GEORGES GIRAUD

Sur différentes questions relatives aux équations du type elliptique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 47 (1930), p. 197-266
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1930_3_47__197_0>

SUR DIFFÉRENTES QUESTIONS

RELATIVES AUX

ÉQUATIONS DE TYPE ELLIPTIQUE

PAR M. GEORGES GIRAUD

Professeur à l'Université de Clermont-Ferrand.

Introduction.

Cet article fait partie d'un ensemble de travaux consacrés aux équations aux dérivées partielles du second ordre de type elliptique, linéaires ou non, à m variables indépendantes [1].

Relativement aux équations linéaires, des solutions élémentaires de certaines équations dont les coefficients sont définis dans tout l'espace et se réduisent à une certaine distance de l'origine à ceux de l'équation

$$\sum_{\alpha} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0 \qquad (g > 0),$$

---

[1] Voici la liste de ceux de ces travaux auxquels nous aurons fréquemment à renvoyer au cours de cet article, avec les abréviations par lesquelles nous les désignerons :

A. *Sur le problème de Dirichlet généralisé, équations non linéaires à m variables* (*Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 43, 1926, p. 1-128).

B. *Sur le problème de Dirichlet généralisé*, deuxième mémoire (*Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 46. 1929, p. 131-245).

C. *Sur les équations aux dérivées partielles du type elliptique* (*Bull. Sc. math.*, t. 53, 1929, p. 367-395).

Un article *Sur les équations de type elliptique et la méthode des approximations successives* (*Journal de Math.*, t. 8, 1929, p. 269-300) traite rapidement la question d'une façon intermédiaire entre celles de A et de B.

le coefficient de u étant en outre négatif dans tout l'espace, jouent un rôle prépondérant. On verra ici que ces solutions élémentaires existent si les coefficients satisfont dans tout l'espace à une condition de Lipschitz généralisée et si en outre le coefficient de u est négatif *ou nul* dans tout l'espace. On y trouvera en outre une étude plus détaillée de la dérivabilité de ces solutions élémentaires.

Certaines équations sont identiques à leurs adjointes ; c'est le cas notamment de certaines équations où figure l'invariant différentiel du second ordre de Beltrami pour une multiplicité à m dimensions dont on donne l'élément linéaire. On verra comment des résultats classiques de la théorie de l'équation de Fredholm permettent de généraliser pour ces équations un théorème de M. Picard sur l'équation des membranes vibrantes, théorème qui a déjà fait l'objet d'une première généralisation due à M. Sanielevici.

L'allure des dérivées de la solution u d'un problème de Dirichlet linéaire sur la frontière du domaine est fondamentale pour la solution des problèmes de Dirichlet non linéaires. Cette étude est rapidement reprise ici pour élargir les hypothèses faites précédemment. A ce sujet se rattache la construction de fonctions assujetties à des conditions aux frontières données, portant sur les dérivées jusqu'à un ordre donné, opération qui se présente à plusieurs reprises dans la théorie actuelle.

Cet article revient ensuite, pour le démontrer complètement, sur le théorème concernant les dérivées de u, d'ordre supérieur au second, quand on suppose que u satisfait à une équation, linéaire ou non, de type elliptique et que ses dérivées secondes satisfont à une condition de Lipschitz généralisée. On passe aisément de là au cas où l'équation donnée est holomorphe, cas où u l'est aussi; cette proposition généralise un théorème bien connu de M. Serge Bernstein concernant le cas de deux variables indépendantes. Le théorème sur le problème de Dirichlet pour les équations non linéaires est repris rapidement avec des hypothèses plus larges que précédemment.

Le problème dit de la chaleur qu'il n'y a pas lieu, à notre point de vue, de considérer séparément de celui de Neumann, est généralisé pour les équations linéaires quelconques. On y retrouvera un fait déjà signalé dans des circonstances plus étroites, savoir que les hypothèses nécessaires à notre solution de ce problème sont plus larges que les hypothèses correspondantes relatives au problème de Dirichlet; les raisonnements sont d'ailleurs plus brefs.

Il n'y a aucune difficulté à considérer un problème mixte, où certaines frontières portent les données d'un problème de la chaleur, et certaines autres celles d'un problème de Dirichlet, ces frontières étant sans points communs les unes avec les autres pour éviter les singularités qui se produiraient à la séparation des deux sortes de données. Cette étude est donnée ici avec des hypothèses un peu plus larges que celles que nous avions faites antérieurement pour le problème de Dirichlet linéaire; les nouvelles hypothèses s'appliquent d'ailleurs aussi à ce dernier problème.

I. — Sur la solution élémentaire.

1. Si l'on donne l'équation linéaire

$$(1)\quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}(u) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0 \\ \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}), \end{array} \right.$$

où les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c sont des fonctions données de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, et où u est la fonction inconnue, on peut définir l'équation adjointe comme étant

$$(2)\quad \mathcal{G}(v) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 (a_{\alpha,\beta} v)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_\alpha \frac{\partial (b_\alpha v)}{\partial x_\alpha} + cv = 0,$$

et cette définition est valide si les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ et les dérivées premières des b_α existent.

Mais si l'on pose, dans l'équation (1),

$$b_\alpha = b'_\alpha + \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta},$$

de sorte que cette équation devient

$$(3)\quad \mathcal{F}(u) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + \sum_\alpha b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0,$$

l'équation adjointe devient, dans la même hypothèse,

$$(4) \qquad \mathcal{G}(v) = \sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial v}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha \frac{\partial(b'_\alpha v)}{\partial x_\alpha} + cv = 0.$$

On remarque alors que, si l'on prend cette nouvelle façon d'écrire l'adjointe comme une définition, celle-ci a un sens pourvu que les $a_{\alpha,\beta}$ et les b'_α ou les $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ aient des dérivées, et ces nouvelles hypothèses sont plus larges que les anciennes.

C'est cette nouvelle définition que nous adopterons désormais. Si les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des b'_α sont continues, les différentes conséquences de la formule de Green [1] subsistent sans modification.

2. Si l'on suppose que c et les dérivées premières des $a_{\alpha,\beta}$ et des b'_α sont continus (L) [2], les autres hypothèses relatives à l'existence de $G(X, \Xi)$ subsistant [3] (c'est-à-dire que, hors d'un certain domaine borné, les $a_{\alpha,\beta}$ sont nuls si $\beta \neq \alpha$ et égaux à *un* si $\beta = \alpha$, les b_α sont nuls et $c = -g^2$, g étant positif et constant, et que de plus c est négatif dans tout l'espace), cette solution élémentaire $G(X, \Xi)$ satisfait, relativement à Ξ, à l'équation adjointe. La démonstration donnée dans un cas plus particulier [4] subsiste en effet.

3. Les hypothèses faites dans le travail cité pour parvenir à la fonction $G(X, \Xi)$ peuvent être élargies : il suffit en effet de supposer que *tous les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c sont continus* (L) *dans tout l'espace*, ces coefficients gardant les mêmes valeurs que ci-dessus hors d'un certain domaine borné et c étant négatif dans tout l'espace. Pour le voir, il

---

(1) B, § V, théor. 3, p. 209 et 210.

(2) Je rappelle que je désigne ainsi les fonctions satisfaisant à des conditions de Lipschitz généralisées

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| < k\,L^h(X, Y) \qquad (k > 0,\ 0 < h \leqq 1),$$

où $L(X, Y)$ est la distance des deux points de l'espace à m dimensions, k et h étant constants; h est nommé l'*exposant* et k, le *coefficient* de continuité (L).

(3) B, § V, théor. 2, p. 194.

(4) B, § V, théor. 2, p. 200.

suffit de modifier un seul point de la démonstration [1] : pour limiter dans le domaine $L(O, X) < R + \delta$ les dérivées secondes de $G' - \Phi'$ par rapport aux x_α, les dérivées premières et la fonction même ayant déjà la limitation $O[e^{-\mu L(O, \Xi)}]$, il suffit de considérer $G' - \Phi'$ comme solution d'un problème de la Chaleur [2] dans une hypersphère de rayon assez petit; on sait en effet que ce problème est soluble si les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c sont continus (L), moyennant une condition de signe qu'on peut toujours remplir, et pourvu que le rayon de l'hypersphère soit assez petit; les dérivées secondes de la solution peuvent être limitées dans les mêmes conditions, ce qui suffit.

4. *La condition* $c < 0$ *dans tout l'espace peut être remplacée par* $c \leqq 0$, pourvu que, hors d'un certain domaine borné, on ait toujours $c = -g^2$, $g > 0$.

Plaçons-nous en effet dans cette hypothèse et soit $\chi(X)$ une fonction continue (L) dans tout l'espace, nulle hors d'un certain domaine borné, et telle que $c - \chi$ soit négatif dans tout l'espace. Soit $G(X, \Xi)$ la solution élémentaire de la nature considérée, relative à l'équation

$$\mathcal{F}(u) = \chi u.$$

Posons

$$u(X, \Xi) = -\lambda \int^{(m)} G(X, A)\, \rho(A, \Xi)\, dV_A, \tag{5}$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace et λ ayant, comme dans le travail cité, la valeur

$$\lambda = 2^{-2} \pi^{-\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right) \qquad (m > 2); \tag{6}$$

$\rho(X, \Xi)$ est une fonction à déterminer par l'équation de Fredholm [3]

$$\begin{cases} \rho(X, \Xi) - \lambda \chi(X) \displaystyle\int^{(m)} G(X, A)\, \rho(A, \Xi)\, dV_A = \lambda^{p-1} \chi(X)\, G^{(p)}(X, \Xi) \\ \qquad\qquad\qquad (2p > m), \end{cases} \tag{7}$$

---

(1) B, § V, théor. 2, p. 207.

(2) *Voir* C, p. 380 et suiv.

(3) *Voir* B, p. 213, les définitions de G_p et de $G^{(p)}$; ou ci-dessous, § IV, n° 2.

où l'intégrale est étendue à tout l'espace. La théorie de Fredholm s'applique à cause de la façon dont G se comporte à l'infini et parce que χ est identiquement nul hors d'un certain domaine borné [1].

Pour prouver que ρ existe, il suffit de prouver qu'il n'existe pas d'autre solution que $\sigma = 0$ pour l'équation

$$\sigma(X) - \lambda\,\chi(X)\int^{(m)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dV_A = 0.$$

Soit en effet σ une solution quelconque de cette équation et soit

$$u(X) = -\lambda\int^{(m)} G(X, A)\,\sigma(A)\,dV_A;$$

u satisfait à l'équation (1) et s'annule à l'infini. Je dis que u est identiquement nul. En effet, posons

$$u = (h - e^{-Mr^2})\,v,$$

h et M étant des constantes positives qu'on va déterminer; r est la distance de X à l'origine supposée placée en un point où $c < 0$; v est une nouvelle inconnue. Si $h > 1$, le coefficient de v dans le second membre est partout positif. D'autre part,

$$\mathcal{F}(h - e^{-Mr^2}) = e^{-Mr^2}[-4M^2\,\Sigma_{\alpha,\beta}\,a_{\alpha'\beta}\,x_\alpha x_\beta + 2M\,\Sigma_\alpha(a_{\alpha,\alpha} + b_\alpha x_\alpha) - c] + hc;$$

il existe des constantes A, B, C, D toutes positives telles que le crochet soit moindre que

$$-4M^2 A r^2 + 2M(Br + C) + D;$$

supposons $c < 0$ pour $r \leqq r_0$; nous pouvons prendre M assez grand pour que ce crochet soit toujours négatif pour $r > r_0$; d'autre part, M étant maintenant fixe, nous pouvons prendre h assez grand pour avoir

$$\mathcal{F}(h - e^{-Mr^2}) < 0$$

quand $r < r_0$; alors il est visible que la même inégalité a lieu dans tout l'espace. v ne peut donc avoir nulle part ni maximum positif ni mini-

---

(1) B, § V, théor. 3, p. 215.

mum négatif [1]; mais v s'annule à l'infini; donc v est identiquement nul et u de même. Donc enfin σ, qui est égal à χu, est nul.

Ainsi $\rho(X, \Xi)$, et par suite $u(X, \Xi)$, existent. Alors la fonction $G_p(X, \Xi) - u(X, \Xi)$ est la solution élémentaire cherchée de l'équation (1). Cette solution est évidemment unique.

5. Dans le but de rassembler des énoncés de même nature, reproduisons ici un résultat du travail cité [2]:

Si les dérivées d'ordre $q \geqq 1$ *des* $a_{\alpha,\beta}$, *d'ordre* $q-1$ *des* b_α *et de* c *sont continues* (L), G *peut être dérivé jusqu'à* $2q+1$ *fois, dont* $q+1$ *fois au plus par rapport aux coordonnées de* X *et* q *fois au plus par rapport aux coordonnées de* Ξ.

Quand X tend vers Ξ, ces dérivées se comportent comme celles de la fonction nommée Φ à l'endroit cité.

6. *Si les dérivées d'ordre* $q \geqq 0$ *des* $a_{\alpha,\beta}$, *des* b_α *et de* c *sont continues* (L), G *peut être dérivé jusqu'à* $2q+2$ *fois, dont* $q+2$ *fois au plus par rapport aux coordonnées de* X *et* q *fois au plus par rapport aux coordonnées de* Ξ.

La démonstration est toujours la même et repose sur ce que ces dérivées existent pour la fonction Φ [3]. Si l'entier arbitraire qui figure dans Φ a été pris assez grand, toutes ces dérivées de différents ordres sont continues pour $G - \Phi$ (comme dans le cas précédent).

Remarque. — Si ces hypothèses ou celles du n° 5 sont vérifiées seulement dans une région de l'espace, on peut dériver par rapport à X le nombre de fois indiqué si X est dans la région et Ξ n'importe où. De même les possibilités de dérivation par rapport à Ξ dépendent seulement de la région où est Ξ.

7. *Si les dérivées d'ordre* $q \geqq 2$ *des* $a_{\alpha,\beta}$, *d'ordre* $q-1$ *des* b_α *et d'ordre*

---

(1) B, § V, théor. 2, note de la page 200.
(2) B, § V, théor. 2, p. 208.
(3) C, théor. 1 à 5, p. 370 à 378.

$q-2$ de c sont continues (L), *on peut écrire*

$$G(X, \Xi) = \varphi(X)\psi(\Xi)N(X, \Xi),$$

où φ et ψ ne s'annulent nulle part et ont leurs dérivées d'ordre q continues (L), *et où* $N(X, \Xi)$ *peut être dérivé jusqu'à $2q+1$ fois, dont $q+1$ fois au plus par rapport aux coordonnées de chaque point.*

En effet, remarquons d'abord que G est positif ou nul dans tout l'espace, puisque autrement il devrait atteindre un minimum négatif, ce qui est absurde [ceci suppose $c < 0$, mais la transformation employée ci-dessus (n° 4) étend le résultat au cas où c peut s'annuler]. La fonction $\int^{(m)} G(X, A)\,dV_A$, où l'intégrale est étendue à tout l'espace, est donc positive; en outre elle est bornée ainsi que ses dérivées jusqu'à l'ordre q et que les coefficients de continuité (L) de ces dernières (n° 5) [1].

Soit

$$(8) \qquad Q(t) = t^{q+2}\left[1 + \sum_{k=1}^{q+1} \frac{(q+k+1)!}{(q+1)!\,k!}(1-t)^k\right],$$

de sorte que $Q(0) = 0$, $Q(1) = 1$, les dérivées jusqu'à l'ordre $q+1$ ayant les racines *zéro* et *un*; de plus $Q'(t)$ est positif pour $0 < t < 1$ et l'on a l'identité

$$Q(t) + Q(1-t) = 1.$$

Nous allons changer d'inconnue dans l'équation (1). R étant un nombre positif assez grand, nous poserons, pour $L(O, X) \leqq R$,

$$u = \lambda v \int^{(m)} G(X, A)\,dV_A;$$

pour $R < L(O, X) \leqq 2R$, nous poserons

$$u = \lambda v Q\left[2 - \frac{L(O, X)}{R}\right]\int^{(m)} G(X, A)\,dV_A + v Q\left[\frac{L(O, X)}{R} - 1\right];$$

enfin pour $L(O, X) > 2R$, $u = v$. Les coefficients de l'équation en v

---

[1] *Voir* aussi B, § I, théor. 5 à 8, p. 146 et 147.

satisfont aux mêmes hypothèses que ceux de l'équation en u, car c qui seul peut faire difficulté sera sûrement négatif dans tout l'espace si R est assez grand; en particulier, pour $L(O, X) < R$, $c = -1$. Nous voyons en outre que si R est assez grand pour que l'équation (1) se réduise à

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0$$

dès que $L(O, X) > R$, le coefficient analogue à c pour l'équation en v a ses dérivées d'ordre $q - 1$ continues (L). Donc la solution élémentaire de cette équation peut être dérivée jusqu'à $2q + 1$ fois (n° 5) dont $q + 1$ fois au plus par rapport aux coordonnées de X et q fois au plus par rapport à celles de Ξ. Soit $N_1(X, \Xi)$ cette solution élémentaire; on a

$$G(X, \Xi) = \varphi(X) N_1(X, \Xi),$$

où $\varphi(X)$ a ses dérivées d'ordre q continues (L) et ne s'annule nulle part.

Mais on peut échanger les rôles de X et de Ξ et prouver ainsi que

$$G(X, \Xi) = \psi(\Xi) N_2(X, \Xi),$$

$\psi(\Xi)$ ne s'annulant nulle part et ayant ses dérivées d'ordre q continues (L), et N_2 étant de la même nature que N_1 après échange des deux points, car les coefficients de l'adjointe satisfont aux mêmes hypothèses que ceux de $\mathcal{F}$, sauf pour le signe de c, ce qui n'importe pas. Donc si

$$N_1(X, \Xi) = \psi(\Xi) N(X, \Xi),$$

la fonction N jouit des propriétés énoncées.

On voit aisément ce qui arrive si les hypothèses ne sont remplies que dans une région de l'espace.

8. *Si les dérivées d'ordre* $q \geqq 1$ *des* $a_{\alpha,\beta}$ *et des* $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$, *et d'ordre* $q - 1$ *de* c *sont continues* (L), $G(X, \Xi)$ *peut être dérivé jusqu'à* $2q + 1$ *fois dont* $q + 1$ *fois au plus par rapport aux coordonnées de chaque point.*

En effet les hypothèses du n° 5 sont satisfaites pour l'équation donnée et pour son adjointe.

9. Nous pouvons remarquer que l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + cu = 0 \tag{9}$$

est identique à son adjointe. Si donc les hypothèses relatives à l'existence de $G(X, \Xi)$ sont remplies, *cette fonction est symétrique.*

10. Ce qui précède nous permet d'élargir les hypothèses faites dans la solution générale du problème de Dirichlet pour les équations linéaires [1] : *il suffit que c et les dérivées des fonctions $a_{\alpha,\beta}$ et $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ soient continus* (L) *dans un domaine contenant $\mathcal{D} + \mathfrak{S}$ à son intérieur, et que les coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ soient des fonctions de $m-1$ paramètres dont les dérivées sont continues* (L) *et dont les déterminants fonctionnels ne s'annulent pas ensemble.*

En effet ces conditions suffisent pour que nous puissions introduire l'adjointe; il nous suffit donc de voir qu'elles suffisent aussi pour que nous puissions prolonger les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c dans tout l'espace, de façon à remplir toutes les conditions.

