JEAN FAVARD

Problèmes d'extremums relatifs aux courbes convexes (deuxième mémoire : « Les couvercles »)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 311-324
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__311_0>

PROBLÈMES D'EXTREMUMS

RELATIFS AUX COURBES CONVEXES

(DEUXIÈME MÉMOIRE : LES COUVERCLES)

PAR M. J. FAVARD

1. C'est M. Lebesgue [1] qui a introduit l'expression de *couvercle* et il a distingué plusieurs problèmes de ce genre. Nous traiterons ici quelques cas particuliers du problème général suivant :

Étant donné un ensemble de courbes fermées, trouver la plus petite courbe de forme donnée à l'intérieur de laquelle on peut mettre toutes ces courbes, ou bien encore à l'intérieur de laquelle on peut faire tourner toutes ces courbes.

Nous résoudrons aussi quelques autres problèmes dont l'énoncé va être précisé.

2. Soient (c) et (Γ) deux courbes convexes, bornées et fermées, données dans un plan. Parmi toutes les courbes homothétiques à (Γ) et qui contiennent à leur intérieur tous les points intérieurs à (c), nous choisirons celles dont le rapport d'homothétie à (Γ) est le plus petit possible et nous les appellerons les courbes *circonscrites* à (c). Un sens de parcours ayant été choisi sur (c) et ses droites d'appui

[1] *Sur quelques questions de minimum...* (*Journal de Math.*, 8e série, t. IV, 1921, p. 67-96). Dans ce Mémoire M. Lebesgue détermine, parmi toutes les orbiformes de largeur donnée, celle qui a la plus petite aire. Il m'avait échappé, lors de la rédaction de mon premier Mémoire sur les courbes convexes, que, dès 1914, M. Lebesgue avait effectué cette détermination (*Bulletin de la Société mathématique de France*, Comptes rendus des séances de l'année 1914, p. 72-76).

orientées, on voit facilement que les directions d'appui communes à (c) et à l'une de ses circonscrites ne peuvent être dans un même demi-plan ouvert et cette condition est aussi suffisante; il suit de là que (c) ne pourra avoir plusieurs circonscrites que si, dans la frontière de (Γ), figurent deux segments de droite parallèles.

D'une manière analogue, parmi les courbes convexes homothétiques à (Γ) et dont l'intérieur est à l'intérieur de (c) nous choisirons celles dont le rapport d'homothétie à (Γ) est le plus grand possible et nous les appellerons les *inscrites* à (c). Comme précédemment les directions d'appui communes à (c) et à l'une de ses inscrites ne sont pas dans un demi-plan ouvert et (c) ne pourra avoir plusieurs inscrites que si sa frontière comporte deux segments de droite parallèles; et l'on peut conclure de là que si une courbe a plus d'une circonscrite, elle n'a qu'une inscrite et inversement.

3. Cela posé, les problèmes auxquels nous fournirons une réponse, dans certains cas, sont les suivants :

Étant donnés un ensemble (E) de courbes convexes, définies à une translation près, et une courbe convexe (Γ), on peut se proposer les quatre problèmes suivants :

I. Trouver la plus *grande* des circonscrites aux courbes de l'ensemble (E) et homothétiques à (Γ) (couvercle direct).

I'. Trouver la plus *petite* de ces circonscrites (couvercle inverse).

II. Trouver la plus *petite* des inscrites aux courbes de l'ensemble (E) et homothétiques à (Γ) (couvercle direct).

II'. Trouver la plus *grande* de ces inscrites (couvercle inverse).

L'ensemble (E) sera l'ensemble des courbes de surface donnée et dont l'aire mixte avec une courbe donnée (C) est connue.

4. Les problèmes II et II' peuvent être facilement résolus lorsque (C) est homothétique à (Γ) et leur solution est connue. Quant au problème I, il peut être, théoriquement, résolu et assez facilement dans ce même cas, et même dans des cas plus étendus, et c'est un problème régulier de calcul des variations. Pour le voir il suffit d'opérer comme je l'ai fait dans ma Note aux *Comptes rendus* du

6 mai 1929 : on cherche l'extremum régulier d'une combinaison linéaire de deux fonctionnelles et cette recherche peut être faite au moyen des méthodes propres du calcul des variations; les inégalités obtenues, au moyen de considérations géométriques, ne sont que la traduction de celles obtenues par la méthode de Weierstrass.

