ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

ÉTIENNE GOURSAT

Les caractéristiques doubles et le problème de la déformation des surfaces

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 283-344
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__283_0>

LES CARACTÉRISTIQUES DOUBLES

ET

LE PROBLÈME DE LA DÉFORMATION DES SURFACES

Par M. E. GOURSAT

1. Les caractéristiques multiples des équations aux dérivées partielles d'ordre quelconque ont été étudiées par E. Levi ([1]). La démonstration des théorèmes d'existence présente des difficultés spéciales qui ne paraissent pas encore complètement surmontées.

Ces caractéristiques multiples interviennent dans un problème important de la théorie des surfaces, la recherche des surfaces admettant un élément linéaire donné. Leur étude permet d'expliquer d'une façon très simple certaines déformations d'une surface où une courbe de cette surface devient, après déchirure, une courbe plane de rebroussement. Dans le cas particulier où la courbe considérée est une ligne géodésique, on obtient, en général, au lieu d'une ligne de rebroussement, des singularités transcendantes qui n'avaient été signalées que dans quelques rares cas particuliers.

Ce travail constitue le complément naturel d'un Mémoire antérieur ([2]), où j'avais étudié le problème de Cauchy relatif à la déformation d'une surface dans le cas d'une caractéristique simple. ([3]).

I.

2. Soit (E_2) une équation de Monge-Ampère

$$(1)\qquad Hr + 2Ks + Lt + M + N(rt - s^2) = 0,$$

([1]) *Annali di Matematica*, t. 16, 1909, p. 161.

([2]) *Annales de la Faculté des Sciences de Toulouse*, 3e série, t. I, 1909, p. 1-24.

([3]) Les principaux résultats du nouveau Mémoire ont été résumés dans deux Notes présentées à l'Académie des Sciences (*Comptes rendus*, t. 186, 1928, p. 272-275 et 665-668).

où nous supposons, pour préciser, que les coefficients H, K, L, M, N sont des fonctions analytiques de x, y, z, p, q et que N est différent de zéro. Une *caractéristique du premier ordre* [1] $\mathfrak{M}_1$ de cette équation est une suite simplement infinie d'éléments du premier ordre satisfaisant aux trois relations

$$(2)\qquad \left\{\begin{aligned} N\,dp + L\,dx + \lambda_1\,dy &= 0,\\ N\,dq + \lambda_2\,dx + H\,dy &= 0,\\ dz - p\,dx - q\,dy &= 0,\end{aligned}\right.$$

λ_1 et λ_2 étant les deux racines de l'équation du second degré

$$(3)\qquad \lambda^2 + 2K\lambda + HL - MN = 0.$$

Lorsque l'expression

$$F = K^2 - HL + MN$$

n'est pas identiquement nulle (cas général qui se présentera seul dans la suite), l'équation (1) possède deux familles distinctes de caractéristiques du premier ordre, les équations des deux familles se déduisant l'une de l'autre en permutant λ_1 et λ_2. Mais il peut arriver que tous les éléments d'une caractéristique vérifient la relation $F = 0$, et l'on a, en chacun de ces éléments, $\lambda_1 = \lambda_2 = -K$. Nous appellerons *caractéristique double* de l'équation (1) toute multiplicité de ∞^1 éléments du premier ordre satisfaisant aux relations

$$(4)\quad F = K^2 - HL + MN = 0;\qquad (5)\quad \left\{\begin{aligned} \Omega_1 &= N\,dp + L\,dx - K\,dy = 0,\\ \Omega_2 &= N\,dq - K\,dx + H\,dy = 0,\\ \Omega_3 &= dz \quad - p\,dx - q\,dy = 0;\end{aligned}\right.$$

les démonstrations relatives aux théorèmes d'existence des intégrales renfermant tous les éléments d'une caractéristique du premier ordre ne s'appliquent pas aux caractéristiques doubles [2]. Dans les cas que nous allons étudier, l'existence de ces intégrales sera établie d'une façon indirecte.

3. Toute équation (E_2), qui admet deux familles distinctes de

---

[1] Voir mes *Leçons sur l'intégration des équations aux dérivées partielles du second ordre*, t. I, Chap. II. J'indiquerai simplement par le mot *Leçons* le renvoi à cet Ouvrage.

[2] *Leçons*, t. I, Chap. IV.

caractéristiques du premier ordre, possède aussi une famille de caractéristiques doubles. Mais il peut se présenter deux cas bien distincts. Si, de l'équation (4), on tire l'une des variables x, y, z, p, q, exprimée au moyen des autres et qu'on porte cette expression dans les relations (5), on obtient, en général, un système de trois équations différentielles du premier ordre entre quatre variables; les caractéristiques doubles dépendent donc de trois constantes arbitraires. Supposons, par exemple,

$$H = p, \qquad K = L = 0, \qquad M = x + y, \qquad N = 1.$$

Les équations (4) et (5) deviennent

$$x + y = 0, \qquad dp = 0, \qquad dq + p\,dy = 0, \qquad dz = p\,dx + q\,dy,$$

et l'on en tire

$$y = -x, \qquad p = C_1, \qquad q = C_1 x + C_2, \qquad z = -C_1 \frac{x^2}{2} + (C_1 - C_2)x + C_3,$$

C_1, C_2, C_3 étant des constantes arbitraires.

Il en est autrement si toutes [1] les intégrales de l'équation du premier ordre (E_1), obtenue en égalant à zéro l'expression F, sont aussi des intégrales de (E_2). Dans ce cas, en effet, tous les éléments d'une caractéristique de (E_1) appartiennent à une infinité d'intégrales de (E_1) qui sont aussi des intégrales de (E_2). Comme tous ces éléments vérifient la relation $F = 0$, ce sont des caractéristiques doubles de (E_2). Or, les équations différentielles des caractéristiques de (E_1) sont, avec les notations habituelles,

$$(6) \qquad \frac{dx}{P} = \frac{dy}{Q} = \frac{dz}{Pp + Qq} = \frac{-dp}{X + pZ} = \frac{-dq}{Y + qZ}.$$

Les équations (5) devant être des conséquences de ces nouvelles relations, on doit avoir

$$N(X + pZ) = LP - KQ, \qquad N(Y + qZ) = -KP + HQ,$$

---

(1) Il peut se faire que F se décompose en deux facteurs analytiquement distinct $F = F_1 F_2$, les intégrales de $F_1 = 0$ vérifiant seules l'équation (E_2). Tous les raisonnements du texte s'appliquent, en remplaçant F par F_1 (*voir* plus loin un exemple au n° 4).

en tenant compte de l'équation $F = 0$, ce que nous écrirons

$$(7) \qquad N(X + pZ) \equiv LP - KQ, \qquad N(Y + qZ) \equiv -KP + HQ \qquad (\text{mod. } F),$$

D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} N\,dF &= N(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz + P\,dp + Q\,dq) \\ &= N(X + pZ)\,dx + N(Y + qZ)\,dy + NZ\Omega_3 \\ &\quad + P(\Omega_1 - L\,dx + K\,dy) + Q(\Omega_2 + K\,dx - H\,dy), \end{aligned}$$

Ω_1, Ω_2, Ω_3 désignant respectivement les premiers membres des équations (5). En tenant compte des relations (7), on a donc

$$N\,dF \equiv NZ\Omega_3 + P\Omega_1 + Q\Omega_2 \qquad (\text{mod } F).$$

Il s'ensuit que les trois équations $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ se réduisent à deux équations distinctes en tenant compte de la relation $F = 0$ elle-même. Si donc, on tire l'une des variables x, y, z, p, q en fonction des quatre autres de l'équation $F = 0$ et qu'on porte cette valeur dans les équations (5), on sera conduit à un système de deux équations de Pfaff à quatre variables. Ces caractéristiques doubles dépendent donc d'une fonction arbitraire d'une variable. Il peut y avoir d'autres caractéristiques doubles ne dépendant que de constantes arbitraires si F est divisible par un facteur F_2 tel que les intégrales de $F_2 = 0$ ne vérifient pas (E_2).

Inversement, supposons que les quatre équations $dF = 0$, $\Omega_1 = 0$, $\Omega_2 = 0$, $\Omega_3 = 0$ se réduisent à trois seulement en tenant compte de $F = 0$. On aura alors une identité

$$N\,dF \equiv A\Omega_1 + B\Omega_2 + C\Omega_3 \qquad (\text{mod } F),$$

et l'on voit immédiatement, en comparant les coefficients de dp, dq, dz, que l'on doit prendre $A = P$, $B = Q$, $C = Z$, et la relation précédente s'écrira, en simplifiant,

$$[X + pZ - PL + QK]\,dx + [Y + qZ + PK - HQ]\,dy \equiv 0 \qquad (\text{mod } F).$$

Les coefficients de dx et de dy sont donc nuls en tenant compte de $F = 0$, et si l'on se reporte aux équations différentielles (6) des caractéristiques de (E_1), on voit qu'elles satisfont aussi aux relations (5). Elles font donc partie des caractéristiques doubles de (E_2).

Toute intégrale *non singulière* de (E_1) est donc un lieu de caractéristiques doubles de (E_2), et, par suite, une intégrale [1] de (E_2).

Remarque. — On peut encore établir le résultat précédent en effectuant une transformation de contact de façon que l'équation (E_1) devienne $p=0$. Pour que toutes les intégrales de (E_1) soient aussi des intégrales de (E_2), il faut que L et M contiennent le facteur p. Pour que F soit nul aussi lorsque $p=0$, il faudra, de plus, que K soit aussi divisible par p. Les équations différentielles des caractéristiques doubles se réduisent bien à deux

$$dq + H\,dy = 0, \qquad dz - q\,dy = 0,$$

où l'on a remplacé p par zéro dans H. On peut choisir pour z une onction arbitraire de y, et l'on tirera q et x des relations précédentes.

4. Considérons, en particulier, l'équation (E_2) à laquelle conduit la recherche des surfaces admettant un élément linéaire donné, quand on prend pour inconnue l'une des coordonnées rectangulaires d'un point de la surface cherchée. Nous désignerons maintenant les variables indépendantes par u et v, la lettre z représentant toujours la fonction inconnue. L'élément linéaire étant pris sous la forme simple

$$ds^2 = du^2 + C^2\,dv^2, \tag{8}$$

où C est une fonction connue de u, v, l'équation (E_2) s'obtient en exprimant que la forme quadratique

$$\begin{aligned} ds^2 - dz^2 = (1-p^2)\,du^2 &- 2pq\,du\,dv \\ &+ (C^2-q^2)\,dv^2, \qquad p=\frac{\partial z}{\partial u}, \qquad q=\frac{\partial z}{\partial v} \end{aligned} \tag{9}$$

est à courbure totale nulle, ce qui conduit à l'équation classique [2],

$$\begin{aligned} C(rt-s^2) + \left[C^2\frac{\partial C}{\partial u}p - \frac{\partial C}{\partial v}q\right]r + 2\frac{\partial C}{\partial u}qs \\ - C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}p^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right]q^2 + C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0. \end{aligned} \tag{10}$$

---

(1) *Leçons*, t. I, p. 48-49.

(2) G. DARBOUX. *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. III, p. 262.

C'est une équation (E_2) où les coefficients H, K, L, M, N ont les valeurs suivantes :

$$H = C^2 \frac{\partial C}{\partial u} p - \frac{\partial C}{\partial v} q, \quad K = \frac{\partial C}{\partial u} q, \qquad L = 0, \qquad N = C,$$

$$M = -C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} p^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right] q^2 + C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

On a, dans ce cas,

$$F = K^2 - HL + MN = C \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} [C^2 - C^2 p^2 - q^2].$$

Toutes les intégrales de l'équation du premier ordre (E_1),

$$\mathcal{F} = C^2(1 - p^2) - q^2 = 0. \tag{11}$$

sont aussi des intégrales [1] de (E_2). L'équation (10) admet donc une famille de caractéristiques doubles dépendant d'une fonction arbitraire, ce qu'il est aisé de vérifier. En effet, les équations (5) deviennent ici

$$(5') \quad C dp - \frac{\partial C}{\partial u} q \, dv =, \qquad C dq - \frac{\partial C}{\partial u} q \, du + \left(C^2 \frac{\partial C}{\partial u} p - \frac{\partial C}{\partial v} q\right) dv = 0,$$

$$dz - p \, du - q \, dv = 0.$$

Pour avoir tous les systèmes de trois fonctions u, p, q de la variable v satisfaisant à la relation (11) et aux deux premières équations (5), il est indiqué, d'après la forme même de la relation (11), de poser $p = \sin V$, $q = C \cos V$, V étant une inconnue auxiliaire. Les deux premières équations (5') se réduisent à une seule $dV = \frac{\partial C}{\partial u} dv$. Les caractéristiques doubles sont donc représentées par les équations

$$(12) \qquad p = \sin V, \qquad q = C \cos V, \qquad V' = \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial C}{\partial u},$$

$$z = \int \sin V \, du + C \cos V \, dv;$$

on peut choisir arbitrairement la fonction $u = \psi(v)$, et V s'obtient par une quadrature

$$V = \int \left[\frac{\partial C}{\partial u}\right] dv,$$

[1] G. Darboux, *Leçons sur la théorie générale des surfaces*, t. III, p. 255.

où $\left[\frac{\partial C}{\partial u}\right]$ représente ce que devient $\frac{\partial C}{\partial u}$ quand on y remplace u par $\psi(v)$. On peut aussi choisir arbitrairement la fonction $V(v)$, et u s'obtient en résolvant l'équation

$$V' = \frac{\partial C}{\partial u}.$$

Remarques. — 1° Les formules (12) ont été établies en supposant que v n'est pas constant le long d'une caractéristique double. Si v est égal à une constante v_0, les équations (12) doivent être remplacées par les suivantes

$$v = v_0, \qquad p = p_0, \qquad q = C(u, v_0)\sqrt{1 - p_0^2}, \qquad z = z_0 + p_0 u,$$

p_0, v_0, z_0 étant des constantes arbitraires :

2° On obtient d'autres caractéristiques doubles en adjoignant la relation $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0$ aux équations (5'). Ces caractéristiques qui dépendent de trois constantes arbitraires et qui ne vérifient pas en général l'équation (11), ont beaucoup moins d'intérêt que les premières pour la suite de ce travail.