Pour le voir, nous reprenons le polynome $Q(t)$ qui nous a déjà servi [n° 7, relation (8)]. D'autre part nous introduisons m fonctions $c_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ des paramètres des points de $\mathfrak{S}$, les dérivées de ces fonctions étant continues (L); ces fonctions doivent satisfaire à l'identité $\Sigma c_\alpha^2 = 1$ et de plus, en désignant par $\varpi_\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ les cosinus directeurs de la normale à $\mathfrak{S}$, $\Sigma \varpi_\alpha c_\alpha$ ne doit s'annuler nulle part sur $\mathfrak{S}$; ces fonctions c_α existent [2]. Désignant alors par s_m un nouveau paramètre, nul sur $\mathfrak{S}$, lié à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ par les équations

$$x_\alpha = f_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) + s_m c_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})$$
$$(\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

et positif hors de $\mathcal{D}$ (ceci a lieu en changeant au besoin les signes des c_α), nous nommons s'_m un nombre tel que la transformation ci-dessus

(1) B, § V, théor. 3 et 4, p. 208 à 230.
(2) B, § III, généralisation du problème de Dirichlet, p. 165.

entre $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ soit biunivoque pour $0 \leqq s_m \leqq s'_m$; de plus, s'_m doit être assez petit pour que tous les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c satisfassent dans cette région aux hypothèses énoncées.

Soit alors ψ une fonction dont les dérivées soient continues (L) dans le domaine formé de $\mathcal{D}$ et de cette région. Nous voulons la modifier dans cette région, sans altérer la continuité (L) des dérivées, et de façon que, pour $s_m = s'_m$, la fonction se réduise à la constante ψ_x et ses dérivées à *zéro*. Il nous suffit pour cela de remplacer ψ dans cette région par

$$\psi\, Q\left(1 - \frac{s_m}{s'_m}\right) + \psi_x\, Q\left(\frac{s_m}{s'_m}\right),$$

le nombre q qui figure dans Q ayant la valeur de *zéro*.

Si ψ est seulement continu (L), le même procédé permet de le prolonger en respectant cette continuité (L); on peut même prendre $q = -1$.

C'est ce procédé que nous appliquerons d'abord aux $a_{\alpha,\beta}$; nous ajouterons ensuite aux valeurs modifiées des $a_{\alpha,\alpha}$ une même fonction $Ms_m^2\,(s'_m - s_m)^2$ de façon que l'équation modifiée reste de type elliptique. Puis le même procédé sera appliqué aux $b_\alpha - \Sigma_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$, chacun des b_α étant modifié de ce qu'il faut pour que le total ait la valeur voulue. Ensuite on choisit les fonctions θ_α et c comme dans le travail cité. Les résultats subsistent donc dans nos nouvelles hypothèses.

11. Si en particulier nous reprenons l'équation (9), les $b_\alpha - \Sigma_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ peuvent être pris nuls dans tout l'espace; on constate alors que les fonctions θ_α peuvent être prises nulles si $c \leqq 0$ dans tout l'extérieur de $\mathcal{D}$, donc sur $\mathcal{S}$.

Que c soit ou non partout négatif ou nul sur $\mathcal{S}$, si l'on est dans un cas où le problème de Dirichlet a une solution et une seule, la fonction de Green est symétrique, ce qui fournit la généralisation de résultats connus. Ainsi *il y a une infinité de valeurs du paramètre k, toutes réelles, pour lesquelles l'équation*

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + kcu = 0$$

admet une solution nulle sur $\mathcal{S}$, non identiquement nulle dans $\mathcal{D}$. La démonstration consiste d'abord à vérifier que la théorie de Fredholm s'applique si l'on prend pour noyau la fonction de Green; cela n'offre aucune difficulté. Si $F(X, \Xi)$ est cette fonction de Green pour l'équation ([1]),

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) = 0,$$

le noyau symétrique $\frac{F(X, \Xi)}{\sqrt{D(X)D(\Xi)}}$ est *positif*, D étant le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$, car si

$$u(X) - k\lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)\frac{u(A)}{\sqrt{D(A)}}dV_A = 0.$$

u est nul sur $\mathcal{S}$ et satisfait à l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) + ku = 0,$$

ce qui n'est possible que si $k > 0$. Ce noyau est *défini*, car si

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)\frac{u(A)}{\sqrt{D(A)}}dV_A = 0,$$

l'équation aux dérivées partielles prouve que $u = 0$. Il suffit alors de considérer l'équation

$$u(X) - k\lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} F(X, A)c(A)\frac{u(A)}{\sqrt{D(A)}}dV_A = 0,$$

pour achever la démonstration ([2]).

([1]) Cette fonction existe; *voir* B, deuxième application, p. 223.

([2]) Goursat. *Cours d'Analyse mathém*, t. 3, 2e édition, Chap. XXXII. Pour deux et trois variables, M. Sanielevici, après M. Picard, a établi des cas particuliers de cette proposition [*Sur les équations différentielles des cordes et des membranes vibrantes* (*Ann. sc. Éc. Norm. sup.*, t. 26, 1909, p. 19 à 91)]; *voir* aussi Picard, *Sur une équation aux dérivées partielles du second ordre, relative à une surface fermée, correspondant à un équilibre calorifique* (même volume, p. 9 à 17).

II. — Allure des dérivées de u sur le contour, connaissant les valeurs de u sur le contour.

1. En reprenant l'équation (1) (§ I), nous avons d'abord le résultat suivant :

Si les dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ *par rapport à* $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ *sont continues* (L) (les déterminants fonctionnels ne s'annulant pas simultanément) *et si* c *et les dérivées des* $a_{\alpha,\beta}$ *et des* $b_\alpha - \Sigma_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ *existent et sont continus* (L) *dans un domaine contenant* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ *à son intérieur, si enfin les valeurs prises par* u *sur* S *ont par rapport à* $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ *des dérivées continues* (L), *toutes les dérivées de* u *sont continues* (L) *dans* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

Ce théorème élargit les hypothèses d'un théorème démontré précédemment (¹). Il suffit, pour l'établir, de considérer u comme solution du problème de Dirichlet relatif à un domaine de mesure assez petite (²) et dont la frontière comprenne la partie considérée de $\mathcal{S}$. La fonction u s'exprime alors par la somme d'un potentiel de domaine attirant et d'un potentiel de double couche, formés l'un et l'autre au moyen d'une de nos fonctions G(X, Ξ). Le potentiel de domaine attirant ne donne lieu à aucune difficulté. Le potentiel de double couche s'étudie comme dans le théorème dont nous élargissons ici l'hypothèse, en remarquant simplement que toutes les dérivations dont on a besoin sont possibles (§ I, n° 8).

Si les dérivées des valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$ étaient seulement supposées continues, on pourrait encore conclure que les dérivées $\dfrac{\partial u}{\partial s_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1)$ sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ (³).

2. *Si les dérivées troisièmes des coordonnées des points de* $\mathcal{S}$ *sont continues* (L) (les déterminants fonctionnels ne s'annulant pas simultané-

(¹) B, § IV, théor., 3, p. 185.
(²) B, § V, 3ᵉ application, p. 223.
(³) B, § IV, théor. 2, p. 181.

ment), *et si les dérivées secondes des* $a_{\alpha,\beta}$ *et premières des* b_α *et la fonction* c *sont continues* (L) *dans un domaine contenant* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ *à son intérieur, si enfin les valeurs prises par* u *sur* $\mathcal{S}$ *ont des dérivées secondes continues* (L), *toutes les dérivées secondes de* u *sont continues* (L) *dans* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

On se ramène comme ci-dessus à l'étude d'un potentiel de double couche formé à l'aide de $G(X, \Xi)$. L'expression déjà vue (§ I, n° 7) de G permet de décomposer ce potentiel en deux autres, l'un de simple couche, l'autre de double couche, formés à l'aide de la fonction $N(X, \Xi)$. Le potentiel de double couche s'étudie alors comme dans le théorème que nous généralisons ici ([1]), et le potentiel de simple couche, dont la densité a ses dérivées continues (L), ne donne lieu à aucune difficulté.

3. Si les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$, premières des b_α et de c, sont continues (L) les solutions de l'équation (1) (§ I) ont leurs dérivées troisièmes continues (L) dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$ (§ I, n° 5). Cela permet de dériver par rapport aux x_k et d'écrire

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) = -\sum_{\alpha,\beta} \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_k} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \sum_\alpha \frac{\partial b_\alpha}{\partial x_k} \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} - \frac{\partial c}{\partial x_k} u,$$

où le second membre est continu (L) si les valeurs données sur $\mathcal{S}$ ont des dérivées secondes continues (L). Nous pourrons donc prolonger le second membre hors de $\mathcal{D}$ en respectant cette continuité (L). Si les valeurs données de u sur $\mathcal{S}$ ont leurs dérivées troisièmes continues (L), on en déduira que les dérivées troisièmes de u sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$: on le verra en déduisant de l'équation ci-dessus une expression de $\mathcal{F}\left(\frac{\partial u}{\partial s_l}\right)$ $(l < m)$, où

$$\frac{\partial u}{\partial s_l} = \sum_k \frac{\partial u}{\partial x_k} \frac{\partial x_k}{\partial s_l},$$

et en remarquant que les dérivées secondes des valeurs prises sur $\mathcal{S}$ par $\frac{\partial u}{\partial s_l}$ sont continues (L).

([1]) B, § IV, théor. 4, p. 189.

Si les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α et de c sont continues (L), u a ses dérivées quatrièmes continues (L) dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$. Cela permet de dériver deux fois l'équation donnée. Si les dérivées quatrièmes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ et des valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$ sont continues (L), on formera encore une équation

$$\mathcal{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial s_h\, \partial s_l}\right) = \text{fonction continue (L)},$$

d'où l'on conclura que les dérivées quatrièmes de u sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

Et ainsi de suite : si les dérivées d'ordre $q \geqq 4$ des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ et des valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$ sont continues (L), et si les dérivées d'ordre $q-2$ des $a_{\alpha,\beta}$, des b_α et de c par rapport aux x_k sont continues (L), les dérivées d'ordre q de u sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

4. Théorème. — *Soit $\varpi(A)$ une fonction continue* (L) *d'exposant h et de coefficient* M *dans un domaine $\mathcal{D}_1$ de la multiplicité $a_m = 0$. Soit* $G(X, A)$ *une fonction définie et continue ainsi que ses dérivées par rapport aux x_α quand* X *et* A *sont différents,* A *appartenant à $\mathcal{D}_1$ et* X *se projetant sur $x_m = 0$ en un point X_1 de $\mathcal{D}_1$ et ayant sa coordonnée x_m positive et bornée ; on suppose que, dans ces conditions,*

$$|G(X, A)| < NL^{k-m}(X, A) \qquad (1 - h < k \leqq 1),$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\right| < NL^{k-m-1}(X, A).$$

Alors la fonction

$$F(X) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} [\varpi(X_1) - \varpi(A)]\, G(X, A)\, dS_A$$

est continue (L) *d'exposant $k + h - 1$ si $k < 1$, d'exposant aussi peu inférieur à h qu'on veut si $k = 1$.*

Nous nommerons, dans cette démonstration, $\mathcal{D}$ le domaine où peut varier X. Soit $\mathcal{D}''$ la partie commune à $\mathcal{D}$ et à une hypersphère de centre X et de rayon $2L(X, Y)$, Y étant un second point de $\mathcal{D}$;

soient ϖ''_1, la partie commune à ϖ'' et à ϖ_1, et ϖ'_1 le reste de ϖ_1. On a

$$\begin{aligned}
F(X) - F(Y) = & \int_{\varpi''_1}^{(m-1)} [w(X_1) - w(A)]\, G(X, A)\, dS_A \\
& - \int_{\varpi''_1}^{(m-1)} [w(Y_1) - w(A)]\, G(Y, A)\, dS_A \\
& + \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} [w(X_1) - w(A)][G(X, A) - G(Y, A)]\, dS_A \\
& + [w(X_1) - w(Y_1)] \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} G(Y, A)\, dS_A.
\end{aligned}$$

Or, $k - m$ étant négatif et $L(X_1, A)$ au plus égal à $L(X, A)$, on peut écrire

$$G(X, A) = O[L^{k-m}(X_1, A)],$$

et l'on voit ainsi que chacune des intégrales étendues à ϖ''_1 est (¹)

$$O\left[\frac{MN}{k+h-1} L^{k+h-1}(X, Y)\right].$$

Dans ϖ'_1 on trouve

$$|G(X, A) - G(Y, A)| < \sqrt{m}\, 2^{m+1-k} N L(X, Y) L^{k-m-1}(X, A).$$

Nous avons à multiplier par $ML^h(X, A)$ et à intégrer dans la région

$$2L(X, Y) < L(X, A) < 2L_0,$$

où L_0 est supérieur à la borne supérieure de $L(X, Y)$ quand X et Y varient dans ϖ; si $k + h < 2$, on trouve ainsi

$$O\left[\frac{MN}{2-k-h} L^{k+h-1}(X, Y)\right]$$

pour la première intégrale étendue à ϖ'_1.

On peut aussi limiter cette intégrale par un autre procédé applicable même si $k + h = 2$. Cette intégrale est

$$O\left[MNL(X, Y) \int_r^{2L_0} \rho^{m-2} (\rho^2 + x_m^2)^{\frac{k+h-m-1}{2}} d\rho\right],$$

(¹) Pour les détails de cette démonstration, *voir* B, § I, théor. 1, p. 137 et suivantes.

où $r=\sqrt{4L^2(X,Y)-x_m^2}$ si cette quantité est réelle, et $r=0$ dans le cas contraire. Si $x_m \geqq L(X, Y,)$, ce qui entraîne $r \leqq x_m\sqrt{3}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\int_r^{2L_0} \rho^{m-2}(\rho^2+x_m^2)^{\frac{k+h-m-1}{2}} d\rho & \\ \leqq x_m^{k+h-2} & \int_0^{\frac{2L_0}{x_m}} t^{m-2}(1+t^2)^{\frac{k+h-m-1}{2}} dt \\ < x_m^{k+h-2} & \left[\int_0^1 t^{m-2}(1+t^2)^{\frac{1-m}{2}} dt + \int_1^{\frac{2L_0}{x_m}} t^{k+h-3} dt\right]\end{aligned}$$

et nous remarquons que

$$\int_1^{\frac{2L_0}{x_m}} t^{k+h-3} dt \leqq \log\frac{2L_0}{x_m} \leqq \log\frac{2L_0}{L(X,Y)};$$

l'intégrale étendue à ϖ'_1 est donc dans ce cas

$$O\left[MNL^{k+h-1}(X,Y)\log\frac{L_0}{L(X,Y)}\right].$$

Si $x_m < L(X, Y)$ et par suite $r > L(X,Y)\sqrt{3}$, nous écrivons

$$\begin{aligned}\int_r^{2L_0} \rho^{m-2}(\rho^2+x_m^2)^{\frac{k+h-m-1}{2}} d\rho & \leqq \int_r^{2L_0} \rho^{k+h-3} d\rho < r^{k+h-2}\log\frac{2L_0}{r} \\ & < (\sqrt{3})^{k+h-2}L^{k+h-2}(X,Y)\log\frac{2L_0}{L(X,Y)\sqrt{3}};\end{aligned}$$

l'intégrale étendue à ϖ'_1 est donc encore

$$O\left[MNL^{k+h-1}(X,Y)\log\frac{L_0}{L(X,Y)}\right].$$

Enfin nous avons pour le dernier terme la limitation

$$O\left[\frac{MN}{1-k}L^{k+h-1}(X,Y)\right] \qquad \text{si } k>1,$$

et

$$O\left[MNL^h(X,Y)\log\frac{L_0}{L(X,Y)}\right] \qquad \text{si } k=1.$$

Finalement

$$F(X) - F(Y) = \begin{cases} O\left[MN\left(\frac{1}{k+h-1} + \frac{1}{1-k}\right) L^{k+h-1}(X, Y)\right] & (k<1), \\ O\left[\frac{MN}{h} L^h(X, Y) \log \frac{L_0}{L(X, Y)}\right] & (k=1), \end{cases}$$

ce qui démontre le théorème.

5. Pour appliquer ce théorème, prenons une fonction u, satisfaisant dans le domaine borné ouvert $\mathcal{D}$ à l'équation (1)(§ I) et prenant sur $\mathcal{S}$ des valeurs continues (L). Si $\mathcal{S}$ et les coefficients de l'équation remplissent des conditions de régularité que nous allons préciser, et si s_m est le paramètre déjà introduit (§ I, n° 10), on va prouver que les dérivées, jusqu'à l'ordre p de $s_m^p u$, où p est un entier arbitraire, sont continues (L) dans le domaine $s''_m \leqq s_m \leqq 0$, s''_m étant une constante assez voisine de zéro pour que, dans ce domaine, s_m existe et ait ses dérivées jusqu'à l'ordre p, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$, continues (L) : *cela suppose que les fonctions* $x_\alpha = f_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1})$ par lesquelles s'expriment les coordonnées des points de $\mathcal{S}$. *ont toutes leurs dérivées jusqu'à l'ordre p continues* (L).

Nous considérons u comme solution d'un problème de Dirichlet dans le domaine limité par les multiplicités $s_m = 0$, $s_m = s''_m$, et nous prenons s''_m assez voisin de zéro pour qu'on puisse, sans diminuer la généralité, supposer $c < 0$ dans ce domaine [1]. Alors u s'exprime par un potentiel de double couche.

Tant que X reste hors des multiplicités attirantes, ce potentiel se dérive sans difficulté (§ I, n° 9), *pourvu que les dérivées d'ordre p des* $a_{\alpha,\beta}$ *et des* $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$, *et d'ordre* $p-1$ *de c soient continues* (L). On peut considérer les dérivations comme appliquées au noyau

$$s''_m \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(A)\, \varpi_\alpha(A) \frac{\partial G(X, A)}{\partial a_\beta},$$

qui est $O[L^{p+1-m}(X, A)]$ et chaque dérivation diminue l'ordre d'une unité. Après k dérivations ($k \leqq p$), le noyau sera donc $O[L^{p+1-k-m}(X, A)]$;

---

(1) B, § V, 3e application, p. 223.

si nous remplaçons la densité $\sigma(A)$ par $\sigma(A) - \sigma X_1$), nous pourrons appliquer le théorème précédent (une dérivation de plus par rapport aux x_α étant possible); et si nous remplaçons $\sigma(A)$ par $\sigma(X_1)$, c'est comme si nous avions dérivé un potentiel de densité constante : les p dérivations donnent des résultats continus (L) dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$.

Toutes ces dérivées sont donc bien continues (L); comme toutes, excepté $\frac{\partial^p}{\partial s_m^p}$, ont une puissance de s_m en facteur, toutes, sauf cette dernière, s'annulent sur $\mathfrak{S}$; cette dernière prend sur $\mathfrak{S}$ la valeur $p\,!\,u$.

Si l'on suppose que les dérivées d'ordre q des valeurs prises par u sur $\mathfrak{S}$ sont continues (L)($q \leqq p$), on trouve de même que les dérivées $s_m^{p-q}u$ jusqu'à l'ordre p sont continues (L) dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$; mais les hypothèses doivent être complétées de façon à assurer la continuité (L) des dérivées de u jusqu'à l'ordre q, c'est-à-dire que, si $q < 3$, les dérivées d'ordre $q + 1$ des f_α doivent être continues (L) (n^{os} 1 et 2).

6. Soit φ une fonction dont les dérivées jusqu'à l'ordre p sont continues (L) dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$. Ce qui précède donne le moyen de construire une définition de φ hors de $\mathfrak{D}$, de façon que les dérivées jusqu'à l'ordre p soient continues (L) dans le domaine total, pourvu que les dérivées d'ordre p (d'ordre $p + 1$ si $p < 3$) des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ soient continues (L).

Il nous suffit pour cela de montrer qu'on peut construire cette fonction φ dans le domaine $0 \leqq s_m \leqq s'_m$. Sur $s_m = s'_m$, nous nous donnerons, par exemple, une valeur constante pour φ, et la valeur 0 pour ses dérivées jusqu'à l'ordre p.

