, ou seulement fini de points, ou bien est un ensemble punctiforme [n° 2].

8. Dans le plan ($n=2$), un continu d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau partout dense est évidemment dépourvu de points intérieurs, c'est donc une courbe cantorienne [n° 4]. Ce cas est le seul où des hypothèses sur un faisceau unique partout dense, mais *non complet*, suffisent à prouver qu'un continu est une courbe. Dès que n surpasse 2, les multiplicités qui échappent à un tel faisceau peuvent renfermer des surfaces, des volumes, etc., si $n=2, 3, \ldots$. Il faudra donc au moins supposer que le continu est d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau complet. Je vais montrer que cette condition est suffisante pour que le continu soit une courbe cantorienne.

9. Je présenterai la démonstration de manière à obtenir un résultat utile pour la suite [n° 11].

Soit E un continu d'ordre punctiforme par rapport au faisceau complet C_ω, d'arête ω. Donnons-nous un faisceau partout dense, de même arête, D_ω. Je vais montrer que tout point M de E, à distance finie, est intérieur à un domaine Δ_M, intérieur à une sphère de centre M et de rayon donné ε, tel que les points de E situés sur sa frontière appartiennent à un nombre fini de multiplicités de D_ω.

On distinguera deux cas, suivant que M est en dehors de ω ou sur ω. Examinons d'abord la première hypothèse, et supposons ω à distance finie.

Appelons *bidièdre d'arête* ω le domaine balayé par une multiplicité linéaire à $n-1$ dimensions $\mathfrak{M}$, contenant ω, quand on la fait tourner autour de cette arête d'un angle α, moindre que π. Les positions extrêmes de $\mathfrak{M}$ sont les *faces* du bidièdre, elles en font partie. α est l'angle du bidièdre.

Ceci posé, soit M un point de E hors de ω. La section de E par la multiplicité $[\omega, M]$ de C_ω, qui passe par M, est un ensemble fermé punctiforme. On peut donc, d'après un théorème de M. Painlevé, étendu par M. L. Antoine (1), au cas d'un nombre quelconque de dimensions, trouver dans $[\omega, M]$ un domaine polyédral fermé V, dont la frontière S, sur $[\omega, M]$, ne contienne aucun point de E, cette frontière étant comprise entre les sphères de centre M de rayons $\frac{\varepsilon}{3}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$. Choisissons un bidièdre δ, d'arête ω, dont les faces appartiennent à D_ω et possédant $[\omega, M]$ à son intérieur. Faisons tourner V autour de ω, de part et d'autre de sa position initiale, de manière à l'amener sur les faces de δ sans sortir du bidièdre. V balayera un domaine Δ_M ayant M à son intérieur. La frontière de Δ_M est constituée par les positions extrêmes de V dans les faces de δ et par les points balayés par S. On peut choisir δ assez petit pour que cette dernière partie ne renferme aucun point de E, sans quoi S dans sa position initiale, sur $[\omega, M]$, contiendrait des points de E qui est fermé. Enfin, si δ est assez petit, Δ_M sera intérieur à la sphère de centre M de rayon ε. Δ_M satisfait donc aux conditions demandées. Si ω était à l'infini, il suffirait de modifier le raisonnement d'une manière évidente.

Supposons maintenant M sur ω, celle-ci est alors nécessairement à distance finie. Soit $\mathfrak{M}$ une multiplicité quelconque de C_ω. Le raisonnement précédent montre, en remplaçant $[\omega, M]$ par $\mathfrak{M}$, qu'on peut associer à cette multiplicité un domaine $\Delta_{\mathfrak{M}}$ satisfaisant aux conditions suivantes :

1° $\Delta_{\mathfrak{M}}$ est intérieur à la sphère de centre M de rayon ε;

2° Il appartient à un bidièdre $\delta_{\mathfrak{M}}$, ayant $\mathfrak{M}$ à son intérieur, dont les faces sont des multiplicités de D_ω, et contiennent tous les points de E, situés sur la frontière de $\Delta_{\mathfrak{M}}$;

3° Les points intérieurs à la fois à $\delta_{\mathfrak{M}}$ et à la sphère Σ de centre M de rayon $\frac{\varepsilon}{3}$, sont intérieurs à $\Delta_{\mathfrak{M}}$.

---

(1) L. ANTOINE, *Sur l'homéhomorphie de deux figures et de leurs voisinages*. Thèse, Strasbourg, 1921, p. 76.

M. L. Antoine considère des ensembles bornés. Cette restriction est sans importance ici, car les points d'un ensemble punctiforme quelconque non extérieurs à une sphère forment un ensemble punctiforme.

Cette dernière condition résulte du fait que S est extérieure à Σ.

