ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Polygones de Poncelet généralisés

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 55-71
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__55_0>

POLYGONES DE PONCELET GÉNÉRALISÉS

Par M. Bertrand GAMBIER

1. *Introduction.* — Considérons une surface réglée S *quelconque*, sur S une génératrice G *arbitraire* et sur G un point M *arbitraire :* le plan tangent à S en M coupe S suivant la génératrice G et suivant une courbe plane C, tangente en M à la seconde direction asymptotique de S (les développables étant exclues), recoupant G en divers points P_1, P_2, ..., qui sont tous *singuliers*, indépendants du choix de M sur G et décrivant, quand G varie, les diverses branches des courbes multiples de S.

Si nous faisons la perspective de S sur un plan arbitraire, d'un point de vue O arbitraire, les génératrices G deviennent les tangentes au contour apparent Γ en projection, et la ligne multiple de S devient une courbe plane C. De chaque point de la ligne multiple partent au moins deux génératrices; le plan de ces deux génératrices est bitangent à la surface; il peut arriver que ce plan bitangent coupe la surface encore suivant d'autres génératrices, ne passant pas par le point commun aux deux premières; dans ce cas on voit que l'on a réalisé des polygones de n côtés ($n \geqq 3$) dont les sommets sont sur C et dont les côtés sont tangents à Γ : c'est donc la généralisation des polygones de Poncelet rélatifs à deux coniques.

Il est facile de réaliser de tels couples C, Γ de degré arbitraire; prenons en effet au hasard deux courbes gauches C_1 et C_2 et imaginons une correspondance ponctuelle entre ces deux courbes, M_1 point de C_1 ayant p correspondants, M_2, sur C_2 et M_2 ayant q correspondants; sur la surface réglée lieu de $M_1 M_2$, C_1 est ligne multiple d'ordre p, C_2 d'ordre q; d'un point de C_1 partent p génératrices dont trois ne sont pas dans un même plan (en général); transformons la surface par dualité : le point M_1 se transforme en un plan coupant la nouvelle surface réglée suivant p génératrices, dont trois quelconques ne passent pas au même point.

Nous allons maintenant nous donner la courbe plane C et chercher les courbes Γ de classe donnée admettant avec C des triangles de Poncelet, puis des polygones de Poncelet. Si l'on a obtenu un couple C, Γ admettant ∞^1 triangles de Poncelet, il suffira de considérer C comme la perspective d'une courbe gauche pour obtenir une surface réglée admettant ∞^1 plans triplement tangents (et par dualité une surface admettant une ligne triple).

Le problème se résout aisément pour une conique C_2 et la méthode s'étend elle-même aux courbes C de degré et genre quelconque. Ce problème est en rapport étroit avec diverses théories : équations algébriques (et en particulier abéliennes), substitutions et itérations, correspondances biunivoques de deux courbes, classification des courbes planes ou gauches, classification des surfaces réglées. Je renvoie le lecteur, pour le cas de deux coniques, au *Traité des fonctions elliptiques* d'Halphen et à un article que j'ai publié aux *Nouvelles Annales* (5e série, t. II, 1924).

2. *Triangles de Poncelet; nombre fini.* — Considérons dans un plan une conique C_2 et une courbe Γ_n de classe n (n entier $\geqq 2$); soit M_0 un point *arbitraire* de C_2; deux tangentes M_0M_1 et $M_0M'_1$ issues de M_0 à Γ_n recoupent C_2 en M_1 et M'_1; pour que le triangle $M_0M_1M'_1$ soit inscrit dans C_2 et circonscrit à Γ_n, il est nécessaire et suffisant que $M_1M'_1$ soit tangente à Γ_n; or la droite $M_1M'_1$ enveloppe évidemment, quand M_0 décrit C_2, une courbe $\Gamma_{n(n-1)}$ de classe $n(n-1)$; on cherche les tangentes communes à Γ_n et $\Gamma_{n(n-1)}$, elles sont au nombre de $n^2(n-1)$; mais si une tangente commune à C_2 et Γ_n touche C_2 en un point que j'appellerai M_0, et si nous choisissons pour droite M_0M_1 cette tangente, M_1 coïncide avec M_0, la droite $M_1M'_1$ coïncide avec $M_0M'_1$ et par suite donne une solution impropre : les points M_0, M'_0, M'_1 sont sur C_2 et, *joints sur* C_2, donnent trois droites tangentes à Γ_n; le triangle correspondant a un côté nul; donc chaque tangente à C_0 et Γ_n donne $(n-1)$ solutions impropres; nous ne devons garder que

$$n^2(n-1)-2n(n-1) \quad \text{ou} \quad n(n-1)(n-2)$$

véritables solutions, ce qui fait seulement $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ triangles, *quand* C_2 *et* Γ_n *sont quelconques.*

Faisons immédiatement une application à l'espace; une transformation homographique permet de supposer que C_2 est la parabole

$$y - x^2 = 0,$$

nous la considérons comme projection de la cubique gauche (C) :

$$x = t, \qquad y = t^2, \qquad z = t^3.$$

Si nous posons

$$(1) \qquad t_1 + t_2 = s, \qquad t_1 t_2 = p,$$

la corde (t_1, t_2) de C_2 a pour équation

$$(2) \qquad y - sx + p = 0,$$

de sorte qu'une équation *arbitraire*

$$(3) \qquad F(s, p) = 0$$

de degré n en s et p peut être regardée comme l'équation tangentielle d'une courbe Γ_n de classe n, à savoir l'enveloppe des cordes (t_1, t_2).