3° Pour vérifier que les caractéristiques de (E_1) font partie des caractéristiques doubles de (E_2), il suffit de poser $p = \sin V$, $q = C \cos V$ dans les équations différentielles de ces caractéristiques :

$$\frac{du}{2C^2 p} = \frac{dv}{2q} = \frac{dp}{2C\frac{\partial C}{\partial u}(1 - p^2)} = \frac{dq}{2C\frac{\partial C}{\partial v}(1 - p^2)}, \tag{13}$$

et l'on trouve ainsi qu'elles se réduisent aux deux suivantes

$$\frac{du}{dv} = C \tang V, \qquad \frac{dV}{dv} = \frac{\partial C}{\partial u},$$

dont la seconde est identique à la relation obtenue plus haut. L'élimination de V conduit bien à l'équation différentielle des lignes géodésiques.

5. Ces caractéristiques doubles jouent un rôle important dans la recherche des surfaces admettant l'élément linéaire (8). Nous supposons que $C(u, v)$ est une fonction analytique réelle et holomorphe

des variables réelles u, v, dans un domaine D du plan (u, v) et que $z(u, v)$ est une intégrale réelle de l'équation (10), holomorphe dans le même domaine. De cette intégrale $z(u, v)$, on peut, sous certaines conditions qui vont être rappelées, déduire une surface réelle (Σ) admettant l'élément linéaire (8).

D'après la façon même dont on a obtenu l'équation (E_2), la fonction $z(u, v)$ est telle que la différence

$$(14) \qquad ds^2 - dz^2 = du^2 + C^2 dv^2 - (p\,du + q\,dv)^2$$

est décomposable en une somme de carrés de deux différentielles exactes $dx^2 + dy^2$, si $z(u, v)$ n'est pas une intégrale de (E_1). Pour que x et y soient elles-mêmes des fonctions réelles des variables u, v dans le domaine considéré, il est nécessaire que, dans ce domaine, l'intégrale $z(u, v)$ vérifie les inégalités

$$(15) \qquad \mathcal{F} = C^2(1 - p^2) - q^2 > 0, \qquad p^2 < 1, \qquad q^2 < C^2,$$

dont la première entraîne les deux autres. Ces conditions sont d'ailleurs suffisantes. En effet, si elles sont remplies, la forme quadratique $ds^2 - dz^2$ est décomposable en un produit de deux facteurs linéaires imaginaires conjugués

$$(16) \qquad ds^2 - dz^2 = [a\,du + (b + ci)\,dv][a\,du + (b - ci)\,dv],$$

où l'on a

$$(17) \qquad a = \sqrt{1 - p^2}, \qquad b = \frac{-pq}{\sqrt{1 - p^2}}, \qquad c = \frac{\sqrt{C^2(1 - p^2) - q^2}}{\sqrt{1 - p^2}}.$$

Cela étant, soit (u_0, v_0) un point quelconque du domaine D; a, b, c sont des fonctions réelles et holomorphes de u, v dans le voisinage de ce point, a et c ne s'annulant pas. Puisque la forme (16) est réductible à une somme de carrés de deux différentielles

$$dx^2 + dy^2 = d(x + iy)\,d(x - iy),$$

les deux formes linéaires

$$a\,du + (b + ci)\,dv, \qquad a\,du + (b - ci)\,dv$$

doivent admettre respectivement deux facteurs intégrants imaginaires conjugués dont le produit est égal à un, que l'on peut représenter par $e^{\mu i}$, $e^{-\mu i}$, μ étant réel. Les conditions d'intégrabilité conduisent aux deux relations suivantes pour déterminer μ :

$$(18)\qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\dfrac{\partial b}{\partial u} - \dfrac{\partial a}{\partial v}}{c}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{1}{a}\frac{\partial c}{\partial u} + b\,\frac{\dfrac{\partial b}{\partial u} - \dfrac{\partial a}{\partial v}}{ac};$$

a et c ne pouvant être nuls dans le domaine du point $(u_0 v_0)$, on a pour $\frac{\partial \mu}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$, et, par suite, pour μ, des fonctions holomorphes dans le même domaine. Il vient enfin

$$x + iy = \int e^{\mu i}[a\,du + (b + ci)\,dv],$$

$$x - iy = \int e^{-\mu i}[a\,du + (b - ci)\,dv],$$

d'où l'on tire pour x et y deux fonctions réelles et holomorphes de u, v dans le voisinage du point (u_0, v_0). La surface représentée par les équations

$$x = x(u, v), \qquad y = y(u, v), \qquad z = z(u, v)$$

admet bien l'élément linéaire (8) et ne présente aucune singularité au point M_0 qui correspond aux valeurs (u_0, v_0), car le jacobien $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$, par exemple, n'est pas nul pour ce système de valeurs.

Les fonctions x, y ne sont déterminées qu'à des constantes additives près quand on a choisi la valeur de la constante qui entre dans $\mu(u, v)$. Quand on change les valeurs des constantes dont dépendent x et y, la nouvelle surface se déduit de (Σ) par une translation parallèle au plan des xy, tandis que le changement de la constante qui entre dans μ correspond, on le voit aisément, à une rotation autour de Oz. Remarquons encore qu'une permutation de $x + iy$ en $x - iy$ revient à changer y en $-y$, c'est-à-dire à remplacer la surface (Σ) par une surface symétrique. En définitive, la surface (Σ), qui correspond à une intégrale $z(u, v)$ de (E_2), n'est pas complètement déterminée, mais toutes ces surfaces se déduisent de l'une d'elles par une symétrie, ou par une rotation autour d'un axe parallèle à Oz. Cette remarque s'applique à tous les cas qui seront examinés dans la suite.

Considérons le cas plus général d'une intégrale réelle $z(u, v)$, satisfaisant aux inégalités (15) dans le domaine D, mais non uniforme dans ce domaine. Supposons, par exemple, qu'un chemin fermé situé dans D, partant du point (u_0, v_0) et y revenant, conduise de la valeur $z_1(u, v)$ de l'intégrale à une valeur différente $z_2(u, v)$ de la même intégrale; $z_1(u, v)$ et $z_2(u, v)$ fournissent deux portions de surface (Σ_1) et (Σ_2), qui correspondent point par point à une région du plan (u, v) entourant le point (u_0, v_0). Ces deux portions de surface, qui appartiennent à une même surface analytique, se correspondent point par point avec conservation des éléments linéaires, sans être, en général, superposables. C'est ce que M. Gambier appelle une *auto-application*. L'existence de surfaces admettant une auto-application est une conséquence immédiate de ce qu'il existe des intégrales *non uniformes* pour une équation aux dérivées partielles. Il peut y avoir auto-application dans d'autres circonstances comme nous le verrons plus loin.

6. Une portion du domaine D où les inégalités (15) ne sont pas toutes vérifiées ne peut correspondre à une portion de surface réelle admettant l'élément linéaire (8). Supposons, pour fixer les idées, qu'il existe dans le domaine D une ligne Λ, le long de laquelle $\mathcal{F}$ s'annule en changeant de signe. Cette ligne Λ est nécessairement analytique; elle décompose le domaine D en deux régions D_1, D_2, $\mathcal{F}$ étant positif dans D_1 et négatif dans D_2. On aura aussi, dans la région D_1, $p^2 < 1$, $q^2 < C^2$. Dans ces conditions, à la région D_1 du plan (u, v), correspond une portion de surface Σ_1 sans points singuliers, admettant l'élément linéaire (8), pour laquelle on peut prendre $z = z(u, v)$. Le but essentiel de ce travail est *la recherche des singularités que présente la surface* (Σ_1) *lorsque le point* (u, v) *vient sur la ligne de séparation* Λ.

Le long de cette ligne u, v, $p = \frac{\partial z}{\partial u}$, $q = \frac{\partial z}{\partial v}$, z sont des fonctions d'une variable indépendante, formant une multiplicité $\mathfrak{M}_1$, dont tous les éléments satisfont à la relation $\mathcal{F} = 0$. Cette multiplicité appartient donc à une intégrale $z'(u, v)$ de l'équation (E_1), qui est aussi une intégrale de (E_2). Cette intégrale $z'(u, v)$ est différente de $z(u, v)$, puisque, par hypothèse, $z(u, v)$ ne satisfait pas à la relation $\mathcal{F} = 0$. Les éléments de $\mathfrak{M}_1$ appartiennent donc à deux intégrales distinctes de (E_2), et par conséquent $\mathfrak{M}_1$ est une caractéristique de (E_2). Or tous ses éléments satisfont à l'équation $\mathcal{F} = 0$; *c'est donc une caractéristique double de* (E_2).

Nous sommes donc conduits à étudier successivement les deux problèmes suivants :

1° *Déterminer les intégrales de* (E_2) *qui contiennent tous les éléments d'une caractéristique double de cette équation.* Nous nous limiterons à la recherche des intégrales holomorphes;

2° Connaissant une intégrale holomorphe $z(u, v)$ renfermant tous les éléments d'une caractéristique double $\mathfrak{M}_1$, ayant pour support une ligne Λ du plan (u, v), *étudier la nature des fonctions* $x(u, v)$, $y(u, v)$, *déduites de la relation* $ds^2 - dz^2 = dx^2 + dy^2$, *dans le voisinage de la ligne* Λ.

7. Pour étudier le premier problème, nous supposerons que, tout le long de la caractéristique double considérée, la relation entre u et v se réduit à $u = 0$. On satisfait à cette condition en prenant pour courbes coordonnées les parallèles à la courbe qui sert de support ponctuel à la caractéristique double sur une surface admettant l'élément linéaire donné et les géodésiques orthogonales. Pour préciser les hypothèses, nous supposons que $C(u, v)$ est représentée, dans le voisinage de la ligne $u = 0$, par un développement

$$C = 1 + C_1(v)u + C_2(v)u^2 + \ldots + C_{m(v)}u^m + \ldots \tag{19}$$

$C_1, C_2, \ldots, C_m, \ldots$ étant des fonctions holomorphes de v dans un intervalle (v_0, v_1), et la série (19) étant convergente dans le domaine défini par les inégalités

$$|u| < r, \qquad v_0 \leqq v \leqq v_1,$$

où h et r sont des nombres positifs assez petits.

Pour $u = 0$, on a $ds^2 = dv^2$, de sorte que v représente, au signe près, l'arc de la courbe $u = 0$, comptée à partir d'une origine que l'on peut choisir arbitrairement.

Les caractéristiques doubles, dont tous les éléments vérifient la relation $u = 0$, sont représentées [1] (n° 4), par les équations

$$u = 0, \qquad p = \sin V, \qquad q = \cos V, \tag{20}$$

$$V' = \left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)_0 = C_1, \qquad z = \int_{v_0}^{v} \cos V \, dv + z_0$$

---

[1] Lorsque $C_2 = 0$, les formules $u = 0$, $p = m \sin V$, $q = m \cos V$, $z = \int m \cos V \, dv$,

et dépendent de deux constantes arbitraires qui figurent dans V et dans z. Il est évident que la constante z_0 correspond à une translation parallèle à Oz. Nous verrons aussi un peu plus loin que, sauf dans un cas particulier, l'autre constante n'intervient pas dans la forme des surfaces obtenues. Nous pouvons encore écrire les équations (19) et (20) :

$$(19') \qquad C = 1 + V'u + C_2 u^2 + \ldots + C_m u^m + \ldots.$$

$$(20') \qquad u = 0, \qquad p = \sin V, \; q = \cos V, \qquad z = \int_{v_0}^{v} \cos V \, dv + z_0,$$

en supposant connue la fonction V. Une intégrale holomorphe de (E_2), contenant tous les éléments de la caractéristique double définie par les équations (20′), est représentée, en négligeant la constante z_0, par un développement de la forme

$$(21) \qquad z = \int_{v_0}^{v} \cos V \, dv + u \sin V + \varphi_2 u^2 + \varphi_3 u^3 + \ldots + \varphi_n u^n + \ldots,$$

$\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ étant des fonctions holomorphes de v dans un certain domaine, et nous avons d'abord à déterminer ces coefficients de façon à obtenir un développement satisfaisant formellement à l'équation (E_2).