D'après le lemme de Borel-Lebesgue, on pourra choisir un nombre fini de $\Delta_{\mathfrak{M}}$, de manière que leur somme Δ_M recouvre complètement Σ Les $\Delta_{\mathfrak{M}}$ étant en nombre fini, la frontière de $\Delta_{\mathfrak{M}}$ est formée de points appartenant aux frontières des $\Delta_{\mathfrak{M}}$. Le domaine Δ_M satisfait donc aux conditions demandées au début de ce numéro.

10. Si nous avions voulu démontrer seulement que E est une courbe cantorienne, il eût été évidemment inutile de faire intervenir le faisceau D_ω. Cette démonstration va être immédiate. Comme l'hypothèse est projective, il suffira d'établir que tout point M, de E à distance finie, est de dimension *un*, c'est-à-dire peut être ε-séparé, quel que soit ε, par un ensemble de dimension zéro [n° 4].

Soient A et D les ensembles des points de E respectivement intérieurs et extérieurs à Δ_M, B l'ensemble des points de E situés sur la frontière de Δ_M. Les points de B sont situés sur un nombre fini de multiplicités de C_ω, ils sont donc contenus dans un nombre fini d'ensembles fermés punctiformes. B est, par suite, punctiforme; il est d'autre part fermé ; c'est un ensemble de dimension zéro [n° 4].

La décomposition

$$E = A + B + D$$

satisfait aux conditions de l'ε-séparation.

1° A contient M;

2° $A \times \overline{D} + \overline{A} \times D = 0$, car $\overline{D}$ ne peut contenir de point intérieur à Δ_M, ni $\overline{A}$ de point extérieur à ce domaine [n° 1];

3° $A + B$ est intérieur à la sphère de centre M de rayon ε.

Comme B est de dimension zéro et ε aussi petit qu'on veut, la démonstration est achevée. Nous pouvons énoncer le

THÉORÈME I. — *Un continu d'ordre punctiforme, par rapport à un faisceau complet, est une courbe cantorienne.*

Le Théorème II.

11. Si, à l'hypothèse précédente, on ajoute que le continu est d'ordre fini par rapport à un faisceau partout dense de même arête, on

pourra affirmer que le continu est aussi une courbe de Jordan. D'une manière précise, nous allons justifier l'énoncé suivant :

THÉORÈME II. — *Un continu d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau complet et d'ordre fini par rapport à un faisceau partout dense de même arête est une courbe de Jordan, deux quelconques de ses points peuvent être joints sur lui par un arc simple. Si le continu n'a pas de point de ramification, il se réduit à une courbe simple.*

Ce théorème peut se démontrer directement par un procédé de découpage (utilisant la proposition préliminaire du n° 6) qui m'a servi à plusieurs reprises. Pour ne pas allonger la rédaction de ce travail, j'invoquerai un résultat que j'ai obtenu ailleurs. En se reportant aux n^{os} 10 à 14, de mon Mémoire : *Sur une propriété topologique intuitive, caractéristique d'une courbe de Jordan sans point double* (1), le lecteur constatera que les conclusions du théorème précédent sont valables pour un continu borné dont chaque point est intérieur à un domaine, intérieur à une sphère aussi petite qu'on veut, sur la frontière duquel le continu possède seulement un nombre fini de points.

Or, c'est précisément ce qui a lieu pour un continu borné E, d'ordre punctiforme par rapport à un faisceau complet C_ω et d'ordre fini par rapport à un faisceau partout dense D_ω de même arête. La frontière de Δ_M [n° 9] contient dans ce cas seulement un nombre fini de points de E.

12. Le Théorème II a donc besoin d'être établi seulement dans le cas où E n'est pas borné et ne peut le devenir par une transformation homographique convenable. D'autre part, il est immédiat que si le théorème est vrai pour chacun des continus distincts $E_1, E_2, \ldots, E_h$ en nombre fini tels que deux quelconques d'entre eux n'aient qu'un nombre fini de points communs, il est vrai pour leur somme si celle-ci est un continu.

Ceci posé, supposons, ce qui est permis, que l'arête ω soit à distance finie et désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points de E situés sur ω s'il y en a. On peut également supposer qu'ils sont à distance finie, ne

(1) *Mathematica*, vol. IV, p. 137.

faisant au besoin une transformation homographique convenable qui laisse ω invariante. Si ε est assez petit, les domaines Δ_{A_i} [n° 9] seront, complètement extérieurs les uns aux autres. Leur somme constituera un domaine R sur la frontière duquel E possèdera seulement un nombre fini de points. D'après la proposition préliminaire du n° 6, E est la somme d'un nombre fini de continus distincts, les uns de somme E_R sont non extérieurs à R, les autres E^R sont non intérieurs. Deux de ces continus ne peuvent se toucher que s'ils sont de catégories distinctes, et ils ont seulement un nombre fini de points communs. D'autre part, les continus de E^R sont sans point sur ω.