Nous prendrons pour φ l'expression

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{k=1}^{p} \frac{s_m^k}{k\,!}\left(1 - \frac{s_m}{s'_m}\right)^k \varphi_k,$$

les fonctions φ_0 et φ_k se trouvant comme on va dire. Considérons l'équation

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0.$$

φ_0 sera la solution de cette équation qui prend les valeurs données sur

$s_m = 0$ et sur $s_m = s'_m$: les dérivées jusqu'à l'ordre p de ces valeurs étant continues (L), toutes les dérivées de φ_0 jusqu'à l'ordre p sont continues (L).

φ_1 sera la solution de la même équation prenant sur les frontières les valeurs de $\frac{\partial(\varphi - \varphi_0)}{\partial s_m}$, en les changeant de signe sur $s_m = s'_m$: toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p du terme en φ_1 sont continues (L).

Et ainsi de suite : φ_k est solution de la même équation et prend sur $\mathfrak{S}$ la valeur de la dérivée d'ordre k, par rapport à s_m, de la différence entre φ et les k termes déjà obtenus dans le développement; sur $s_m = s'_m$, les valeurs de la même expression doivent être multipliées par $(-1)^k$.

7. Supposons que les dérivées des expressions paramétriques des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ soient continues (L) d'exposant k, et que les valeurs prises sur $\mathfrak{S}$ par une solution u de l'équation

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0$$

soient continues (L) d'exposant $h > 1 - k$. Alors u est dans $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ continu (L) d'exposant $h + k - 1$ si $k < 1$, d'exposant aussi peu inférieur à h qu'on veut si $k = 1$. Cela résulte immédiatement du n° 4 en remarquant que, d'après la formule de Green, le potentiel de double couche de densité constante est dérivable.

8. Soient maintenant $s_1, s_2, \ldots, s_m$ les paramètres déjà introduits. Le produit $s_m \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ où $h + k > 1$ est continu (L) d'exposant $h + k - 1$ si $k < 1$, d'exposant aussi peu inférieur à h qu'on veut si $k = 1$. C'est toujours la même démonstration.

III. — Propriétés des équations générales du type elliptique.

1. A titre de lemme, nous commençons par le théorème suivant :

Théorème. — *Soit $\mathfrak{D}$ un domaine borné ouvert; on suppose que les coordonnées des points de sa frontière $\mathfrak{S}$ s'expriment par des fonctions de*

$m-1$ paramètres dont les dérivées d'ordre $p \geqq 1$ sont continues (L) *d'exposant h et dont les déterminants fonctionnels ne s'annulent pas simultanément. Soit u une fonction continue ou continue* (L) *d'exposant h dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$ et dont certaines dérivées, d'ordre au plus égal à p, existent et sont continues ou continues* (L) *d'exposant h dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$. Soit k un nombre quelconque tel que $0<k<h$. On peut trouver un polynome* P *tel que* $\mathrm{P}-u$ *et celles de ses dérivées d'ordre au plus égal à p qui sont continues aient leurs valeurs absolues inférieures à un nombre positif donné quelconque ε, et que les coefficients de continuité* (L) *pour l'exposant k de celles de ces fonctions qui, d'après les hypothèses, sont continues* (L), *soient inférieurs à ε.*

Nous allons voir d'abord qu'on peut trouver une fonction $v(\mathrm{X})$ possédant dans tout l'espace les mêmes dérivées continues ou continues (L) que u dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$, et telle que, dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$, $v-u$ et celles de ses dérivées, d'ordre au plus égal à p, qui sont continues, soient inférieures en valeur absolue à ε, et que celles de ces fonctions qui sont continues (L) admettent, pour l'exposant k, un coefficient au plus égal à ε. En outre, nous ferons en sorte que $v(\mathrm{X})$ soit nul dès que X sera assez loin de O.

Soient

$$x_\alpha = f_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$$

les expressions paramétriques des points de S. Reprenons le paramètre s_m qui nous a déjà servi plusieurs fois. Soit $|s_m| < a$ la région où la correspondance entre les x_α et les s_α est biunivoque ($s_m > 0$ hors de $\mathfrak{D}$). Soit t_m une fonction de s_m définie par l'équation

$$t_m = s_m - \frac{2b}{p+1}\left(\frac{s_m+a}{2a}\right)^{p+1} \qquad (0 < b < a,\ |s_m| < a),$$

où b est une constante, t_m est une fonction croissante de s_m dont les dérivées jusqu'à l'ordre $p+1$ sont continues; pour $s_m = -a$, $t_m = -a$, la dérivée de t_m est égale à un, et les dérivées suivantes, jusqu'à l'ordre p, sont nulles; t_m s'annule pour une valeur c de s_m comprise entre 0 et a.

Soient u' et v' ce que deviennent la fonction donnée u et la fonction cherchée v quand on les exprime à l'aide de $s_1, s_2, \ldots, s_m$. Dans la région $-a < s_m \leqq 0$, nous prendrons

$$v'(s_1, s_2, \ldots, s_m) = u'(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, t_m);$$

dans le reste de $\mathcal{D}$, $v = u$. Nous dirons dans un instant comment nous définissons v hors de $\mathcal{D}$. Vérifions immédiatement que v possède dans $\mathcal{D}$ les propriétés imposées si b est assez petit. Il est tout d'abord évident que v a les mêmes dérivées continues d'ordre $\leqq p$ que u, et que, pour $v - u$, ces dérivées sont inférieures à ε en valeur absolue si b est assez petit. Il est évident aussi que, b tendant vers zéro, les coefficients de continuité (L), pour l'exposant h, de celles de ces fonctions qui sont continues (L), sont bornés. Soient $u^\star$ et $v^\star$ deux dérivées continues (L) correspondantes, d'ordre $\leqq p$. On a

$$|u^\star(X) - v^\star(X) - u^\star(Y) + v^\star(Y)| < 2\,\mathrm{M}\mathrm{L}^h(X, Y),$$

M étant indépendant de b. Mais, si η est un nombre positif donné, et si b est assez petit, $|u^\star - v^\star|$ est inférieur à η et par suite

$$|u^\star(X) - v^\star(X) - u^\star(Y) + v^\star(Y)| < 2\eta.$$

Élevons la première limitation à la puissance $\frac{k}{h}$, la deuxième à la puissance $\frac{h-k}{h}$, et faisons le produit :

$$|u^\star(X) - v^\star(X) - u^\star(Y) + v^\star(Y)| < 2\eta^{\frac{h-k}{h}}\,\mathrm{M}^{\frac{k}{h}}\mathrm{L}^k(X, Y);$$

le second membre est moindre que $\varepsilon\mathrm{L}^k$ si η, ou b, est assez petit, ce qu'il fallait démontrer.

Hors de $\mathcal{D}$, dans la région $0 < s_m < c$, nous prendrons

$$v'(s_1, s_2, \ldots, s_m) = \mathrm{Q}\left(1 - \frac{s_m}{c}\right) u'(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}, t_m),$$

Q étant le polynome déjà défini (§ I, n° 7, égalité (8)], avec $q = p - 1$. Dans le reste de l'espace $v = 0$. La fonction v jouit ainsi de toutes les propriétés voulues.

Il suffit donc de démontrer le théorème pour une fonction telle que v, car dans la définition de v on peut remplacer k et ε par $\frac{h+k}{2}$ et $\frac{\varepsilon}{2}$, et faire dans la suite des changements analogues.

Supposons donc que la fonction u et certaines de ses dérivées jusqu'à l'ordre p soient, dans tout l'espace, les unes continues, les autres continues (L) d'exposant h, et que u soit nul dès que X est assez loin de O. Nous pouvons trouver un domaine contenant $\mathcal{O}$, défini par des inégalités.

$$x'_\alpha \leqq x_\alpha \leqq x''_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

dont la frontière soit tout entière dans la région où u est nul. En changeant x_α en $x'_\alpha + \frac{x''_\alpha - x'_\alpha}{2\pi}(x_\alpha - x'_\alpha)\,(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, nous nous ramenons au cas où ce domaine est défini par

$$0 \leqq x_\alpha \leqq 2\pi \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Nous formons alors les sommes de Féjer

$$S_n(X) = (2n\pi)^{-m}\int^{(m)} u(y_1, \ldots, y_m)\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\sin^2\frac{n(x_\alpha - y_\alpha)}{2}}{\sin^2\frac{x_\alpha - y_\alpha}{2}}\,d(y_1, \ldots, y_m),$$

les intégrales étant étendues à notre domaine. Si n est assez grand, u et celles de ses dérivées d'ordre $\leqq p$ qui sont continues sont représentés par cette intégrale et ses dérivées correspondantes avec un écart inférieur à ε dans notre domaine. Pour montrer la propriété relative à la continuité (L), des intégrations par parties permettent de se borner au cas où u est continu (L) d'exposant h. On a alors

$$S_n(X) = (n\pi)^{-m}\int^{(m)} u(x_1 + 2z_1, \ldots, x_m + 2z_m)\prod_{\alpha=1}^{m}\frac{\sin^2(nz_\alpha)}{\sin^2 z_\alpha}\,d(z_1, \ldots, z_m),$$

le domaine d'intégration étant $-\frac{x_\alpha}{2} < z_\alpha < \pi - \frac{x_\alpha}{2}\,(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$, ou simplement $0 < z_\alpha < \pi$, en modifiant la définition de u hors du domaine d'intégration, de façon que u admette pour chaque variable la période 2π.

Avec cette convention, on a

$$S_n(X) - u(X) = (n\pi)^{-m}\int^{(m)} [u(x_1 + 2z_1, \ldots, x_m + 2z_m) - u(x_1, \ldots, x_m)] \times \prod^{m}\frac{\sin^2(nz_\alpha)}{\sin^2 z_\alpha}\,d(z_1, \ldots, z_m),$$

l'intégrale étant étendue au domaine $0 < z_\alpha < \pi (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$. Si l'on introduit un second point X', la variation de $S_n - u$ sera une intégrale analogue, sous laquelle le premier facteur est remplacé par

$$u(x'_1 + 2z_1, \ldots, x'_m + 2z_m)$$
$$- u(x_1 + 2z_1, \ldots, x_m + 2z_m) - u(x'_1, \ldots, x'_m) + u(x_1, \ldots, x_m).$$

La valeur absolue de ce premier facteur est moindre que $2ML^h(X, X')$, M étant le coefficient de continuité (L) de u; la variation de $S_n - u$ est donc aussi inférieure à $2ML^h(X, X')$. Mais le premier facteur a aussi la limitation

$$2^{1+h} M(z_1^2 + \ldots + z_m^2)^{\frac{h}{2}},$$

d'où, pour l'intégrale, la limitation arbitraire η si n est assez grand. Un raisonnement employé il y a un instant montre qu'alors la variation de $S_n - u$, si n est assez grand, est moindre que $\varepsilon L^k(X, X')$, ce que nous voulions démontrer.

S_n n'est pas un polynome, mais une fonction entière. Le théorème est donc évidemment vrai pour S_n dans n'importe quel domaine. Il l'est donc aussi pour toutes les fonctions u considérées.

2. *Soit* $F(u, v)$ *une fonction composée de certaines variables* $(x_1, \ldots, x_m)$ *par l'intermédiaire des fonctions* u, v *dont le nombre est quelconque. On suppose que* u, v, $u + \delta u$, $v + \delta v$ *sont continus* (L) *d'exposant* h *et de coefficient* M. *On suppose que* δu *et* δv *sont continus* (L) *d'exposant* h *et de coefficient* η *et que* $|\delta u|$ *et* $|\delta v|$ *sont inférieurs à* η. *Enfin on suppose que, par rapport à* u *et à* v, F *a des dérivées continues* (L) *d'exposant* k *et de coefficient* N *et de valeurs absolues inférieures à* N. *Alors, par rapport à* X,

$$F(u + \delta u, v + \delta v) - F(u, v)$$

est continu (L) *d'exposant* kh *et de coefficient infiniment petit avec* η.

Donnons à X un déplacement ΔX de longueur l; nous désignerons par le symbole Δ les accroissements correspondants des fonctions que nous considérons. Nous regarderons δu, δv comme des différentielles des variables indépendantes u et v et $\Delta \delta u$, $\Delta \delta v$ comme les différentielles $\delta \Delta u$, $\delta \Delta v$ de Δu, Δv. Nous avons, en appliquant le théorème des accroissements finis à une fonction de u, v, Δu, Δv,

$$\Delta[F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v)] = \Delta\delta F(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v)$$
$$(0 < \theta < 1),$$

ou

$$\begin{aligned}
&\Delta[F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v)] \\
&\quad = \Delta\,\delta u\, F'_u[u+\Delta u+\theta\,\delta(u+\Delta u), v+\Delta v+\theta\,\delta(v+\Delta v)] \\
&\qquad + \delta u \{ F'_u[u+\Delta u+\theta\,\delta(u+\Delta u), v+\Delta v+\theta\,\delta(v+\Delta v)] \\
&\qquad\qquad - F'_u(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v) \} + \ldots,
\end{aligned}$$

les points tenant la place des termes obtenus par échange des rôles de u et de v. Si p est le nombre des fonctions u, v, ..., on voit que

$$|\Delta[F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v)]| < p\eta N l^h + p\eta N(\sqrt{p}\eta l^h)^k,$$

ce qui démontre la proposition.

3. *Avec les mêmes hypothèses,*

$$F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v) - \delta F(u, v)$$

est continu (L) *d'exposant akh et de coefficient* $O[\eta^{1+(1-a)k}]$, *a étant une constante quelconque de l'intervalle* $0 < a < 1$.

En effet,

$$\begin{aligned}
&\Delta[F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v) - \delta F(u, v)] \\
&\quad = \Delta[\delta F(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v) - \delta F(u, v)].
\end{aligned}$$

On vient de voir que si L est une limite supérieure de l,

$$|\Delta\delta F(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v)| < p\eta N[L^{(1-k)h} + (\sqrt{p}\eta)^k] l^{kh},$$

et l'on a la même limitation pour $\Delta\delta F(u, v)$. Mais, d'autre part,

$$|\delta F(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v) - \delta F)u, v)| < p\eta N(\sqrt{p}\eta)^k,$$

et de même si l'on donne à X le déplacement ΔX. On en déduit

$$\begin{aligned}
&|\Delta[F(u+\delta u, v+\delta v) - F(u, v) - \delta F(u, v)]| \\
&\quad < 2p\eta N[L^{(1-k)h} + (\sqrt{p}\eta)^k]^a (\sqrt{p}\eta)^{(1-a)k} l^{akh},
\end{aligned}$$

ce qu'il fallait démontrer.

4. *Si* $\mathrm{F}(u, v)$ *est, par rapport à* u *et à* v, *continu* (L) *de coefficient* N *et d'exposant* k, *si, de plus,*

$$|\Delta u| < f(l), \qquad |\Delta(u + \delta u)| < f(l), \qquad |\delta u| < \eta,$$

et de même pour v (*le nombre des variables* $u, v, \ldots$ *étant* p), *nous écrirons*

$$|\Delta[\mathrm{F}(u + \delta u, v + \delta v) - \mathrm{F}(u, v)]| < 2\,\mathrm{N}[\sqrt{p}\, f(l)]^k,$$
$$|\Delta[\mathrm{F}(u + \delta u, v + \delta v) - \mathrm{F}(u, v)]| < 2\,\mathrm{N}(\sqrt{p}\,\eta)^k,$$

d'où, si $0 < a < 1$,

$$|\Delta[\mathrm{F}(u + \delta u, v + \delta v) - \mathrm{F}(u, v)]| < 2\,\mathrm{N}(\sqrt{p}\,\eta^{1-a})^k f^{ak}(l).$$

En particulier, si $f(l) = \mathrm{M}l^h$, on aura

$$|\Delta[\mathrm{F}(u + \delta u, v + \delta v) - \mathrm{F}(u, v)]| < 2\,\mathrm{N}(\mathrm{M}^a \sqrt{p}\,\eta^{1-a})^k\, l^{akh}.$$

Si, notamment, F a des dérivées bornées relatives à u et à v, on peut faire $k = 1$ et conclure que, par rapport à X, F a un exposant de continuité (L) aussi peu inférieur à h qu'on veut, ce qui ne résultait pas du n° 2, où les hypothèses étaient plus restreintes; mais ici, l'exposant de η est $1 - a$, au lieu qu'au n° 2 il était égal à *un*.

5. *Soit* (¹)

$$\mathcal{F}(u) = \mathrm{F}(p_{\alpha.\beta};\, p_\alpha;\, u;\, x_\alpha) = 0 \qquad \left(p_{\alpha.\beta} = \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta},\ p_\alpha = \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)$$

une équation, linéaire ou non, aux dérivées partielles du second ordre. Considérons un domaine borné ouvert $\mathcal{D}$ *et une solution* u *de l'équation dans ce domaine. On suppose :* 1° *que les systèmes de variables* $p_{\alpha.\beta}$, p_α, u, x_α *appartiennent à un domaine borné ouvert* $\mathcal{C}$ *dans lequel les dérivées de* F *par rapport aux* $\dfrac{m^2 + 5m + 2}{2}$ *variables jusqu'à l'ordre* $q \geqq 2$ *existent et sont continues* (L); 2° *que l'équation est de type elliptique dans* $\mathcal{C}$; 3° *que les dérivées secondes de* u *existent et sont continues* (L) *dans* $\mathcal{D}$. *Alors les dérivées de* u *jusqu'à l'ordre* $q + 2$ *existent et sont continues* (L) *dans tout domaine fermé intérieur à* $\mathcal{D}$.

(¹) Notation introduite dans A, Chap. III, p. 100, et dans B, § VI, p. 231.

D'après des résultats antérieurs ([1]), il suffit d'établir que u a des dérivées troisièmes continues en tout point de $\mathcal{D}$.

Pour y parvenir, nous ferons d'abord subir à F certaines transformations, puis nous emploierons, pour reproduire u, un mode d'approximations successives.

Plaçons l'origine O des coordonnées en un point de $\mathcal{D}$ où nous voulons prouver l'existence et la continuité des dérivées troisièmes. Posons

$$(1) \qquad a_{\alpha,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\alpha}}, \qquad a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\beta}} \quad (\beta \neq \alpha), \qquad b_\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Nous pouvons faire en sorte que, dans une hypersphère de centre O et de rayon assez petit, on ait $a_{1,1} c < 0$. En effet, s'il n'en est pas ainsi de prime abord, soit $u = vw$, w étant la nouvelle inconnue et v une fonction à déterminer; F devient une fonction des x_α, de w et de ses dérivées premières et secondes; la dérivée de F par rapport à $\frac{\partial^2 w}{\partial x_1^2}$ est $a_{1,1} v$, et la dérivée par rapport à w est

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + cv,$$

les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c étant calculés pour u; la question est donc la même que pour une équation linéaire ([2]), d'où résulte notre assertion. Dans la suite de cette démonstration, nous admettrons donc que, dans une hypersphère de centre O et de rayon assez petit, on a

$$(2) \qquad a_{1,1} > 0, \qquad c < 0.$$

Maintenant nous faisons subir aux x_α une transformation linéaire et homogène telle que l'on ait en O

$$(3) \qquad a_{\alpha,\alpha} = 1, \qquad a_{\alpha,\beta} = 0 \qquad (\beta \neq \alpha)(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m);$$

on constate que le calcul est encore le même que pour les équations linéaires et qu'il ne détruit pas le résultat obtenu en premier lieu.

Dans un changement d'inconnue $u = v + P$ où P est une fonction

---

([1]) C, théor. VI, p. 385, en tenant compte de la Note.

([2]) B, § V, théor. 3, troisième application, page 223.

déterminée, les $a_{\alpha,\beta}$, b_α et c ne changent pas. Nous prendrons pour P un polynome tel que, si

$$Q(x) = x^3(10 - 15x + 6x^2)$$

[cas particulier du polynome défini § I, n° 7, égalité (8)], et si l'on fait correspondre à la fonction u considérée la fonction

$$v\,Q\left[2 - \frac{L(O,X)}{R}\right] + P, \qquad [R < L(O,X) < 2R],$$

cette dernière fonction et ses dérivées premières et secondes et X forment un élément du champ $\mathcal{C}$; R est une constante assez petite pour que les conditions (2) soient remplies pour $L(O,X) \leqq 2R$. Ce polynome P existe (n° 1); si l'on diminue R, P doit changer.