Il est commode, pour la suite des calculs, de poser

$$z = \int_{v_0}^{v} \cos V \, dv + u \sin V + Z;$$

les grandes lettres P, Q, R, S, T désignant les dérivées de Z, on a

$$\begin{aligned} p &= \sin V + P, \\ q &= \cos V (1 + u V') + Q, \\ r &= R, \\ s &= \cos V . V' + S, \\ t &= - \sin V . (1 + u V') V' + u \cos V . V'' + T, \end{aligned}$$

---

où V a la même signification et où m est une constante quelconque, représentent aussi une caractéristique double, mais les éléments de cette multiplicité ne vérifient la relation $\mathcal{F} = 0$ que pour $m = \pm 1$.

et l'équation (10) est remplacée par l'équation

$$
\begin{aligned}
(21)\quad & C(RT - S^2) \\
& + R\Big[Cu\cos V.V'' - C\sin V V'(1 + uV') \\
& \qquad + C^2\frac{\partial C}{\partial u}(P + \sin V) - \frac{\partial C}{\partial v}[Q + \cos V(1 + uV')]\Big] \\
& + 2S\left[\frac{\partial C}{\partial u}[Q + \cos V(1 + uV)] - C\cos VV'\right] \\
& - C\cos^2 V V'^2 + 2\frac{\partial C}{\partial u}\cos V.V'[Q + \cos V(1 + uV')] \\
& \qquad - C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}(P + \sin V)^2 \\
& - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right][Q + \cos V(1 + uV')]^2 + C\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.
\end{aligned}
$$

Si l'on ordonne les coefficients de R et de S, et le terme indépendant de R, S, T, suivant les puissances de u, P, Q, l'équation (21) peut encore s'écrire

$$
\begin{aligned}
(21')\quad & C(RT - S^2) + (V'P + 2C_2\sin V u + \ldots)R + 2(V'Q + 2C_2\cos V u + \ldots)S \\
& - 4C_2\sin VP - 4C_2\cos VQ + \ldots = 0,
\end{aligned}
$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en u, P, Q. En substituant dans cette équation un développement

$$
(22)\qquad Z = \varphi_2 u^2 + \varphi_3 u^3 + \ldots + \varphi_n u^n + \ldots,
$$

les seuls termes du premier degré en u proviennent du terme en R et de $-4C_2\sin VP$, et le coefficient de u est égal à

$$
2\varphi_2[2V'\varphi_2 + 2C_2\sin V] - 8C_2\sin V\varphi_2 = 4\varphi_2[V'\varphi_2 - C_2\sin V].
$$

La fonction $\varphi_2(u)$ doit donc être racine de l'équation

$$
(23)\qquad \varphi_2(V'\varphi_2 - C_2\sin V = 0.
$$

Pour la suite des calculs, nous distinguerons trois cas :

Premier cas (cas général) : V' et C_2 sont différents de zéro. — Sur une surface, dont l'élément linéaire est donné par la formule (8), la courbe $u = 0$ n'est ni une ligne géodésique, ni une ligne de courbure totale nulle.

Deuxième cas : $C_2 = 0$ et V' est différent de zéro. — La courbe $u = 0$ est une ligne de courbure totale nulle, sans être une ligne géodésique.

Troisième cas : $V' = 0$. — La courbe $u = 0$ est une ligne géodésique.

II.

8. Nous supposerons que la fonction $C(u, v)$ est holomorphe dans le rectangle $\mathcal{R}$ limité par les droites $u = \pm r$, $v = \pm h$ et qu'elle est représentée dans ce rectangle par une série (19) où les coefficients $C_i(v)$ sont holomorphes dans l'intervalle $(-h, +h)$. Si V' et C_2 ne sont pas identiquement nuls, on peut, en outre, choisir l'origine des arcs sur la courbe $u = 0$ et le nombre h de façon que V' et C_2 ne s'annulent pas dans cet intervalle; enfin, nous supposerons h assez petit pour que l'on puisse choisir la constante qui figure dans V, de façon que $\sin V$ et $\cos V$ ne s'annulent pas non plus dans le même intervalle.

La valeur de V étant choisie de cette façon, on peut prendre pour φ_2 une des deux valeurs $\varphi_2 = 0$, $\varphi_2 = \frac{\sin V}{V'}$. Prenons d'abord pour φ_2 cette seconde expression qui représente une fonction holomorphe de v dans l'intervalle $(-h, +h)$, ne s'annulant pas dans cet intervalle. Pour calculer les autres coefficients $\varphi_3, \varphi_4, \ldots, \varphi_n$ du développement (22), remarquons qu'après la substitution de ce développement dans le premier membre de l'équation (21), les termes qui dépendent de φ_n sont au moins du degré $n-1$ en u et les termes en $\varphi_n u^{n-1}$ proviennent uniquement de

$$R[V'P + 2C_2 \sin V u] - 4C_2 \sin V P.$$

En remplaçant P et R par leurs développements et $V'\varphi_2$ par $C_2 \sin V$, on obtient pour coefficient de $\varphi_n u^{n-1}$ le produit $2n(2n-3)C_2 \sin V$. On a donc, pour déterminer φ_n, une relation de la forme

$$2n(2n-3)C_2 \sin V \varphi_n + \ldots = 0,$$

les termes non écrits dépendant des C_i et de $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_{n-1}$. En prenant successivement $n = 3, 4, \ldots$, on obtient de proche en proche tous les coefficients, et l'on a un développement unique

$$(24)\qquad z = \int_0^v \cos V\, dv + u \sin V + \varphi_2 u^2 + \varphi_3 u^3 + \ldots + \varphi_n u^n + \ldots,$$

dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes de v dans l'intervalle $(-h, +h)$, satisfaisant formellement à l'équation (10). Nous admettrons provisoirement la convergence de ce développement qui sera établie plus loin d'une façon indirecte.

Si dans $\mathcal{F}$ on remplace z par le développement précédent (24), et qu'on ordonne le résultat suivant les puissances de u, on obtient, en n'écrivant que le premier terme de la série obtenue,

$$(25)\qquad \mathcal{F} = -\frac{4 C_2 \sin^2 V}{V'} u + \ldots.$$

de sorte que $\mathcal{F}$ *change de signe avec* u.

Prenons, en second lieu, $\varphi_2 = 0$ et cherchons une solution de l'équation (21) représentée par un développement de la forme

$$(26)\qquad Z = \varphi_3(v) u^3 + \ldots + \varphi_n(v) u^n + \ldots.$$

Après substitution de ce développement dans le premier membre, on voit immédiatement que le coefficient de u^2 ne dépend pas de φ_3. On pourrait vérifier directement que ce coefficient est nul; nous le prouverons un peu plus loin d'une autre façon en montrant qu'il existe au moins une intégrale de l'équation (21) représentée par un développement de la forme (26). Nous pouvons donc, pour la suite des calculs, choisir arbitrairement le coefficient φ_3. Cette fonction étant choisie, les coefficients suivants $\varphi_4, \varphi_5, \ldots$ sont déterminés de proche en proche par récurrence. Après substitution, φ_n ne figure dans le résultat que dans des termes de degré $n-1$ au moins, et les termes en $\varphi_n u^{n-1}$ proviennent uniquement de

$$2 C_2 \sin V R u - 4 C_2 \sin V P,$$

et le coefficient de $\varphi_n u^{n-1}$ est $2n(n-3) C_2 \sin V$. En égalant à zéro le coefficient de u^{n-1}, on a donc une relation

$$2n(n-3) C_2 \sin V \varphi_n + \ldots = 0 \qquad (n \geqq 4),$$

où les termes non écrits dépendent des coefficients φ_i d'indice inférieur à n.

Il ne peut y avoir impossibilité pour le calcul de φ_3. — Nous savons, en effet, que l'équation (E_1) admet une intégrale particulière contenant tous les éléments de la caractéristique double (20'), qui est aussi une intégrale de (E_2). Cette intégrale est représentée aussi par une série de la forme (24), dont on peut déterminer les coefficients $\varphi_2, \varphi_3, \ldots$, en substituant ce développement dans $\mathcal{F}$. Dans le résultat de la substitution, il y a un terme du premier degré en u, qui est $-2\sin V \varphi_2 u$; on doit donc prendre $\varphi_2 = 0$. En égalant ensuite à zéro le coefficient de u^2, on trouve qu'on doit prendre

$$(27) \qquad \varphi_3 = \frac{C_2 \cos^2 V}{3 \sin V};$$

les autres coefficients $\varphi_4, \varphi_5, \ldots$ se déterminent ensuite de proche en proche sans aucune ambiguïté.

Il y a donc une infinité de séries de la forme

$$(28) \qquad z = \int_0^v \cos V\, dv + u \sin V + \varphi_3 u^3 + \ldots + \varphi_n u^n + \ldots,$$

dont tous les coefficients sont des fonctions holomorphes de v dans l'intervalle $(-h, +h)$ et qui satisfait formellement à l'équation (10). La convergence de ces développements sera aussi établie plus loin pour une infinité de formes de la fonction φ_3. Cette fonction φ_3 peut être choisie arbitrairement, et si l'on ne la choisit pas égale à $\frac{C_3 \cos^2 V}{3 \sin V}$, la fonction représentée par la série (28) ne peut être une intégrale de (E_1). Si l'on remplace, dans $\mathcal{F}$, z par ce développement, le résultat de la substitution commence par un terme en u^2,

$$(29) \qquad \mathcal{F} = 2(C_2 \cos^2 V = 3 \sin V \varphi_3) u^2 + \ldots,$$

de sorte que $\mathcal{F}$ *s'annule avec u sans changer de signe*.

En résumé, l'équation (E_2) admet une infinité d'intégrales holomorphes ne vérifiant pas l'équation (E_1) et renfermant tous les éléments de la caractéristique double (17). On a d'abord une intégrale isolée, pour laquelle $\mathcal{F}$ change de signe avec u, puis une famille d'intégrales dépendant d'une fonction arbitraire pour lesquelles $\mathcal{F}$ ne change pas de signe avec u.

9. Considérons d'abord la première intégrale, dont le développement commence par un terme du second degré en u. D'après la relation (25), $C^2(1-p^2)-q^2$ change de signe avec u. Supposons que l'on ait pris les nombres h et r assez petits pour que, dans le rectangle $\mathcal{R}$ défini plus haut, $\mathcal{F}$ conserve le signe de son premier terme; nous admettrons encore, pour préciser, que $C_2 V'$ est négatif dans l'intervalle $(-h, +h)$, de sorte que $\mathcal{F}$ n'est positif que dans la partie du rectangle $\mathcal{R}$ où u est positif. Cette partie peut seule fournir une nappe réelle de surface (Σ), dont l'élément linéaire est donné par la formule (8), telle que la coordonnée $z(u, v)$ soit égale à l'intégrale (24). Nous allons, pour cela, reprendre les calculs du n° 5, afin de déterminer deux autres intégrales $x(u, v)$, $y(u, v)$ telles que

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

Les premiers termes des développements de p, q, a, b sont les suivants :

$$p = \sin V + 2\varphi_2 u + \ldots, \qquad q = \cos V + \cos V . V' u + \ldots,$$
$$a = \sqrt{1-p^2} = \cos V - 2\varphi_2 \operatorname{tang} V u + \ldots,$$
$$b = \frac{-pq}{\sqrt{1-p^2}} = -\sin V - \left[\frac{2\varphi_2}{\cos^2 V} + \sin V . V'\right] u + \ldots;$$

c est de la forme $u^{\frac{1}{2}}\gamma$, γ étant une fonction réelle holomorphe dans $\mathcal{R}$ qui ne s'annule pas pour $u=0$ et qu'on peut supposer positive pour $u=0$. Si l'on reprend le calcul du facteur intégrant $e^{\mu i}$, les formules (18) donnent pour $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ des expressions de la forme suivante :

$$(30) \qquad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{A}{\sqrt{u}}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{B}{\sqrt{u}},$$

A et B étant des fonctions régulières dans le rectangle $\mathcal{R}$. Le numérateur A ne s'annule pas pour $u=0$, car $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ se réduit, pour $u=0$, à $-\varphi_2$ tang V. La condition d'intégrabilité des équations (30)

$$2u\left(\frac{\partial A}{\partial v}-\frac{\partial B}{\partial u}\right)+B=0$$

prouve que B est de la forme uG, la fonction G(u, v) étant régulière dans le même domaine; μ est donné par l'intégration d'une différentielle totale

$$d\mu=\frac{A}{\sqrt{u}}du+G\sqrt{u}\,dv,$$

et l'on peut prendre

(31) $$\mu=\int_0^u \frac{A}{\sqrt{u}}du=H(u,v)\sqrt{u},$$

H(u, v) étant aussi une fonction holomorphe dans $\mathcal{R}$. Le facteur intégrant $e^{\mu i}$ est de la forme $\alpha+\beta i\sqrt{u}$, α et β étant des fonctions réelles et régulières dans $\mathcal{R}$. Le produit

$$(\alpha+\beta i\sqrt{u})[a\,du+b\,dv+\gamma i\sqrt{u}\,dv]$$

devant être une différentielle exacte $d(x+iy)$, on a donc

$$dx=\alpha(a\,du+b\,dv-\beta\gamma u\,dv,$$
$$dy=\sqrt{u}[\beta(a\,du+b\,dv)+\gamma\alpha\,dv];$$

De la première, on tire pour x une fonction holomorphe dans $\mathcal{R}$, tandis que l'on peut prendre pour y l'expression

$$y=\int_0^u a\beta\sqrt{u}\,du,$$

qui est de la forme

(32) $$y=u^{\frac{3}{2}}\psi(u,v),$$

$\psi(u, v)$ étant une fonction holomorphe dans le même domaine.

En résumé, on peut associer à l'intégrale $z(u, v)$ deux autres intégrales de (E$_2$) $x(u, v)$, $y(u, v)$ satisfaisant à la relation

$$dx^2+dy^2+dz^2=du^2+C^2\,dv^2,$$

l'une d'elles $x(u, v)$ étant holomorphe dans $\mathcal{R}$, tandis que $y(u, v)$ a ne expression de la forme (32) et n'est réelle que pour les valeurs positives de u.

10. La conclusion précédente suppose, toutefois, qu'on a établi la convergence de la série (24), d'où l'on est parti. Pour démontrer cette convergence, nous suivrons une marche inverse en démontrant d'abord l'existence d'une intégrale de (E_2) de la forme $u^{\frac{3}{2}}\psi(u, v)$, la fonction $\psi(u, v)$ étant holomorphe dans le domaine de l'origine. On ne peut appliquer ici les théorèmes classiques d'existence, puisque cette intégrale n'est pas holomorphe dans le voisinage des valeurs $u = v = 0$ et un artifice est nécessaire pour être ramené à la forme normale.