Si les points A_i n'existent pas, on a $E_R = o$, $E^R = E$. Considérons maintenant un bidièdre δ, dont les faces appartiennent à D_ω. E possède sur la frontière de δ seulement un nombre fini de points. Chaque continu de E^R sera donc décomposé par δ en un nombre fini de continus, les uns non extérieurs, les autres non intérieurs à ce bidièdre.

En définitive, E se trouvera décomposé en un nombre fini de continus distincts, deux quelconques d'entre eux n'ayant qu'un nombre fini de points communs, et répartis en trois groupes. Les uns E_1, E_2, ..., provenant de E_R sont bornés — ou n'existent pas —, les autres G_1, G_2, ...; H_1, H_2, ... n'ont pas de point sur ω et sont, les premiers non extérieurs à δ, les autres non intérieurs à ce bidièdre. Le Théorème II s'applique à chacun de ces continus. Il suffira de le vérifier pour G_1, par exemple.

Soit $\mathcal{M}$ une multiplicité de C_ω, extérieure à δ (c'est-à-dire dont tous les points, sauf ceux situés sur ω sont extérienrs à δ). G_1 n'a pas de point sur $\mathcal{M}$, par suite une transformation homographique dans laquelle l'homologue de $\mathcal{M}$ est la multiplicité (à $n - 1$ dimensions) de l'infini, transformera G_1 en un continu sans point à l'infini — donc borné (n° 5) — satisfaisant aux conditions du théorème. La démonstration est achevée.

Le Théorème III.

13. Si, dans l'énoncé du Théorème II, on suppose que *le continu est d'ordre fini par rapport au faisceau complet,* on aura une hypothèse plus restrictive, laquelle devra conduire à des conclusions plus précises. Il en est bien ainsi. Je vais montrer que, dans ce cas, *le con-*

tinu est décomposable en une infinité dénombrable d'arcs simples, deux quelconques d'entre eux ayant au plus un seul point commun, extrémité pour chacun d'eux, un même point appartenant à deux au plus de ces arcs.

Soit E un continu d'ordre fini par rapport au faisceau complet C_ω, et supposons — ce qui ne diminue pas la généralité — l'arête ω à distance finie. Pour simplifier le langage, j'introduirai quelques notations.

1° La lettre $\mathfrak{M}$ désignera toujours une multiplicité (à $n-1$ dimensions) de C_ω.

2° Soit G un ensemble d'ordre fini par rapport à C_ω, $p(\mathfrak{M}, G)$ représentera le nombre des points de G situés sur $\mathfrak{M}$. On a évidemment

$$p(\mathfrak{M}, G_1) \leqq p(\mathfrak{M}, G)$$

pour tout sous-ensemble G_1 de G.

3° Soit H un continu *sans point* sur ω, situé dans un bidièdre δ, d'arête ω. L'ensemble des $\mathfrak{M}$ passant par les points de H est un bidièdre, intérieur — au sens large — à δ [1]. On le désignera par (ω, H).

4° On dira qu'une somme d'arcs simples $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_i + \ldots$ possède la *propriété* (α), si deux λ_i quelconques se touchent en un point au plus, extrémité commune, et s'il est impossible de trouver trois λ_i ayant une même extrémité.

Il est immédiat que si l'on a une suite dénombrable de sommes

$$S_j = \lambda_1^j + \lambda_2^j + \ldots + \lambda_i^j + \ldots \qquad (j = 1, 2, \ldots),$$

chacune d'elles possédant la propriété (α), et telles que deux sommes S_j, $S_{j'}$ d'indices différents n'aient pas de point commun, les arcs λ_i^j pourront être rangés en une somme possédant la propriété (α).

---

[1] En effet, soient X et Y deux points à distance finie, pris respectivement dans les faces de δ. La $\mathfrak{M}$ passant par un point M de H, coupe le segment $\overline{XY}$ en un point m. La correspondance M — m est évidemment continue. L'ensemble des points m est donc un continu, c'est-à-dire un segment intérieur à $\overline{XY}$, au sens large (on suppose $\overline{XY}$ dans δ).

14. Il s'agit de montrer que le continu E est décomposable en une somme d'arcs simples possédant la propriété (α). La décomposition se fera en plusieurs étapes.

Supposons que E possède des points sur ω. Ces points sont en nombre fini, soient $A_1, A_2, \ldots, A_p$. Comme au n° 12 on déterminera des domaines Δ_{A_i} complètement extérieurs les uns aux autres. Chaque domaine découpe dans E un nombre fini de continus, l'un d'eux $\{A_i\}$ contient A_i et n'a aucun point extérieur à Δ_{A_i} (n° 6). Sur chaque $\{A_i\}$ prenons un point B_i. D'après le Théorème II, il existe sur $\{A_i\}$ un arc simple $\widehat{A_iB_i}$. On obtiendra ainsi p arcs simples sans point commun deux à deux, dont la somme $\mathcal{E}$ possède évidemment la propriété (α). De plus $\mathcal{E}$ est un ensemble *fermé* et la *différence* E — $\mathcal{E}$ *n'a pas de point sur* ω.