Nous définissons maintenant de la façon suivante une nouvelle opération $\mathcal{F}_1$:

Pour $L(O,X) \leqq R$,

$$\mathcal{F}_1(v) = \mathcal{F}(v + P);$$

Pour $R < L(O,X) < 2R$,

$$\mathcal{F}_1(v) = Q\left[2 - \frac{L(O,X)}{R}\right]\mathcal{F}(v+P) + Q\left[\frac{L(O,X)}{R} - 1\right]\left(\sum_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} - \frac{v}{R^2}\right) + \varphi,$$

φ étant une fonction de X qui sera déterminée dans un instant;

Pour $L(O,X) \geqq 2R$,

$$\mathcal{F}_1 = \sum_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} - \frac{v}{R^2}.$$

La fonction φ est telle que, v correspondant à la solution donnée, dont les dérivées secondes sont continues (L), $\mathcal{F}_1$ s'annule si l'on remplace v, pour $R < L(O,X) < 2R$ par $Q\left[2 - \frac{L(O,X)}{R}\right]v$.

Si l'on prend $\varphi = 0$ pour $L(O,X) \leqq R$ et pour $L(O,X) \geqq 2R$, et si la fonction F_1 correspond à $\mathcal{F}_1$ comme F à $\mathcal{F}$, la fonction $F_1 - \varphi$ admet, par rapport aux $2^{-1}(m^2 + 5m + 2)$ arguments, des dérivées secondes continues (L). La fonction $\varphi(X)$ est continue (L) dans tout l'espace.

Si v correspond à la solution donnée de $\mathcal{F} = 0$, et si $V = v$ pour

$L(O, X) \leqq R$, $V = cQ\left[2 - \frac{L(O, X)}{R}\right]$ pour $R < L(O, X) < 2R$, $V = 0$ pour $L(O, X) \geqq 2R$, on a dans tout l'espace $\mathcal{F}_1(V) = 0$, et les dérivées secondes de V sont continues (L) dans tout l'espace.

Posons maintenant $x_\alpha = Ry_\alpha$. Si l'on calcule les nouvelles valeurs des $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c pour l'équation $R^2 F_1 = 0$, ils deviennent $a_{\alpha,\beta}$, Rb_α, $R^2 c$. En changeant la notation, nous nommerons de nouveau x_α ces variables y_α et u la fonction inconnue de ces variables; $R^2 F_1$ et $R^2 \mathcal{F}_1$ seront notés F et $\mathcal{F}$. L'équation $F = 0$ a la solution particulière V, que nous appellerons maintenant U; U est nul pour $L(O, X) \geqq 2$, et ses dérivées secondes sont continues (L) dans tout l'espace.

Les $a_{\alpha,\alpha}$ sont égaux à *un* et les autres $a_{\alpha,\beta}$ à *zéro* en O et pour $L(O, X) \geqq 2$; si R est assez petit, leur oscillation dans tout l'espace est aussi petite qu'on veut.

Les b_α sont nuls pour $L(O, X) \geqq 2$ et partout aussi petits qu'on veut en valeur absolue si R est assez petit.

Enfin, $c = -1$ pour $L(O, X) \geqq 2$, et si R est assez petit, c est aussi voisin qu'on veut de zéro pour $L(O, X) \leqq 1$ et de $-Q[L(O, X) - 1]$ pour $1 < L(O, X) < 2$.

Soit maintenant $h(X)$ un polynome tel que les valeurs absolues de

$$h - [9 - L^2(O, X)]^{-3} U$$

et de ses dérivées premières et secondes, ainsi que le coefficient de continuité (L) de ces dernières, pour un exposant k_0 inférieur à celui qu'admettent les dérivées secondes de U, soient inférieurs à un nombre $\eta > 0$ choisi quelconque. La fonction u_0, définie par les relations

$$u_0 = [9 - L^2(O, X)]^3 h(X) \qquad [L(O, X) < 3],$$
$$u_0 = 0 \qquad [L(O, X) \geqq 3],$$

a ses dérivées secondes continues (L) dans tout l'espace avec l'exposant k_0, et les valeurs absolues de $U - u_0$ et de ses dérivées premières et secondes, ainsi que le coefficient de continuité (L) de ces dernières pour l'exposant k_0 sont dans tout l'espace aussi petits qu'on veut si η a été pris assez petit.

u_0 est le point de départ d'une suite d'approximations successives destinées à reproduire U. D'une façon générale, ayant $u_n (n \geqq 0)$, on calcule les coefficients $a_{\alpha,\beta,n}$, $b_{\alpha,n}$, c_n correspondants, c'est-à-dire ce que deviennent les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c quand on y remplace u par u_n. On cherche alors une fonction h_n telle que

$$(4) \qquad \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta,n} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_{\alpha,n} \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} + c_n h_n = -\mathcal{F}(u_n),$$

h_n et toutes ses dérivées devant s'annuler à l'infini ; enfin, on pose

$$(5) \qquad u_{n+1} = u_n + h_n,$$

et ainsi de suite.

Nous allons établir que, si R et η ont été pris assez petits : 1° tous les h_n existent; 2° les approximations convergent; 3° leur limite u_∞ est égale à U; 4° u_∞ a ses dérivées troisièmes continues dans une certaine hypersphère de centre O.

Tant que $U - u_n$ et ses dérivées premières et secondes restent assez voisins de zéro, c_n est négatif dans tout l'espace. De plus, si R est assez petit, c_n diffère aussi peu qu'on veut d'une fonction $c'(X)$ égale à *zéro* pour $L(O, X) \leqq 1$, à $-Q[L(O, X) - 1]$ pour $1 < L(O, X) < 2$, à -1 pour $L(O, X) \geqq 2$. Considérons l'équation

$$(6) \qquad \sum_\alpha \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha^2} + c'(X) v = 0;$$

soit $G(X, \Xi)$ sa solution élémentaire nulle à l'infini (§ I, n° 4). Nous pouvons nous servir de G pour remplacer la puissance d'un polynome qui intervient dans la méthode de E. E. Levi. Nous procéderons ainsi qu'il suit.

Soit Ξ un point quelconque. Décomposons en carrés la forme quadratique de variables p_α,

$$\sum_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta,n}(\Xi) p_\alpha p_\beta,$$

en procédant de façon que p_α ne figure pas dans les carrés de rang supérieur à $\alpha (\alpha = 1, 2, \ldots, m)$; c'est possible d'une façon et d'une seule, car la forme est définie positive. Soit

$$\sum_\alpha \Big(\sum_\beta g_{\alpha,\beta} p_\beta \Big)^2 \qquad (g_{\alpha,\beta} = 0 \text{ si } \alpha > \beta),$$

cette décomposition ; nous choisissons les signes de façon que les $g_{\alpha,\alpha}$ soient positifs, et par suite très voisins de *un* si R est assez petit; les autres $g_{\alpha,\beta}$ seront alors très voisins de *zéro*. Nous exécutons maintenant sur les x'_α le changement

$$x'_\alpha = \sum_\beta g_{\alpha,\beta}(x_\beta - \xi_\beta) + \xi_\alpha,$$

et nous remplaçons dans G chaque x_α par la fonction x'_α de x_1, $x_2, \ldots, x_m$; nous obtenons ainsi une fonction $\mathrm{H}(\mathrm{X}, \Xi)$. Si nous posons alors

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta,n} \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_{\alpha,n} \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\alpha} + c_n \mathrm{H}, \tag{7}$$

on a $\mathrm{K} = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{k_n - m}(\mathrm{X}, \Xi)]$, k_n étant l'exposant de continuité (L) des dérivées secondes de u_n, car on a

$$\begin{aligned} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = & \sum_{\alpha,\beta} [a_{\alpha,\beta,n}(\mathrm{X}) - a_{\alpha,\beta,n}(\Xi)] \frac{\partial^2 \mathrm{H}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} \\ & + \sum_\alpha b_{\alpha,n}(\mathrm{X}) \frac{\partial \mathrm{H}}{\partial x_\alpha} + [c_n(\mathrm{X}) - c'(\Xi)]\mathrm{H}, \end{aligned} \tag{8}$$

la quantité ajoutée étant nulle. Or, les $a_{\alpha,\beta}$ ayant des dérivées continues par rapport aux x_α, u, $p_{\alpha,\beta}$ p_α, on a

$$a_{\alpha,\beta,n}(\mathrm{X}) - a_{\alpha,\beta,n}(\Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{k_n}(\mathrm{X}, \Xi)],$$

ce qui démontre la limitation de K.

De plus, si $n = 0$, la constante impliquée dans le symbole O est aussi petite qu'on veut, pourvu que R et η aient été pris assez petits; on le voit en changeant R et en remplaçant les x'_α, u, p_α, $p_{\alpha,\beta}$ par leurs nouvelles valeurs; on trouve

$$a_{\alpha,\beta,0}(\mathrm{X}) - a_{\alpha,\beta,0}(\Xi) = \mathrm{O}[\mathrm{R}^{k_0}\mathrm{L}^{k_0}(\mathrm{X}, \Xi)],$$

la constante impliquée dans le nouveau symbole étant indépendante de R. On aurait un résultat analogue pour $c_0(\mathrm{X}) - c'(\Xi)$ qui vaut $\mathrm{O}[\mathrm{R}^2 + \mathrm{R}\mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi)]$. Enfin, les $b_{\alpha,0}$ sont $\mathrm{O}(\mathrm{R})$. On a donc bien, tant que $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \Xi)$ est borné,

$$\mathrm{L}^{m-k_0}(\mathrm{X}, \Xi)\, \mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = \mathrm{O}(\mathrm{R}^{k_0}).$$

En outre, la fonction K est identiquement nulle si l'on a à la fois

$L(O, X) > 2$ et $L(O, \Xi) > 2$. En s'appuyant sur ce qui vient d'être dit et sur la limitation de la fonction G, de laquelle se déduit celle de H, on trouve que

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{k_n - m}(X, \Xi)] & \text{si } L(O, X) < 3,\ L(O, \Xi) < 3, \\ O[\psi(X, \Xi)] & \text{si } L(O, X) \geqq 3 \text{ ou si } L(O, \Xi) \geqq 3; \end{cases}$$

on a posé

$$\psi(X, \Xi) = e^{-g[L(O,X)+L(O,\Xi)]},$$

g étant constant tant que les approximations ne s'éloignent pas trop de U; pour $n = 0$, les constantes impliquées dans les deux symboles O sont aussi petites qu'on veut si R et η sont assez petits.

En nommant D le déterminant des $a_{\alpha,\beta,n}$, nous poserons

$$(9) \qquad h_n(X) = -\lambda \int^{(m)} H(X, A) \frac{\rho_n(A)}{\sqrt{D(A)}} dV_A,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace; la nouvelle inconnue $\rho_n(A)$ devra être calculée par l'équation

$$(10) \qquad \rho_n(X) - \lambda \int^{(m)} K(X, A) \frac{\rho_n(A)}{\sqrt{D(A)}} dV_A = -\mathcal{F}(u_n).$$

Comme dans des cas analogues déjà vus, la théorie de Fredholm s'applique.

Soit μ l'exposant de continuité (L) des dérivées secondes de F. Supposons que, jusqu'à $n = p - 1$, on ait

$$(11) \qquad k_n = \frac{\mu k_{n-1}}{1 + \mu k_{n-1}},$$

d'où

$$k_n = \frac{\mu^n (1 - \mu) k_0}{1 - \mu + \mu (1 - \mu^n) k_0} \qquad (\mu < 1);$$

il est évidemment inutile de considérer le cas où $\mu = 1$; nous supposerons que $\mu = a^{-1}$, *a étant un entier au moins égal à deux.*

Soit $M_n e^{-g L(O,X)}$ une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées premières et secondes, M_n étant aussi une limite supérieure du coefficient de continuité (L) de ces dernières pour l'exposant k_n. Supposons que

$$M_n < \nu^{2^n} \qquad (n \leqq p - 1), \tag{12}$$

ν étant une constante positive suffisamment petite ; l'hypothèse est en particulier vérifiée si $p = 1$, car elle se réduit à $M_0 < \nu$, ce qui est, car si η est assez petit, $\mathcal{F}(u_0)$ et son coefficient de continuité (L) pour l'exposant k_0 sont aussi voisins de zéro qu'on veut (n° 2).

On va voir que si R, η et ν sont convenablement choisis (indépendants de n) l'expression de k_n et la limitation de M_n subsistent pour $n = p$.

Soit $k_0 = b^{-1}$; *il suffit de nous placer dans le cas où b est entier.* Alors

$$k_n = \frac{a - 1}{b(a-1)a^n + a^n - 1} = \frac{1}{ba^n + a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + 1},$$

c'est-à-dire que k_n est l'inverse d'un nombre entier compris entre ba^n et $(b+1)a^n (a \geqq 2)$.

Pour résoudre l'équation de Fredholm en ρ_p, nous devons prendre le noyau itéré de rang $k_{p-1}^{-1} + 1$, qui est continu dans tout l'espace. De la limitation de M_n, nous déduisons que, si $L(O, X) < 3$, $L(O, \Xi) < 3$,

$$|K(X, \Xi)| < \sigma_1 \sum_{n=0}^{p-1} \nu^{2^n} L^{k_n - m}(X, \Xi),$$

σ_1 étant une constante. Si $L(O, X) \geqq 3$ ou si $L(O, \Xi) \geqq 3$, on a

$$K(X, \Xi) = O[\psi(X, \Xi)];$$

en prenant R assez petit, la constante impliquée dans O sera inférieure à $\sigma_1 \nu$, ce qui permet d'écrire

$$|K(X, \Xi)| < \sigma_1 \sum_{n=0}^{p-1} \nu^{2^n} \psi(X, \Xi).$$

Soit, pour un instant, $G(X, \Xi)$ une fonction moindre en valeur absolue que $\rho L^{h-m}(X, \Xi)$ pour $L(O, X) < 3$, $L(O, \Xi) < 3$, et que $\rho\psi(X, \Xi)$ dans le cas contraire. Soit $H(X, \Xi)$ une fonction ayant les limitations obtenues en mettant k et σ à la place de h et de ρ. On trouve, en se reportant à des calculs déjà faits [1], que le produit symbolique

$$\int^{(m)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, dV_A$$

a, pour $L(O, X) < 3$, $L(O, \Xi) < 3$, la limitation

$$\sigma_2 \rho\sigma \left(1 + \frac{1}{h}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{m-k-h}\right) L^{h+k-m}(X, \Xi) \qquad (h + k < m),$$

$$\sigma_2 \rho\sigma \left(1 + \frac{1}{h}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) \log \frac{7}{L(X, \Xi)} \qquad (h + k = m),$$

$$\sigma_2 \rho\sigma \left(1 + \frac{1}{h}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right)\left(1 + \frac{1}{k+h-m}\right) \qquad (k + h > m),$$

σ_2 étant une certaine constante. Si $L(O, X) \geqq 3$, ou si $L(O, \Xi) \geqq 3$, on a la limitation

$$\sigma_2 \rho\sigma \left(1 + \frac{1}{h}\right)\left(1 + \frac{1}{k}\right) \psi(X, \Xi).$$

Si l'on avait dans tout l'espace $|K| < \sigma\psi(X, \Xi)$, on aurait pour le produit symbolique la limitation

$$\sigma_2 \rho\sigma \left(1 + \frac{1}{h}\right) \psi(X, \Xi).$$

Ici K est une somme de p termes dont chacun a une limitation de ce type avec

$$\rho = \nu^{2^n}, \qquad h = k_n.$$

On voit que la limitation de $K^{(r+1)}$, où $r = k_{p-1}^{-1}$, est une somme de termes dont chacun a en facteur une puissance de ν. Comme

$$\left(\sum_{n=0}^{p} \nu^{2^n}\right)^{r+1} < \left(\frac{\nu}{1-\nu}\right)^{r+1} \qquad (\nu < 1),$$

on voit que ν^{r+1+j} est obtenu d'au plus $\dfrac{(r+j)!}{r!\,j!}$ façons. Limitons donc ce terme en ν^{r+1+j}.

Le coefficient comprend d'abord le facteur $\sigma_2^r \sigma_1^{r+1}$. Ensuite, il y a le

---

[1] B, § V, théor. 2, p. 197 à 199.

produit de $r+1$ facteurs $1+\frac{1}{k_n}$; on a

$$\sum 2^n = r+1+j$$

et, par suite, en tenant compte de la valeur de k_n, notre produit est moindre que

$$(b+1)^{r+1}\prod a^n < (b+1)^{r+1}\prod a^{2^n} = (b+1)^{r+1}a^{r+1+j}.$$

Ensuite vient le produit des facteurs $1+\frac{1}{\Sigma k_n}$ avec $\Sigma k_n < m$; ce produit est moindre que le précédent.

Enfin, vient le produit des facteurs $1+\frac{1}{|m-\Sigma k_n|}$; dans un seul d'entre eux, Σk_n dépasse m. La valeur absolue de $m-\Sigma k_n$ est certainement supérieure à l'inverse du produit des dénominateurs des k_n, donc à

$$b^{-r-1}\prod a^{-n} > b^{-r-1}\prod a^{-2^n};$$

or, le produit est étendu à des valeurs de n telles que $\Sigma 2^n = r+1+j$; il est donc supérieur à $b^{-r-1}a^{-r-1-j}$, et son inverse inférieur à a^{r+1+j}. Nous appliquerons cette limitation au facteur pour lequel $\Sigma k_n > m$ et au plus grand de ceux pour lesquels $\Sigma k_n < m$. Le produit du reste des facteurs $1+\frac{1}{m-\Sigma k_n}$ est évidemment moindre que $(b+1)^{r+1}a^{r+1+j}$.

Si l'une des sommes Σk_n devient égale à m, le produit symbolique du logarithme qui en résulte par le facteur suivant introduit le produit de k_n^{-1} par une constante, c'est-à-dire moins que le produit de a^n par une constante.

Finalement il existe une constante ϖ telle que le terme en ν^{r+1+j} soit moindre que son correspondant dans le développement de

$$\left(\frac{\varpi\nu}{1-\varpi\nu}\right)^{r+1}\psi(X,\Xi).$$

Donc, si $\varpi\nu < 1$,

$$\left|\frac{K^{(r+1)}(X,A)}{\sqrt{D(A)}}\right| < \left(\frac{\varpi\nu}{1-\varpi\nu}\right)^{r+1}\psi(X,\Xi),$$

dans tout l'espace. Si ν est assez petit, l'équation en ρ_p est donc soluble.

D'ailleurs,

$$|\mathcal{F}(u_p)| = \mathrm{O}[\mathrm{M}_{p-1}^2\, e^{-2g\mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{X})}],$$

et le coefficient de continuité (L) de $\mathcal{F}(u_p)$ pour l'exposant μk_p est $\mathrm{O}(\mathrm{M}_{p-1}^2)$ (¹).

Après les itérations, le second membre de l'équation en ρ_p devient

$$-\mathcal{F}(u_p) - \sum_{j=1}^{r} \lambda^j \int^{(m)} \mathrm{K}^{(j)}(\mathrm{X},\mathrm{A})\,\mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}(\mathrm{A})\,\mathcal{F}[u_p(\mathrm{A})]\,d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}.$$

Des calculs tout à fait semblables à ceux qu'on vient de voir, en considérant $\mathcal{F}(u_p)$ comme un premier facteur symbolique, montrent que la valeur absolue de cette expression est moindre que

$$\varpi_1 \mathrm{M}_{p-1}^2 \left[1 + \sum_{j=0}^{r} \lambda^j \left(\frac{\varpi\nu}{1-\varpi\nu}\right)^j\right] e^{-g\mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{X})},$$

ϖ_1 étant une autre constante. Si ν est assez petit, indépendant de r, donc de p, ceci est moindre que

$$\mathrm{O}[\mathrm{M}_{p-1}^2\, e^{-g\mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{X})}],$$

la constante impliquée étant indépendante de p. Donc

$$\rho_p = \mathrm{O}[\mathrm{M}_{p-1}^2\, e^{-g\mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{X})}],$$

le facteur impliqué étant indépendant de p, si ν est assez petit.