L'équation (3) est symétrique en t_1 et t_2 et de degré n par rapport à chacune, et réciproquement. D'autre part, la corde (t_1, t_2) de la cubique gauche est définie d'abord par (2), puis par le plan issu de l'origine

$$(4) \qquad z + px = sy,$$

de sorte que l'équation (3) peut être considérée aussi comme équation tangentielle du cône de sommet O, enveloppe du plan (4). D'ailleurs comme le plan (t_0, t_1, t_2) a pour équation

$$(5) \qquad z - y(t_0 + t_1 + t_2) + x(t_1 t_2 + t_2 t_0 + t_1 t_0) - t_0 t_1 t_2 = 0,$$

on voit que le plan issu du point t_0 de la cubique et contenant la corde (t_1, t_2) a pour équation

$$(6) \qquad z - y(s + t_0) + x(p + t_0 s) - t_0 p = 0,$$

et que la surface réglée lieu de la corde (t_1, t_2) peut être définie par l'intersection de plans tangents à des cônes de sommet $(t_0, t'_0, \ldots)$

d'équation tangentielle commune (3), ces plans se correspondant biunivoquement sur les cônes. La surface réglée lieu de la corde (t_1, t_2) de C s'obtient aussitôt en écrivant les coordonnées homogènes d'un point de la droite en jeu

$$(7)\qquad x = t_1 + \rho t_2, \qquad y = t_1^2 + \rho t_2^2, \qquad z = t_1^3 + \rho t_2^3 \qquad \theta = 1 + \rho,$$

d'où

$$(8)\qquad y\theta - x^2 = \rho(t_1 - t_2)^2, \qquad z\theta - xy = \rho s(t_1 - t_2)^2, \qquad zx - y^2 = \rho p(t_1 - t_2)^2.$$

La surface a donc pour équation

$$(9)\qquad F\left[\frac{z\theta - xy}{y\theta - x^2}, \frac{zx - y^2}{y\theta - x^2}\right] = 0.$$

La surface réglée S admet la cubique C comme ligne multiple d'ordre n; elle admet ∞^1 plans bitangents correspondant à deux génératrices se croisant en un point de C; elle admet des plans tritangents exceptionnels en nombre $\frac{n(n-1)(n-2)}{3}$ donnant sur S d'abord trois génératrices, puis une courbe plane de degré $n-3$.

Réciproquement, toute surface de degré $2n$ ayant C pour ligne multiple d'ordre n est réglée, car de tout point de cette surface part une sécante double de C ayant donc $2n+1$ points communs connus avec S; cette surface s'obtient par le procédé indiqué ici. Si $F(s, p)$ est effectivement de genre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$, il en est de même de S et de ses diverses sections planes, y compris les sections par les plans bi- ou tritangents.

En particulier, pour $n=3$ on a une surface S de degré 6, ayant *deux* plans tritangents. Il est commode pour définir S de donner les deux cubiques (de genre un, de même invariant) obtenues par les deux plans tritangents. La génératrice variable établit une correspondance birationnelle (de cubique à cubique) entre ces deux cubiques, de sorte que la surface peut être définie par les expressions paramétriques

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} x &= A\,p\omega + B\,p'\omega + C + \lambda(\alpha\,p\overline{\omega+\omega_0} + \beta\,p'\overline{\omega+\omega_0} + \gamma),\\ y &= A_1 p\omega + B_1 p'\omega + C_1 + \lambda(\alpha_1 p\overline{\omega+\omega_0} + \beta_1 p'\overline{\omega+\omega_0} + \gamma_1),\\ z &= A_2 p\omega + B_2 p'\omega + C_2 + \lambda(\alpha_2 p\overline{\omega+\omega_0} + \beta_2 p'\overline{\omega+\omega_0} + \gamma_2),\\ \theta &= A_3 p\omega + B_3 p'\omega + C_3 + \lambda(\alpha_3 p\overline{\omega+\omega_0} + \beta_3 p'\overline{\omega+\omega_0} + \gamma_3).\end{aligned}\right.$$

Si les constantes A, B, C, α, ..., γ_3 sont quelconques, la surface (10) est bien de degré 6, *avec deux plans tritangents exceptionnels*, mais elle n'admet que des points doubles, engendrant une courbe gauche d'ordre 9, coupée par chaque génératrice en quatre points. Les surfaces signalées donneront donc une représentation de cette forme (10) où ces constantes A, ..., γ_3 satisfont à certaines conditions; il est facile de constater alors la différence qui sépare (soit dans le cas de courbe double de degré 9, soit dans le cas de courbe triple de degré 3) le cas de deux plans tritangents et celui de ∞^1 plans tritangents.