Lorsque E ne rencontre pas ω, $\mathcal{E}$ n'existe pas. Je vais montrer que, si l'ensemble E — $\mathcal{E}$ n'est pas nul, on peut trouver une décomposition

$$E = \mathcal{E} + E_1^1 + E_1^2 + \ldots + E_1^s + \ldots,$$

satisfaisant aux conditions suivantes :

1° Les E_i sont des continus distincts; chacun d'eux appartient à un bidièdre d'arête ω; leur somme n'a de point ni sur $\mathcal{E}$, ni sur ω;

2° E_1^i et E_1^j $(i \neq j)$ ne se touchent que si les bidièdres (ω, E_1^i) et (ω, E_1^j) sont contigus. Ces bidièdres ont alors une seule face commune, qui contient nécessairement les points communs aux deux continus.

Lorsque $\mathcal{E}$ est nul, la suite $E_1^1, E_1^2, \ldots$ contient un nombre fini de termes.

15. Partageons l'espace en deux bidièdres égaux d'arête ω, δ_1^1 et δ_1^2. De même, partageons chacun d'eux en deux bidièdres égaux, nous en obtiendrons quatre $\delta_2^1, \delta_2^2, \delta_2^3, \delta_2^4$. Partageons chacun d'eux en deux bidièdres égaux, et ainsi de suite. On obtiendra de la sorte des bidièdres δ_i^j $(i = 1, 2, \ldots, s, \ldots; j = 1, 2, \ldots, 2^i)$. Deux de ces bidièdres n'empiètent pas. S'ils sont contigus, ils ont une seule face commune, sauf si les deux bidièdres sont δ_1^1 et δ_1^2.

D'après la proposition préliminaire du n° 6, δ_1^1 et δ_1^2 découpent le continu E en un nombre fini de continus distincts, deux d'entre eux ne se touchant que s'ils sont dans des bidièdres différents [il suffit de prendre pour domaine D (n° 6) l'un des bidièdres]. Si E était tout entier dans l'un des bidièdres, le découpage donnerait un seul continu. De même, chaque subdivision d'un δ_i^j, en deux bidièdres égaux découpera tout continu de ce domaine en un nombre fini de continus satisfaisant à la condition précédente.

Considérons les continus découpés dans E par les 4 bidièdres δ_2^j, et retenons ceux — s'il y en a — qui n'ont aucun point sur $\mathcal{E}$. Si $\mathcal{E}$ est nul on les retiendra tous et l'on arrêtera l'opération. Supposons $\mathcal{E}$ différent de zéro. Les continus non retenus sont découpés par les δ_3^j en un nombre fini de continus, retenons ceux qui n'ont aucun point commun avec $\mathcal{E}$, et ainsi de suite. On obtiendra une suite dénombrable de continus E_1^1, E_1^2, ... dont la somme $E_1^1 + E_1^2 + \ldots$ n'a aucun point commun avec E. Je dis que l'on a

$$E = \mathcal{E} + E_1^1 + E_1^2 + \ldots + E_1^i + \ldots.$$

C'est évident si $\mathcal{E}$ est nul. Plaçons-nous dans l'autre hypothèse. Si le second membre de l'égalité précédente n'épuisait pas E, il y aurait sur lui un point M, en dehors de $\mathcal{E}$, n'appartenant à aucun des E_1^i. Je vais montrer que ceci est impossible. On peut supposer M à distance finie, en faisant au besoin une transformation homographique convenable laissant ω invariante. A chaque opération, M appartient à un ou plusieurs continus de subdivision ; s'il échappe à la décomposition précédente, c'est que tous ces continus contiennent des points de $\mathcal{E}$. On peut donc former une suite indéfinie de ces continus $\gamma_1, \gamma_2, \ldots$ appartenant à des bidièdres δ_i^j, intérieurs les uns aux autres. Ces bidièdres ont pour limite la $\mathfrak{M}$ qui passe par M, soit $\mathfrak{M}_M$. Dans cette multiplicité, M est point isolé de la section $E \times \mathfrak{M}_M$. Il existe alors une sphère de centre M, dont la frontière Σ ne contient aucun point de cette section ; de plus on peut choisir cette sphère assez petitep our que $\mathcal{E}$ soit à son extérieur, car M est en dehors de l'ensemble fermé $\mathcal{E}$. D'après la remarque faite à la fin du n° 6, chaque γ_i ayant un point intérieur et un point extérieur à la sphère, possède au moins un point M_i sur sa frontière Σ. La suite M_i a au moins un point d'accumulation, lequel est sur Σ et sur $\mathfrak{M}_M$, et aussi sur E, puisque E est fermé. Il y a contradiction.