Le problème I' [comme le problème II'] est un problème irrégulier, on trouvera ci-dessous sa solution dans un cas; le résultat est fort compliqué et est obtenu par la méthode que j'ai proposée dans mon premier Mémoire (¹) pour résoudre certains problèmes irréguliers.

Je n'apporte pas ici de méthode nouvelle et, pour cette raison, je ne ferai pas de développements analytiques; j'apporte seulement quelques résultats qui, je l'espère, pourront intéresser quelques lecteurs.

5. *Le cas du cercle.* — Nous appellerons ainsi le cas où la courbe (C) du n° 3 est un cercle. L'ensemble (E) est alors constitué par les courbes convexes de longueur L et surface S données. Nous allons résoudre les problèmes dont nous avons parlé d'abord dans le cas où (Γ) est aussi un cercle.

Problème I. — Dans ma Note aux *Comptes rendus* du 6 mai 1929, j'ai résolu ce problème et, grâce à la bienveillance de M. Bonnesen, j'ai pu reproduire cette Note à la fin de son livre (²). Je vais donner ici une autre solution de ce problème, solution plus courte que celle que j'ai déjà donnée et que je présenterai sous une forme synthétique.

Grossièrement il semble bien que le rayon $R = Lf\left(\frac{S}{L^2}\right)$ du plus petit cercle où l'on puisse mettre toutes les courbes convexes fermées de longueur L et de surface S soit tel que le rapport $\frac{R}{L}$ soit une fonction non croissante du rapport $\frac{S}{L^2}$.

Si l'on considère alors la lentille symétrique (figure commune à

(¹) *Problèmes d'extremums relatifs aux courbes convexes* (premier Mémoire) (*Annales de l'École Normale sup.*, 1929, p. 345-369).

(²) *Les problèmes des isopérimètres et des isépiphanes* (Collection de M. Borel; Gauthier-Villars, 1929).

deux cercles sécants de rayons égaux) de longueur L et de surface S, le rayon R_1 de son cercle circonscrit est déterminé de la façon suivante : on cherche d'abord θ tel que

$$\frac{S}{L^2} = \frac{2\theta - \sin 2\theta}{16\theta^2} \qquad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right),$$

puis R_1 est donné par

$$R_1^2 = \frac{L^2 \sin^2\theta}{16\theta^2} = \frac{S \sin^2\theta}{2\theta - \sin 2\theta}.$$

Posons

$$R_1 = L\,\varphi\left(\frac{S}{L^2}\right),$$

on constate alors que le rapport $\frac{R_1}{L}$ est une fonction décroissante de $\frac{S}{L^2}$.

Considérons maintenant une courbe (c) de longueur L et de surface S convexe, soit $R(c)$ le rayon de son cercle circonscrit et soit (P, ρ) sa couronne minima. Appliquons à la courbe (c) le procédé de symétrisation de M. Bonnesen (*voir* son livre), nous obtenons une autre courbe (c') de même aire mais de longueur non supérieure qui, peut-être n'est pas convexe. Mais alors l'enveloppante convexe (c'') de (c') a une longueur L'' non supérieure à L et une aire S'' non inférieure à S; de plus (c'') a même couronne minima que (c) mais les cercles de cette couronne sont alors respectivement les cercles inscrits et circonscrits à (c''); on a alors

$$R(c) \leqq P = R(c'').$$

De plus (c'') est symétrique par rapport à deux axes rectangulaires qui passent par le centre de la couronne et sur lesquels se trouvent des points de contact de (c'') avec les deux cercles de la couronne.

A cause de la propriété isopérimétrique de l'arc de cercle, toutes les courbes convexes symétriques par rapport aux centres de la couronne, qui passent par deux points diamétralement opposés du grand cercle et de longueur donnée L'', ont une aire moindre que l'aire S_1 de la lentille symétrique, donc

$$R(c'') = R_1(L'', S_1) = L''\,\varphi\left(\frac{S_1}{L''^2}\right),$$

d'où

$$R(c) \leqq L''\,\varphi\left(\frac{S_1}{L''^2}\right) \leqq L\,\varphi\left(\frac{S_1}{L^2}\right) \leqq L\,\varphi\left(\frac{S}{L^2}\right) = R_1(L, S);$$

finalement

$$R(c) \leqq R_1(L, S).$$

Pour que l'égalité ait lieu, il est nécessaire qu'elle ait lieu dans toutes les inégalités précédentes, c'est-à-dire que la courbe (c'') doit être une lentille de longueur L et de surface S et il doit en être de même de (c') donc de (c).