Si un plan perce la cubique $\lambda = 0$ et la cubique $\lambda = \infty$ en des points de même ω, il contient la génératrice correspondante. Considérons donc les deux équations

$$(11)\quad \begin{aligned}&(Au + A_1 v + A_2 w + A_3 h)p\omega\\ &\quad + (Bu + B_1 v + B_2 w + B_3 h)p'\omega + Cu + C_1 v + C_2 w + C_3 h = 0,\end{aligned}$$

$$(12)\quad \begin{aligned}&(\alpha u + \alpha_1 v + \alpha_2 w + \alpha_3 h)p\overline{\omega + \omega_0}\\ &\quad + (\beta u + \beta_1 v + \beta_2 w + \beta_3 h)p'\overline{\omega + \omega_0} + \gamma u + \gamma_1 v + \gamma_2 w + \gamma_1 h = 0.\end{aligned}$$

Les racines ω_1, ω_2, ω_3 de la première, ω'_1, ω'_2, ω'_3 de la seconde satisfont aux relations de *congruence* suivant les périodes de $p\omega$:

$$(13)\qquad \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 \equiv 0,$$

$$(14)\qquad \omega'_1 + \omega'_2 + \omega'_3 \equiv -3\omega_0.$$

Si donc $3\omega_0$ n'est pas une période, il ne pourra y avoir qu'une ou deux racines communes (sauf dans le cas où l'une des équations disparaît identiquement : on retrouve les *deux* plans tritangents). Mais si $3\omega_0$ est période, tout plan bitangent devient automatiquement *tritangent;* on voit sans peine que l'on peut, sans restreindre, supposer alors $\omega_0 = 0$ et alors nous avons, en faisant la perspective de la surface d'un point quelconque, les deux courbes annoncées en introduction avec ∞^1 triangles de Poncelet : dans le cas de la surface à cubique gauche triple, la perspective à partir d'un point de la cubique donne une C_2 et une Γ_3, car la développable circonscrite à la surface du point de vue est de classe 6 (égale au degré de S) et comprend les trois génératrices, il reste donc une courbe Γ_3 de classe 3; si la perspective est faite d'un point quelconque, on a une C_3 et une Γ_6. Pour la surface à courbe gauche double de degré 9, on trouve de même, soit une C_8 et une Γ_4, soit une C_9 et une Γ_6.

En transformant par dualité la surface de degré 6 qui n'a que des points doubles et que des plans tangents doubles devient une surface de même catégorie; on en conclut donc que, de même que la développable enveloppe des plans tangents doubles est de classe 9 et admet deux plans triplement tangents, la courbe gauche lieu des points doubles admet deux points triples, théorème difficile à apercevoir directement. La surface réglée de degré 6 qui n'a que des points triples et des plans tangents doubles se transforme par dualité en une surface réglée de degré 6 n'ayant que des points doubles et des plans tangents triples, c'est-à-dire représentée par les équations (10) où ω_0 est nul et les constantes A, B, C, $\alpha_1, \ldots, \gamma_3$ quelconques.

Nous voyons ainsi comment l'étude des polygones de Poncelet et celles des surfaces réglées se complètent heureusement.

3. *Triangles de Poncelet; nombre infini.* — Étant donnée une conique C_2, on peut trouver ∞^{2n} courbes Γ_n de classe n fournissant ∞^1 triangles de Poncelet inscrits dans C_2, circonscrits à Γ_n; ces courbes Γ_n dépendent de $2n$ paramètres $\Big($tandis qu'au paragraphe précédent on avait la courbe Γ_n générale dépendant de $\frac{n(n+3)}{2}$ paramètres$\Big)$.

L'idée directrice est bien simple : C_2 étant rapportée à un paramètre unicursal t, l'équation $f(t', t'') = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe enveloppe de la sécante (t', t'') de C_2; si f est *dissymétrique* en t' et t'', la classe de Γ_n est la somme des degrés de f en t' et t'', et alors chaque tangente a une *origine* t', une *extrémité* t'' différentiées; si f est *symétrique* en t' et t'', la classe de Γ_n est égale au degré de f par rapport à t' *ou* t''; du reste, dans ce dernier cas, en prenant pour variables

$$(1) \qquad s = t' + t'', \qquad p = t't'',$$

la relation symétrique f se transforme en une équation

$$(2) \qquad \varphi(s, p) = 0$$

de degré, par rapport à l'*ensemble* s, p, égal au dégré de f en t' *ou* t'', et nous avons vu au paragraphe précédent que la droite (t', t'') et le point (s, p) se correspondent par *dualité;* cela montre que si f n'est pas symétrique, il suffit de former le produit

$$f(t', t'')f(t'', t') = 0 \tag{3}$$

pour arriver à l'équation tangentielle ordinaire de la courbe Γ; il se produit ici une distinction analogue à celle concernant les courbes de *direction:* une équation dissymétrique fournit des tangentes orientées, et si $F(u, v, w) = 0$ est l'équation tangentielle ordinaire de la courbe C_2, l'équation dissymétrique $f(t', t'') = 0$ conduit à une équation tangentielle ordinaire de la forme

$$F(u, v, w) = \Phi^2(u, v, w), \tag{4}$$

où Φ est une fraction rationnelle de u, v, w.