Cette intégrale renferme tous les éléments de la *multiplicité singulière* (¹) $\mathfrak{M}_1$ représentée par les équations

$$u = z = p = q = 0. \tag{32}$$

Les valeurs des dérivées secondes r, s, t le long de $\mathfrak{M}_1$ sont fournies par l'équation (10) et les relations

$$dp = r\,du + s\,dv, \qquad dq = s\,du + t\,dv,$$

qui donnent immédiatement $s = t = 0$, tandis que l'équation (10) donne pour r une valeur infinie si C_2 n'est pas nul comme on l'a supposé. Il n'existe donc pas d'intégrale holomorphe renfermant tous les éléments de la multiplicité $\mathfrak{M}_1$. On obtient une intégrale non holomorphe satisfaisant à cette condition au moyen de la transformation d'Ampère

$$X = p, \qquad Y = v, \qquad Z = z - pu, \qquad P = -u, \qquad Q = q,$$

d'où l'on tire inversement

$$u = -P, \qquad v = Y, \qquad z = Z - PX, \qquad p = X, \qquad q = Q.$$

La transformation prolongée donne les dérivées secondes

$$r = -\frac{1}{R}, \qquad s = -\frac{S}{R}, \qquad t = \frac{RT - S^2}{R}, \qquad rt - s^2 = -\frac{T}{R},$$

(¹) J'appelle ainsi toute multiplicité d'éléments du premier ordre telle que l'équation (10) jointe aux deux équations

$$dp = r\,dx + s\,dy, \qquad dq = s\,dx + t\,dy,$$

donne pour l'une au moins des dérivées du second ordre r, s, t une valeur infinie (*voir* plus loin, n° 25).

et l'équation (10) est remplacée par la suivante :

$$
(33) \qquad -\mathrm{CT}-\left[\mathrm{C}^2\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u}\mathrm{X}-\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial v}\mathrm{Q}\right]-2\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u}\mathrm{QS}
+\left\{\mathrm{C}^2\frac{\partial^2\mathrm{C}}{\partial u^2}-\mathrm{C}^2\frac{\partial^2\mathrm{C}}{\partial u^2}\mathrm{X}^2-\left[\frac{\partial^2\mathrm{C}}{\partial u^2}+\frac{1}{\mathrm{C}}\left(\frac{\partial\mathrm{C}}{\partial u}\right)^2\right]\mathrm{Q}^2\right\}\mathrm{R}=0,
$$

où l'on a remplacé u par $-$ P et v par Y dans C, $\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial u}$, $\frac{\partial \mathrm{C}}{\partial v}$, $\frac{\partial^2 \mathrm{C}}{\partial u^2}$. La multiplicité $\mathfrak{M}_1$ est remplacée elle-même par une multiplicité d'éléments du premier ordre $\mathfrak{M}'_1$ définie par les relations

$$
\mathrm{X}=\mathrm{Z}=\mathrm{P}=\mathrm{Q}=0.
$$

La nouvelle équation (33) possède une intégrale holomorphe qui renferme tous les éléments de $\mathfrak{M}'_1$, car le coefficient de R est différent de zéro pour un élément de $\mathfrak{M}'_1$ si C_2 n'est pas nul, ainsi qu'on le suppose. Si l'on développe cette intégrale suivant les puissances de X, le développement commence par un terme du troisième degré

$$
(34) \qquad \mathrm{Z}=\Phi_3(\mathrm{Y})\mathrm{X}^3+\ldots
$$

dont le premier coefficient Φ_3 *n'est pas nul pour* $\mathrm{Y}=0$, *si* V' *n'est pas nul*, ainsi que le prouve un calcul facile. Il est essentiel de remarquer que *ce développement ne renferme que des puissances impaires de* X. En effet, si l'on prend pour Z une fonction impaire de X,

$$
(35) \qquad \mathrm{Z}=\Phi_3\mathrm{X}^3+\Phi_5\mathrm{X}^5+\ldots+\Phi_{2n+1}\mathrm{X}^{2n+1}+\ldots.
$$

Q, R, T sont aussi des fonctions impaires, tandis que P et S sont des fonctions paires. Après la substitution dans le premier membre de l'équation (33), on n'aura que des termes de degré impair en X. On peut donc déterminer par identification un développement (35) satisfaisant formellement à l'équation (33), et ce développement est forcément identique à celui de l'intégrale holomorphe qui commence par un terme en u^3.

De la formule (35), on tire ensuite

$$
-u=\mathrm{P}=3\Phi_3\mathrm{X}^2+5\Phi_5\mathrm{X}^4+\ldots,
$$
$$
z=\mathrm{Z}-\mathrm{PX}=-2\Phi_3\mathrm{X}^3-4\Phi_5\mathrm{X}^5+\ldots.
$$

L'élimination de X et de $\mathrm{Y}=v$ conduira à l'expression de z en u, v.

De la première des relations précédentes, on tire

$$u^{\frac{1}{2}} = X\sqrt{-3\Phi_3 - 5\Phi_5 X^2 - \dots} = c_1 X + c_3 X^3 + \dots,$$

le second membre ne renfermant que des puissances impaires de X, et c_1, c_3, ... étant des fonctions holomorphes de v dans le domaine de l'origine et réelles si Φ_3 est négatif, dont la première n'est pas nulle pour $v = 0$. Par inversion, on en déduira un développement de X suivant les puissances de $u^{\frac{1}{2}}$ ne renfermant que les puissances impaires [1] de $u^{\frac{1}{2}}$,

$$X = u^{\frac{1}{2}}(\gamma_1 + \gamma_2 u + \dots + \gamma_n u^n + \dots).$$

En remplaçant X par la série précédente dans l'expression de z, on obtient le développement d'une intégrale non holomorphe de l'équation (33)

$$z = u^{\frac{3}{2}}[\varphi_0(v) + \psi_1(v)u + \dots + \psi_n(v)u^n + \dots], \tag{36}$$

ψ_0, ψ_1, ..., ψ_n, ... étant des fonctions holomorphes de v dans le voisinage de $v = 0$, et la série étant convergente dans le domaine de l'origine, et ces fonctions étant réelles, si Φ_3 est négatif, comme on peut le supposer.

11. Si l'on remplace z par cette intégrale dans la forme quadratique $du^2 + C^2 dv^2 - dz^2$ elle se décompose en deux facteurs linéaires

$$[a\,du + (b + ic)\,dv][a\,du + (b - ic)\,dv]$$

et les formules générales du n° 5 montrent immédiatement que a, b, c sont des fonctions réelles et régulières dans un certain domaine entourant la ligne $u = 0$, a et c n'étant pas nuls pour $u = 0$. Le raisonnement s'achève comme au n° 5 ; on peut adjoindre à l'intégrale (36)

---

[1] Il suffit d'observer qu'une courbe représentée par une équation

$$y = C_1 x + C_3 x^3 + \dots + C_{2n+1} x^{2n+1} + \dots \qquad (C_1 \neq 0)$$

admet pour centre l'origine, et par suite, le développement de x ne renferme que des puissances impaires de y.

deux intégrales holomorphes de l'équation (10)

$$(37)\qquad \begin{cases} x = x_0(v) + x_1(v)u + \ldots, \\ y = y_0(v) + y_1(v)u + \ldots, \end{cases}$$

telles que l'on ait identiquement

$$(38)\qquad dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2 dv^2.$$

La surface (Σ) représentée par les équations (36) et (37) admet bien l'élément linéaire donné. Le plan $z = 0$ est un plan de symétrie de cette surface, et la section par ce plan est une courbe plane Γ représentée par les équations

$$x = x_0(v), \qquad y = y_0(v).$$

De l'identité (38) on déduit, en égalant les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2 dans les deux membres, les relations

$$x_1^2 + y_1^2 = 1, \qquad x_1 x'_0 + y_1 y'_0 = 0, \qquad (x'_0)^2 + (y'_0)^2 = 1, \qquad x'_0 x'_1 + y'_0 y'_1 = V'.$$

Des trois premières relations, on déduit que l'on a

$$x_1 = \sin\omega, \qquad y_1 = \cos\omega, \qquad x'_0 = \cos\omega, \qquad y'_0 = -\sin\omega.$$

ω étant une fonction de la variable v, et la dernière devient $\frac{d\omega}{dv} = V'$. On a donc

$$\omega = V + \omega_0,$$

ω_0 étant une constante arbitraire. La courbe Γ est donc représentée par les équations

$$x = x_0 + \int_0^v \cos(V + \omega_0)\, dv, \qquad y = y_0 + \int_0^v \sin(V + \omega_0)\, dv;$$

par une translation et une rotation convenable, on peut faire coïncider cette courbe avec la courbe qui a pour équations

$$(39)\qquad x = \int_0^v \cos V\, dv, \qquad y = \int_0^v \sin V\, dv.$$

Ce sont précisément les équations d'une courbe plane dont l'arc est égal à v, et dont le rayon de courbure est égal à $\frac{1}{V'} = \frac{1}{C_1}$, c'est-à-dire au rayon de courbure géodésique de la courbe $u = 0$ sur une surface admettant l'élément linéaire (8). On sait en effet que cette courbe est complètement définie de forme et que les constantes dont elle dépend n'influent que sur la position. Quelle que soit la valeur de la constante ω_0, les intégrales x et y admettent, l'une et l'autre, tous les éléments d'une caractéristique double ayant pour support ponctuel dans le plan (u, v) la courbe $u = 0$, telle que

$$u = 0, \quad \frac{\partial x}{\partial u} = \sin(V + \omega_0), \quad \frac{\partial x}{\partial v} = \cos(V + \omega_0); \quad x = \int_0^v \cos(V + \omega_0)\, du + x_0.$$

Nous voyons en même temps, comme on l'a annoncé, que le choix de la constante qui figure dans V n'influe pas sur la forme de la surface obtenue (Σ), mais seulement sur la position de cette surface.

12. Reprenons les notations primitives. L'intégrale (32) n'est réelle, pour les valeurs de u voisines de zéro, que si u est positif, lorsque le produit $C_2 V'$ est négatif dans l'intervalle $(-h, +h)$ comme on l'a supposé. A chaque point de cette région correspondent deux points symétriques par rapport au plan $y = 0$, et nous avons ainsi un autre exemple *d'auto-application*. On peut donner du résultat précédent un énoncé physique déjà connu, mais dont on ne semble pas avoir bien pénétré jusqu'ici la signification analytique. Soient (Σ) une portion de surface admettant l'élément linéaire (8), $\mathcal{C}$ une ligne située sur cette portion de surface, qui n'est ni une ligne géodésique ni une ligne de courbure totale nulle, Γ une courbe plane dont le rayon de courbure en chaque point est égal au rayon de courbure géodésique de $\mathcal{C}$ au point correspondant, quand on fait correspondre les points des deux courbes par égalité des arcs. On peut déformer la surface (Σ) ou du moins une portion assez voisine de $\mathcal{C}$ pour que cette courbe $\mathcal{C}$ vienne s'appliquer sur Γ, chaque point de $\mathcal{C}$ venant coïncider avec le point correspondant de Γ, mais dans cette déformation il se produit *une déchirure* de la surface (Σ) le long de la courbe $\mathcal{C}$, de sorte que la déformation ne s'applique qu'à l'un des côtés de la surface (Σ) limité par la courbe $\mathcal{C}$.

Pour reconnaître quelle est la portion de surface conservée dans la déformation il faut savoir la signification géométrique de l'inégalité $C_2 V' u < 0$ (n° 9). Rappelons d'abord ce qu'on entend par région de convexité géodésique et région de concavité géodésique d'une portion de surface relativement à une courbe. Soit, sur une surface (Σ), un arc de courbe AB dont le rayon de courbure géodésique n'est ni nul ni infini en aucun de ses points. Soit I le centre de courbure géodésique de cet arc AB en un de ses points M. Le plan normal en M à cette courbe coupe la surface (Σ) suivant deux arcs $M\alpha$, $M\beta$ dont l'un $M\alpha$ se projette sur le plan tangent en M du même côté que le point I, tandis que l'arc $M\beta$ se projette sur le prolongement de IM au delà de M. Lorsque le point M décrit l'arc AB, ces deux arcs $M\alpha$, $M\beta$ engendrent respectivement deux portions de la surface (Σ) voisines de l'arc AB, dont l'une (engendrée par $M\alpha$) est dite *région de concavité géodésique*, relativement à l'arc AB, tandis que la portion de surface engendrée par $M\beta$ est la *région de convexité géodésique*.

Reprenons le rectangle $\mathcal{R}$ défini plus haut (n° 8) qui entoure un segment de l'axe $u = 0$ dans le plan (u, v) et proposons-nous de reconnaître quelle est la portion de ce rectangle qui correspond à la région de convexité géodésique sur une surface (Σ) admettant l'élément linéaire (8), relativement à la courbe $u = 0$. Prenons pour origine un point M de (Σ) sur la ligne $u = 0$, pour axe des z la normale, pour axe des x la tangente à la courbe $v = 0$, et pour axe des y la perpendiculaire à l'axe ox, la direction étant choisie de telle façon que y soit positif pour les valeurs positives de u voisines de zéro. Avec ce système d'axes, on a, à l'origine des coordonnées,

$$\frac{\partial x}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial x}{\partial v} = \pm 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial u} = 1, \qquad \frac{\partial y}{\partial v} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial u} = 0, \qquad \frac{\partial z}{\partial v} = 0.$$

Des formules classiques

$$S\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)^2 = 1, \qquad S\,\frac{\partial x}{\partial u}\,\frac{\partial x}{\partial v} = 0, \qquad S\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2 = C^2$$

on déduit aisément, pour $u = 0$, la relation $\frac{\partial^2 y}{\partial v^2} = -V'$. D'autre part, l'ordonnée du centre de courbure à l'origine de la projection sur le plan des xy de la courbe $u = 0$ a pour expression

$$Y = \frac{\left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)^2}{\frac{\partial^2 y}{\partial v^2}} = -\frac{1}{V'}.$$

On aura donc $Y > 0$ si V' est négatif et inversement. En d'autres termes, si V' est positif, la région de convexité géodésique correspond à la région $u > 0$ du plan (u, v) et la région de concavité géodésique à la région $u < 0$. Ce sera l'inverse si $V' < 0$. Cela posé, l'inégalité $C_2 V' u < 0$ est équivalente à l'inégalité $KV'u > 0$, K désignant la courbure totale en un point de la ligne $u = 0$. Supposons la région $\mathcal{R}$ assez petite pour que la courbure totale ne change pas de signe dans cette région. La discussion de l'inégalité précédente se fait aisément, et l'on arrive à cette conclusion que *l'on a* $C_2 V' u < 0$ *dans la région de convexité géodésique si la courbure totale est positive, et dans la région de concavité géodésique si la courbure totale est négative.*

Telle est, dans chaque cas, la région voisine de la ligne $u = 0$, qui est conservée dans la déformation [1].