6. Le résultat obtenu peut être étendu aux courbes fermées non convexes et même à des ensembles plus généraux. Soit E un ensemble de points quarrable d'aire S ne comprenant que des points intérieurs, $\overline{E}$ l'ensemble des points limites de E qui ne font pas partie de E; nous supposerons que l'ensemble fermé $E + \overline{E}$ est bien enchaîné, c'est-à-dire que E se compose des points intérieurs à une ou plusieurs courbes, ou même à une infinité de courbes, et que l'on peut joindre par un chemin continu formé de points de l'ensemble $E + \overline{E}$ deux points quelconques de cet ensemble. Nous supposerons que $\overline{E}$ a une mesure linéaire finie l et à $E + \overline{E}$ nous ajouterons un ensemble $\mathcal{E}$ de points bien enchaîné avec le précédent et tel que l'on puisse joindre deux points quelconques de l'ensemble $E + \overline{E} + \mathcal{E}$ par une ligne continue formée de points de cet ensemble. De $\mathcal{E}$ nous supposons de plus qu'il a une mesure linéaire, soit $\mathcal{L}$. Comme cela est naturel, nous compterons deux fois cette longueur dans la mesure linéaire de $\overline{E} + \mathcal{E}$ que, par suite, nous prendrons égale à $l + 2\mathcal{L} = L$. Considérons alors l'enveloppante convexe de $E + \overline{E} + \mathcal{E}$, elle a une longueur $L' \leqq L$ et une aire $S' \geqq S$ et, pour le rayon $\mathcal{R}$ de son cercle circonscrit on a

$$\mathcal{R} \leqq R_1(L', S') \leqq R_1(L, S).$$

Avec les conventions précédentes nous pouvons donc dire que l'on peut mettre toutes les courbes de longueur L et de surface S données à l'intérieur du cercle de rayon $R_1(L, S)$.

7. *Problème I'.* — Il s'agit, ici, de déterminer, parmi toutes les courbes convexes de longueur L et de surface S données, celle dont le rayon du cercle inscrit est le plus faible. Dans mon premier Mémoire

(*loc. cit.*) j'ai démontré (p. 364) l'inégalité suivante où R désigne le rayon du cercle circonscrit à la courbe

$$(1)\qquad (1+\cos u)\mathrm{RL}-\mathrm{S}\leqq(n-1)\mathrm{R}^2\sin u(2+\cos u)$$
$$+\mathrm{R}^2\sin[\pi-(n-1)u]\{2+2\cos u-\cos[\pi-(n-1)u]\}$$

lorsque

$$\frac{\pi}{n-1}>u\geqq\frac{\pi}{n}\qquad(n\text{ entier}),$$

inégalité valable quel que soit u compris entre o et $\frac{\pi}{2}$.

Pour une valeur déterminée de u le signe d'égalité n'est valable que lorsque la courbe se réduit à un polygone de n côtés inscrit dans un cercle de rayon R et qui a $n-1$ côtés égaux ayant chacun u comme demi-angle au centre.

Posons

$$\varepsilon_n=\frac{\mathrm{S}_n}{\mathrm{L}_n^2},$$

où S_n et L_n désignent l'aire et le périmètre du polygone régulier de n côtés et convenons de dire qu'un segment de droite est un polygone régulier à deux côtés ($\varepsilon_2=0$); le nombre ε_n croît avec n.

Considérons maintenant les courbes de longueur L et de surface S données et supposons que

$$\varepsilon_{n-1}<\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{L}^2}\leqq\varepsilon_n.$$

Parmi ces courbes il existe alors un polygone $\mathfrak{T}$ à n côtés, inscriptible à un cercle, dont $n-1$ côtés au moins sont égaux, tandis que le dernier côté ne surpasse pas chacun des $n-1$ autres. En désignant par u le demi-angle au centre des $n-1$ côtés égaux, l'inégalité (1) deviendra une égalité pour cette valeur de u et lorsque la courbe est le polygone $\mathfrak{T}$. On vérifie facilement que la valeur de R correspondante est la plus grande des deux racines de l'équation du second degré obtenue en égalant les deux membres de (1), donc pour toute courbe convexe (c) de longueur L et de surface S on a

$$\mathrm{R}(c)\geqq\mathrm{R}(\mathfrak{T}),$$

l'égalité n'ayant lieu que lorsque la courbe (c) se réduit au polygone $\mathfrak{T}$.