Il est immédiat que les E_1^i satisfont à la première condition du n° 14. Reste à vérifier la seconde. Considérons deux continus E_1^i et E_1^j, que nous appellerons, pour simplifier, c et c_1. Chacun d'eux appartient à un δ_i^j bien déterminé, soient respectivement δ et δ_1. D'après ce qui a été dit au début du présent numéro, δ et δ_1 n'empiètent pas, et s'ils sont contigus, ils ont une seule face commune (ce sont des δ_i^j d'indice $i \geqq 2$). Supposons que c et c_1 se touchent, alors δ et δ_1 sont ou bien l'un intérieur à l'autre — au sens large — ou bien contigus, car c et c_1 n'ont pas de point sur ω. La première alternative est impossible. En effet, supposons par exemple δ_1 intérieur à δ. La somme $c+c_1$ appartient à ce dernier bidièdre et ne contient aucun point de $\mathcal{E}$, elle aurait donc dû être retenue à la place de c. Si δ et δ_1 sont contigus, (ω, c) et (ω, c_1) le sont aussi. D'autre part ces derniers bidièdres ne peuvent avoir en commun que la face commune à δ et δ_1.

La proposition du n° 14 est complètement établie.

16. Nous allons maintenant prélever sur chaque E_1^i avec un arc simple l_1^i, qui jouera le rôle du continu $\mathcal{E}$ de la décomposition précédente, de manière qu'une $\mathfrak{M}$ ne puisse couper $E_1^i - l_1^i$ sans rencontrer l'arc. On décomposera ainsi $E - \mathcal{E}$ en une infinité dénombrable d'arcs simples et une infinité dénombrable de continus E_2^1, E_2^2, ... On prélèvera sur chacun d'eux un arc simple comme précédemment, et ainsi de suite. On obtiendra de la sorte une infinité dénombrable d'arcs possédant la propriété (α), qui épuisera la différence $E - \mathcal{E}$, à cause de la condition imposée aux arcs.

Pour le montrer, considérons d'abord un continu E_s^i *sans point sur* ω, *appartenant à un bidièdre d'arête* ω, et d'ordre fini par rapport à C_ω. Prenons deux points A et B respectivement dans les faces de (ω, E_s^i). D'après le théorème II, il existe sur E_s^i un arc simple $\widehat{AB}$. Cet arc a un nombre fini de points dans chacune des faces; on peut donc trouver sur lui un arc pa tiel l_s^i n'ayant qu'un seul point, une extrémité dans chacune des faces. Comme au n° 15, on pourra décomposer la différence $E_s^i - l_s^i$ en une infinité dénombrable de continus, et la décomposition

$$E_s^i = l_s^i + \gamma_{s,1}^i + \gamma_{s,2}^i + \ldots + \gamma_{s,s}^i + \ldots$$

satisfait aux conditions suivantes :

1° Les $\gamma_{s,j}^i$ sont des continus distincts, chacun d'eux appartient à un bidièdre d'arête ω. Leur somme n'a de point ni sur l_s^i ni sur ω;

2° $\gamma_{s,j}^i$ et $\gamma_{s,k}^i$ ne se touchent que si les bidièdres $(\omega, \gamma_{s,j}^i)$ et $(\omega, \gamma_{s,k}^i)$ sont contigus. Leurs points communs sont dans la seule face commune aux deux bidièdres;

3° Les bidièdres (ω, E_s^i) et (ω, l_s^i) sont confondus;

4° l_s^i est un arc simple ayant un point et un seul, une extrémité dans chaque face de (ω, l_s^i).

Les deux premières conditions sont celles du n° 14. Les deux dernières résultent de la manière dont a été choisi l'arc.

Pour simplifier l'écriture j'appellerai quelquefois (ω, E^i) le bidièdre de E_s^i, (ω, l_s^i) le bidièdre de l_s^i, etc.

17. La décomposition de $E - \mathcal{E}$, annoncée au début du numéro précédent, va se faire maintenant au moyen d'une suite d'égalités, qui mettront ses propriétés en évidence.

On a

$$E = \mathcal{E} + E_1^1 + E_1^2 + \ldots$$

ou encore

$$E = \mathcal{E} + E_1, \qquad E_1 = E_1^1 + E_1^2 + \ldots.$$

D'après le numéro précédent, on pourra écrire

$$E_1^i = l_1^i + \gamma_{1,1}^i + \gamma_{1,2}^i + \ldots + \gamma_{1,s}^i + \ldots.$$