Un exemple de cette déformation avait déjà été signalé par Darboux [2] pour les surfaces de révolution. La surface (Σ) représentée par les équations

$$z(u, v) = \frac{U}{c_1}\cos(c_1 v), \qquad x(u, v) = \frac{U}{c_1}\sin(c_1 v), \qquad y = \int_0^u \sqrt{1 - \frac{U'^2}{c_1^2}}\, du,$$

où U est une fonction de la seule variable u

$$U = 1 + c_1 u + c_2 u^2 + \ldots,$$

les coefficients c_1 et c_2 étant différents de zéro, est une surface de révolution pour laquelle on a $ds^2 = du^2 + U^2 dv^2$, et la ligne $u = 0$ est un parallèle de rebroussement. Les intégrales $x(u, v)$ et $z(u, v)$ renferment tous les éléments d'une caractéristique double. Par exemple $z(u, v)$

---

(1) *Voir* le fascicule XXXI du *Mémorial des Sciences mathématiques*, par M. B. Gambier (*Applicabilité des surfaces au point de vue fini*, p. 43 et suiv.).

(2) *Leçons sur la théorie des surfaces*, t. I, 2e édition, p. 93 et suiv.

contient tous les éléments de la caractéristique double

$$u=0, \qquad p=\cos(c_1 v), \qquad q=-\sin(c_1 v), \qquad z=\frac{\cos(c_1 v)}{c_1}.$$

13. Considérons maintenant une intégrale de l'équation représentée par un développement (78) où φ_3 est différent de $\frac{C_2\cos^2 V}{3\sin V}$, et admettons encore la convergence de cette série dans un rectangle $\mathcal{R}$ de dimensions assez petites autour de la droite $u=0$. On peut supposer ces dimensions assez petites pour que $\mathcal{F}$ conserve un signe constant dans $\mathcal{R}$, celui de $(C_2\cos V - 3\sin V\,\varphi_3)u^2$ et, pour avoir une surface (Σ) réelle il est nécessaire de prendre pour φ_3 une fonction telle que le coefficient de u^2 soit positif. Cette condition étant supposée remplie $\mathcal{F}$ est nul pour $u=0$, mais reste positif pour les valeurs de u voisines de zéro, et cela conduit à des conclusions tout à fait différentes de celles des paragraphes précédents.

Quand on décompose la forme quadratique $du^2+C^2dv^2-dz^2$ en deux facteurs linéaires, on obtient pour a, b, c des séries

$$a=\cos V+\ldots, \qquad b=-\sin V-\sin V\,V'u+\ldots, \qquad c=\gamma_1 u+\ldots$$

à coefficients réels, tous les termes non écrits étant au moins du second degré en u, et le coefficient γ_1 n'étant pas nul; $\frac{\partial b}{\partial u}-\frac{\partial a}{\partial v}$ est divisible par u et les formules (18) donnent pour $\frac{\partial \mu}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ des fonctions régulières dans le domaine de l'origine. Il en sera donc de même de μ, et par conséquent on peut adjoindre à l'intégrale holomorphe $z(u, v)$ de l'équation (10) deux autres intégrales holomorphes $x(u, v)$, $y(u, v)$, telles que l'on ait

$$dx^2+dy^2+dz^2=du^2+C^2dv^2.$$

La surface (Σ) ne présente aucune singularité le long de la courbe Γ de cette surface qui correspond à la droite $u=0$, mais *le plan tangent à cette surface en un point quelconque de* Γ *est parallèle à l'axe* oz.

En effet, on a d'après l'identité de Lagrange

$$\left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2+\left[\frac{D(y, z)}{D(u, v)}\right]^2+\left[\frac{D(z, x)}{D(u, v)}\right]^2=C^2.$$

ce qui prouve que les trois jacobiens ne peuvent être nuls à la fois pour $u = 0$. D'autre part, en égalant les discriminants des deux formes quadratiques $dx^2 + dy^2$, $du^2 + C^2 dv^2 - dz^2$, on obtient l'identité

$$(40) \qquad \left[\frac{D(x, y)}{D(u, v)}\right]^2 = C^2(1 - p^2) - q^2,$$

ce qui montre que $\frac{D(x, y)}{D(u, v)}$ est nul pour $u = 0$. Le plan tangent est donc bien parallèle à oz en tous points de la courbe $u = 0$.

Inversement, soit (Σ) une surface dont l'élément linéaire est donné par la formule $ds^2 = du^2 + C^2 dv^2$ et soit Γ la courbe de contact du cylindre circonscrit ayant ses génératrices parallèles à oz. En tout point de cette courbe on a $\frac{D(x, y)}{D(u, v)} = 0$ et par suite, d'après l'identité (40),

$$C^2(1 - p^2) - q^2 = 0,$$

et cela prouve, d'après les raisonnements du n° 5, que la suite des valeurs de u, v, z, $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ le long de Γ forme une caractéristique double de (E_2). On pouvait donc prévoir *a priori* que les caractéristiques doubles interviennent dans la solution du problème suivant: *Déformer une surface* (Σ) *de façon qu'une courbe donnée* (Γ) *de cette surface devienne la courbe de contact d'un cylindre circonscrit à la nouvelle surface* [1].

14. Il est aisé de ramener ce problème au problème classique de Cauchy. Soit en effet (Σ') la surface déformée circonscrite à un

---

[1] D'une façon générale l'angle θ que fait avec oz la normale à la surface (Σ) déduite de l'intégrale $z(u, v)$ de l'équation (10) est donné par la formule

$$\cos^2\theta = \frac{1}{C^2}\left[C^2(1 - p^2) - q^2\right].$$

Cet angle sera constant tout le long de la courbe $u = 0$, si les valeurs initiales $p_0(v)$, $q_0(v)$ des dérivées $\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$ pour $u = 0$ vérifient une relation de la forme $p_0^2 + q_0^2 = m^2$, m étant une constante dont la valeur absolue est plus petite que l'unité. La détermination des surfaces (Σ) satisfaisant à cette condition se ramène encore au problème classique; il suffit de remplacer dans le raisonnement du texte, le cylindre $\mathcal{C}$ par une surface développable dont le plan tangent fait un angle constant avec oz.

cylindre $\mathcal{C}$ le long d'une courbe (Γ') sur laquelle vient s'appliquer la courbe (Γ) après la déformation. Le cylindre $\mathcal{C}$ étant choisi arbitrairement, la courbe (Γ') est déterminée par les conditions du problème. En effet, les courbures géodésiques des deux courbes (Γ) et (Γ') doivent être égales aux points correspondants. Si l'on développe la surface du cylindre $\mathcal{C}$ sur un plan, la courbe (Γ') devient une courbe plane γ dont le rayon de courbure est égal au rayon de courbure géodésique de (Γ), si l'on fait correspondre ces deux courbes par égalité des arcs. Cette courbe γ est donc déterminée de forme, et l'on obtiendra la courbe (Γ') en enroulant le plan de la courbe γ sur la surface du cylindre $\mathcal{C}$. On est ainsi ramené au problème classique : déformer une surface (Σ) de façon qu'une courbe donnée Γ de cette surface vienne s'appliquer sur une autre courbe (Γ'), la correspondance entre les points des deux courbes étant donnée, de façon à conserver les longueurs des arcs.

Il n'y aurait d'impossibilité que si la courbure géodésique de (Γ') était égale à sa courbure. Il faudrait pour cela que le cylindre se réduise à un plan. C'est précisément le cas traité d'abord, qui se présente ainsi comme un cas singulier du problème général.

Nous voyons donc que l'on peut choisir d'une infinité de façons la fonction $\varphi_3(v)$ de façon que le développement (28) soit convergent.

III.

15. Supposons $V' \neq 0$, $C_2 = 0$; la courbe $u = 0$ est, sur une surface admettant l'élément linéaire (8), une ligne de courbure totale nulle, sans être une ligne géodésique. Pour plus de généralité, supposons que le premier des coefficients C_i qui n'est pas nul est $C_m (m \geqq 3)$, de sorte que le développement de C est de la forme

$$C' = 1 + u V' + C_m u^m + C_{m+1} u^{m+1} + \ldots.$$

Les autres hypothèses du n° 8 étant conservées, la formule (23) donne $\varphi_2 = 0$, de sorte que le développement de Z commence par un terme du troisième degré au moins.

Nous aurons besoin, pour la suite des calculs, de connaître un certain nombre de coefficients dans l'équation (21). Dans le coefficient de R, le terme du moindre degré en u est $mC_m \sin V u^{m-1}$, et l'on peut écrire ce terme

$$R[V'P + mC_m \sin V u^{m-1} + \ldots],$$

les termes non écrits étant divisibles par l'un des facteurs uP, uQ, u^m; le terme en S est de même

$$2S[V'Q + mC_m \cos V u^{m-1} + \ldots],$$

les termes non écrits étant divisibles par l'un des facteurs uQ, u^m. Enfin l'ensemble des termes indépendants des dérivées R, S, T est égal à

$$-2m(m-1)C_m \sin V P u^{m-2} - 2m(m-1)C_m \cos V Q u^{m-2} + \ldots$$

les autres termes étant divisibles par l'un des facteurs $u^{m-1}P$, $u^m Q$, P^2, Q^2 ou étant indépendants de P et de Q. Un calcul direct prouve que ces derniers termes sont de degré $2m-2$ au moins en u, mais on peut l'établir plus rapidement de la façon suivante. L'équation (E_1) admet une intégrale particulière admettant tous les éléments de la multiplicité $\mathfrak{M}_1$,

$$Z = \int \cos V \, dv + \sin V u + \varphi_2 u^2 + \varphi_3 u^3 + \ldots$$

et l'on peut déterminer les coefficients φ_i en substituant ce développement dans $\mathcal{F}$, et en écrivant que le résultat est identiquement nul. On trouve ainsi que cette série commence par un terme de degré $m+1$, où

$$\varphi_2 = 0, \qquad \ldots, \qquad \varphi_{m-1} = 0, \qquad \varphi_m = 0, \qquad \varphi_{m+1} = \frac{C_m \cos^2 V}{(m+1)\sin V'}.$$

La fonction

$$Z = \varphi_{m+1} u^{m+1} + \ldots$$

est aussi une intégrale de l'équation (21). Si l'on substitue cette intégrale dans le premier membre de l'équation, tous les termes qui dépendent des dérivées de Z sont de degré $2m-2$ au moins en u. *Les coefficients de u, u^2, ... u^{2m-3}, et le terme indépendant de u dans le premier membre de l'équation (21) sont donc identiquement nuls.*

Cela posé, si l'on substitue dans l'équation au développement de la forme le coefficient de u^3 dans le résultat est $18\varphi_3(V'\varphi_3 - C_3 \sin V)$. On doit donc prendre $\varphi_3 = 0$, ou $\varphi_3 = \frac{C_3 \sin V}{V'}$. Si $C_3 = 0$, on a forcément $\varphi_3 = 0$, et le développement de Z commence par un terme du quatrième degré au moins. En substituant le développement

$$Z = \varphi_4 u^4 + \varphi_5 u^5 + \ldots,$$

on voit de même que le coefficient de u^5 dans le résultat de la substitution est égal à

$$48\varphi_4[V'\varphi_4 - C_4 \sin V];$$

on doit donc prendre pour φ_4 une des valeurs

$$\varphi_4 = 0, \qquad \varphi_4 = \frac{C_4 \sin V}{V'}.$$

Si $C_4 = 0$, on a forcément $\varphi_4 = 0$, et le développement commence par un terme du cinquième degré au moins. En continuant ainsi, on voit que si les coefficients $C_2, C_3, \ldots, C_{m-1}$ sont tous nuls, C_m étant différent de zéro, *le développement de Z commence par un terme de degré m au moins, et le coefficient φ_m peut avoir une des deux valeurs*

$$\varphi_m = \frac{C_m \sin V}{V'}, \qquad \varphi_m = 0.$$

16. Cherchons d'abord un développement

$$Z = \frac{C_m \sin V}{V'} u^m + \varphi_{m+1} u^{m+1} + \ldots + \varphi_{m+n} u^{m+n} + \ldots \tag{41}$$

satisfaisant formellement à l'équation (21). Après la substitution, tous les termes qui dépendent de φ_{m+n} sont au moins de degré $2m + n - 3$ et la partie du coefficient de u^{2m+n-3} qui dépend de φ_{m+n} est égale à

$$\begin{aligned} & m(m-1)(m+n)V'\varphi_m\varphi_{m+n} + m(m+n)(m+n-1)V'\varphi_m\varphi_{m+n} \\ & \quad + m(m+n)(m+n-1)C_m \sin V \varphi_{m+n} \\ & \quad - 2m(m-1)(m+n)C_m \sin V \varphi_{m+n}, \end{aligned}$$

ou, en remplaçant $\varphi_m V'$ par $C_m \sin V$,

$$\begin{aligned} & C_m \sin V[m(m-1)(m+n) + 2m(m+n)(m+n-1) \\ & \qquad\qquad - 2m(m-1)(m+n)]\varphi_{m+n} \\ & = m(m+n)(m+2n-1)C_m \sin V \varphi_{m+n}. \end{aligned}$$

Le coefficient de φ_{m+n} n'est jamais nul, quel que soit n, et en écrivant que le résultat de la substitution est identiquement nul, on détermine de proche en proche, sans aucune ambiguïté, tous les coefficients φ_{m+1}, φ_{m+2}, ... En substituant la série ainsi obtenue dans

$$\mathcal{F} = C^2(1-p^2) - q^2,$$

le résultat ordonné suivant les puissances de u commence par un terme de degré $m-1$

$$-2m \sin V \varphi_m u^{m-1} = -2m \frac{C_m \sin^2 V}{V'} u^{m-1},$$

qui donne son signe à $\mathcal{F}$ pour les valeurs de u voisines de zéro. Deux cas sont à distinguer suivant la parité de m.