Il reste à en déduire une limitation de h_p. En nous appuyant sur le calcul de la fonction G, de laquelle H se déduit immédiatement, nous trouvons que, tant que les approximations ne s'éloignent pas trop de U,

$$\frac{\mathrm{H}(\mathrm{X},\mathrm{A})}{\sqrt{\mathrm{D}(\mathrm{A})}} < \begin{cases} \sigma_3\,\mathrm{L}^{2-m}(\mathrm{A},\mathrm{X}) & \text{pour } \mathrm{L}(\mathrm{A},\mathrm{X}) < 1, \\ \sigma_3\,\psi(\mathrm{A},\mathrm{X}) & \text{pour } \mathrm{L}(\mathrm{A},\mathrm{X}) \geqq 1. \end{cases}$$

Or

$$\mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{A}) > \mathrm{L}(\mathrm{O},\mathrm{X}) - \mathrm{L}(\mathrm{A},\mathrm{X}).$$

(¹) B, § VI, théor. 4, p. 238 à 241.

Par suite, en intégrant dans la région $L(X, A) < 1$,

$$\int^{(m)} H(X, A) \frac{\rho_p(A)}{\sqrt{D(A)}} dV_A = O\left[M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)} \int^{(m)} L^{2-m}(X, A) e^{gL(X,A)} dV_A \right]$$
$$= O\left[M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)} \int_0^1 r e^{gr} dr \right] = O[M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)}].$$

D'autre part, pour $L(X, A) \geqq 1$,

$$\int^{(m)} H(X, A) \frac{\rho_p(A)}{\sqrt{D(A)}} dV_A = O\left[M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)} \int^{(m)} e^{-2gL(O,A)} dV_A \right]$$
$$= O[M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)}].$$

En ajoutant, il vient enfin

$$| h_p(X) | < \tau M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)},$$

τ ayant une valeur connue, indépendante de p, si ν est assez petit.

En dérivant sous le signe somme, on aura une limitation semblable pour les dérivées de h_p; on augmentera au besoin τ de façon que

$$\left| \frac{\partial h_p}{\partial x_\alpha} \right| < \tau M_{p-1}^2 e^{-gL(O,X)},$$

Il faut maintenant, pour avoir les dérivées secondes de h_p, étudier la continuité (L) de ρ_p. D'après ce que nous savons (1), $\mathcal{F}(u_p)$ est continu (L) d'exposant μk_{p-1} et de coefficient égal à M_{p-1}^2 multiplié par une constante connue (2). Il est alors immédiat que, si ν est assez petit, le coefficient de continuité (L) de ρ_p, pour l'exposant μk_{p-1}, est inférieur au produit de M_{p-1}^2 par une constante connue (il suffit de faire le calcul pour des points X et Y de distance inférieure à *un*, à cause de la limitation de ρ_p).

Ce résultat nous sert à calculer des limitations des dérivées secondes de h_p dans la région $L(O, X) < 3$, en nous servant d'une formule

---

(1) B, § VI, p. 240.

(2) Quoique X varie dans tout l'espace, il n'y a pas de difficulté à remplacer les termes en r^q, dans le raisonnement cité, par des termes en $r^{\mu q}$, car $\mathcal{F}(u_n) = 0$ pour $L(O, X) > 2$.

connue [1]. Cette formule sera appliquée à la région $L(O, A) < 4$ du domaine auquel est étendue l'intégrale qui donne $\frac{\partial h_p}{\partial x_\alpha}$; pour le reste de l'intégrale, on dérivera sous le signe somme. Les différences

$$|A_{\alpha,\beta}(X) - A_{\alpha,\beta}(A)|$$

sont trouvées égales à $O\left[L^{k_0}(X, A) + \sum_{n=0}^{p} \nu^{2^n} L^{k_n}(X, A)\right]$; le premier terme $O[L^{k_0}(X, A)]$ est ce qui correspond à u_0. Or la série $\Sigma k_n^{-1} \nu^{2^n}$ est convergente si $\nu < 1$, et sa somme est bornée si ν est inférieur à un nombre fixe inférieur à *un*. De là se tire enfin que, pour $L(O, X) < 3$, les dérivées secondes de h_p sont inférieures au produit de M_{p-1}^2 par une constante connue.

D'autre part, si $L(O, X) > 2$, $\mathcal{F}(u_p)$ est nul et les $a_{\alpha,\beta,p}$, $b_{\alpha,p}$, c_p se réduisent aux constantes qu'on sait. Par suite, les dérivées de tous les ordres de ρ_p existent et sont continues. En introduisant la fonction de Green relative à l'équation

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - u = 0$$

pour la région $L(O, X) > 2$, on voit directement que toutes les dérivées jusqu'à un ordre donné de la fonction h_p ont la limitation

$$O[M_{p-1}^2 e^{-g L(O, X)}]$$

dans la région $L(O, X) > 3$. On peut en conclure immédiatement que les coefficients de continuité (L), pour un exposant quelconque, sont $O(M_{p-1}^2)$.

Il nous faut enfin le coefficient de continuité (L) des dérivées secondes de h_p, dans tout l'espace, pour l'exposant k_p. On trouve immédiatement, en se servant de la continuité (L) de ρ_p [2], que ce coefficient est inférieur au produit de $k_{p-1} M_{p-1}^2$ par une constante connue.

---

[1] C, théor. I, p. 370.
[2] C, théor. II, p. 372.

Il existe donc une constante τ, indépendante de p, telle que si R, η et ν sont inférieurs à certaines limites indépendantes de p, on ait, sous l'hypothèse (12),

$$M_p < \tau a^p M_{p-1}^2. \tag{13}$$

Or si

$$M_n < \tau^{2^n-1} a^{2^{n+1}-n-2} \nu_1^{2^n} \qquad (\tau a^2 \nu_1 < \nu;\ n = 0, 1, \ldots, p-1), \tag{14}$$

les conditions (12) sont remplies. Alors l'inégalité (13) prouve que l'inégalité (14) a lieu aussi pour $n = p$. L'inégalité (14) est donc générale.

Les approximations successives se poursuivent donc indéfiniment, et elles convergent uniformément dans tout l'espace, ainsi que leurs dérivées premières et secondes. Elles ont donc une limite $u_\infty = \lim u_n$, dont les dérivées premières et secondes sont continues, et qui satisfait à l'équation $F = 0$. A l'infini, u_∞ est nul, puisqu'il en est ainsi de tous les u_n. Mais il en est de même de U. Si nous appliquons à

$$\mathcal{F}(U) - \mathcal{F}(u_\infty)$$

le théorème des accroissements finis, nous voyons que

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 (U - u_\infty)}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial (U - u_\infty)}{\partial x_\alpha} + c(U - u_\infty) = 0,$$

les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c étant calculés pour $\theta U + (1 - \theta) u_\infty$ $(0 < \theta < 1)$, en traitant θ comme une constante dans les dérivations, quoique θ dépende de X. $U - u_\infty$ ne peut donc avoir ni maximum positif, ni minimum négatif; cette fonction qui est nulle à l'infini, est donc identiquement nulle,

$$u_\infty = U.$$

Nous allons maintenant voir que u_∞ a ses dérivées troisièmes continues à l'origine.

Toutes les fonctions u_n ont des dérivées troisièmes continues (L) en tout point d'une région fermée intérieure à $L(O, X) < 1$. En effet, il en est ainsi pour u_0 qui se réduit dans cette région à un polynome. S'il en est ainsi pour u_n, les $a_{\alpha,\beta,n}$, $b_{\alpha,n}$, c_n ont, d'après l'hypothèse $q \geqq 2$, des dérivées continues (L) et il en est de même de $\mathcal{F}(u_n)$; cela suffit

(§ I, n° 6) pour que h_n, et par suite u_{n+1}, aient des dérivées troisièmes continues (L). Si l'exposant de continuité (L) pour les dérivées troisièmes de h_n est l_n, on peut prendre

$$l_{n+1} = \frac{\mu l_n}{2 + \mu l_n},$$

pourvu qu'on ait pris $l_0 \leqq k_0$, ce qui est évidemment possible. En effet, l'intégrale qui figure dans l'équation définissant ρ_{n+1} a ses dérivées continues (L) d'exposant $\frac{l_n}{1 + l_n}$, car $l_n < k_n$; les dérivées du second membre sont continues (L) d'exposant $\frac{\mu l_n}{2} < \frac{l_n}{1 + l_n}$ (n° 3); les dérivées de ρ_{n+1} sont donc continues (L) d'exposant $\frac{\mu l_n}{2}$. En transportant ce résultat dans l'expression de h_{n+1}, on effectue les trois dérivations, la première sous le signe somme, les deux autres par application des règles connues (¹), et l'on en conclut (²) que ces dérivées troisièmes sont continues (L) d'exposant $\frac{\mu l_n}{2 + \mu l_n}$. Nous aurons donc

$$l_n = \frac{\mu^n (2 - \mu) l_0}{2^n (2 - \mu) + \mu (2^n - \mu^n) l_0}.$$

Soit R_n un rayon décroissant quand n croît, et tendant vers une limite positive R_∞; par exemple

$$R_n = 2^{-1}(1 + 3^{-n-1}).$$

Soit N_n une limite supérieure des valeurs absolues des dérivées troisièmes de h_n et de leurs coefficients de continuité (L) dans la région

$$L(O, X) < R_n;$$

en outre nous nous imposons la condition $N_n > M_n$. Nous allons voir que la série ΣN_n est convergente.

Cherchons N_{n+1} connaissant M_n et N_n. Nous devons d'abord limiter les dérivées de $\mathcal{F}(u_{n+1})$ et leur coefficient de continuité (L). Il faut

---

(¹) B, § I, théor. IV, p. 144; C, théor. I, p. 370.

(²) C, théor. II, p. 372.

pour cela tenir compte de ce que les dérivées troisièmes de h_n figurent linéairement, ce qui oblige à compléter le calcul déjà fait (n° 3).

Considérons une fonction $w\Phi(u, v)$ composée de X par l'intermédiaire de u, v, w et telle que, δu, δv et δw étant certaines fonctions de X,

$$\Phi\,\delta w + w\,\delta\Phi + w\Phi = 0.$$

Φ, u, v, w, δu, δv, δw sont d'ailleurs supposés satisfaire aux hypothèses faites sur les fonctions G, u, v, δu, δv (n° 3). Alors

$$\begin{aligned}\Phi(u+\delta u, v+\delta v)(w+\delta w) = {} & w[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v) - \delta\Phi(u, v)]\\ & + \delta w[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v)].\end{aligned}$$

Ici le rôle de u, v est tenu par u_n et par ses dérivées premières et secondes, et le rôle de w par les dérivées troisièmes de u_n; h_n et ses dérivées premières et secondes tiennent les rôles de δu, δv; les dérivées troisièmes de h_n tiennent le rôle de δw. Si nous désignons par N une limite supérieure des valeurs absolues des dérivées troisièmes de u_0 et de leur coefficient de continuité (L) d'exposant l_0, et que nous posions

$$S_n = N + N_0 + N_1 + \ldots + N_n,$$

nous trouvons que les valeurs absolues des dérivées de $\mathcal{F}(u_{n+1})$ sont $O(N_n M_n + S_{n-1} M_n^{1+\mu})$, ou $O(S_n M_n)$.

Si nous revenons à $w\Phi$, nous aurons encore, avec des notations déjà employées (n° 3),

$$\begin{aligned}&\Delta[\Phi(u+\delta u, v+\delta v)(w+\delta w)]\\ &\quad = \Delta w[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v) - \delta\Phi(u, v)]\\ &\qquad + \delta\Delta w[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v)]\\ &\qquad + (w+\Delta w)\,\Delta[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v) - \delta\Phi(u, v)]\\ &\qquad + \delta(w+\Delta w)\,\Delta[\Phi(u+\delta u, v+\delta v) - \Phi(u, v)].\end{aligned}$$

Ici nous en déduisons (n° 3) que le coefficient de continuité (L) des dérivées de $\mathcal{F}(u_{n+1})$ pour l'exposant $2^{-1}\mu l_n$ est

$$O\left(S_{n-1} M_n^{1+\frac{\mu}{2}} + N_n M_n\right) = O(S_n M_n).$$

Nous devons maintenant limiter les dérivées de l'intégrale qui figure dans l'équation en ρ_{n+1}, et leur coefficient de continuité (L) pour l'exposant $l_n(1+l_n)^{-1}$. Nous supposerons

$$L(O, X) < \frac{R_n + R_{n+1}}{2} = \frac{1 + 2 \cdot 3^{-n-2}}{2}.$$

Nous appliquerons au champ $L(O, A) < R_n$ la formule connue [1] et hors de ce champ nous dériverons sous le signe somme. La distance de X à la frontière du champ est au minimum

$$\delta = \frac{R_n - R_{n+1}}{2} = \frac{3^{-n-2}}{2}.$$

Il nous faut aussi introduire les dérivées de K; en tenant compte, comme ci-dessus, de la façon dont figurent les dérivées troisièmes de u_n, il vient

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}(X, A)\right| < \sigma_4 S_n L^{-m}(X, A),$$
$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial K}{\partial a_\alpha}\right| < \sigma_4 S_n L^{\mu l_n - m}(X, A),$$

σ_4 étant une constante. En tenant compte de ce que la valeur absolue et le coefficient de continuité (L) de ρ_{n+1} pour l'exposant μk_n sont $O(M_n^2)$, il vient pour limite supérieure de la valeur absolue de cette partie de la dérivée de l'intégrale

$$O[M_n^2 3^{(n+2)m} + (\mu l_n)^{-1} S_n M_n^2] = O(S_n M_n).$$

Quant à la partie obtenue par dérivation sous le signe somme, nous avons

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}(X, A)\right| < \sigma_5 S_n L^{-m}(X, A) \qquad [L(O, A) < 3],$$
$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}(X, A)\right| < \sigma_6 \psi(X, A) \qquad [L(O, A) > 3],$$

σ_5 et σ_6 étant des constantes; d'où pour la dérivée de l'intégrale étendue au champ $L(O, A) > R_n$ la limitation

$$O[(S_n 3^{mn} + 1) M_n^2] = O(S_n M_n).$$

Par conséquent les dérivées de ρ_{n+1} sont $O(S_n M_n)$.

---

(1) B, § I, théor. II, p. 141.

Cherchons maintenant leur coefficient de continuité (L) pour l'exposant $2^{-1}\mu l_n$. Pour cela nous cherchons le coefficient des dérivées de l'intégrale pour l'exposant $\mu l_n(1+\mu l_n)^{-1}$. Il nous suffit de reprendre le calcul connu [1] en supppsant

$$L(X, Y) < (2^{-1}\delta)^{1+\mu l_n};$$

le résultat est $O(l_n^{-1} S_n M_n^2)$ ou $O(S_n M_n)$. Ce résultat subsiste quand $L(X, Y)$ dépasse la limite indiquée, car il suffit alors de multiplier une puissance de l'inverse de cette limite par la limitation de la dérivée.

Ainsi le coefficient de continuité (L) des dérivées de ρ_{n+1}, dans le domaine indiqué, pour l'exposant $2^{-1}\mu l_n$, est $O(S_n M_n)$.

Il reste à tirer parti de ce résultat pour limiter les dérivées troisièmes de h_{n+1} et leur coefficient de continuité (L). Pour cela nous écrivons les dérivées secondes en utilisant les dérivées de ρ_{n+1}, qui n'étaient pas utilisées quand nous avons limité ces dérivées secondes. En remplaçant $\dfrac{H(X, A)}{\sqrt{D(A)}}$ par H_1, nous trouvons [2]

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 h_{n+1}}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta} = &-\lambda\int_{D_1}^{(m)}\left[\left(\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_\alpha\,\partial a_\beta}\right)\rho_{n+1}(A)+\frac{\partial H_1}{\partial x_\alpha}\,\frac{\partial \rho_{n+1}}{\partial a_\beta}\right]dV_A\\ &-\lambda\int_{D_2}^{(m)}\frac{\partial^2 H_1}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\,\rho_{n+1}(A)\,dV_A,\end{aligned}$$

D_1 étant la région

$$L(O, A) < 2^{-1}(R_n + R_{n+1}),$$

et D_2 étant le reste de l'espace; on suppose $L(O, X) < R_{n+1}$.

La troisième dérivation se fait sous le signe somme pour l'intégrale étendue à D_2; on trouve aussitôt $O(3^{mn}M_n^2)$. On peut même dériver une quatrième fois ce terme sous le signe somme et obtenir une limitation du même type, qui est donc valable aussi pour le coefficient de continuité (L), d'exposant quelconque, de cette partie des dérivées troisièmes de h_{n+1}.

Prenons maintenant l'intégrale étendue à D_1. Nous employons le

---

[1] B, § I, théor. 3, p. 142.
[2] B, § I, théor. 4, p. 144.

procédé général connu [1], en faisant jouer à ρ_{n+1} et à ses dérivées, ainsi qu'aux dérivées secondes et troisièmes de u_{n+1} le rôle des fonctions $w_n(\mathrm{A})$ de l'énoncé de ce procédé. En tenant compte de ce que les dérivées de ρ_{n+1} et les dérivées troisièmes de u_{n+1} figurent linéairement, nous trouvons $\mathrm{O}[(3^{mn}+l_n^{-1})\mathrm{S}_n\mathrm{M}_n^2]$ ou $\mathrm{O}(\mathrm{S}_n\mathrm{M}_n)$ pour dérivée de la première partie de l'intégrale, et $\mathrm{O}[(3^{mn}+l_n^{-1})\mathrm{S}_n\mathrm{M}_n]$ pour dérivée de la seconde partie.

Pour les coefficients de continuité (L), nous employons le théorème adapté au procédé de dérivation employé [2]. Il faut supposer d'abord

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) \leqq (2^{-2}\,3^{-n-2})^{1+\frac{\mu l_n}{2}};$$

on trouve immédiatement pour l'exposant

$$\frac{\mu l_n}{2+\mu l_n} = l_{n+1}$$

un coefficient $\mathrm{O}(l_n^{-1}\mathrm{S}_n\mathrm{M}_n)$. Si $\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})$ dépasse la valeur précédente, on trouve, à l'aide de la limitation des dérivées troisièmes de h_{n+1} elles-mêmes, un coefficient

$$\mathrm{O}[3^{mn}+l_n^{-1})(2\sqrt{3^{n+2}})^{2+\mu l_n}\mathrm{S}_n\mathrm{M}_n].$$

Finalement il existe des constantes h et h_1 telles que l'on puisse prendre

$$\mathrm{N}_{n+1} = h_1 h^n \mathrm{S}_n \mathrm{M}_n,$$

car en augmentant au besoin h et h_1, on fera en sorte que le second membre dépasse constamment $\mathrm{M}_n > \mathrm{M}_{n+1}$. On en tire

$$\mathrm{S}_{n+1} = (1 + h_1 h^n \mathrm{M}_n)\mathrm{S}_n;$$

étant donnée la valeur de M_n, cela entraîne l'existence d'une limite pour S_n. La série $\Sigma\mathrm{N}_n$ est donc convergente, et par suite U a *des dérivées troisièmes continues dans la région* $\mathrm{L}(\mathrm{O}, \mathrm{X}) < 2^{-1}$.