En ordonnant les γ en une suite dénombrable il viendra

$$E_1 = l_1^1 + l_1^2 + \ldots + E_2^1 + E_2^2 + \ldots,$$

où les E_2^i ne sont autres que les γ. Nous poserons

$$\mathcal{E}_1 = l_1^1 + l_1^2 + \ldots, \qquad E_2 = E_2^1 + E_2^2 + \ldots$$

et ainsi de suite. Nous obtiendrons alors les égalités successives :

$$(1)\quad \left\{\begin{array}{lll} E = \mathcal{E} + E_1, & & E_1 = E_1^1 + E_1^2 + \ldots; \\ E_1 = \mathcal{E}_1 + E_2, & \mathcal{E}_1 = l_1^1 + l_1^2 + \ldots, & E_2 = E_2^1 + E_2^2 + \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \\ E_s = \mathcal{E}_s + E_{s+1}, & \mathcal{E}_s = l_s^1 + l_s^2 + \ldots, & E_{s+1} = E_{s+1}^1 + E_{s+s}^2 + \ldots; \\ \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right.$$

où chaque fois

$$(2)\qquad E_s^i = l_s^i + \gamma_{s,1}^i + \gamma_{s,2}^i + \ldots,$$

les E_{s+1}^i n'étant autres que les $\gamma_{s,j}^i$ (s = const.) ordonnés d'une certaine manière.

On constate aisément, de proche en proche, que chaque E_s^i satisfait aux hypothèses du numéro précédent, par suite la décomposition (2) satisfait, quels que soient s et i, aux propriétés énoncées dans ce n° 16.

Il est immédiat que $\mathcal{E}$ et E_1 sont sans point commun, ainsi que $\mathcal{E}_s$ et E_{s+1}, quel que soit s. D'où il résulte que *deux ensembles $\mathcal{E}$, avec ou sans indice, n'ont pas de point commun.*

Je vais montrer que l'on a

$$(3)\qquad E = \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \mathcal{E}_s + \ldots,$$

c'est-à-dire que la suite des ensembles $\mathcal{E}$ épuise E. C'est évident si, pour une certaine valeur de s, E_{s+1} est nul. Supposons que E_{s+1} existe quel que soit s. Si un point M échappait à la décomposition (3), il appartiendrait nécessairement à tous les E_s. Ceci est impossible. En effet :

Soit $\mathfrak{M}$ la multiplicité de C_ω passant par M [1]. $\mathfrak{M}$ rencontre E_{s+1}, donc un $\gamma_{s,j}^i$ et par suite $\mathcal{E}_s$ en un point au moins, situé sur l_s^i (les bidièdres de E_s^i et l_s^i étant confondus une $\mathfrak{M}$ ne peut rencontrer un $\gamma_{s,q}^i$ sans couper l_s^i [n° 14, 3°]). Comme d'autre part E_{s+1} et $\mathcal{E}_s$ sont sans point commun, on a nécessairement

$$p(\mathfrak{M}, E_{s+1}) \leqq p(\mathfrak{M}, E_s) - 1$$

---

[1] M n'est par sur ω, car les seuls points de E situés sur cette arête appartiennent à $\mathcal{E}$ (n° 14).

quel que soit s. On en déduit de proche en proche

$$1 \leqq p(\mathfrak{M}, E_{s+1}) \leqq p(\mathfrak{M}, E_1) - s.$$

D'où

$$p(\mathfrak{M}, E_1) \geqq s + 1.$$

Comme $\mathfrak{M}$ est fixe et que E_1 est d'ordre fini par rapport à C_ω, il y a contradiction, car s est aussi grand qu'on veut.

18. Considérons maintenant deux continus E_s^i et E_s^j. Je vais montrer qu'ils se touchent seulement si leurs bidièdres sont contigus, les points communs se trouvant dans la seule face commune aux deux bidièdres. C'est vrai pour $s = 1$ [n° 14]. On va procéder par récurrence. Supposons la propriété vérifiée jusqu'à l'indice s. Soient E_{s+1}^i et E_{s+1}^j. Si ces deux continus proviennent du même E_s^k ils possèdent la propriété annoncée (n° 16, 2°). Supposons qu'ils proviennent de $E_s^{i'}$ et de $E_s^{j'}$ $(i' \neq j')$. Ces deux continus se touchent nécessairement, leurs bidièdres sont donc contigus. Les bidièdres de E_{s+1}^i et E_{s+1}^j qui leur sont respectivement intérieurs sont alors contigus, E_{s+1}^i et E_{s+1}^j se touchent seulement dans la seule face commune à $(\omega, E_s^{i'})$ et $(\omega, E_s^{j'})$.

Le résultat qui vient d'être obtenu va nous permettre d'établir que *chaque suite d'arcs simples*

$$\mathcal{E}_s = l_s^1 + l_s^2 + \ldots \qquad (s = 1, 2, \ldots)$$

possède la propriété (α) (n° 13).

l_s^i et l_s^j se touchent seulement si E_s^i et E_s^j se touchent, or les bidièdres de l_s^i et l_s^j sont respectivement ceux de E_s^i et E_s^j (n° 16, 3°).

Comme chaque arc l_s^i a un seul point, une extrémité dans chaque face de son bidièdre (n° 16, 4°), si l_s^i et l_s^j se touchent, ils ont un seul point commun, extrémité commune et leurs bidièdres sont contigus. Cette dernière condition empêche que trois l_s aient une même extrémité.