Si m est pair, $m-1$ est impair, et $\mathcal{F}$ n'est positif que pour les valeurs de u telles que $C_m V' u$ soit négatif.

Si m est pair, $\mathcal{F}$ est toujours du signe de $-C_m V'$ pour les valeurs de u voisines de zéro. Ces valeurs de u ne peuvent fournir une portion de surface réelle (Σ) que lorsque $C_m V'$ est négatif.

17. Supposons que l'on puisse donner à u des valeurs telles que $\mathcal{F}$ soit positif dans le voisinage de $u=0$. Pour trouver les autres intégrales de l'équation (10) telles que $dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2 dv^2$, reprenons encore les calculs du n° 5. On a, dans ce cas,

$$\begin{aligned}
p &= \sin V + m \varphi_m u^{m-1} + \ldots,\\
q &= \cos V (1 + uV') + \varphi'_m u^m + \ldots,\\
a &= \sqrt{1-p^2} = \cos V - m \operatorname{tang} V \varphi_m u^{m-1} + \ldots,\\
b &= \frac{-pq}{\sqrt{1-p^2}} = -\sin V (1 + V'_u) - \frac{m\varphi_m}{\cos^2 V} u^{m-1} + \ldots,\\
c &= u^{\frac{m-1}{2}} \left\{ \operatorname{tang} V \sqrt{-\frac{2mCm}{V'}} + \ldots \right\};
\end{aligned}$$

les termes non écrits dans cette dernière série contenant u en facteur. Nous supposerons que $C_m V'$ est négatif, de sorte que c sera réel pour les valeurs positives de u, si m est pair, et quel que soit le signe de u si m est impair.

D'après les valeurs de a et de b, $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ est divisible par u^{m-2} de sorte que l'on a

$$(42)\qquad \frac{d\mu}{du} = u^{\frac{m-3}{2}} \mathrm{H},$$

H étant une fonction holomorphe ne s'annulant pas pour $u = 0$. On a ensuite

$$\frac{\partial\mu}{\partial v} = \frac{c\dfrac{\partial c}{\partial u} + b\left(\dfrac{\partial b}{\partial u} - \dfrac{\partial a}{\partial v}\right)}{ac}.$$

Des expressions précédentes de a, b, c, on déduit que le numérateur de $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ est divisible par u^{m-1}, de sorte que $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ est de la forme

$$(43)\qquad \frac{\partial\mu}{\partial v} = u^{\frac{m-1}{2}} \mathrm{H}_1,$$

H_1 étant une fonction holomorphe. Les formules (42) et (43) donnent pour μ une expression telle que

$$(44)\qquad \mu = u^{\frac{m-1}{2}} \mathrm{K}(u, v),$$

où $\mathrm{K}(u, v)$ est holomorphe dans le voisinage de l'origine, et n'est pas nul pour $u = 0$.

Pour achever la discussion, nous distinguerons deux cas, suivant la parité de m. Si m est pair, $\frac{m-1}{2}$ est impair, et l'on a

$$e^{\mu i} = \cos\mu + i\sin\mu = \alpha + i\beta u^{\frac{m-1}{2}},$$

α et β étant des fonctions holomorphes qui ne sont pas nulles pour $u = 0$. De l'identité

$$d(x + iy) = e^{\mu i}[a\,du + (b + ci)\,dv],$$

on tire

$$dx = \alpha(a\,du + b\,dv) - \beta u^{\frac{m-1}{2}} c\,dv,$$

$$dy = \beta u^{\frac{m-1}{2}} (a\,du + b\,dv) + \alpha c\,dv;$$

d'après la valeur de c, ces formules peuvent s'écrire

$$dx = \mathrm{A}\,du + \mathrm{B}\,dv,$$

$$dy = u^{\frac{m-1}{2}} (\mathrm{C}\,du + \mathrm{D}\,dv),$$

A, B, C, D étant holomorphes dans le voisinage de $u = 0$, et C n'étant pas nul pour $u = 0$. On en déduira comme plus haut les expressions suivantes de x et de y :

$$(45) \quad \begin{cases} x(u, v) = \alpha_0(v) + \alpha_1(v)u + \ldots + \alpha_n(v)u^n + \ldots, \\ y(u, v) = u^{\frac{m+1}{2}}[\beta_0(v) + \beta_1(v)u + \ldots + \beta_n(v)u^n + \ldots]; \end{cases}$$

$x(u, v)$ est holomorphe, tandis que $y(u, v)$ contient en facteur une puissance fractionnaire de u, $u^{\frac{m+1}{2}}$. Les conclusions sont les mêmes que celles qui ont été développées au n° 11. La courbe $u = 0$ de la surface obtenue (Σ) est une courbe plane (Γ) dont le rayon de courbure est égal au rayon de courbure géodésique de la courbe $u = 0$ sur toute autre surface admettant le même élément linéaire. La surface (Σ) se compose encore de deux nappes symétriques par rapport au plan de la courbe (Γ) et tangentes à ce plan tout le long de (Γ) qui est une courbe de rebroussement.

Les conclusions sont différentes si m est impair, $m = 2l + 1$, en supposant $C_m V'$ négatif. On obtient pour $e^{\mu i}$ une expression

$$e^{\mu i} = \alpha + i\beta u^l,$$

α et β étant des fonctions holomorphes réelles, et l'on en déduit encore pour x et y des expressions de la forme (45), où $\frac{m+1}{2}$ doit être remplacée par u^{l+1}.

Pour $u = 0$, on obtient encore la courbe plane (Γ) définie tout à l'heure, et la surface (Σ) est tangente au plan de cette courbe tout le long de (Γ) qui n'est plus une courbe de rebroussement. Le plan tangent ne traverse pas la surface (Σ) si $\frac{m+1}{2}$ est pair, et traverse la surface tout le long de (Γ) si $\frac{m+1}{2}$ est impair.

On peut encore énoncer le résultat comme il suit. Étant donnée sur une surface une ligne $\mathcal{L}$ de courbure totale nulle, non géodésique, si l'on veut déformer cette surface de façon que $\mathcal{L}$ vienne s'appliquer sur une courbe plane dont le rayon de courbure est égal au rayon de courbure géodésique de $\mathcal{L}$, *il se produira nécessairement une déchirure le long de la ligne $\mathcal{L}$, si la courbure totale de la surface ne change pas de signe quand on traverse la ligne $\mathcal{L}$*. Cette courbure totale est en effet du signe de $-C_m$ lorsque m est pair. Il ne se produira pas de déchirure le long de $\mathcal{C}$ si la courbure totale change de signe quand on traverse la ligne $\mathcal{C}$, pourvu que cette déformation soit possible.

Pour avoir un énoncé plus précis, il est nécessaire de connaître le signe des valeurs de u voisines de zéro, pour lesquelles on a

$$C_m V' u^{m-1} < 0;$$

pour ces valeurs de u, la courbure totale K a le signe de $-C_m u^{m-2}$, et l'inégalité précédente est équivalente à $KV'u > 0$. Si m est pair, K conserve un signe constant dans le voisinage de la ligne $u = 0$, et la conclusion est identique à celle qui a été formulée plus haut. Mais si m est impair K change de signe avec u, de sorte que le produit $KV'u$ conserve un signe constant pour les valeurs de u voisines de zéro. Pour que l'inégalité soit vérifiée, il faut que le signe de Ku soit le même que celui de V' et, en examinant tous les cas possibles, on voit sans peine que la déformation n'est possible que lorsque *la courbure totale est positive dans la région de convexité géodésique, ou négative dans la région de concavité géodésique*. Le résultat est bien d'accord avec celui qui a été établi plus haut.

Exemple. — Supposons que C se réduise à une fonction U de la seule variable u

$$U = 1 + C_1 u + C_m u^m + \ldots \qquad (C_1 C_m \neq 0),$$

les coefficients C_i étant des constantes. Les formules (page 307)

$$x = \frac{U\cos(C_1 v)}{C_1}, \qquad z = \frac{U\sin(C_1 v)}{C_1}, \qquad y = \int \sqrt{1 - \frac{U'^2}{C_1^2}}\, dv.$$

représentent une surface de révolution pour laquelle $ds^2 = du^2 + U^2 dv$.

Le développement de $1 - \frac{U'^2}{C_1^2}$ commence par le terme $-2\frac{C_m}{C_1}u^{m-1}$. Si m est pair, le parallèle $u = 0$ sera un parallèle de rebroussement. Si m est impair, $m = 2l + 1$, y ne sera réel que si $C_1 C_m$ est négatif. Lorsque cette condition est satisfaite, le développement de y commence par un terme en u^l, qui change de signe avec u si l est impair, et ne change pas de signe si l est pair. Tout ceci est bien d'accord avec les conclusions générales.

Remarque. — L'intégrale $y(u, v)$, qu'elle soit holomorphe ou non, renferme tous les éléments de la caractéristique double

$$u=0, \qquad \frac{\partial y}{\partial u}=0, \qquad \frac{\partial y}{\partial v}=0, \qquad y=0,$$

dont les éléments vérifient la relation $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}=0$ (note de la page 293). On voit que ces caractéristiques doubles interviennent aussi dans le problème en question.

18. Supposons maintenant $\varphi_m=0$, et cherchons un développement

$$\text{(46)} \qquad Z=\varphi_{m+1}u^{m+1}+\ldots+\varphi_{m+n}u^{m+n}+\ldots$$

satisfaisant formellement à l'équation (21). Après substitution, les termes de moindre degré qui dépendent de φ_{m+n} sont de degré $2m+n-3$, et la partie qui dépend de φ_{m+n} est égale à

$$\begin{aligned} &m(m+n)(m+n-1)C_m \sin V\varphi_{m+n}u^{2m+n-3} \\ &\quad -2m(m-1)(m+n)C_m \sin V\varphi_{m+n}u^{2m+n-3} \\ &= m(m+n)[n-(m-1)]C_m \sin V\varphi_{m+n}u^{2m+n-3}. \end{aligned}$$

En égalant à zéro le coefficient de u^{2m+n-3}, on a une relation de la forme

$$m(m+n)[n-(m-1)]C_m \sin V\varphi_{m+n}+\ldots=0,$$

les termes non écrits dépendant des coefficients C_i et des fonctions $\varphi_{m+1}, \ldots,$ d'indice inférieur à $m+n$. Tous ces coefficients sont déterminés jusqu'à φ_{2m-1} qui est indéterminé, puisque, comme on l'a remarqué, il ne peut y avoir impossibilité. Une fois φ_{2m-1} choisi, les coefficients suivants $\varphi_{2m}, \varphi_{2m+1}, \ldots$ se calculent sans ambiguïté. Il y a donc une infinité de développements de la forme (46) satisfaisant formellement à l'équation (21). Les coefficients $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2m-2}$ sont déterminés d'une façon univoque, tandis que le coefficient φ_{2m-1} peut être pris à volonté.

Substituons ce développement (46) dans $\mathcal{F}=C^2(1-p^2)-q^2$. Les termes dont les coefficients dépendent seulement de

$$\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2m-2}$$

seulement disparaissent puisque ces coefficients sont les mêmes que pour l'intégrale de (E_1) qui a un développement de la même forme. Le terme du plus bas degré dont le coefficient n'est pas nul identiquement est donc le premier terme où figure φ_{2m-1}. Ce terme, on le voit aisément en écrivant l'expression de $\mathcal{F}$, est de degré $2m-2$, et le coefficient de u^{2m-2} est

$$-2(2m-1)\sin V\varphi_{2m-1}+\omega,$$

ω dépendant des coefficients précédents $\varphi_{m+1}, \ldots, \varphi_{2m-2}$. Si l'on prend pour φ_{2m-1} la valeur qui annule ce coefficient, on retrouve forcément l'intégrale de (E_1). Mais si l'on prend pour φ_{2m-1} une fonction telle que $\omega-2(2m-1)\sin V\varphi_{2m-1}$ soit positif, on voit que $\mathcal{F}$ sera positif pour les valeurs de u voisines de zéro. Le calcul s'achève comme au n° 13; on obtient les valeurs de a, b, c en changeant m en $m+1$ dans les formules de la page 313, ce qui donne

$$\begin{aligned}
a &= \cos V-(m+1)\operatorname{tang}V\varphi_{m+1}u^m+\ldots,\\
b &= -\sin V(1+uV')-\frac{(m+1)\varphi_{m+1}}{\cos^2 V}u_m+\ldots,\\
c &= u^{m-1}\gamma,
\end{aligned}$$

γ étant une fonction régulière qui n'est pas nulle pour $u=0$. Dans ce cas, $\frac{\partial b}{\partial u}-\frac{\partial a}{\partial v}$ est divisible par u^{m-1}, et l'on obtient pour $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ des fonctions régulières. On en déduit aussi pour μ et par suite pour x et y des fonctions régulières. La conclusion est la même que celle qui a été développée au n° 13. La courbe $u=0$ est sur la surface correspondante $(\Sigma)_1$ la courbe de contact d'un cylindre circonscrit.