Comme on le voit le rapport $\frac{R(\mathfrak{P})}{L}$ est une fonction fort compliquée du rapport $\frac{S}{L^2}$, cela tient au fait que le problème que nous venons de résoudre est un problème irrégulier de calcul des variations.

8. *Problème II.* — Il s'agit de trouver le plus petit de tous les cercles inscrits aux courbes de longueur L et de surface S données. Ce problème a été résolu par M. Bonnesen; ici nous donnerons une solution analogue à celle du problème I. On constate d'abord que le rayon $r_1(L, S) = \sqrt{S}\psi\left(\frac{S}{L^2}\right)$ des cercles inscrits au rectangle coiffé de deux demi-cercles (courbe parallèle à un segment de droite) est une fonction croissante de S et du rapport $\frac{S}{L^2}$. Considérons alors la couronne (P, ρ) de la courbe considérée et symétrisons cette courbe suivant le procédé de M. Bonnesen puis considérons l'enveloppante convexe (c'') de la symétrisée (c'); cette dernière courbe a pour cercle inscrit le cercle de rayon ρ et l'on a, en désignant par $r(c)$ le rayon du cercle inscrit à une courbe (c),

$$r(c) \geqq \rho(c) = r(c'').$$

La courbe (c'') touche le cercle de rayon ρ en au moins deux points diamétralement opposés, le diamètre correspondant étant un axe de symétrie pour (c''). Construisons alors le rectangle coiffé de deux demi-cercles dont la longueur L'' est la même que celle de (c'') et dont le cercle inscrit a pour rayon $r(c'')$; d'après la propriété isopérimétrique du cercle, son aire S_1 n'est pas inférieure à l'aire S'' de (c''). De là

$$r(c'') = r_1(L'', S_1) = \sqrt{S_1}\,\psi\left(\frac{S_1}{L''^2}\right),$$

donc

$$r(c) \geqq \sqrt{S_1}\,\psi\left(\frac{S_1}{L''^2}\right) \geqq \sqrt{S}\,\psi\left(\frac{S_1}{L''^2}\right) \geqq \sqrt{S}\,\psi\left(\frac{S}{L^2}\right) = r_1(L, S).$$

Pour que l'égalité ait lieu on voit, comme pour le problème I, que (c) doit être précisément le rectangle coiffé de deux demi-cercles de longueur L et de surface S.

9. Le raisonnement précédent utilise la propriété isopérimétrique

du cercle; or, M. Bonnesen démontre précisément cette propriété au moyen d'une inégalité d'où l'on peut déduire le résultat précédent. La démonstration que je viens de donner a un mérite : celui de nous fournir la solution d'un autre problème. Nous voyons en effet que, pour les rayons P et ρ des cercles de la couronne minima attachée à la courbe, on a

$$P \leqq R_1(L, S) \quad \text{et} \quad \rho \geqq r_1(L, S).$$

Par conséquent, si l'on considère un couvercle limité par un cercle de rayon R_1 dans lequel on a pratiqué un trou, limité par un cercle de rayon r_1 concentrique au précédent et si l'on peint ce couvercle en rouge, il sera toujours possible de le placer sur une courbe convexe de longueur L et de surface S peinte en blanc de façon que le trou apparaisse complètement blanc et que le blanc n'apparaisse nulle part ailleurs.

10. *Problème II'*. — La résolution de ce problème est immédiate : entre le rayon r du cercle inscrit dans une courbe, sa longueur et son aire on a

$$rL - 2S \leqq 0,$$

où l'égalité n'a lieu que pour les capuchons du cercle de rayon r. Le maximum de r est donc $\frac{2S}{L} = r_2$ et tout capuchon du cercle de rayon r_2 et de longueur L a pour aire S.