En définitive, nous avons obtenu une décomposition

$$E = \mathcal{E} + \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2 + \ldots$$

dans laquelle :

1° Deux termes quelconques n'ont aucun point commun ;

2° Chaque terme est une somme d'arcs simples possédant la propriété (α).

La proposition en vue est donc complètement démontrée (n° 13, 4°). C'est le

THÉORÈME III. — *Un continu d'ordre fini par rapport à un faisceau complet est une courbe de Jordan décomposable en un nombre fini d'arcs simples tels que deux quelconques d'entre eux aient au plus un point commun, extrémité pour chacun d'eux, laquelle ne peut appartenir à un troisième arc.*

Le Théorème IV.

19. Dans certains cas simples les arcs de la décomposition précédente peuvent constituer un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun deux à deux que des extrémités. Ceci a lieu nécessairement lorsque le continu est d'*ordre borné par rapport au faisceau, n'a pas de point sur l'arête et possède seulement un nombre fini de points de ramifications.*

Il est facile de montrer, par un exemple, que la restriction relative à l'absence de points sur l'arête du faisceau est indispensable, et qu'on ne peut non plus supposer seulement le continu d'ordre fini par rapport au faisceau.

Supposons $n = 2$. Soit, dans le plan, une demi-circonférence Γ d'extrémités O et A_0, ayant Ox pour tangente en O. Considérons la suite de points de Γ, $A_1, A_2, \ldots, A_s, \ldots$ obtenus successivement de la manière suivante :

OA_{i+1} est la bissectrice de l'angle $\widehat{xOA_i}$. Ceci posé, dans chaque angle $\widehat{A_iOA_{i+1}}$, traçons un arc de circonférence $\widehat{OA_{i+1}}$, ayant tous ses points — sauf ses extrémités — intérieurs à l'angle. La somme $\widehat{OA_1} + \widehat{OA_2} + \ldots + \widehat{OA_i} + \ldots$ ne peut être décomposée en un nombre fini d'arcs simples, or c'est un contenu d'ordre *deux* par rapport au faisceau complet de sommet O (il a dans ce cas un point sur l'arête), et d'ordre fini par rapport au faisceau complet des parallèles à Ox (il n'a dans ce cas aucun point sur l'arête).

20. Considérons donc un *continu* E *d'ordre borné* k *par rapport au faisceau complet* C_ω, *sans point sur l'arête* ω, *et n'ayant qu'un nombre fini de points de ramification.* On supposera encore ω à distance finie.

Pour établir la propriété annoncée, il suffira de montrer que toute multiplicité $\mathfrak{M}$ de C_ω est *intérieure* à un bidièdre δ d'arête ω, tel que l'ensemble E_δ des points de E non extérieurs à δ soit nul ou bien formé d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités. En effet, comme le montre un raisonnement classique, on pourra partager l'espace en un nombre fini de bidièdres δ_i, tels que les E_{δ_i} satisfassent à la propriété précédente.

Soit $\mathfrak{M}$ une multiplicité de C_ω. Si E n'a pas de point sur $\mathfrak{M}$, on pourra trouver un bidièdre δ d'arête ω tel que E_δ ne contienne aucun point de E.

Supposons que $\mathfrak{M}$ rencontre E, et désignons par $A_1, A_2, \ldots, A_p$ les points de rencontre ($p \leqq k$).

Dans ce qui va suivre les lettres Δ ou δ, affectées ou non d'indices ou d'accents désigneront des bidièdres ayant $\mathfrak{M}$ à leur intérieur. D'après le n° 6 l'ensemble E_Δ des points non extérieurs à Δ est formé d'un nombre fini de continus, et éventuellement de points isolés, situés sur la frontière, que nous négligerons. Chaque point A_i appartient à un continu de E_Δ, que l'on désignera par $\alpha_i(\Delta)$.

Si Δ est assez petit, les $\alpha_i(\Delta)$ sont distincts. En effet, supposons que $\alpha_i(\Delta)$, par exemple, contienne un des points $A_2, \ldots$, aussi petit que soit Δ. En faisant au besoin une transformation homographique convenable, laissant ω invariant, on pourra supposer A_1 à distance finie. Traçons une sphère de centre A_1 ayant tous les autres A_i à son extérieur, soit Σ sa frontière. $\alpha_1(\Delta)$ a un point au moins sur Σ, aussi petit que soit Δ, ce qui exige que E ait un point sur $\mathfrak{M}$ et sur Σ, ce qui est impossible.

Enfin, si Δ est suffisamment petit, il ne contiendra pas de point de ramification, en dehors de ceux qui pourraient se trouver sur $\mathfrak{M}$.