IV.

19. Soit $V'=0$; la ligne $u=0$ est une géodésique sur toute surface admettant l'élément linéaire (8). Le développement de C ne contient pas de terme du premier degré en u

$$C=1+C_m u^m+C_{m+1}u^{m+1}+,\ \ldots \qquad (m\geqq 2) \tag{47}$$

et les équations générales des caractéristiques doubles pour lesquelles $u=0$ sont alors

$$u=0,\qquad p=\sin\omega,\qquad q=\cos\omega,\qquad r=v\cos\omega+z_0, \tag{48}$$

ω et z_0 étant deux constantes arbitraires. Nous examinerons d'abord le cas où $\omega = 0$, et en négligeant la constante de translation z_0, on a la caractéristique double $\mathfrak{M}_1$ représentée par les équations

$$(49) \qquad u = p = 0, \qquad q = 1, \qquad z = v,$$

qui est aussi une caractéristique pour l'équation du premier ordre (E_1). Toute intégrale holomorphe de l'équation (10) qui contient tous les éléments de M_1 est représentée par un développement

$$(50) \qquad z = v + \varphi_2(v)u^2 + \ldots + \varphi_n(v)u^n + \ldots;$$

l'équation (23) qui détermine le coefficient φ_2 se réduit à une identité. En procédant par identification, on voit aisément que les coefficients successifs $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n, \ldots$ sont déterminés par des équations différentielles du second ordre. Nous allons montrer d'abord que l'on peut, et d'une infinité de manières, choisir les constantes arbitraires dont dépendent ces coefficients, de façon que la série (50) soit convergente dans un rectangle $\mathcal{R}$ renfermant un segment de la ligne $u = 0$.

En posant

$$z = v + Z, \qquad \text{on a} \qquad p = P,\ q = 1 + Q,\ r = R,\ s = S,\ t = T,$$

et l'équation (10) devient

$$(51) \qquad \begin{aligned} C(RT - S^2) &+ \left[C^2 \frac{\partial C}{\partial u} P - \frac{\partial C}{\partial v}(1 + Q)\right] R + 2(1 + Q)\frac{\partial C}{\partial u} S \\ &- C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} P^2 - \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right](Q^2 + 2Q) \\ &+ C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} - \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} - \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2 = 0. \end{aligned}$$

Soit C_m le premier coefficient C_i qui n'est pas nul. Le terme indépendant des dérivées de Z est égal à

$$(C^2 - 1)\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} - \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2$$

et son développement commence par un terme de degré, $2m - 2$, et de degré 3, si $m = 2$. Les coefficients de P^2 et de $Q^2 + 2Q$ ont des développements qui commencent par des termes de degré $m - 2$.

D'après le théorème fondamental d'existence de Cauchy, l'équation (51) admet une infinité d'intégrales holomorphes dans le domaine de l'origine ($u = v = 0$), représentées par des séries entières en v

$$Z = U_0 + U_1 v + \ldots + U_n v^n + \ldots, \tag{52}$$

où $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ sont des fonctions holomorphes de u dans le domaine du point $u = 0$, et dont les deux premières peuvent être choisies arbitrairement pourvu que $U''(0)$ ne soit pas nul. En effet, si l'on résout l'équation (51) par rapport à T, le coefficient de T se réduit à $U''(0)$ pour $u = v = 0$.

Parmi ces intégrales, il en existe une infinité où tous les coefficients $U_0, U_1, \ldots, U_n, \ldots$ sont divisibles par u^2. D'une façon plus générale, soit C_m le premier des coefficients C_i qui n'est pas nul $(m \geqq 2)$; *si ν est un nombre entier au moins égal à 2 et au plus égal à m, l'équation* (51) *admet une infinité d'intégrales de la forme $Z = u^\nu Z'(u, v)$, où $Z'(u, v)$ est une fonction holomorphe dans le domaine de l'origine.*

Posons en effet $Z = u^\nu Z'$, en désignant par Z' la nouvelle fonction inconnue. Des formules de transformation

$$P = u^\nu P' + \nu u^{\nu-1} Z', \qquad Q = u^\nu Q', \qquad T = u^\nu T',$$
$$R = u^\nu R' + 2\nu u^{\nu-1} P' + \nu(\nu - 1) u^{\nu-2} Z', \qquad S = u^\nu S' + \nu u^{\nu-1} Q',$$

on tire

$$RT = u^{2\nu-2}[u^2 R' + 2\nu u P' + \nu(\nu - 1) Z']T',$$
$$S'^2 = u^{2\nu-2}[\nu^2 Q'^2 + 2\nu u Q'S' + u^2 S'^2];$$

$RT - S^2$ est donc divisible par $u^{2\nu-2}$. On voit de même qu'en substituant les expressions précédentes de P, Q, R, S dans le premier membre de l'équation (51) tous les termes obtenus sont divisibles par $u^{2\nu-2}$. Il en est de même du terme indépendant, puisque ce terme contient en facteur u^{2m-2}, et par hypothèse $m \geqq \nu$. Après la suppression du facteur $u^{2\nu-2}$, il reste une équation du second ordre où le coefficient de T' est

$$[\nu(\nu - 1) Z' + 2\nu u P' + u^2 R'].$$

Cette équation admet une infinité d'intégrales holomorphes dans le domaine de l'origine

$$Z' = Z_0 + Z_1 v + \ldots + Z_n v^n + \ldots,$$

$Z_0, Z_1, \ldots, Z_n, \ldots$ étant des fonctions holomorphes de u dont on peut choisir les deux premières arbitrairement, pourvu que $Z_0(o)$ ne soit pas nul. Il est clair que toutes les intégrales $z = v + u^\nu Z'(u, v)$ contiennent tous les éléments de la caractéristique double (49).

Si en particulier on prend $\nu = 2$, ce qu'on peut toujours faire quel que soit m, on obtient une intégrale représentée par une série (52) où tous les coefficients U_i sont divisibles par u^2. Comme la connaissance des deux premiers coefficients U_0 et U_1 entraîne celle de tous les autres, il résulte aussi de la démonstration précédente que si l'on prend pour U_0 et U_1 deux séries entières en u commençant par un terme en u^2, il en sera de même de toutes les séries $U_2, \ldots, U_n$; ce qu'il serait facile de vérifier directement.

20. Si l'on ordonne la série (52) suivant les puissances de u, on obtient pour z un développement de la forme (50), où les fonctions $\varphi_i(v)$ sont holomorphes dans le domaine de l'origine et qui est convergent dans un rectangle $\mathcal{R}$ entourant un segment de la droite $u = o$. Ces fonctions $\varphi_i(v)$ sont développables en séries entières

$$(53) \qquad \varphi_i(v) = \alpha_0^i + \alpha_1^i v + \ldots + \alpha_n^i v^n + \ldots \qquad (i = 2, 3, \ldots),$$

où l'on peut choisir arbitrairement (sous des conditions qui seront indiquées tout à l'heure) le terme constant α_0^i et le coefficient α_1^i de v. Les deux séries

$$(54) \qquad \begin{cases} \alpha_0^2 u^2 + \alpha_0^3 u^3 + \ldots + \alpha_0^n u^n + \ldots, \\ \alpha_1^2 u^2 + \alpha_1^3 u^3 + \ldots + \alpha_1^n u^n + \ldots, \end{cases}$$

sont identiques respectivement aux fonctions U_0, U_1, et par conséquent les coefficients α_0^i, α_1^i doivent être pris de façon que les deux séries entières (54) aient un rayon de convergence différent de zéro, α_0^2 n'étant pas nul. Il résulte de la démonstration précédente que la connaissance de ces coefficients α_0^i, α_1^i permet de déterminer tous les autres coefficients, $\alpha_h^i (h > 1)$. On peut le vérifier en substituant directement la série (50) dans le premier membre de l'équation (51) et égalant à zéro les coefficients des diverses puissances de u. En égalant à zéro le coefficient de u^2, on voit que $\varphi_2(v)$ doit être une intégrale de l'équation différentielle

$$(55) \qquad \varphi_2 \varphi_2'' - 2(\varphi_2')^2 + 2C_2 \varphi_2' - C_2' \varphi_2 = o,$$

et cette intégrale est bien déterminée si l'on connaît les deux premiers coefficients du développement α_0^2, α_1^2, pourvu que α_0^2 ne soit pas nul. Connaissant $\varphi_2(v)$, les coefficients suivants $\varphi_3(v), \ldots, \varphi_n(v), \ldots$ se déterminent de proche en proche par des équations différentielles du second ordre, où le coefficient de la dérivée seconde est égal, à un facteur constant près, à $\varphi_2(v)$. Ces fonctions sont donc déterminées si l'on connaît les valeurs initiales $\varphi_n(0)$, $\varphi'_n(0)$, satisfaisant aux conditions qui ont été expliquées.

Soit $z(u, v)$ une intégrale de l'équation (10) représentée par une série de cette espèce. Pour que de cette intégrale on puisse déduire une surface (Σ) réelle dans le voisinage de la ligne $u = 0$, il faut que dans ce voisinage cette intégrale vérifie les conditions

$$(56) \qquad 1 - p^2 > 0, \qquad C^2 > q^2, \qquad C^2(1-p^2) - q^2 > 0;$$

d'après l'expression de z, on a

$$\begin{aligned} 1 - p^2 &= 1 - 4\varphi^2 u^2 + \ldots, \\ C^2 - q^2 &= 2(C_2 - \varphi'_2)u^2 + \ldots, \\ C^2(1-p^2) - q^2 &= [1 + 2C_2u^2 + \ldots][1 - 4\varphi_2^2 u^2 + \ldots] - [1 + \varphi'_2 u^2 + \ldots]^2 \\ &= [2C_2 - 4\varphi_2^2 - 2\varphi'_2]u^2 + \ldots, \end{aligned}$$

les termes non écrits étant d'un degré supérieur au second en u. La condition $1 - p^2 > 0$ est certainement vérifiée pour les valeurs de u voisines de zéro. Quant aux deux autres, elles peuvent s'écrire

$$2K\varphi_2^2 u^2 + \ldots > 0, \qquad 2(K-2)\varphi_2^2 u^2 + \ldots > 0,$$

en remarquant que l'équation (55) admet l'intégrale première

$$(57) \qquad C_2 - \varphi'_2 = K\varphi_2^2,$$

où K est une constante arbitraire. Il suffira donc de prendre pour φ_2 une intégrale de l'équation (57), où la constante K est supérieure à 2 pour que les conditions (56) soient vérifiées dans le domaine de l'origine. Remarquons de plus que $C^2(1-p^2) - q^2$ s'annule avec u, mais sans changer de signe. La forme quadratique $du^2 + C^2 dv^2 - dz^2$ se décompose alors en un produit de deux formes linéaires

$$[a\,du + (b + ci)\,dv][a\,du + (b - ci)\,dv],$$

où l'on a

$$a = \sqrt{1-p^2} = 1 - 2\varphi_2^2 u^2 + \ldots$$

$$b = \frac{-pq}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{-2\varphi_2 u + \ldots}{\sqrt{1-p^2}} = -2\varphi_2 u + \ldots$$

$$c = \frac{\sqrt{C^2(1-p^2)-q^2}}{\sqrt{1-p^2}} = \frac{\sqrt{2(K-2)\varphi_2^2 u^2 + \ldots}}{\sqrt{1-p^2}} = uH,$$

H étant une fonction régulière qui n'est pas nulle pour $u=0$. Dans ce cas $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ n'est pas nul pour $u=0$, et les formules (18) donnent pour $\frac{\partial \mu}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$ des expressions

$$(58) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{A}{u}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{B}{u},$$

où A et B sont des fonctions régulières dans la région considérée et où A n'est pas nul pour $u=0$. La condition d'intégrabilité

$$\frac{1}{u}\frac{\partial A}{\partial v} = \frac{1}{u}\frac{\partial B}{\partial u} - \frac{B}{u^2}$$

prouve que B est de la forme uG, G étant aussi une fonction régulière, et les formules (58) deviennent

$$(59) \qquad \frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{A}{u}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = G.$$

Soient

$$A = a_0(v) + a_1(v)u + \ldots + a_n(v)u^n + \ldots,$$
$$G = g_0(v) + g_1(v)u + \ldots + g_n(v)u^n + \ldots;$$

la condition d'intégrabilité des équations (59) conduit aux relations

$$a'_0(v) = 0, \qquad a'_n = ng_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots, \infty).$$

On a par suite pour $\mu(u, v)$ une expression de la forme

$$\mu = a_0 \operatorname{Log}(|u|) + \mathfrak{L}(u, v),$$

a_0 étant une constante et $\mathfrak{L}(u, v)$ une fonction régulière dans le voisinage de $u=0$.

La constante a_0 est différente de zéro. — En effet, pour qu'elle fût nulle, il faudrait que $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ fut divisible par u, ce qui n'a pas lieu comme on l'a déjà remarqué. On peut vérifier aussi que le coefficient de $\frac{1}{u}$ dans $\frac{\partial\mu}{\partial u}$ est indépendant de v. En effet le développement de c commence par un terme du premier degré en u, $\sqrt{2(k-2)}\varphi_2 u$, tandis que le terme indépendant de u dans $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ est égal à $-2\varphi_2$. On a donc pour le résidu de $\frac{\partial\mu}{\partial u}$ relatif au pôle $u = 0$ la valeur constante $\frac{-2}{\sqrt{2(K-2)}}$.