11. Les solutions des problèmes I et II que nous venons de donner nous fournissent du même coup les solutions de ces mêmes problèmes pour le cas des bandes circonscrites à cause de la forme des figures extrémales trouvées. En désignant par B une largeur d'une courbe convexe de longueur L et surface S données on a donc

$$2r_1(L, S) \leqq B \leqq 2R_1(L, S).$$

On peut remarquer qu'ici, la solution directe de ces deux problèmes peut être obtenue au moyen du procédé de symétrisation de Steiner. Quant aux problèmes I' et II' je n'en possède pas les solutions dans le cas général. Cependant le problème I' est résolu dans le cas où $\frac{S}{L^2} = \varepsilon_{2n}$ et le diamètre D de toutes les courbes de longueur L et de surface S est, dans ce cas, supérieur ou au moins égal au diamètre du polygone régulier de $2n$ côtés qui fait partie de cet ensemble de courbes : c'est une conséquence de la résolution du problème I' dans le cas du cercle. Dans le cas où $\frac{S}{L^2} = \varepsilon_3$ le problème est résolu par l'inégalité de M. Kubota

$$LD - \frac{4}{\sqrt{3}} S \leqq 2D^2,$$

où l'égalité n'a lieu que pour le triangle équilatéral car le diamètre D de ce triangle est alors égal à la plus grande des racines de l'équation du second degré en D obtenue en égalant les deux membres de l'inégalité précédente.

Je me permets d'ajouter que les considérations développées dans mon premier Mémoire doivent donner la solution complète de ces deux problèmes. Mais ces deux problèmes étant irréguliers, on ne peut guère espérer obtenir une solution plus simple que celle du problème I' que nous venons de traiter et la démonstration de l'inégalité (1), sur laquelle est basée la démonstration, est fort laborieuse.

12. Toujours à cause de la forme des extrémales trouvées, la solution du problème I pour le cercle nous fournit la solution de ce même problème dans le cas où la forme donnée du couvercle est telle que le diamètre de son cercle inscrit est égal à son épaisseur. Nous avons aussi la solution du problème II dans le cas où, pour la forme de couvercle considérée, le diamètre du cercle circonscrit est égal au diamètre de la courbe.

Par exemple les problèmes I et II sont résolus dans le cas où (Γ) est une courbe à centre.

13. On sait que l'épaisseur Δ d'une courbe convexe est comprise entre le double et le triple du rayon de son cercle inscrit $(2r \leqq \Delta \leqq 3r)$ et qu'elle n'est égale à $3r$ que lorsque la figure est un triangle équilatéral. Nous venons de résoudre le problème I dans le cas où la courbe (Γ) est telle que $\Delta = 2r$, nous allons maintenant le résoudre dans le cas

où $\Delta = 3r$. Nous recherchons donc quel est le plus petit triangle équilatéral à l'intérieur duquel on peut faire tourner toutes les courbes de longueur L et de surface S données.

Considérons une courbe convexe (c) inscrite dans un triangle équilatéral donné ABC et qui peut y tourner et soient A′, B′, C′ des points de contact de cette courbe avec les côtés BC, CA, AB du triangle; supposons que l'on ait

$$AB' + AC' \leqq AC' + BA' \leqq CA' + CB',$$

alors on aura aussi

$$AB' + AC' \leqq AB.$$

Considérons alors la courbe (c_-) symétrique de (c) par rapport à la bi sectrice de l'angle A et la courbe $\frac{c+c_-}{2}$ de la série linéaire engendrée par ces deux courbes; cette dernière a pour longueur la longueur commune à (c) et à (c_-) et une aire non inférieure à l'aire commune à ces deux courbes et elle est aussi inscrite au triangle ABC et peut y tourner. Elle touche le côté BC en son milieu α et les côtés CA et AB respectivement en β et γ tels que

$$A\beta = A\gamma = \frac{AB' + AC'}{2} \leqq \frac{AB}{2}.$$

Les trois points $\alpha\beta\gamma$ forment un triangle isoscèle dont la base $\beta\gamma$ ne surpasse pas $\frac{BC}{2}$. Le triangle ABC étant donné, on montre facilement que la longueur du triangle $\alpha\beta\gamma$ augmente tandis que son aire diminue lorsque $\beta\gamma$ diminue $\left(\beta\gamma \text{ ne surpassant pas } \frac{BC}{2}\right)$.

Il suit de là que, parmi toutes les courbes de surface S donnée, inférieure au quart de l'aire du triangle ABC, inscrites dans le triangle ABC et qui peuvent y tourner, c'est un triangle isoscèle $\alpha\beta\gamma$ qui fournit le minimum de la longueur.