Ce point étant démontré, la suite, comme il a déjà été dit [3], n'offre plus de difficulté. En dérivant une fois l'équation aux dérivées par-

---

(1) C, théor. I, p. 370.
(2) C, théor. II, p. 372.
(3) C, théor. VI, p. 385.

tielles donnée, sur laquelle il n'est plus nécessaire d'avoir fait la préparation qui nous a servi, on trouve qu'une dérivée quelconque φ de u satisfait à l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = f(X),$$

où f ne dépend que des dérivées de u jusqu'au second ordre. En se servant d'un problème de la chaleur dans une hypersphère suffisamment petite, on en conclut que les dérivées secondes de φ, c'est-à-dire les dérivées troisièmes de u, sont continues (L). Donc les $a_{\alpha,\beta}$ et $f(X)$ ont des dérivées continues (L), ce qui entraîne que φ a des dérivées troisièmes continues (L); donc u a des dérivées quatrièmes continues (L). Et si $q > 2$, le raisonnement continue comme il a été dit.

6. Nous pouvons maintenant reproduire l'énoncé suivant :

Si F *est holomorphe par rapport à tous ses arguments, et si les dérivées secondes de u sont continues* (L) *dans* $\mathcal{D}$, *u est holomorphe en tout point intérieur à* $\mathcal{D}$.

La démonstration est complète si nous rapprochons le résultat précédent de certaines démonstrations antérieures ([1]).

7. Si F contient linéairement les $p_{\alpha,\beta}$, les conclusions des deux dernières propositions (n^{os} 5 et 6) restent vraies dans des hypothèses plus larges sur u : il suffit que les dérivées secondes de u existent et soient continues.

8. Théorème. — *Soit* $\mathcal{S}$ *la frontière du domaine borné ouvert* $\mathcal{D}$, *les coordonnées des points de* $\mathcal{S}$ *pouvant s'exprimer par des fonctions de* $m - 1$ *paramètres dont les déterminants fonctionnels ne peuvent s'annuler ensemble et dont les dérivées jusqu'à l'ordre* $q + 2$ $(q \geqq 3)$ *existent et sont continues* (L). *On suppose que les hypothèses du n° 5 sont satisfaites pour cette valeur de q; enfin on suppose que u et ses dérivées jus-*

([1]) B, § VII, théor. 1, p. 243, ou A, Chap. III, n° 8, p. 118, où l'énoncé devrait être le même que dans B. *Voir* aussi C, théor. VII, p. 387.

qu'au quatrième ordre sont continus même sur $\mathcal{S}$ et que les dérivées d'ordre $q+2$ des valeurs de u sur $\mathcal{S}$ par rapport aux $m-1$ paramètres des points de $\mathcal{S}$ existent et sont continues (L). *Alors les dérivées de u jusqu'à l'ordre $q+2$ sont continues* (L) *dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$.*

Ce théorème élargit les hypothèses d'une proposition antérieurement démontrée [1]. La démonstration se fait aisément en profitant des perfectionnements apportés ici aux résultats sur lesquels on s'appuyait.

Nous faisons d'abord un changement de variables remplaçant une région de $\mathcal{S}$ pour laquelle nous voulons établir le théorème, par $x_m=0$, les fonctions qui définissent le changement de variables ayant leurs dérivées d'ordre $q+2$ continues (L). Ensuite nous remplaçons $\mathcal{D}$ par un domaine tel qu'il est indiqué à l'endroit cité.

D'après l'énoncé, les $a_{\alpha,\beta}$, considérés comme fonctions de X, ont leurs dérivées secondes continues dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. Nous pouvons donc (§ II, n° 6) les prolonger hors de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$ de façon à respecter la continuité (L) de leurs dérivées premières; on arrêtera le prolongement à une surface assez voisine de $\mathcal{S}$ de manière que l'équation reste de type elliptique dans le domaine total.

Il suffit de démontrer l'existence et la continuité (L) de celles des dérivées de u qui résultent d'au plus une dérivation par rapport à x_m et d'un nombre quelconque de dérivations par rapport aux autres variables, car l'équation elle-même permet de compléter le résultat.

Montrons d'abord que les dérivées quatrièmes sont continues (L). Pour cela, nous dérivons trois fois l'équation donnée, aucune dérivation n'étant faite par rapport à x_m. En désignant par φ la dérivée troisième correspondante de u, on trouve, en désignant par des d droits les dérivées des fonctions composées,

$$\sum_{\alpha,\beta} \frac{d}{dx_\beta}\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha}\right)=f(\mathrm{X}),$$

$f(\mathrm{X})$ ne dépendant que des dérivées quatrièmes et étant par suite continu dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. Cela suffit (§ II, n° 1) pour qu'on puisse affirmer la continuité (L) des dérivées de φ dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$.

---

[1] B, § VI, théor. 2, p. 234, où l'énoncé doit supposer $q \geqq 7$.

Maintenant les dérivées secondes des fonctions composées $a_{\alpha.\beta}$ de X sont continues (L); on peut donc les prolonger hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ en respectant la continuité (L) des dérivées secondes (§ II, n° 6). L'équation ci-dessus en φ prouve donc que les dérivées secondes de φ sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; il en est donc de même des dérivées cinquièmes de u.

Si $q > 3$, la démonstration continue de même; on récrit l'équation en φ ci-dessus, φ désignant une dérivée d'ordre $n - 1$ de u $(n \leqq q + 1)$ par rapport aux variables autres que x_m, et f dépendant des dérivées jusqu'à l'ordre n.

9. *Remarque.* — Si, sans changer les autres hypothèses, on suppose seulement que les dérivées *quatrièmes* des valeurs de u sur $\mathcal{S}$ sont continues (L), on peut affirmer que les dérivées *quatrièmes* de u sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.

10. Théorème. — *Si* F *est holomorphe par rapport à tous ses arguments et que* u *soit holomorphe dans le domaine ouvert* $\mathcal{D}$ *de frontière* $\mathcal{S}$, *si* u *prend des valeurs holomorphes sur une partie régulièrement analytique de* $\mathcal{S}$ *et que les dérivées de* u *jusqu'au quatrième ordre soient continues sur cette partie de* $\mathcal{S}$, u *est prolongeable analytiquement au delà de cette partie de* $\mathcal{S}$.

Ce résultat est immédiat en comparant le théorème précédent (n° 8) avec une proposition antérieure [1].

11. Si les dérivées secondes de u figurent linéairement dans F, on peut, au n° 8, prendre $q = 2$, et supposer seulement que les dérivées *troisièmes* de u sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; de même au n° 10. Au n° 9, on peut remplacer partout *quatrièmes* par *troisièmes*.

12. Théorème. — *Considérons l'équation de type elliptique, dépendant d'un paramètre* t,

$$(15) \qquad \mathcal{F}(u; t) = \mathrm{F}(p_{\alpha.\beta}; p_\alpha; u; x_\alpha; t) = 0 \qquad (0 \leqq t \leqq t');$$

---

[1] B, § VII, théor. 2, p. 243.

d'autre part on se donne un domaine borné ouvert fixe $\mathcal{D}$ de frontière $\mathcal{S}$. On suppose que l'équation, le domaine et la frontière satisfont aux hypothèses du n° 8 avec $q = 3$, les conditions de continuité (L) ne dépendant pas de t. On suppose de plus que F et ses dérivées jusqu'au troisième ordre par rapport aux variables autres que t sont fonctions continues de ces variables et de t. On se donne une fonction continue $\varphi(t; s_1, \ldots, s_{m-1})$ de t et des paramètres des points de $\mathcal{S}$, ayant par rapport à $s_1, \ldots, s_{m-1}$ des dérivées jusqu'au quatrième ordre qui soient fonctions continues (L) de ces variables, avec un exposant et un coefficient indépendants de t, et fonctions continues de ces variables et de t. On suppose connue une solution u_0 de l'équation relative à $t = 0$, dont les dérivées jusqu'au quatrième ordre sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et qui se réduit sur $\mathcal{S}$ à

$$\varphi(0; s_1, \ldots, s_{m-1}).$$

Enfin on suppose que l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + cv = 0, \tag{16}$$

où les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c correspondent à $u = u_0$, $t = 0$, n'admette pas dans $\mathcal{D}$ d'autre solution nulle sur $\mathcal{S}$ que $v = 0$. Alors, dès que t est assez petit, il existe une solution $u(x_1, \ldots, x_m; t)$ de l'équation (15), continue par rapport à l'ensemble des variables, se réduisant à u_0 pour $t = 0$, et prenant sur $\mathcal{S}$ les valeurs $(t; s_1, \ldots, s_{m-1})$; cette solution u est unique.

Il suffit de reprendre la démonstration donnée antérieurement avec des hypothèses plus restreintes ([1]). A chaque approximation u_n, les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta,n}$, $b_{\alpha,n}$, c_n sont continues (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et l'on peut (§ II, n° 6) les prolonger hors de $\mathcal{D}$ en respectant cette propriété. Soit 2μ l'exposant de continuité (L) des dérivées troisièmes de F. Soit M_n une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées jusqu'au quatrième ordre, et du coefficient de continuité (L) de ces dernières pour l'exposant

$$k_n = \frac{\mu^n (1 - \mu) k_0}{1 - \mu + \mu(1 - \mu^n) k_0};$$

([1]) B, § VI, théor. 3, p. 236.

on trouve (n° 3)

$$M_{n+1} = a_n M_n^{1+\mu},$$

où a_n est une fonction exponentielle de n; la convergence pour M_0 assez petit, c'est-à-dire pour t assez petit, en résulte. La solution existe donc pour t assez petit, et l'on prouve de même qu'elle est unique.

13. Si les $p_{\alpha.\beta}$ figurent linéairement dans F, on peut, dans l'énoncé précédent, faire $q = 2$ et abaisser d'une unité les ordres maxima des dérivées qui interviennent.

14. Si, pour $0 \leqq t \leqq t'$, on sait que $(p_{\alpha.\beta};\ p_\alpha;\ u;\ x_\alpha)$ reste dans un domaine borné fermé intérieur à $\mathcal{C}$, et tel que l'hypothèse relative à l'équation (16) soit toujours satisfaite, et si en outre les dérivées troisièmes et quatrièmes de u sont bornées, on est certain de pouvoir, en partant de $t = 0$ et en appliquant plusieurs fois le théorème, arriver à la valeur $t = t'$.

Ces hypothèses se simplifient si les $p_{\alpha.\beta}$ figurent linéairement. La simplification est plus grande si en outre les $a_{\alpha.\beta}$ ne dépendent pas des p_α, ou s'ils ne dépendent que de X.

IV. — Généralisation du problème de la Chaleur.

1. Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné ouvert de l'espace à m dimensions, dont la frontière $\mathcal{S}$ se compose d'un ou de plusieurs contours sans points communs deux à deux. Tout point de $\mathcal{S}$ est supposé intérieur à une région de $\mathcal{S}$ où les coordonnées des points s'expriment par des fonctions de $m - 1$ paramètres dont les dérivées sont continues (L) d'exposant k et dont les déterminants fonctionnels ne s'annulent pas simultanément. En outre un nombre fini de telles représentations suffit pour avoir $\mathcal{S}$ entier.

Nous reprenons l'équation de type elliptique

$$(1)\quad \begin{cases} \mathcal{F}(u) = \sum_{\alpha.\beta} a_{\alpha.\beta} \dfrac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \sum_\alpha b_\alpha \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = 0 \\ (a_{\alpha.\beta} = a_{\beta.\alpha};\ a_{\alpha.\alpha} > 0;\ \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m). \end{cases}$$

On suppose que les coefficients $a_{\alpha.\beta}$, b_α, c sont continus (L) dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, d'exposant $h > 1 - k$.

Soient ψ et f deux fonctions continues données d'un point de $\mathcal{S}$. Nommons ϖ_α les cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{S}$ dirigée vers l'extérieur. Nous nous proposons de trouver une solution de (1), existant dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et à dérivées secondes continues dans $\mathcal{D}$, telle qu'on ait sur $\mathcal{S}$

$$\sum_{\alpha.\beta} a_{\alpha.\beta}\varpi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi u = f. \tag{2}$$

Dans le cas particulier où (1) est l'équation de Laplace, on reconnaît le problème dit de la Chaleur. Si en outre $\psi = 0$, c'est le problème de Neumann.

2. *Mise en équations.* — Pour résoudre cette question, nous devons d'abord définir les fonctions $a_{\alpha.\beta}$, b_α, c dans l'extérieur de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, ainsi que certaines fonctions $\theta_\alpha(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$ [1]. Comme pour le problème de Dirichlet, ces définitions doivent être telles qu'à l'extérieur d'un certain domaine borné on ait

$$a_{\alpha.\alpha} = 1, \qquad a_{\alpha.\beta} = 0 \quad (\beta \neq \alpha),$$
$$b_\alpha = 0, \qquad c = \text{constante négative}, \qquad \theta_\alpha = 0.$$

En outre on doit avoir dans tout l'extérieur de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$

$$4\left(c + \sum_\gamma \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \sum_{\alpha.\beta} A_{\alpha.\beta}\left(b_\alpha - \sum_\gamma \frac{\partial a_{\alpha.\gamma}}{\partial x_\gamma} + 2\theta_\alpha\right)\left(b_\beta - \sum_\gamma \frac{\partial a_{\beta.\gamma}}{\partial x_\gamma} + 2\theta_\beta\right) < 0. \tag{3}$$

Pour cela nous introduisons encore les paramètres $s_1, \ldots, s_m$ [2]. On sait qu'on construit d'abord des fonctions $c_\alpha(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ d'un point de $\mathcal{S}$, telles que $\Sigma c_\alpha^2 = 1$ et $\Sigma \varpi_\alpha c_\alpha > 0$, ces fonctions étant proportionnelles sur $\mathcal{S}$ à m polynomes en $x_1, \ldots, x_m$. Si

$$x_\alpha = f_\alpha(s_1, \ldots, s_{m-1})$$

---

[1] B, § V, théor. 3, p. 210.

[2] B, § III, p. 165.

sont les expressions paramétriques des points de $\mathfrak{S}$, on pose

$$x_\alpha = f_\alpha(s_1, \ldots, s_{m-1}) + s_m c_\alpha(s_1, \ldots, s_{m-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

et il y a correspondance biunivoque entre $(s_1, \ldots, s_m)$ et $(x_1, \ldots, x_m)$ dans une région $|s_m| < a$.

Sur $\mathfrak{S}$ nous nous imposerons les conditions

$$\theta_\alpha = -\varpi_\alpha \psi \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

Hors de $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ et de la région $0 < s_m < a$, les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, θ_α recevront les valeurs constantes déjà écrites. Il s'agit de les définir dans la région $0 < s_m < a$. Les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c devront être continues (L) dans cette région, ce qui fixe leurs valeurs sur les frontières; toutefois la valeur constante $-g^2$ de c sur $s_m = a$ $(g > 0)$ sera seulement déterminée plus loin. Les fonctions θ_α seront uniformément continues dans cette région, ce qui fixe encore les valeurs sur les frontières.

Soit A un nombre supérieur aux maxima sur $\mathfrak{S}$ des $|a_{\alpha,\beta}|$ et des $|\theta_\alpha|$ $(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$.

Pour définir les $a_{\alpha,\beta}$ $(\beta \neq \alpha)$, nous formons la fonction φ qui satisfait dans notre région à l'équation

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 \varphi}{dx_\alpha^2} - \varphi = 0,$$

et qui prend sur $s_m = 0$ les valeurs $(A + a_{\alpha,\beta})^2$ et sur $s_m = a$ la valeur A, et nous prenons

$$a_{\alpha,\beta} = \sqrt{\varphi} - A;$$

cette fonction est continue (L) d'exposant $h + k - 1$ si $k < 1$, d'exposant quelconque inférieur à h si $k = 1$ (§ II, n° 7), et ses dérivées sont par rapport à s_m d'ordre $\frac{h+k-2}{2}$ si $k < 1$, d'ordre quelconque inférieur à $\frac{h-1}{2}$ si $k = 1$; par rapport à $a - s_m$, ces dérivées sont d'ordre négatif au plus égal à $\frac{k-1}{2}$ (§ II, n° 8).

Pour les $a_{\alpha,\alpha}$, même procédé, sauf qu'on prend

$$a_{\alpha,\alpha} = \sqrt{\varphi} - A + B s_m (a - s_m).$$

la constante B, indépendante de α, étant telle que l'équation soit de type elliptique dans la région $o < s_m < a$.

Les b_α seront simplement solutions de l'équation en φ.

Pour les θ_α, on forme la solution de l'équation en φ qui prend sur $s_m = o$ les valeurs $(A + \theta_\alpha)^2$ et sur $s_m = a$ la valeur A^2. Puis on choisit un nombre τ satisfaisant aux inégalités

$$o < \tau < h + k - 1, \qquad \tau < 2^{-1}.$$

et l'on prend

$$\theta_\alpha = \sqrt{\varphi} - A - c_\alpha s_m^\tau (a - s_m)^\tau.$$

Alors dans (3) l'ensemble des termes autres que $4c$ est $O(s_m^{\tau-1})$ au voisinage de $s_m = o$, $O[(a - s_m)^{\tau-1}]$ au voisinage de $s_m = a$, et cet ensemble est négatif au voisinage de ces deux frontières (¹).

On prend enfin pour c une solution de l'équation en φ, la constante g étant assez grande pour que la condition (3) ait lieu dans toute la région $o < s_m < a$.

Les fonctions $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c sont ainsi continues (L) dans tout l'espace, et les θ_α continus en tout point extérieur à $\mathcal{D}$. Hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et de $s_m = a$, les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des θ_α sont continues; leurs discontinuités sur $s_m = o$ et sur $s_m = a$ n'empêchent pas d'appliquer la formule de Green relative à $u\mathcal{F}(u)$ (²).

Nous définissons encore une fonction $\chi(X)$ continue (L) dans tout l'espace, nulle hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et de la région $o < s_m < a$, et telle qu'on ait partout $\chi(X) \geqq c$, $\chi(X) \geqq o$.

Supposons maintenant $m \geqq 3$ (³), nous formons pour l'équation

$$\mathcal{F}(u) = \chi u,$$

la solution élémentaire $G(X, \Xi)$ qui s'annule à l'infini, ainsi que ses dérivées de tout ordre, de façon exponentielle (§ I, nᵒˢ 3 et 4).

(¹) B, § IV, théor. 1, p. 175.

(²) B, § V, théor. 3, p. 209, formule (23). Les raisonnements subsistent si la condition (3) actuelle est remplacée par l'égalité en certains points, et même dans des régions à m dimensions, pourvu que tout point extérieur à $\mathcal{D}$ puisse être joint par un chemin continu sans point commun avec $\mathcal{S}$ à un point où l'inégalité (3) a lieu.

(³) *Voir* A, Chap. II, § I, nᵒ 6, p. 43, une remarque permettant d'appliquer au cas où $m = 2$, et même au cas où $m = 1$, les conclusions de ce qui suit.

Enfin, en posant comme antérieurement

$$\lambda = 2^{-2}\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2}-1\right),$$

nous exprimons la fonction cherchée u à l'aide de deux inconnues auxiliaires ρ et σ par la relation

$$(4)\quad \begin{cases} u(X) = -2\lambda \int^{(m)} G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A + 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\sigma(A)\,d\mathcal{S}_A \\ \qquad (p \geqq 2), \end{cases}$$

l'entier p étant quelconque sous la condition écrite; on a supposé le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ égal à un, et l'on a repris les notations [1]

$$G^{(1)} = G_1 = G,$$

$$G^{(n)}(X, \Xi) = \int^{(m)} G^{(n-1)}(X, A)\,\chi(A)\,G(A, \Xi)\,dV_A,$$

$$G_n = G_{n-1} + \lambda^{n-1} G^{(n)},$$

les intégrales d'ordre m dont le champ n'est pas indiqué étant étendues à tout l'espace.

On voit que l'inconnue ρ est fonction d'un point de l'espace, et l'inconnue σ, fonction d'un point de $\mathcal{S}$.