Cela posé, considérons une courbe Γ définie par son équation tangentielle $f(t, t_1) = 0$ (que nous supposerons soit symétrique, soit rendue symétrique); Γ étant de classe n, à t, correspondent n valeurs t_1, t_2, ..., t_n dont les fonctions symétriques σ_1, σ_2, ..., σ_n fondamentales sont exprimées sous forme de fraction rationnelle, de degré n, en t (avec même dénominateur). Donc les fonctions symétriques fondamentales de t, t_1, ..., t_n,

$$S_1 = t + \sigma_1, \qquad S_2 = t\sigma_1 + \sigma_2, \qquad \ldots, \qquad S_{n+1} = t\sigma_n, \tag{5}$$

sont exprimées *rationnellement* en t : la courbe $(S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ est donc une courbe *unicursale* de l'espace à $n+1$ dimensions, de degré $n+1$. Or s'il existe un triangle de Poncelet t, t_1, t_2, où t est *variable*, les équations $f(t, x) = 0$, $f(t_1, x) = 0$ ont une racine commune t_2, mais n'ont pas nécessairement les $(n-1)$ racines communes t_2, t_3, ..., t_n (on a la circonstance complémentaire que t_1 est racine de la première et t de la seconde) : le point $(S_1, S_2, \ldots, S_{n+1})$ relatif à t et celui relatif à t_1 sont donc différents.

Supposons donc que nous ayons un cas encore plus *particulier : t étant choisi quelconque sur C_2, et t_1, ..., t_n étant les extrémités des tangentes à Γ_n issues de t, les cordes t_i, t_j ($i \neq j$, i, j égaux à 1, 2, ..., n) sont toutes tangentes à Γ_n*: dans ce cas, et dans ce cas seulement, le point $(S_1 S_2 \ldots S_{n+1})$ est le même pour t, ou t_1, ..., ou t_n; la courbe de degré $n+1$ en jeu est donc en représentation impropre et se réduit à une droite représentée $(n+1)$ fois, autrement dit $(t, t_1, \ldots, t_{n+1})$ sont les racines d'une équation

$$(6) \qquad (A + B\rho)t^{n+1} + (A_1 + B_1\rho)t^n + \ldots + A_{n+1} + B_{n+1}\rho = 0.$$

La réciproque est immédiate : deux racines t', t'' de (6), *supposées distinctes*, fournissent l'équation

$$(7) \qquad \begin{vmatrix} A t'^{n+1} + A_1 t'^n + \ldots + A_{n+1} & A t''^{n+1} + A_1 t''^n + \ldots + A_{n+1} \\ B t'^{n+1} + B_1 t'^n + \ldots + B_{n+1} & B t''^{n+1} + B_1 t''^n + \ldots + B_{n+1} \end{vmatrix} = 0,$$

laquelle, débarrassée du facteur $t' - t''$, est symétrique en t' et t'', entière et de degré n par rapport à chaque variable. C'est l'équation tangentielle d'une courbe Γ_n de classe n répondant à ce problème *spécialisé* des triangles de Poncelet. L'équation (7) s'obtient par le produit des matrices

$$(8) \qquad \begin{vmatrix} A & A_1 & \ldots & A_{n+1} \\ B & B_1 & \ldots & B_{n+1} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} t'^{n+1} & t'^n & \ldots & 1 \\ t''^{n+1} & t''^n & \ldots & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Les mineurs de la matrice de gauche sont les coordonnées pluckériennes de la droite joignant les deux points de coordonnées homogènes

$$(A, A_1, \ldots, A_{n+1}) \qquad \text{et} \qquad (B, B_1, \ldots, B_{n+1}),$$

dans l'espace à $n+1$ dimensions : il s'introduit donc exactement $2n$ paramètres non homogènes [on peut réduire (A, A_1) à $(1, 0)$ et (B, B_1) à $(0, 1)$ pour *normaliser* l'équation de Γ_n].

On retrouve ainsi des propriétés classiques pour $n = 2$ (deux triangles inscrits dans une même conique sont circonscrits à une même conique nouvelle).

Pour fixer Γ_n, on peut donc se donner *arbitrairement* un premier groupe de $n+1$ points sur $C_2(t^0, t_1^0, \ldots, t_n^0)$, ce qui fixe les coefficients $A, A_1, \ldots, A_{n+1}$ de l'équation (6) où $\rho = 0$, puis un second groupe arbitraire aussi, analogue $(t^1, t_1^1, \ldots, t_n^1)$, ce qui fixe $B, B_1, \ldots, B_{n+1}$ pour $\rho = \infty$; le premier groupe détermine $\frac{n(n+1)}{2}$ cordes, le second autant; il existe une courbe Γ_n et une seule tangente à ces $n(n+1)$ droites. Tout point de C_2 détermine un groupe analogue;

chaque point de C_2 est donc commun à $\frac{n(n-1)}{2}$ triangles de Poncelet; chaque tangente de Γ_n porte $(n-1)$ triangles. Les $n(n+1)$ cordes forment, pour la classe n, un groupe surabondant, de surabondance $\frac{n(n-1)}{2}$.

La surface réglée correspondante a une cubique gauche pour ligne multiple d'ordre n, n'a pas d'autre ligne multiple, est de degré $2n$ et en fait de plans tangents multiples n'a que des plans tritangents; elle est de genre $\frac{(n-1)(n-2)}{2}$. La développable des plans tangents triples est de classe $\frac{3n(n-1)}{2}$. Tous ces résultats sont faciles à transformer par dualité : on a une surface S′ de degré $2n$, n'ayant que des points multiples triples et en fait de plans tangents multiples que des plans multiples d'ordre n, d'où une solution pour les polygones de Poncelet de n côtés pour deux courbes dont aucune n'est conique.