Considérons maintenant, avec la courbe (c), les deux courbes $\left(c_{\frac{2\pi}{3}}\right)$ et $\left(c_{-\frac{2\pi}{3}}\right)$ obtenues en faisant tourner (c) de l'angle $\frac{2\pi}{3}$, dans les deux sens, autour du centre du triangle équilatéral et construisons la courbe

$$\mathcal{C} = \frac{c + c_{\frac{2\pi}{3}} + c_{-\frac{2\pi}{3}}}{3}$$

de la série linéaire engendrée par ces trois courbes. Elle aussi est inscrite dans le triangle ABC et peut y tourner et elle a même longueur que la courbe (c) tandis que son aire n'est pas inférieure à celle de (c); de plus elle touche les trois côtés du triangle ABC en leurs milieux respectifs $A_1 B_1 C_1$ et une rotation de $\frac{2\pi}{3}$ autour du centre du triangle équilatéral amène cette courbe en coïncidence avec elle-même. Ces diverses propriétés assurent que $\mathcal{C}$ n'a aucun point extérieur au cercle circonscrit du triangle $A_1 B_1 C_1$. Construisons alors l'arc de cercle allant de B_1 à C_1, symétrique par rapport à AA_1 et ayant la même longueur que l'arc de $\mathcal{C}$ correspondant et opérons de la même façon sur les arcs qui vont de C_1 à A_1 et de A_1 à B_1. On obtient une courbe convexe (c') de même longueur que (c) mais d'aire non inférieure et qui, elle aussi, peut tourner dans ABC.

Donc, parmi toutes les courbes convexes inscrites dans un triangle équilatéral ABC et de surface S donnée, non inférieure au quart de l'aire de ABC, c'est la figure formée de trois arcs de cercle égaux qui joignent deux à deux les milieux des côtés et sont respectivement symétriques par rapport aux hauteurs de ABC, qui fournit le minimum de la longueur.

Soit h la hauteur de ABC, écrivons, pour les figures trouvées,

$$h = \mathrm{L} f\left(\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{L}^2}\right) = h_1(\mathrm{L}, \mathrm{S}),$$

on constate sans peine que la fonction f est décroissante.

Considérons maintenant le plus petit triangle équilatéral où puisse tourner une courbe (c) de longueur L et de surface S donnée et soit $h(c)$ la hauteur de ce triangle, nous distinguerons deux cas :

1° Le rapport $\frac{\mathrm{S}}{\mathrm{L}^2}$ ne dépasse pas le rapport correspondant du triangle équilatéral.

Considérons alors la courbe (c_-) déjà définie puis la courbe $\frac{c + c_-}{2}$

d'aire $S_1 \geqq S$, on a

$$h(c) = h(c_-) = h\left(\frac{c + c_-}{2}\right) \leqq L f\left(\frac{S_1}{L^2}\right) \leqq L f\left(\frac{S}{L^2}\right)$$

ou

$$h(c) \leqq h_1(L, S)$$

et le signe d'égalité n'aura lieu que si c est un triangle isoscèle, dont la base ne surpasse pas l'un des côtés égaux, et de longueur L et de surface S.

2° Le rapport $\frac{S}{L^2}$ dépasse le rapport correspondant du triangle équilatéral.

Nous considérerons les trois courbes (c), $\left(c_{\frac{2\pi}{3}}\right)$, $\left(c_{-\frac{2\pi}{3}}\right)$ puis la courbe $\frac{c + c_{\frac{2\pi}{3}} + c_{-\frac{2\pi}{3}}}{3}$ d'aire $S_1 \geqq S$ et enfin la figure formée de trois arcs de cercles, définie précédemment et de longueur L; l'aire S' de cette dernière figure n'est pas inférieure à S_1. On a

$$h(c) = h\left(\frac{c + c_{\frac{2\pi}{3}} + c_{-\frac{2\pi}{2}}}{3}\right) = L f\left(\frac{S'}{L^2}\right) \leqq L f\left(\frac{S_1}{L^2}\right) \leqq L f\left(\frac{S}{L^2}\right),$$

c'est-à-dire

$$h(c) \leqq h_1(L, S),$$

où le signe d'égalité n'a lieu que pour la figure considérée précédemment. Le problème est complètement résolu et appelle les mêmes remarques que précédemment.

14. *Le cas de l'ellipse.* — Maintenant nous prenons pour courbe (C) une ellipse et l'ensemble de courbes que nous considérons est constitué par toutes les courbes d'aire donnée S et qui, avec (C), ont une aire mixte s également donnée. Les quatre problèmes de couvercle posés, peuvent, dans ce cas, être facilement résolus si (Γ) est homothétique à (C).