Si l'on suppose que ρ est continu (L), l'équation (1) est satisfaite si [2]

$$(5)\quad \begin{aligned} &\rho(X) - \lambda \int^{(m)} \chi(X)\,G(X, A)\,\rho(A)\,dV_A \\ &\qquad + \lambda^p \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \chi(X)\,G^{(p)}(X, A)\,\sigma(A)\,dS_A = 0, \end{aligned}$$

$\mathcal{F}(u)$ étant le double du premier membre.

Grâce à notre choix des θ_α, la condition (2) s'écrit, en introduisant l'opération Θ [3],

$$\Theta(u) = f;$$

---

(1) B, § V, théor. 3, p. 213.
(2) B, § V, théor. 3, p. 214.
(3) B, § V, théor. 3, p. 209.

elle se traduit donc par [1]

$$\begin{aligned} (6) \qquad \sigma(Y) - 2\lambda \int^{(m)} & \Theta[G(Y, A)]\rho(A)\, dV_A \\ + 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} & \Theta[G_p(Y, A)]\sigma(A)\, dS_A = f(Y), \end{aligned}$$

Y étant un point quelconque de $\mathcal{S}$.

On peut établir [2] que la théorie de Fredholm est applicable au système des équations (5) et (6) et que, si ce système est soluble, la fonction ρ est continue (L); par suite la relation (4) fait correspondre à la solution de ce système une solution du problème donné.

On doit toutefois remarquer que la fonction u obtenue est nécessairement continue sur $\mathcal{S}$, car σ est continu, mais que l'existence des dérivées de u n'est pas démontrée pour les points de $\mathcal{S}$. Pour attribuer une signification à $\Theta(u)$, posons

$$x_\alpha = y_\alpha + c_\alpha s_m \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

les y_α étant les coordonnées d'un point de $\mathcal{S}$, et les c_α étant des fonctions de ce point, dont on a déjà parlé. Les y_α et les c_α sont des fonctions de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ dont les dérivées sont continues (L), et il y a correspondance biunivoque entre $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ et $(x_1, \ldots, x_m)$ dans une région $|s_m| < a$. Si X est dans cette région, on lui fait ainsi correspondre un point Y et un seul; on peut calculer les ϖ_α en ce point Y et s'en servir pour calculer $\Theta(u)$ en X; c'est la limite de ce résultat quand X tend vers un point de $\mathcal{S}$ en restant dans $\mathcal{D}$ qui est par définition la valeur de $\Theta(u)$ en ce point de $\mathcal{S}$.

Mais nous pouvons nous demander si ce procédé ne laisse pas échapper de solution, c'est-à-dire si toute solution u du problème est susceptible d'une expression telle que (4). Les raisonnements qui suivent précisent des cas où il en est ainsi [3].

---

[1] B, § V, théor. 3, p. 216. *Voir* aussi le passage correspondant de C.

[2] B, § III, théor. 2, p. 168, et § V, théor. 3, p. 215.

[3] Ces raisonnements, ainsi que ceux de B, § V, théor. 3, procèdent de ceux de Josef Plemelj, *Ueber lineare Randwertaufgaben der Potentialtheorie*, I. Teil. *Monatshefte für Mathematik und Physik*, B. 15, 1904, S. 337-412; II. Teil, *id.*, B. 18, 1907, S. 180-211. *Voir* aussi Picard, *Selecta*, p. 231.

3. Lemme. — *Si les fonctions ρ et σ qui composent une solution du système* [(5), (6)] *homogène* (c'est-à-dire avec $f = 0$) *représentent zéro dans tout $\mathcal{D}$, ρ et σ sont identiquement nuls.*

En effet la fonction u représentée par (4), et qui est nulle dans $\mathcal{D}$, satisfait hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à l'équation (1). A cause de la continuité, cette solution de (1) s'annule quand X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D}$; elle s'annule aussi à l'infini de façon exponentielle, à cause de l'expression (4) elle-même [remarquer que, d'après (5), ρ s'annule avec χ]. La condition (3) entraîne donc que u est nul dans tout l'extérieur de $\mathcal{D}$, et par suite dans tout l'espace.

$\Theta(u)$ a donc la même valeur *zéro*, que X tende vers $\mathcal{S}$ par points de $\mathcal{D}$ ou par points extérieurs à $\mathcal{D}$. Donc $\sigma = 0$.

On a donc

$$u = -2\lambda \int^{(m)} G(X, A)\rho(A)\,dV_A,$$

$$\mathcal{F}(u) = 2\rho(X) + \chi u,$$

d'où, puisque $u = 0$,

$$\rho = 0.$$

4. Théorème. — *Si, pour $f = 0$, le problème posé n'a que la solution $u = 0$, le problème pour f continu quelconque a une solution et une seule, et celle-ci est donnée par les équations* (4), (5), (6).

Il est en effet d'abord évident que le problème n'a pas plus d'une solution. D'autre part, d'après le lemme, le système [(5), (6)] a une solution et une seule; l'équation (4) lui fait donc correspondre une solution du problème.

On voit même que si $\mathcal{F}(u)$, au lieu d'être nul, devait être égal à une fonction donnée continue (L), le problème aurait encore une solution et une seule.

5. *Sur un cas où le théorème s'applique.* — Supposons qu'il existe des fonctions $\eta_{1\alpha}(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ continues ainsi que leurs dérivées dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ ainsi que les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$, et telles qu'en les introduisant à la place des θ_α dans le premier membre de (3), celui-ci soit négatif ou nul dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. Alors, si $\psi > -\Sigma_\alpha \varpi_\alpha \eta_{1\alpha}$, on peut affirmer

que le problème a une solution et une seule [1]; on peut même avoir $\psi = -\Sigma\varpi_\alpha \eta_\alpha$ en certains points de $\mathcal{S}$ (mais non sur $\mathcal{S}$ entier) sans que la conclusion change. Cela découle de la formule [2]

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u\,\Theta(u)\,d\mathrm{S} = \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{P}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) d\mathrm{V},$$

où Θ et P sont formés à l'aide des fonctions η_α; la forme quadratique P est donc positive ou nulle pour toutes valeurs des variables. On tire en effet de là

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u\left(\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\varpi_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\beta} + \psi u\right) d\mathrm{S}$$
$$= \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{P}\,d\mathrm{V} + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left(\psi + \sum \varpi_\alpha \eta_\alpha\right) u^2\,d\mathrm{S};$$

si donc $f = 0$, u est identiquement nul dans ϖ.

6. *Introduction de nouvelles hypothèses.* — Si l'on ne sait rien sur les solutions du problème homogène, le lemme montre seulement que le système [(5), (6)] homogène a au plus autant de solutions linéairement indépendantes que le problème proposé. Nous irons plus loin moyennant de nouvelles hypothèses.

Nous supposerons maintenant que c et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ et des $b_\alpha - \Sigma_\beta \dfrac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}$ sont continus (L) dans $\varpi + \mathcal{S}$; de plus nous supposerons que les dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ relativement à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ existent et sont continues (L). Ou bien nous supposerons que les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c satisfont aux hypothèses indiquées dans un domaine contenant $\varpi + \mathcal{S}$ à son intérieur, et que les dérivées des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ sont continues (L).

Dans ces conditions, nous pourrons définir les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c, θ_α, χ hors

---

(1) Si le premier membre de (3), après la substitution indiquée, n'est pas nul dans toute l'étendue de ϖ (supposé toujours d'un seul tenant), il suffit que $\psi \geqq -\Sigma\varpi_\alpha\eta_\alpha$, l'égalité pouvant avoir lieu sur $\mathcal{S}$ entier.

(2) *Voir* B, § V, théor. 3, p. 209.

de $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, de manière à remplir les mêmes conditions qu'il y a quelques instants, et en plus celle que les dérivées des $a_{\alpha.\beta}$ et des $b_\alpha - \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial x_\beta}$ existent et soient continues (L) dans tout l'espace. L'équation (4) sera supposée formée dans ces nouvelles hypothèses.

7. *Mise en équations de certains problèmes.* — Nous appellerons maintenant u_1 l'inconnue de notre problème, et ρ_1 et σ_1 les inconnues auxiliaires; les équations (4), (5), (6) deviennent donc

$$(4)\quad u_1(X) = -2\lambda\int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A + 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A,$$

$$(5)\quad \begin{aligned}\rho_1(X) - \lambda\int^{(m)} &\chi(X)\,G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A \\ + \lambda^p\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} &\chi(X)\,G^{(p)}(X, A)\,\sigma_1(A)\,dS_A = 0,\end{aligned}$$

$$(6)\quad \begin{aligned}\sigma_1(Y) - 2\lambda\int^{(m)} &\Theta[G(Y, A)]\,\rho_1(A)\,dV_A \\ + 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} &\Theta[G_p(Y, A)]\,\sigma_1(A)\,dS_A = f_1(Y),\end{aligned}$$

$f_1(y)$ étant la fonction donnée sur $\mathcal{S}$.

Nous chercherons en même temps dans $\mathcal{D}$ une solution u_2 de l'équation adjointe

$$(7)\quad \mathcal{G}(u) = \sum_{\alpha.\beta}\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(a_{\alpha.\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left[\left(b_\alpha - \sum_\beta \frac{\partial a_{\alpha.\beta}}{\partial x_\beta}\right)u\right] + cu = 0,$$

telle que $Z(u_2)$ prenne sur $\mathcal{S}$ les valeurs données $f_2(y)$ [1]. En posant

$$(8)\quad \begin{aligned}u_2(X) = -2\lambda\int^{(m)} &G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A \\ + 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} &G_p(A, X)\,\sigma_2(A)\,dS_A,\end{aligned}$$

---

[1] Pour la définition de Z, *voir* B, § V, théor. 3, p. 209.

l'intégrale d'ordre m étant étendue à tout l'espace, comme toujours quand le domaine d'intégration n'est pas indiqué, on aura les équations

$$
\begin{aligned}
(9)\qquad & \rho_2(X) - \lambda \int^{(m)} \chi(X)\, G(A, X)\, \rho_2(A)\, dV_A \\
& \qquad + \lambda^p \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \chi(X)\, G^{(p)}(A, X)\, \sigma_2(A)\, dS_A = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10)\qquad & \sigma_2(Y) - 2\lambda \int^{(m)} Z[\, G(A, Y)]\, \rho_2(A)\, dV_A \\
& \qquad + 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G_p(A, Y)]\, \sigma_2(A)\, dS_A = f_2(Y);
\end{aligned}
$$

ces équations (9) et (10) forment un système de Fredholm.

Nous considérons en même temps les deux problèmes de Dirichlet relatifs à l'extérieur du domaine $\mathcal{D}$ (cet extérieur peut ne pas être d'un seul tenant) et respectivement aux équations (1) et (7). Les fonctions inconnues devront s'annuler à l'infini de façon exponentielle. En posant, pour l'équation (1),

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & u_3(X) = - \lambda \int^{(m)} G(X, A)\, \chi(A)\, \rho_3(A)\, dV_A \\
& \qquad + 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G_p(X, A)]\, \sigma_3(A)\, dS_A,
\end{aligned}
$$

on obtient le système de Fredholm

$$
\begin{aligned}
(12)\qquad & \rho_3(X) - \lambda \int^{(m)} G(X, A)\, \chi(A)\, \rho_3(A)\, dV_A \\
& \qquad + 2\lambda^p \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G^{(p)}(X, A)]\, \sigma_3(A)\, dS_A = 0,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(13)\qquad & \sigma_3(Y) - \lambda \int^{(m)} G(Y, A)\, \chi(A)\, \rho_3(A)\, dV_A \\
& \qquad + 2\lambda \int^{(m-1)} Z[G_p(Y, A)]\, \sigma_3(A)\, dS_A = f_3(Y);
\end{aligned}
$$

$\mathcal{F}(u_3)$ est le produit par χ du premier membre de (12). De même pour l'équation (7) nous écrivons

$$(14)\qquad u_4(X) = -\lambda\int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\lambda\int_S^{(m-1)} \Theta[G_p(A, X)]\sigma_4(A)\,dS_A,$$

$$(15)\qquad \rho_4(X) - \lambda\int^{(m)} G(A, X)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\lambda^p\int_S^{(m-1)} \Theta[G^{(p)}(A, X)]\sigma_4(A)\,dS_A = 0,$$

$$(16)\qquad \sigma_4(Y) - \lambda\int^{(m)} G(A, Y)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\lambda\int_S^{(m-1)} \Theta[G_p(A, Y)]\sigma_4(A)\,dS_A = f_4(Y).$$

8. Lemme. — *Les systèmes de Fredholm* [(5), (6)] *et* [(15), (16)] *homogènes* ($f_1 = f_4 = 0$) *ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes.*

En effet, dans le système des équations (5) et (6), nous pouvons remplacer l'équation (6) par celle qu'on obtient en changeant, dans l'équation (5), X en B, puis en multipliant par $2\lambda\Theta[G_{p-1}(Y, B)]\,dV_B$, en intégrant dans tout l'espace et en ajoutant le résultat au premier membre de (6); on obtient ainsi, en permutant des intégrations uniformément convergentes,

$$(6\ bis)\qquad \sigma_1(Y) - 2\lambda^p\int^{(m)} \Theta[G^{(p)}(Y, A)]\rho_1(A)\,dV_A + 2\lambda\int_S^{(m-1)} \Theta[G_{2p-1}(Y, A)]\sigma_1(A)\,dS_A = f_1(Y).$$

De même l'équation (16) du système [(15), (16)] peut se remplacer par celle qu'on obtient en remplaçant dans (15) X par B, en multipliant par $\lambda\chi(B)G_{p-1}(B, Y)$ et en ajoutant le résultat au premier membre de (16); on trouve ainsi

$$(16\ bis)\qquad \sigma_4(Y) - \lambda^p\int^{(m)} G^{(p)}(A, Y)\chi(A)\rho_4(A)\,dV_A + 2\lambda\int_S^{(m-1)} \Theta[G_{2p-1}(A, Y)]\sigma_4(A)\,dS_A = f_4(Y).$$

Il suffit maintenant de prendre pour inconnues, dans les deux systèmes, $i\sigma_1$ et $i\sigma_4$ au lieu de σ_1 et de σ_4 pour voir qu'on a deux systèmes associés, d'où résulte le lemme.

9. Lemme. — *Les deux problèmes homogènes de la chaleur* ($f_1 = f_2 = 0$) *ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes, chacune de ces solutions étant donnée par une solution et une seule du système de Fredholm correspondant*.

Soient q le nombre de ces solutions linéairement indépendantes pour l'équation (1) et r le même nombre pour l'équation (7) ($q \geqq 0, r \geqq 0$).

Je dis que r est au plus égal au nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(15), (16)] homogène. En effet nous pouvons appliquer la formule de Green à $G_p(A, X)$ et à $u_2(A)$, relativement à A, dans la partie de $\mathcal{D}$ extérieure à une hypersphère de centre X et de rayon infiniment petit si X est dans $\mathcal{D}$, dans $\mathcal{D}$ entier si X n'appartient pas à $\mathcal{D} + \mathcal{S}$. On trouve ainsi, f_2 étant nul,

$$(17)\quad \begin{aligned} &\lambda^p \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p)}(A, X)\,\chi(A)\,u_2(A)\,dV_A \\ &\quad - \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G_p(A, X)]\,u_2(A)\,dS_A = \begin{cases} u_2(X) & (\text{X dans } \mathcal{D}), \\ 0 & (\text{X hors de } \mathcal{D} + \mathcal{S}). \end{cases} \end{aligned}$$

Donc, si l'on pose

$$(18)\quad \left\{ \begin{aligned} \rho_4(X) &= -\lambda^{p-1} \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p-1)}(A, X)\,\chi(A)\,u_2(A)\,dV_A, \\ \sigma_4(Y) &= -2^{-1}\,u_2(Y), \end{aligned} \right.$$

la fonction u_4 représentée par (14) satisfait dans $\mathcal{D}$ et hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ à l'équation (7) et elle est nulle hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; ρ_4 et σ_4 satisfont donc au système [(15), (16)] homogène. D'ailleurs ces fonctions ne sont pas toutes deux identiquement nulles, sinon u_2 le serait aussi à cause de (17); donc le nombre des solutions de [(15), (16)] homogène est au moins r.

Ce nombre est le même que celui des solutions linéairement indépendantes du système [(5), (6)] homogène (n° 8), donc au plus égal à q (n° 3). Donc $q \geqq r$. Comme on peut échanger les rôles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, il en résulte que $q = r$.

Notre lemme en résulte et l'on voit même que les quatre systèmes homogènes de Fredholm ont chacun q solutions linéairement indépendantes (et seulement q solutions).

10. Théorème. — *Quand un problème de la chaleur relatif à l'équation* (1) *est soluble, toutes ses solutions sont données par les équations* (4), (5), (6).

Il est évident que si le système [(5), (6)] est soluble, il en est de même du problème, et les solutions se correspondent une à une. C'est la réciproque qu'il faut démontrer et pour laquelle nous pouvons nous borner au cas où q est positif.

Si (ρ_A, σ_A) est une solution quelconque de [(15), (16)] homogène, les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité de [(5), (6)] sont que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_A f_1 \, d\mathrm{S} = 0, \tag{19}$$

ces conditions sont par suite suffisantes pour la solubilité de notre problème. Pour faire voir qu'elles sont en outre nécessaires, désignons par v une solution quelconque du problème homogène de la chaleur pour (7). En appliquant la formule de Green à la fonction cherchée u_1 et à v, dans un domaine limité par une surface infiniment voisine de $\mathcal{S}$, nous trouvons

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} v f_1 \, d\mathrm{S} = 0;$$

or, si l'on se reporte à la formule (18), on voit qu'on a ainsi les conditions (19), au nombre de q. Le théorème est établi.

11. Supposons qu'on veuille trouver la solution de l'équation $\mathcal{F}(u_1) = h(\mathrm{X})$ telle que $\Theta(u_1) = f_1$ sur $\mathcal{S}$, $h(\mathrm{X})$ étant continue (L) et f_1 continue. Nous prolongerons $h(\mathrm{X})$ hors de $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, en respectant sa continuité (L) et en le prenant nul dès que L(O, X) est assez grand. Nous écrirons ensuite les équations (5) et (6 *bis*) en donnant comme second membre à la première $2^{-1} h(\mathrm{X})$, et à la seconde

$$f_1(\mathrm{Y}) + \lambda \int^{(m)} \Theta[\mathrm{G}_{p-1}(\mathrm{Y}, \mathrm{B})] \, h(\mathrm{B}) \, d\mathrm{V}_{\mathrm{B}}.$$

Si nous sommes dans un cas où le problème homogène a au moins une solution non nulle, et si (ρ_A, σ_A) est une solution quelconque du système [(15), (16 *bis*)] homogène, les conditions nécessaires et suffisantes pour la solubilité du système [(5), (6 *bis*)] actuel sont

$$\int^{(m)} h(X)\,\rho_4(X)\,dV_X - 2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left\{ f_1(Y) + \lambda \int^{(m)} \Theta[G_{p-1}(Y, B)]\,h(B)\,dV_B \right\} \sigma_4(Y)\,dS_Y = 0.$$

Ces conditions sont donc suffisantes pour la solubilité de notre problème. Pour vérifier leur nécessité, remplaçons-y ρ_4 et σ_4 par leurs valeurs (18),

$$\lambda^{p-1}\int^{(m)} \left[\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p-1)}(A, X)\,\chi(A)\,u_2(A)\,dV_A\right] h(X)\,dV_X - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left\{ f_1(Y) + \lambda \int^{(m)} \Theta[G_{p-1}(Y, B)]\,h(B)\,dV_B \right\} u_2(Y)\,dS_Y = 0.$$

En vérifiant que l'ordre des intégrations peut être modifié, ceci devient

$$\int^{(m)} \left\{ \lambda^{p-1}\int_{\mathcal{D}}^{(m)} G^{(p-1)}(A, X)\,\chi(A)\,u_2(A)\,dV_A - \lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G_{p-1}(A, X)]\,u_2(A)\,dS_A \right\} h(X)\,dV_X - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} f_1(Y)\,u_2(Y)\,dS_Y = 0.$$

Reportons-nous à la formule (17) où nous changerons p en $p-1$; nous parvenons enfin à

$$\int^{(m)} h(X)\,u_2(X)\,dV_X - \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} f_1(Y)\,u_2(Y)\,dS_Y = 0.$$

Nos q conditions sont donc aussi nécessaires car, mises sous cette dernière forme, elles peuvent s'obtenir en appliquant la formule de Green à u_1 et à u_2.