4. *Triangles de Poncelet; solution générale.* — On voit aisément que la solution générale correspond au cas où t_1 et t_2 sont associés à des points $t_3, \ldots, t_{n+1}$ qui n'épuisent pas tous les points associés à t_1; à t_1 correspondent q groupes $(t_2, \ldots, t_{n+1}), (t'_2, \ldots, t'_{n+1}), \ldots$, et les triangles de Poncelet sont formés avec t_1 et deux points quelconques d'un même groupe. La solution générale s'obtient donc en éliminant ρ entre deux équations

$$(1) \qquad P(\rho, t_1) = 0, \qquad P(\rho, t_2) = 0,$$

où P est un polynome *arbitraire* de degré q en ρ et $n+1$ en t; le résultant, débarrassé du facteur $(t_1 - t_2)^q$ donne l'équation *en général indécomposable et symétrique*

$$(2) \qquad R(t_1, t_2) = 0.$$

La courbe Γ ainsi définie est de classe nq : en effet, t_1 donné, on a q valeurs de ρ; une choisie, soit ρ', l'équation $P(\rho', t_2) = 0$ admet, en dehors de t_1, n racines $t_2, \ldots, t_{n+1}$ et il est clair que trois points distincts t_i, t_j, t_k du groupe $(t_1 t_2, \ldots t_{n+1})$ donnent un triangle inscrit dans C_1, circonscrit à Γ. Chaque point de C_2 donne donc $\frac{qn(n-1)}{2}$

triangles; chaque tangente de Γ en donne $(n-1)$. Ici, partant de t_1 avec $t_1 t_2$, on peut continuer à partir de t_2 par un chaînon autre que $t_2 t_3 \ldots t_2 t_{n+1}$ et par suite ne jamais revenir en t_1, quel que soit le nombre de chaînons successifs; dans le cas précédent, on peut revenir au point de départ au bout de trois chaînons, mais si l'on essaie d'éviter d'y revenir, sans parcourir plusieurs fois un même chaînon, il y a impossibilité.

On réalise donc des surfaces réglées, comme plus haut, de degré $2qn$ ayant la cubique gauche comme ligne multiple d'ordre qn; la surface admet des plans tangents triples $(n-1$ passant par chaque génératrice), des plans tangents doubles, $n(q-1)$ passant par chaque génératrice.

On peut expliquer géométriquement le procédé de la façon suivante : regardons ρ lui-même comme le paramètre d'un point de C_2; l'équation $P(\rho, t) = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe auxiliaire γ; si P est dissymétrique en ρ et t (ce qui arrive nécessairement si P est du premier degré en ρ, ou si $q = 1$), le procédé revient à considérer toutes les tangentes de γ qui ont même *origine* ρ et à joindre deux à deux leurs *extrémités* : les cordes ainsi obtenues enveloppent la courbe Γ; si P est symétrique en ρ, t, il n'y a rien en réalité à changer à l'interprétation. Il suffit donc de se donner la courbe γ, mais comme $P(\rho, t)$ doit être au moins de degré 3 en t et de degré 1 en ρ, on voit que γ est de classe 4 au moins en cas de dissymétrie, de classe 3 au moins en cas de symétrie.

Une circonstance curieuse est à signaler. Même si l'équation

$$P(\rho, t) = 0$$

est indécomposable, il peut arriver que l'élimination indiquée de ρ conduise à une relation $R(t_1, t_2) = 0$ décomposée : alors nos conclusions sont encore vraies, soit pour le plan et les triangles de Poncelet, soit pour l'espace et les plans tritangents, à condition de conserver *tous* les morceaux de décomposition; en réalité, si les triangles ne se rapportent pas à un même morceau, il y a intérêt à prendre chaque morceau de décomposition soit de Γ ou S; soient Γ', S' des morceaux associés : sur Γ' on a un *polygone* de Poncelet, sur S' on n'a plus de plan tritangent, mais simplement une suite fermée de λ chaînons inscrits dans la cubique multiple, le plan de deux chaînons consécutifs étant simplement bitangent. Un exemple simple fait comprendre le résultat : si C_2 est le cercle $x^2+y^2=1$, si ρ et t désignent respectivement $\rho=e^{i\psi}$, $t=e^{i\theta}$ (x et y étant respectivement $\cos\psi$, $\sin\psi$ ou $\cos\theta$, $\sin\theta$), l'équation

$$\rho = t^{n+1} \tag{3}$$

peut être prise comme équation $P=0$; la relation entre t_1 et t_2 (ou θ_1 et θ_2) est

$$\theta_2-\theta_1=\frac{2k\pi}{n+1} \qquad (k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ n). \tag{4}$$

La courbe Γ se décompose en un ensemble de cercles Γ', Γ'', ... concentriques au proposé et correspondant aux polygones réguliers d'un nombre de côtés égal à $n+1$, ou à un diviseur de $n+1$: il n'y a plus à proprement parler de triangles de Poncelet; γ est ici une épicycloïde à n rebroussements obtenue en faisant rouler un cercle de rayon $\frac{1}{n+1}$ sur un cercle de rayon $\frac{n}{n+1}$ auquel il est tangent extérieurement; le cercle $x^2+y^2=1$ est celui qui a pour centre le centre du cercle fixe et est tangent à l'épicycloïde en ses n sommets.

Si l'on considère deux coniques C_2 et C'_2 qui ne sont plus bitangentes et admettent ∞^1 polygones de Poncelet de n côtés, chacun de ces polygones fournit une équation $P(\rho,\ t)=0$, moins simple que $\rho=t^{n+1}$, mais conduisant encore à une relation décomposable entre t_1 et t_2 : cette fois on a la division des fonctions *elliptiques* et non plus *circulaires*.