Pour avoir les solutions correspondantes il suffit de remarquer que l'ellipse donnée est la projection d'un cercle d'un plan Π et les courbes considérées sont les projections des courbes du plan Π d'aire et de longueur données. Par conséquent, quant au problème I, il y a une infinité de courbes qui ne peuvent être recouvertes que par le couvercle homothétique à l'ellipse donnée et ces courbes sont des lentilles qui ont un centre de symétrie et qui sont limitées par deux arcs d'ellipse. A l'intérieur des courbes de l'ensemble considéré qui proviennent de l'étirage d'une ellipse homothétique à (C), on peut mettre l'ellipse solution du problème II. Quant aux problèmes I' et II' leur solution est également immédiate.

On peut aussi trouver le plus petit cercle à l'intérieur duquel on peut mettre toute courbe de l'ensemble : c'est celui qui a pour diamètre le grand axe de l'ellipse solution du problème I lorsque (Γ) est homothétique à (C); tandis que le plus petit cercle que l'on puisse mettre à l'intérieur de toutes ces courbes a pour diamètre le petit axe de l'ellipse solution du problème II dans les mêmes conditions. Dans une bande ayant pour largeur le plus petit axe de l'ellipse solution de I on peut mettre toutes les courbes de l'ensemble.

15. *Le cas du carré.* — La courbe (C) est un carré de côté 1 et l'ensemble (E) est constitué par les courbes d'aire donnée S et dont la somme des largeurs dans les deux directions des côtés du carré est donnée.

Le problème I, lorsque (Γ) est un carré homothétique à (C), est équivalent au suivant : parmi toutes les courbes d'aire donnée S et dont la demi-somme s des largeurs dans deux directions rectangulaires données est également donnée, quelles sont celles qui présentent le maximum de largeur dans l'une ou l'autre des directions données ?

Pour que les courbes existent effectivement, il est d'abord nécessaire que l'on ait $s^2 \geqq S$, le signe d'égalité n'ayant lieu que lorsque la courbe est un carré. Cela étant on sait que l'on a l'inégalité

$$\rho^2 - 2\rho s + S \leqq 0,$$

valable lorsque ρ désigne une longueur comprise entre le côté du plus petit carré qui contient la courbe et le côté du plus grand carré qu'elle contient, ces deux carrés étant homothétiques à (C). On trouvera dans le livre de M. Bonnesen tous les éléments de cette démonstration et l'on verra aussi que le signe d'égalité n'est valable dans la formule précédente que lorsque la courbe peut par étirage donner un carré, cas où l'égalité a lieu pour la plus grande racine de l'équation du second degré obtenue en égalant à zéro le premier membre de l'inégalité précédente; ou bien lorsque la courbe provient de l'étirage d'un carré homothétique à (C), cas où l'égalité a lieu pour la plus petite racine.

Les courbes qui présentent le maximum de la largeur dans l'une ou l'autre des directions données sont donc deux rectangles, définis à une translation près, à côtés parallèles à ceux de (C) et d'aire S. On passe de l'un à l'autre de ces rectangles par une rotation de $\frac{\pi}{2}$.

Quant au problème II sa solution est constituée par le carré qui a pour côté la longueur de la plus petite racine de l'équation du second degré précédente et une infinité de courbes de E ont ce carré pour inscrite. Parmi celles-ci les deux rectangles déjà trouvés présentent le minimum de la largeur dans les directions du carré donné.

Cherchons maintenant le plus petit cercle dans lequel on puisse mettre les courbes de l'ensemble E. Ce cercle doit, en particulier, pouvoir recouvrir les rectangles dont nous avons déjà parlé et l'on voit facilement que toute autre courbe de E est comprise à l'intérieur d'un rectangle que l'on peut mettre dans ce cercle car la plus grande des dimensions de ce rectangle est bornée supérieurement par la plus grande des dimensions des rectangles précédents. Le diamètre de ce cercle est donc aussi la largeur de la plus petite bande à l'intérieur de laquelle on peut faire tourner toutes les courbes de l'ensemble E. Quant au plus grand cercle que l'on peut mettre à l'intérieur de toutes les courbes de E il a pour diamètre l'épaisseur des rectangles déjà considérés.