Ces conditions réalisées, prenons un continu $\alpha_i(\Delta)$, et pour simplifier l'écriture supprimons l'indice i. Il existe sur $\alpha(\Delta)$ un point B, en dehors de $\mathfrak{M}$; joignons-le à A par arc simple $\widehat{AB}$ (Théorème II). Soit Δ_1 un bidièdre, intérieur à Δ, tel que B soit à son extérieur. Δ_1 découpe dans $\alpha(\Delta)$ un nombre fini de continus, l'un deux $\alpha(\Delta_1)$ contient A. $\widehat{AB}$ ayant un point intérieur et un point extérieur à Δ_1 est coupé par la frontière de ce dernier (n° 6), en un certain nombre fini de points. Il existe donc sur la frontière de Δ_1 un point B_1 de $\widehat{AB}$, tel que l'arc partiel $\widehat{AB_1}$ de $\widehat{AB}$ appartienne à Δ_1, tandis qu'un certain arc partiel $\widehat{B_1B'}$ de $\widehat{B_1B}$ — toujours sur $\widehat{AB}$ — n'a dans Δ_1 que le point B_1. L'arc $\widehat{AB_1}$ fait partie de $\alpha(\Delta_1)$. Supposons que ce continu possède un point C en dehors de l'arc; et considérons sur $\alpha(\Delta_1)$ un arc simple $\widehat{AC}$. Désignons par C_1 la borne du côté de A des points C' tels que l'arc partiel $\widehat{C'C}$ de $\widehat{AC}$ n'ait aucun point sur $\widehat{AB_1}$. L'arc $\widehat{C_1C}$ n'a en commun avec $\widehat{AB_1}$ que le point C. Il est immédiat que C_1 doit être confondu avec A, sans quoi E posséderait un point de ramification C_1 dans Δ et en dehors des points A_i, ce qui est contraire à l'hypothèse faite sur Δ. L'arc $\widehat{AC}$ n'a donc en commun avec $\widehat{AB_1}$ que le point A. Soit alors Δ_2 un bidièdre intérieur à Δ, ayant B_1 et C à son extérieur. Comme précédemment on pourra trouver respectivement sur $\widehat{AB_1}$ et $\widehat{AC}$ des points B_2, B'_2 et C_2, C'_2 tels que les arcs $\widehat{AB_2}$ et $\widehat{AC_2}$ appartiennent à Δ_2, tandis que $\widehat{B_2B'_2}$ et $\widehat{C_2C'_2}$ n'y ont respectivement que B_2 et C_2. $\widehat{AB_2}+\widehat{AC_2}$ fait partie de $\alpha(\Delta_2)$. En raisonnant comme plus haut, on verrait que si $\alpha(\Delta_2)$ contient des points en dehors de $\widehat{AB_2}+\widehat{AC_2}$, il existe sur lui un arc $\widehat{AD}$ n'ayant que le point A en commun avec cette dernière somme; et ainsi de suite. Au bout de r opérations, on obtiendra un bidièdre Δ_r tel que $\alpha(\Delta_r)$ contienne r arcs simples n'ayant en commun deux à deux que A. Soit alors Δ' un bidièdre intérieur à Δ_r ayant à son extérieur les r extrémités de ces arcs. La frontière de Δ' coupe chacun d'eux en un point au moins. Ces points sont distincts et aucun d'eux n'est sur ω. Il faut donc que r soit au plus égal à $2k$.

21. En résumé pour chaque point A_i on peut trouver un bidièdre δ_i, tel que $\alpha_i(\delta_i)$ se compose d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités. Si l'on prend δ intérieur à tous les δ_i, les continus $\alpha_i(\delta)$ posséderont la même propriété. Considérons alors l'ensemble E_δ, découpé dans E par δ, il se compose des $\alpha_i(\delta)$ tous distincts et d'un nombre fini d'autres continus sans point commun

avec les premiers, et par suite avec $\mathfrak{M}$ (il y a éventuellement des points isolés situés sur la frontière de δ). On pourra donc trouver un bidièdre δ' intérieur à δ, tel $E_{\delta'}$ contienne seulement des points appartenant aux $\alpha_i(\delta)$. $E_{\delta'}$ se composera alors d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun que des extrémités, et éventuellement de points isolés situés sur la frontière de δ', qu'on pourra évidemment négliger.

La démonstration est achevée, et l'on a bien le

THÉORÈME IV. — *Si un continu d'ordre borné par rapport à un faisceau complet n'a pas de point sur l'arête et possède seulement un nombre fini de points de ramification, il est la somme d'un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun deux à deux que des extrémités.*

On remarquera que *la conclusion précédente subsiste si l'on suppose seulement le continu d'ordre fini par rapport au faisceau, pourvu que l'on sache qu'en chaque point de ramification* O *aboutissent seulement un nombre fini d'arcs simples n'ayant en commun deux à deux que* O. Les autres hypothèses étant bien entendu conservées.