Je viens d'indiquer la solution *générale* des triangles de Poncelet pour une C_2, puis de montrer comment pour certaines équations $P=0$ la solution échoue au point de vue des triangles, mais fournit des polygones, Je vais indiquer une autre *particularisation :* Γ se décomposera, mais un (ou plusieurs) morceau isolé admettra des triangles, tandis que précédemment les côtés des triangles étaient relatifs à des morceaux différents. Le procédé le plus général, pour réaliser ce cas particulier, consiste à écrire

$$P(\rho,\ t)=0, \qquad Q(t,\ \theta)=0, \tag{5}$$

où P a la signification déjà indiquée, Q étant un nouveau polynome *arbitraire* de degré r en t, p en θ; l'équation $P = 0$ est l'équation tangentielle de la courbe γ déjà définie; l'équation $Q(t, \theta) = 0$ est l'équation tangentielle d'une courbe γ' analogue, enveloppe de la corde joignant les points t, et θ de C_2; de ρ *origine* menons une tangente à γ, d'où l'*extrémité* t; de t pris cette fois pour *origine*, menons une tangente à γ', d'où l'extrémité θ; la corde (ρ, θ) enveloppe une courbe $\overline{\gamma}$, en général irréductible, dont l'équation tangentielle s'obtient en éliminant t entre les équations (5), soit

$$\overline{P}(\rho, \theta) = 0, \tag{6}$$

Opérons, par le procédé indiqué, sur $\overline{\gamma}$; autrement dit éliminons ρ entre

$$\overline{P}(\rho, \theta_1) = 0, \qquad \overline{P}(\rho, \theta_2) = 0, \tag{7}$$

d'où

$$R(\theta_1, \theta_2) = 0. \tag{8}$$

L'équation $R(\theta_1, \theta_2) = 0$ admet d'abord les solutions (θ_1, θ_2) provenant du système

$$Q(t, \theta_1) = 0, \qquad Q(t, \theta_2) = 0. \tag{9}$$

Le morceau correspondant s'obtient en opérant directement sur γ' (au lieu de γ); ce morceau enlevé, il restera à joindre deux points (θ_1, θ_2) provenant d'une chaîne (ρ, t_1, θ_1) et d'une chaîne (ρ, t_2, θ_2) avec $t_1 \neq t_2$. La courbe Γ ainsi obtenue est de classe $rqnp$, car à θ_1 correspondent r valeurs de t; à un t choisi correspondent q valeurs de ρ; à ce ρ correspondent seulement n valeurs de t' autres que t, et à un t' correspondent p valeurs de θ_2. Chaque point de C_2 est sommet de $\frac{p^2 rqn(n-1)}{2}$ triangles et chaque tangente de Γ porte $p(n-1)$ triangles : en effet, pour un triangle $\theta_1\theta_2\theta'_2$, il suffit de considérer le schéma

$$\begin{array}{ccccccccc} \theta_1 & r & t & q & \rho & n & t_1 & p & \theta_2, \\ & & & & & n-1 & t'_1 & p & \theta'_2. \end{array}$$

Il est nécessaire que θ_1 et θ_2 soient liés par le même ρ intermédiaire que θ_1 et θ'_2; pour un même θ_1, le ρ a rq déterminations; à ρ correspondent n valeurs t_1, autres que le t primitif, cela donne $\frac{n(n-1)}{2}$ combinaisons possibles pour t_1, t'_1 ; t_1 donne p valeurs de θ_2 et t'_1 p aussi, pour θ'_2.

La répétition de ce procédé consisterait à écrire

$$(10)\quad \begin{cases} P_1(\rho, \rho_1) = 0, \quad P_2(\rho_1, \rho_2) = 0, \quad \ldots, \\ P_h(\rho_{h-1}, \rho_h) = 0, \quad P_{h+1}(\rho_h, \theta) = 0. \end{cases}$$

L'éliminatiou de ρ_1, ρ_2, ..., ρ_h entre les $h+1$ équations (10) conduirait à une relation

$$P(\rho, \theta) = 0,$$

sur laquelle on recommencerait les raisonnements. On a épuisé ainsi tous les cas possibles pour une courbe C_2 et les triangles de Poncelet.

5. *Polygones de Poncelet relatifs à une conique.* — Nous avons rencontré au paragraphe précédent, à propos des polygones réguliers, la propriété suivante : quand la courbe Γ obtenue dans la recherche des triangles de Poncelet se décompose en Γ', Γ'', ..., il peut arriver que ∞^1 triangles aient deux côtés tangents à Γ' et le troisième à Γ'', puis que la suppression de Γ'' permette de revenir sur C_2 au point de départ par une successïon de h tángentes à $\Gamma'(h \geqq 4)$. Cette circonstance est l'une de celles qui permettent d'obtenir des polygones de Poncelet par opposition aux triangles. On constate en effet que, pour une conique donnée C_2 la recherche des polygones de Poncelet de $2n+1$ côtés ou de $2n$ côtés se ramène à la recherche des triangles de Poncelet et d'une courbe Γ_{2n} ou Γ_{2n-1} décomposée en n coniques ou $n-1$ coniques et un point, tout au moins si l'on veut retrouver les polygones classiques inscrits dans une conique et circonscrits à une nouvelle conique.