V. — Sur certains problèmes mixtes.

1. *Énoncé du problème.* — Supposons que le domaine borné ouvert $\mathcal{D}$ soit limité par plusieurs contours sans points communs deux à deux, dont les uns seront désignés par $\mathcal{S}$ et les autres par $\mathcal{T}$. Ces contours et les coefficients de (1) (§ IV) devront remplir les conditions énoncées en dernier lieu (§ IV, n° 6); toutefois les dérivées secondes des

coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ doivent être continues (L). Nous nommerons $\mathcal{E}_1$ la partie de l'extérieur de ω qui a pour frontière les contours $\mathfrak{S}$, $\mathcal{E}_2$ celle qui a $\mathfrak{T}$ pour frontière.

Sur $\mathfrak{T}$, nous nous donnons une fonction continue ψ et nous posons $\theta_\alpha = -\varpi_\alpha \psi$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$), les ϖ_α étant les cosinus directeurs de la normale dirigée vers l'extérieur de ω (de même plus loin, pour les ϖ_α sur $\mathfrak{S}$). Sur $\mathfrak{S}$, les θ_α sont arbitraires, nuls par exemple.

Nous nous proposons de trouver une fonction u satisfaisant dans ω à l'équation (1) (§ IV), et telle que $u_1 = f_1$ sur $\mathfrak{S}$ et $\Theta(u_1) = \varphi_1$ sur $\mathfrak{T}$, f_1 et φ_1 étant des fonctions continues données.

Si l'on admet que $\mathfrak{S}$ ou $\mathfrak{T}$ puisse se réduire à *zéro* et le nombre des contours à *un*, ce problème comprend comme cas particuliers, d'une part celui de Dirichlet, d'autre part celui de la chaleur. Nous supposerons que ni $\mathfrak{S}$ ni $\mathfrak{T}$ ne se réduit à *zéro*.

2. *Mise en équations.* — Nous définirons d'abord dans $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$ les fonctions $a_{\alpha.\beta}$, b_α, c, θ_α de façon à remplir les mêmes conditions que plus haut (§ IV, n^{os} 2 et 6). Nous introduisons également la fonction $\chi(X)$ continue (L) dans tout l'espace, et la fonction $G(X, \Xi)$.

Nous posons alors

$$(1) \qquad u_1(X) = -\lambda \int^{(m)} G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} Z[G_p(X, A)]\,\sigma_1(A)\,dS_A + 2\lambda \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\tau_1(A)\,dS_A \qquad (p \geqq 2).$$

ρ_1, σ_1, τ_1 étant des fonctions inconnues à définir, ρ_1 dans tout l'espace, σ_1 sur $\mathfrak{S}$, τ_1 sur $\mathfrak{T}$.

L'équation (1) (§ IV) sera vérifiée si, ρ_1 étant continu (L),

$$(2) \qquad \rho_1(X) - \lambda \int^{(m)} \chi(X)\,G(X, A)\,\rho_1(A)\,dV_A - 2\lambda^p \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \chi(X)\,Z[G^{(p)}(X, A)]\,\sigma_1(A)\,dS_A + 2\lambda^p \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} \chi(X)\,G^{(p)}(X, A)\,\tau_1(A)\,dS_A = 0;$$

la condition sur $\mathfrak{S}$ se traduit par

$$(3)\qquad \sigma_1(Y) - \lambda\int^{(m)} G(Y, A)\rho_1(A)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} Z[G_p(Y, A)]\sigma_1(A)\,dS_A + 2\lambda\int_{\mathfrak{E}}^{(m-1)} G_p(Y, A)\tau_1(A)\,dS_A = f_1(Y),$$

et la condition sur $\mathfrak{E}$ par

$$(4)\qquad \tau_1(Y) - \lambda\int^{(m)} \Theta[G(Y, A)]\rho_1(A)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta\{Z[G_p(Y, A)]\}\sigma_1(A)\,dS_A + 2\lambda\int_{\mathfrak{E}}^{(m-1)} \Theta[G_p(Y, A)]\tau_1(A)\,dS_A = \varphi_1(Y).$$

Les équations (2), (3), (4) forment un système de Fredholm qu'il s'agit d'étudier.

3. Lemme. — *Si ρ_1, σ_1, τ_1 satisfont au système [(2) à (4)] homogène ($f_1 = \varphi_1 = 0$) et ne sont pas identiquement nuls ensemble, la fonction u_1 donnée par* (1) *n'est pas identiquement nulle dans $\mathcal{O}$.*

Supposons u_1 nul dans tout $\mathcal{O}$; on va voir que ρ_1, σ_1, τ_1 sont identiquement nuls.

Dans $\mathcal{E}_2$, u_1 satisfait à $\mathcal{F}(u_1) = 0$ et est nul sur la frontière $\mathfrak{E}$; si $\mathcal{E}_2$ n'est pas borné, u_1 s'y annule aussi à l'infini de façon exponentielle; donc u_1 est identiquement nul dans $\mathcal{E}_2$, d'après la condition (3) (§ IV). Un raisonnement déjà fait (§ IV, n° 3) prouve alors que $\tau_1 = 0$.

Nous sommes ainsi ramenés à une proposition déjà traitée en étudiant le problème de Dirichlet[1]; le fait que $\mathcal{E}_1$ peut n'être pas borné n'empêche pas le raisonnement de s'appliquer. Donc $\rho_1 = \sigma_1 = 0$ et le lemme est établi.

---

[1] B, § V, théor. 4, p. 227. Les hypothèses plus larges où nous nous plaçons ici n'empêchent pas les raisonnements et sont valables aussi pour le problème de Dirichlet.

4. *Équations relatives à d'autres problèmes.* — En même temps que le problème proposé, nous devons en considérer trois autres.

Tout d'abord, nous devons considérer le problème de trouver une fonction u_2 définie dans $\mathcal{O}$, satisfaisant à l'équation (7) (§ IV), prenant sur $\mathcal{S}$ les valeurs données $f_2(Y)$ et telle que sur $\mathfrak{T}$, $Z(u_2) = \varphi_2$, f_2 et φ_2 étant continues. En procédant comme il vient d'être dit, on est conduit aux équations

$$(5) \qquad \begin{aligned} u_2(X) = &- \lambda \int^{(m)} G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A \\ &- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G_p(A, X)]\,\sigma_2(A)\,dS_A \\ &+ 2\lambda \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} G_p(A, X)\,\tau_2(A)\,dS_A, \end{aligned}$$

$$(6) \qquad \begin{aligned} \rho_2(X) - &\lambda \int^{(m)} \chi(X)\,G(A, X)\,\rho_2(A)\,dV_A \\ &- 2\lambda^p \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \chi(X)\,\Theta[G^{(p)}(A, X)]\,\sigma_2(A)\,dS_A \\ &+ 2\lambda^p \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} \chi(X)\,G^{(p)}(A, X)\,\tau_2(A)\,dS_A = 0, \end{aligned}$$

$$(7) \qquad \begin{aligned} \sigma_2(Y) - &\lambda \int^{(m)} G(A, Y)\,\rho_2(A)\,dV_A \\ &- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G_p(A, Y)]\,\sigma_2(A)\,dS_A \\ &+ 2\lambda \int_{\mathfrak{T}}^{(m-1)} G_p(A, Y)\,\tau_2(A)\,dS_A = f_2(Y), \end{aligned}$$

$$(8) \qquad \begin{aligned} \tau_2(Y) - &\lambda \int^{(m)} Z[G(A, Y)]\,\rho_2(A)\,dV_A \\ &- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z\{\Theta[G_p(A, Y)]\}\,\sigma_2(A)\,dS_A \\ &+ 2\lambda \int^{(m-1)} Z[G_p(A, Y)]\,\tau_2(A)\,dS_A = \varphi_2(Y). \end{aligned}$$

Nous considérons encore la question de trouver une fonction u_3 définie dans $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, satisfaisant à l'équation $\mathcal{F}(u_3) = 0$, s'annulant à l'infini de façon exponentielle et telle que $\Theta(u_3) = f_3$ sur $\mathcal{S}$, $u_3 = \varphi_3$ sur $\mathcal{T}$, f_3 et φ_3 étant des fonctions continues données. On a pour cela les équations

$$
\begin{aligned}
(9) \qquad u_3(X) = &- \lambda \int^{(m)} G(X, A)\,\chi(A)\,\rho_3(A)\,dV_A \\
&- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\sigma_3(A)\,dS_A \\
&+ 2\lambda \int_{\mathcal{T}}^{(m-1)} Z[G_p(X, A)]\,\tau_3(A)\,dS_A,
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(10) \qquad \rho_3(X) &- \lambda \int^{(m)} G(X, A)\,\chi(A)\,\rho_3(A)\,dV_A \\
&- 2\lambda^p \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G^{(p)}(X, A)\,\sigma_3(A)\,dS_A \\
&+ 2\lambda^p \int_{\mathcal{T}}^{(m-1)} Z[G^{(p)}(X, A)]\,\tau_3(A)\,dS_A = 0.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(11) \qquad \sigma_3(Y) &- \lambda \int^{(m)} \Theta[G(Y, A)]\,\chi(A)\,\rho_3(A)\,dV_A \\
&- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \Theta[G_p(Y, A)]\,\sigma_3(A)\,dS_A \\
&+ 2\lambda \int_{\mathcal{T}}^{(m-1)} \Theta\{Z[G_p(Y, A)]\}\,\tau_3(A)\,dS_A = f_3(Y).
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(12) \qquad \tau_3(Y) &- \lambda \int^{(m)} G(Y, A)\,\chi(A)\,\rho_3(A)\,dV_A \\
&- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G_p(Y, A)\,\sigma_3(A)\,dS_A \\
&+ 2\lambda \int_{\mathcal{T}}^{(m-1)} Z[G_p(Y, A)]\,\tau_3(A)\,dS_A = \varphi_3(Y).
\end{aligned}
$$

Le dernier problème, dont nous nous abstiendrons d'écrire les équations, est de trouver une fonction u_4 définie dans $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, s'annulant à l'infini de façon exponentielle, et telle que $\mathcal{G}(u_4) = 0$ dans $\mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2$, $Z(u_4) = f_4$ sur $\mathcal{S}$, $u_4 = \varphi_4$ sur $\mathcal{T}$, f_4 et φ_4 étant des fonctions continues données.

5. **Lemme.** — *Les systèmes* [(6) à (8)] *et* [(10) à (12)] *homogènes* ($f_2 = \varphi_2 = f_3 = \varphi_3 = 0$) *ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes.*

En effet, dans le système [(6) à (8)], les équations (7) et (8) peuvent, en tenant compte de (6), être remplacées par

$$(7\ bis)\qquad \begin{aligned}\sigma_2(\mathrm{Y}) - \lambda^p \int^{(m)} \mathrm{G}^{(p)}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,\rho_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} &\\ -2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{A},\mathrm{Y})]\,\sigma_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &\\ +2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{A},\mathrm{Y})\,\tau_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &= f_2(\mathrm{Y}),\end{aligned}$$

$$(8\ bis)\qquad \begin{aligned}\tau_2(\mathrm{Y}) - \lambda^p \int^{(m)} \mathrm{Z}[\mathrm{G}^{(p)}(\mathrm{A},\mathrm{Y})]\,\rho_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} &\\ -2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{Z}\{\Theta[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{A},\mathrm{Y})]\}\,\sigma_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &\\ +2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{Z}[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{A},\mathrm{Y})]\,\tau_2(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &= \varphi_2(\mathrm{Y}).\end{aligned}$$

De même, en tenant compte de (10), on peut remplacer les équations (11) et (12) par

$$(11\ bis)\qquad \begin{aligned}\sigma_3(\mathrm{Y}) - \lambda^p \int^{(m)} \Theta[\mathrm{G}^{(p)}(\mathrm{Y},\mathrm{A})]\,\chi(\mathrm{A})\,\rho_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} &\\ -2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{Y},\mathrm{A})]\,\sigma_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &\\ +2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \Theta\{\mathrm{Z}[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{Y},\mathrm{A})]\}\,\tau_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &= f_3(\mathrm{Y}),\end{aligned}$$

$$(12\ bis)\qquad \begin{aligned}\tau_3(\mathrm{Y}) - \lambda^p \int^{(m)} \mathrm{G}^{(p)}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\,\chi(\mathrm{A})\,\rho_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{V}_\mathrm{A} &\\ -2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{Y},\mathrm{A})\,\sigma_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &\\ +2\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \mathrm{Z}[\mathrm{G}_{2p-1}(\mathrm{Y},\mathrm{A})]\,\tau_3(\mathrm{A})\,d\mathrm{S}_\mathrm{A} &= \varphi_3(\mathrm{Y}).\end{aligned}$$

Il suffit maintenant de prendre pour inconnues $\sqrt{2}\,\sigma_2$, $\sqrt{2}\,\sigma_3$, $i\sqrt{2}\,\tau_2$, $i\sqrt{2}\,\tau_3$ au lieu de σ_2, σ_3, τ_2, τ_3 pour arriver à deux systèmes associés : le lemme en résulte.

6. Lemme. — *Les problèmes homogènes relatifs à u_1 et à u_2*

$$(f_1 = f_2 = \varphi_1 = \varphi_2 = 0)$$

ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes; chacune de ces solutions est donnée par le système de Fredholm correspondant.

Soit q le nombre des solutions linéairement indépendantes du problème homogène relatif à u_1, et soit r le nombre analogue pour u_2. Nous allons d'abord prouver que $q \leqq r$.

Soit, en effet, u_1 une solution du problème homogène. La formule de Green prouve que

$$(13) \qquad \begin{aligned} &\lambda^p \int_{\varpi}^{(m)} G^{(p)}(X, A)\chi(A)\,u_1(A)\,dV_A \\ &+\lambda \int_{S}^{(m-1)} G_p(X, A)\,\Theta[u_1(A)]\,dS_A \\ &-\lambda \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} Z[G_p(X, A)]\,u_1(A)\,dS_A = \begin{cases} u_1(X) & (X \text{ dans } \varpi), \\ 0 & (X \text{ dans } \mathcal{E}_1 + \mathcal{E}_2). \end{cases} \end{aligned}$$

Cela nous prouve que les fonctions

$$(14) \qquad \begin{cases} \rho_3(X) = -\lambda \displaystyle\int_{\varpi}^{(m)} G^{(p-1)}(X, A)\chi(A)\,u_1(A)\,dV_A, \\ \sigma_3(Y) = -2^{-1}\,\Theta[u_1(Y)], \\ \tau_3(Y) = -2^{-1}\,u_1(Y) \end{cases}$$

composent une solution du système [(10) à (12)] homogène, et cette solution n'est identiquement nulle que si $u_1(X)$ l'est.

Donc q est au plus égal au nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(10) à (12)] homogène. Ce dernier est égal au nombre analogue pour le système [(6) à (8)] homogène (nº 3), donc au plus égal à r (nº 3).

Ainsi $q \leqq r$. Mais en échangeant les rôles des deux problèmes, on prouve que $r \leqq q$. Donc $q = r$ et le lemme en résulte.

7. Théorème. — *Quand le problème relatif à u_1 est soluble pour les fonctions données f_1, φ_1, toutes ses solutions sont données par les équations* (1) *à* (4).

Le seul cas où il y ait lieu à démonstration est celui où le nombre qu'on vient de nommer q est positif, car si $q = 0$, le système de Fredholm [(2) à (4)] a une solution et une seule.

Si $q > 0$, les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité du système [(2) à (4)] sont que pour toute solution du système de Fredholm homogène correspondant à u_4, on ait

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} f_1 \sigma_i \, dS - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \varphi_1 \tau_i \, dS = 0.$$

Ces conditions sont donc évidemment suffisantes pour l'existence de u_1; leur nécessité résulte de la formule de Green qui donne

$$\int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} f_1 \mathrm{Z}(u_2) \, dS - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \varphi_1 u_2 \, dS = 0,$$

ce qui équivaut aux conditions ci-dessus, d'après les formules analogues à (14).

8. *Remarque.* — Si $\mathcal{F}(u_1)$, au lieu d'être nul, doit être égal à une fonction donnée $h(\mathrm{X})$ continue (L), on trouve que les conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence de u_1 sont

$$\int_{\varpi}^{(m)} h u_2 \, dV + \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} f_1 \mathrm{Z}(u_2) \, dS - \int_{\mathfrak{S}}^{(m-1)} \varphi_1 u_2 \, dS = 0,$$

pour toute fonction u_2 satisfaisant au problème homogène relatif à $\mathcal{G}$; cela fait donc q conditions. La démonstration est semblable à celles qui ont été données pour les problèmes de Dirichlet et de la chaleur.

Addition.

Cette addition est destinée à résoudre une objection qui pourrait être faite à deux passages du Mémoire précédent où l'on s'appuie sur la solution du problème de la chaleur précédemment donnée relativement à un domaine homothétique d'un domaine fixe dans un rapport assez petit (¹).

Dans cette solution, on prouve bien que le système de Fredholm formé fournit une solution et une seule du problème, mais nullement que celui-ci n'admet pas d'autres solutions ne pouvant pas se mettre sous la forme d'une somme de deux potentiels tels que ceux dont on

(¹) C, p. 380 à 384.

se sert dans cet endroit. D'autre part, on peut conclure d'un théorème général (§ IV, n° 10), que si un problème de la chaleur a toujours une solution (c'est-à-dire quels que soient le second membre et les valeurs données sur $\mathfrak{S}$), il n'en a jamais qu'une; mais cette conclusion n'est valable que moyennant des hypothèses plus restrictives (§ IV, n° 6).

On peut alors objecter (§ I, n° 3) que les limitations trouvées dans la recherche de G(X, A), au cas où les $a_{\alpha,\beta}$, b_α et c sont seulement supposés continus (L), ne s'appliquent peut-être pas aux dérivées secondes de la fonction qu'on a en vue. L'objection tombera d'elle-même si l'on remarque que, dans ce passage, on considère un problème de la chaleur relatif à une équation dont les coefficients sont des polynomes, et pour laquelle donc on peut (§ IV, n° 10) affirmer que la solution est unique.

En second lieu (§ III, n° 5), on peut objecter à la démonstration relative à l'existence des dérivées de certains ordres pour les solutions des équations non linéaires, que la continuité des dérivées troisièmes de u n'est pas suffisante pour les identifier avec les dérivées secondes de la solution d'un problème de la chaleur relatif à l'équation

$$\sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}=f,$$

formée à cet endroit, car il est seulement démontré que les $a_{\alpha,\beta}$ ont des dérivées continues, ce qui est insuffisant pour appliquer la théorie générale. On répondra à cela que la continuité des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ suffit pour appliquer une certaine condition d'unicité (§ IV, n° 5), qui se trouve remplie ici pour un domaine assez petit dans toutes ses dimensions, en prenant

$$\eta_\alpha=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\log[L_0^2-L^2(O,X)],$$

L_0 étant supérieur au maximum de L(O, X); ce choix résulte d'un procédé général de M. Picard.

La solution de cette dernière objection montre toutefois que, dans un exposé d'ensemble, ce qui concerne les équations linéaires, y compris le problème de Dirichlet, le problème de la chaleur et le problème mixte, devrait précéder tout ce qui regarde les équations non linéaires.