Au point de vue de l'application aux surfaces réglées, nous avons vu qu'il peut y avoir deux cas différents : avec une conique C_2 du plan et une cubique de l'espace nous n'avons à signaler que des chaînes de génératrices inscrites dans la cubique multiple et se refermant, ne donnant que des plans bitangents. On peut au contraire avoir des surfaces réglées ayant des plans n fois tangents ($n \geqq 4$) et donnant donc des polygones plans de Poncelet dans l'espace; les surfaces réciproques de celles que nous avons obtenues dans le premier cas nous donnent souvent des exemples du second cas.

Amorçons le problème pour une conique C_2; si la courbe Γ peut se décomposer, une chaîne d'équations *arbitraires*

$$(1)\qquad f_1(t_1, t_2)=0, \qquad f_2(t_2, t_3)=0, \qquad \ldots, \qquad f_{h-1}(t_{h-1}, t_h)=0$$

définit une chaîne polygonale ouverte $M_1, M_2, \ldots, M_h$ dont les côtés sont successivement tangents aux courbes $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(h-1)}$ d'équation correspondante; l'élimination de $t_2, t_3, \ldots, t_{h-1}$ fournit l'équation

$$f_h(t_h, t_1)=0$$

de la courbe $\Gamma^{(h)}$ enveloppe de la corde de fermeture. On a ainsi, suivant que $h>3$ ou $h=3$, une solution évidente des polygones ou triangles de Poncelet pour C_2 et la courbe décomposée $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(h)}$. Pour être banale, cette solution suggère néanmoins d'intéressants problèmes que Cayley n'a pas dédaigné de traiter; M. Lebesgue a donné aux *Annales de Toulouse* (1922) une belle démonstration géométrique des résultats de Cayley; si $\Gamma^{(1)}, \ldots, \Gamma^{(h-1)}$ sont des coniques appartenant avec C_2 à un même faisceau linéaire, $\Gamma^{(h)}$ se décompose en 2^{h-2} coniques du même faisceau, et une permutation quelconque dans l'ordre des $(h-1)$ premières coniques $\Gamma^{(1)}, \Gamma^{(2)}, \ldots, \Gamma^{(h-1)}$ ne change pas le total des coniques résultantes.

J'ai cité aussi des solutions banales, au fond de même espèce; soient une conique C_2 et une courbe Γ_n de classe $n (n\geq 3)$ fournissant des triangles; chaque tangente à Γ_n porte $(n-1)$ triangles; prenons-en deux et supprimons le côté commun. On a un *quadrilatère* de Poncelet relatif à C_2 et Γ_n : $t_1 t_2 t_3 t_4$; de même avec un nouveau triangle de côté $t_3 t_4$, on pourra obtenir un pentagone, etc., jusqu'à une certaine limite. Si donc nous pouvons réaliser divers circuits partant d'un point de C_2 pour y revenir, nous prendrons pour valeur du nombre des côtés du polygone le nombre *minimum* relatif aux circuits, à l'exclusion des autres.

Les coordonnées du point courant de C_2 étant exprimées toujours rationnellement en t, nous obtenons des quadrilatères P_4 en éliminant les paramètres ρ, σ entre les équations

$$(2)\qquad f(\rho, t_1)=0, \qquad \varphi(\sigma, t_2)=0, \qquad \psi(\rho, \sigma)=0,$$

supposées algébriques entières de degré respectif r, p_1, s, p_2, R, S en ρ, t_1, σ, t_2, ρ et σ; en effet, ρ, σ étant choisies et vérifiant $\psi = 0$, soient t'_1 et t_1 deux valeurs de t_1 correspondant à ρ, t'_2 et t_2 correspondant à σ : le circuit $t_1 t_2 t'_1 t'_2 t_1$ donne bien un quadrilatère dont chaque côté enveloppe la courbe Γ d'équation

$$(3) \qquad R(t_1, t_2) = 0$$

obtenue par l'élimination indiquée; si les conditions de *symétrie*

$$f(u, v) \equiv \varphi(u, v) \qquad \text{et} \qquad \psi(u, v) \equiv \psi(v, u)$$

sont réalisées, Γ est de classe rSp_2; s'il y a *dissymétrie*, la classe est

$$rSp_2 + sRp_1.$$

Cet exemple, en cas de dissymétrie, est précieux pour nous montrer que certaines solutions sont défectueuses par certains côtés et qu'il y a désaccord entre certaines considérations analytiques ou géométriques. En effet, nous voyons bien que la conique C_2 peut disparaître complètement et qu'il suffit de garder une chaîne de nombres t_1, t_2, ..., t_{p-1}, t_p, t_1, *tels que, dans cet ordre*, chacun se déduise du précédent par l'itération d'une même substitution algébrique. On doit donc avoir, avec la même fonction f, qui n'est pas nécessairement symétrique

$$(4) \quad f(t_1, t_2) = 0, \qquad f(t_2, t_3) = 0, \qquad \ldots, \qquad f(t_{p-1}, t_p) = 0, \qquad f(t_p, t_1) = 0.$$

Or le quadrilatère $t_1 t_2 t'_1 t'_2 t_1$ ne répond pas à la question, car $t_1 t_2 t'_1$ fournit deux origines en t_1 et t'_1 et une même extrémité en t_2, tandis qu'avec la définition analytique (4) l'extrémité d'un maillon doit être origine du suivant; cette objection tombe dans le cas de symétrie.

Avec les conditions (4), les nombres t_1, t_2, ..., t_p devront être solutions d'une même équation $F(t, \rho) = 0$, algébrique en t et contenant un paramètre ρ; si $f(t_1, t_2) = 0$ est du premier degré en t_2, l'équation *est abélienne, quel que soit* ρ, *par rapport à* t, *et réciproquement, toute équation abélienne fournit une solution du problème précis traité ici*. En particulier, l'équation $t^p - \rho = 0$, déjà citée, fournit les polygones réguliers. L'exemple des polygones de Poncelet relatifs à deux coniques non bitangentes fournit cette fois une fonction $f(t_1, t_2)$

symétrique et du second degré en t_1 et t_2 séparément. Nous rentrons donc, en supposant le degré de f en t_1 et t_2 quelconque, dans le domaine si vaste de la résolution des équations algébriques. Je me contenterai donc de donner le moyen de fabriquer des solutions de plus en plus étendues à partir d'une solution déjà obtenue.

Remplaçons un point t de C_2 par l'un quelconque des points θ liés à t par l'équation *arbitraire* $\varphi(t, \theta) = 0$ de degré a en t et α en θ; chaque polygone $t_1 t_2 \ldots t_{p-1} t_p t_1$ fournira α^p polygones $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_{p-1}, \theta_p, \theta_1$ relatifs à une nouvelle courbe Γ' dont la classe est celle de Γ multipliée par $a\alpha$.

6. *Triangles et polygones de Poncelet relatifs à une courbe quelconque.* — Jusqu'ici, la conique C_2 n'est guère intervenue que comme représentation géométrique de la variation d'une quantité numérique t; si donc nous prenons, en même temps que C_2, une courbe *unicursale quelconque* C, nous pouvons associer sur C et C_2 les points de même t; tout polygone de Poncelet (ou tout triangle) obtenu sur C_2 donne une figure correspondante sur C, du même nombre de côtés, car il n'y a que les relations entre les t des sommets successifs qui interviennent; si ensuite, sur un cône, qui a C pour directrice, nous prenons une courbe C' n'ayant qu'un point commun avec chaque génératrice du cône, donc unicursale aussi, nous avons une surface réglée S' offrant les mêmes particularités que la surface réglée S, étudiée jusqu'ici, au point de vue des plans tangents multiples. On peut encore dire que la relation $f(t', t'') = 0$ est l'équation tangentielle de la courbe Γ; mais sur chaque corde (t', t'') de la courbe C, il y a lieu de considérer trois espèces de points : l'*origine* t', l'*extrémité* t'', et les points communs *apparents*, c'est-à-dire les nouveaux points communs à la corde et à C : dans l'espace, sur S', ils ne correspondent plus à une intersection de C' et de la génératrice.

Pour une courbe quelconque C_1 au lieu de C_2 ou d'une courbe unicursale, on peut d'ailleurs faire intervenir chaque point, non plus par un seul nombre t, mais par deux nombres (x, y) liés par une relation algébrique. Donc, au lieu d'élimimer ρ entre

$$P(\rho, t_1) = 0 \quad \text{et} \quad P(\rho, t_2) = 0,$$

pour les triangles, on peut éliminer (X, Y) entre

$$(1)\qquad \begin{cases} P(X, Y; x_1, y_1) = 0, & P(X, Y; x_2, y_2) = 0, \\ f(X, Y) = 0, \quad f(x_1, y_1) = 0, & f(x_2, y_2) = 0, \end{cases}$$

et l'on aura la courbe Γ la plus générale admettant avec C des triangles inscrits dans C, circonscrits à Γ; cela revient encore à introduire une courbe γ auxiliaire d'équation tangentielle $P(X, Y; x, y) = 0$. De la sorte les explications subsistent, presque intégralement, pour chaque cas; il est simplement plus malaisé de calculer la classe de Γ, le nombre de triangles ayant un sommet en un point de C ou portés par une tangente de Γ.

La méthode s'applique évidemment encore pour des courbes d'équation transcendante, pourvu que le premier membre de l'équation soit analytique. A ce point de vue, il suffit, par exemple, de faire correspondre sur une courbe algébrique ou transcendante C et sur une conique C_2, les points qui, sur C, ont pour abscisse x, le t (ou encore l'x) du point de C_2 et à tout polygone obtenu sur C_2 correspond un (ou plusieurs) polygones sur C.

Le problème des triangles, quadrilatères, etc., de Poncelet, pour deux courbes *quelconques*, admet toujours un nombre *fini* de solutions : un certain nombre d'entre elles sont des chaînes *repliées* commençant en un point d'intersection de C avec Γ, ou de contact avec C d'une tangente commune à C et Γ, et sont des solutions impropres (pour C et Γ coniques, ces solutions impropres épuisent le total de solutions en nombre fini). Nous avons indiqué dans quel cas il y a ∞^1 solutions; dans ce cas les chaînes repliées existent encore et peuvent cette fois être considérées comme de véritables solutions, parce que les deux extrémités sont l'un des points cités plus haut (de même espèce pour n pair, d'espèce opposée pour n impair, n étant le nombre de côtés du polygone de Poncelet).

Note. — Le lecteur consultera avec intérêt un article très court de M. Appell sur ce même sujet (*Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 40, 1916, p. 240-246) et il y trouvera une bibliographie détaillée.