Connaissant $\mu(u, v)$, les deux autres fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, qu'il faut adjoindre à l'intégrale $z(u, v)$, sont données par l'intégration des équations aux différentielles totales

$$dx = a\cos\mu\, du + (b\cos\mu - c\sin\mu)\, dv,$$
$$dy = a\sin\mu\, du + (b\sin\mu + c\cos\mu)\, dv.$$

On peut prendre par exemple, en négligeant des constantes additives, et remarquant que b et c sont nuls pour $u = 0$,

$$(60)\qquad x = \int_0^u a\cos\mu\, du, \qquad y = \int_0^u a\sin\mu\, du;$$

lorsque u tend vers zéro, x et y tendent bien vers zéro, mais ce ne sont pas des fonctions régulières dans le domaine de l'origine à cause du terme logarithmique dans $\mu(u, v)$, et les coordonnées x et y ont une infinité de maxima et de minima dans l'intervalle $(0, h)$, aussi petit que soit h.

L'axe des z est donc une singularité transcendante de la surface (Σ). Pour étudier la forme de la surface dans le voisinage de cette droite, posons $x + iy = e^{\mu i}(P + Qi)$; les formules qui donnent dx et dy conduisent à l'équation aux différentielles totales du premier ordre

$$(61)\qquad d(P + Qi) + i(P + Qi)\, d\mu = a\, du + (b + ci)\, dv,$$

d'où l'on tire

$$P + Qi = e^{-\mu i}\int e^{\mu i}[a\, du + (b + ci)\, dv].$$

D'après l'expression de μ, on a sous le signe d'intégration une différentielle totale de la forme

$$u^{\alpha_0 i}(M\, du + N\, dv),$$

M et N étant des fonctions holomorphes dans la région considérée. En utilisant la condition d'intégrabilité, on voit aisément que M et N ont des développements de la forme

$$M = \sum_{n=0}^{+\infty} \alpha_n(v)\, u^n, \qquad N = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha'_n(v)\, u^{n+1}}{n+1+a_0},$$

et l'on en déduit une fonction primitive

$$\int u^{a_0 i}(M\,du + N\,dv) = u^{a_0 i} \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\alpha_n u^{n+1}}{n+1+a_0 i}.$$

En multipliant cette intégrale par $e^{-\mu i}$, on obtient pour P et Q des fonctions holomorphes qui sont nulles pour $u = 0$, quel que soit v. On peut donc écrire les formules (60)

$$(62) \qquad \begin{cases} x = P\cos\mu - Q\sin\mu, \\ y = P\sin\mu + Q\cos\mu, \end{cases}$$

P et Q ayant la signification précédente. Si l'on donne à v une valeur constante, et que l'on fasse tendre u vers zéro, x et y tendent aussi vers zéro tandis que la valeur absolue de μ augmente indéfiniment [1]. Le point $(x, y, 0)$ décrit une spirale ayant l'origine pour point asymptote [1]. La surface (Σ) tend donc asymptotiquement vers l'axe Oz, autour duquel elle s'enroule une infinité de fois.

On peut se faire une idée de la forme de cette surface, en se représentant un cylindre dont la section droite est une spirale logarithmique.

Le résultat obtenu est vrai pour une géodésique quelconque d'une surface, quel que soit le signe de la courbure totale. Il avait été remarqué par Petersen pour une section principale d'un ellipsoïde.

---

(1) Des formules (62) on tire en effet, en posant $\operatorname{tang}\omega = \frac{y}{x}$, la relation

$$\operatorname{tang}\omega = \frac{\operatorname{tang}\mu + \frac{Q}{P}}{1 - \operatorname{tang}\mu\,\frac{Q}{P}},$$

et par suite

$$\omega = \mu + \operatorname{arc\,tang}\frac{Q}{P}.$$

Il est facile de le vérifier pour une surface hélicoïde. Prenons en effet les formules générales qui représentent une surface hélicoïde admettant l'élément linéaire

$$ds^2 = du^2 + U^2 dv^2,$$

où U est une fonction de la seule variable u [1] et faisons dans les formules $h = m$. Elles deviennent

$$z = v + \int_0^u \frac{\sqrt{U^2 - 1 - m^2 U^2 U'^2}}{U},$$

$$\rho = m\sqrt{U^2 - 1},$$

$$v_1 = \frac{v}{m} - \int \frac{du}{m U (U^2 - 1)} \sqrt{U^2 - 1 - m^2 U^2 U'^2},$$

où l'on a posé $x = \rho \cos v_1$, $y = \rho \sin v_1$. Si $U = 1 + C_2 u^2 + C_3 u^3 + \ldots$, où $C_2 > 0$, on a $U^2 - 1 - m^2 U^2 U'^2 = (2C_2 - 4m^2 C_2^2) u^2 + \ldots$, et, en choisissant m de telle façon que $2C_2 - 4m^2 C_2^2$ soit > 0, on voit que v_1 devient infini comme $\log|u|$ lorsque u tend vers zéro, tandis que ρ tend vers zéro. L'axe des z est bien pour la surface une ligne singulière de la nature qui vient d'être indiquée. Cette surface est engendrée par le mouvement hélicoïdal d'un profil plan asymptote à Oz, représenté par les équations

$$x = m\sqrt{U^2 - 1}, \qquad y = 0, \qquad z = \int \frac{U}{U^2 - 1} \sqrt{U^2 - 1 - m^2 U^2 U'^2}.$$

21. Lorsque φ_2 est une intégrale de l'équation du premier ordre (57), où l'on a pris $K = 2$, le résultat de la substitution de l'intégrale $z(u, v)$ dans $\mathcal{F} = C^2(1 - p^2) - q^2$ commence par un terme du troisième degré au moins en u. On peut choisir les fonctions suivantes φ_3, φ_4, ..., de telle sorte que $\mathcal{F}$ soit d'un degré infinitésimal aussi élevé qu'on le voudra par rapport à u.

Nous avons déjà remarqué que la multiplicité $\mathfrak{M}_1 (u = z = p = q = 0)$ est une multiplicité caractéristique pour l'équation du premier ordre $\mathcal{F} = 0$. Il existe donc une infinité d'intégrales de cette équation représentées par une série de la forme (50). En égalant à zéro les coef-

---

[1] G. Darboux, *Leçons sur la Théorie générale des surfaces*, t. I, p. 90 et suiv.

ficients des diverses puissances de u dans le résultat de la substitution de cette série dans $\mathcal{F}$,

$$\begin{aligned}&[1 + 2C_2 u^2 + \ldots][1 - (2\varphi_2 u + \ldots + n\varphi_n u^{n-1} + \ldots)^2]\\ &\quad - [1 + \varphi'_2 u^2 + \ldots + \varphi'_n u^n + \ldots]^2,\end{aligned}$$

on obtient d'abord, en prenant le terme en u^2, l'équation (57).

En égalant à zéro le coefficient du terme en u^n, on obtient en général une relation où figurent $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$, et leurs dérivées, et où $-2\varphi'_n$ est le seul terme qui dépend de φ'_n. Ces coefficients sont donc déterminés de proche en proche par des équations différentielles du premier ordre, et chacun d'eux dépend d'une constante arbitraire nouvelle. Les intégrales de (E_1) ainsi obtenues sont aussi des intégrales de l'équation (E_2). Par conséquent, si $\varphi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ forment un système de coefficients satisfaisant aux dernières conditions dont il vient d'être question, ces coefficients vérifient aussi les équations différentielles du second ordre obtenues en écrivant que le développement représente une intégrale de (E_2). On peut donc, et d'une infinité de façons, choisir les constantes qui figurent dans $\varphi_2, \ldots, \varphi_n$, de façon que le développement de $\mathcal{F}$ commence par un terme en u de degré aussi élevé qu'on le voudra, $\mathcal{F} = u^n H$, H n'étant pas nul pour $u < 0$.

Supposons d'abord $n = 2m$, les constantes étant choisies de façon que le coefficient de u^{2m} dans $\mathcal{F}$ soit positif pour les valeurs de u voisines de zéro. Les expressions de a et de b ne seraient pas modifiées (ou du moins leurs premiers termes), mais c sera égal au produit de u^m par une fonction holomorphe réelle qui n'est pas nulle pour $u = 0$, et l'on aura pour $\frac{\partial\mu}{\partial u}$, $\frac{\partial\mu}{\partial v}$ des expressions de la forme

$$\frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{A}{u^m}, \qquad \frac{\partial\mu}{\partial u} = \frac{B}{u^m} \qquad (m > 1),$$

A et B étant des fonctions régulières dans le domaine de l'origine dont la première A n'est pas nulle pour $u = 0$. On en déduit pour μ une fonction qui est infinie pour $u = 0$, et qui contient toujours un terme en $\frac{1}{u^{m-1}}$; elle peut contenir d'ailleurs des termes en u^ν où $\nu < m - 1$, et un terme logarithmique. Les coordonnées x et y sont encore données par les formules (60), et l'axe des z est pour la surface (Σ) une singularité transcendante de même nature que plus haut [1]. Si n est impair, on est conduit à un résultat analogue, mais il n'y a qu'une nappe de surface s'enroulant asymptotiquement autour de Oz, puisque l'on ne peut donner à u que des valeurs de même signe dans le voisinage de l'origine.

22. Supposons maintenant que l'on ait à la fois $C_1 = C_2 = 0$, et plus

---

(1) La démonstration repose sur le lemme suivant :

LEMME. — *Soient* $F(t)$, $f(t)$ *deux fonctions continues de la variable* t, *dont la première* $F(t)$ *est croissante pour* $t > t_0$, *augmente indéfiniment avec* t, *et admet une dérivée* $F'(t)$ *continue et positive; les deux intégrales*

$$(\mathrm{I}) \qquad I(t) = \int_{t_0}^{t} \cos[F(t)] f(t)\, dt, \qquad J(t) = \int_{t_0}^{t} \sin[F(t)] f(t)\, dt,$$

sont convergentes lorsque la limite supérieure augmente indéfiniment, pourvu que la valeur absolue du rapport $\frac{f(t)}{F'(t)}$ *soit une fonction décroissante qui tend vers zéro avec* $\frac{1}{t}$.

La relation $F(t) = \theta$ donne par inversion une fonction $t = \varphi(\theta)$ qui est continue et croissante lorsque θ croît de $\theta_0 = F(t_0)$ à $+\infty$, et augmente indéfiniment avec θ, et dont la dérivée $\varphi'(\theta)$ est égale à $\frac{1}{F'(t)}$. Les intégrales (I) deviennent, quand on fait le changement de variable $t = \varphi(\theta)$,

$$(\mathrm{I}') \qquad I = \int_{\theta_0}^{\theta} \cos\theta\, \frac{f[\varphi(\theta)]}{F'[\varphi(\theta)]}\, d\theta, \qquad J = \int_{\theta_0}^{\theta} \sin\theta\, \frac{f[\varphi(\theta)]}{F'[\varphi(\theta)]}\, d\theta;$$

par hypothèse, la fonction $\frac{f[\varphi(\theta)]}{F'[\varphi(\theta)]} = \frac{f(t)}{F'(t)}$ tend vers zéro lorsque θ augmente indéfiniment, et sa valeur absolue est décroissante. D'après un résultat élémentaire bien connu, les intégrales précédentes tendent vers deux limites I_0 et J_0 qui sont représentées par les sommes de deux séries alternées, où la valeur absolue du terme général va constamment en diminuant. La démonstration classique prouve aussi que les intégrales (I) sont des fonctions de t qui passent par une infinité de maxima allant en décroissant, et par une infinité de minima qui vont en croissant. Par exemple, $J(t)$ est maximum pour les valeurs de t telles que $F(t)$ soit un multiple impair de π, si $f(t)$ est positif, et minimum pour les valeurs de t telles que $F(t)$ soit un multiple pair de π.

Il est clair que le résultat subsiste si la fonction $F(t)$ est décroissante et tend vers $-\infty$ lorsque t augmente indéfiniment, la dérivée $F'(t)$ étant continue et négative.

Remarquons qu'il ne suffit pas que $F(t)$ soit une fonction croissante augmentant indéfiniment avec t, tandis que $f(t)$ est une fonction croissante ou décroissante qui tend vers zéro, pour que les intégrales (I) soient convergentes. Par exemple l'intégénéralement que le développement de $C - 1$ commence par un terme de degré m en u $(m > 2)$. On a démontré plus haut (nº 19) que l'équation (10) admet une infinité d'intégrales de la forme

$$z = v + \varphi_\nu u^\nu + \varphi_{\nu+1} u^{\nu+1} + \ldots \qquad (\varphi_\nu \neq 0), \tag{63}$$

ν étant un nombre entier supérieur à 2 et au plus égal à m (nous venons d'examiner le cas où l'on prend $\nu = 2$). Les coefficients successifs φ_ν,

---

grale $\int_{t_0}^{t} \cos[\log t] \frac{dt}{t}$ n'a pas de limite, quoique $\log t$ augmente indéfiniment tandis que $\frac{1}{t}$ tend vers zéro.

Cela étant, nous pouvons écrire les formules (60) comme il suit

$$x = x_0 + \int_{u_0}^{u} a \cos\mu\, du, \qquad y = y_0 + \int_{u_0}^{u} a \sin\mu\, du, \tag{II}$$

u_0 étant un nombre aussi voisin de zéro qu'on le voudra, et où l'on a posé

$$x_0 = \int_0^{u_0} a \cos\mu\, du, \qquad y_0 = \int_0^{u_0} a \sin\mu\, du,$$

Lorsque u tend vers zéro, les intégrales qui figurent dans les formules (II) tendent respectivement vers $-x_0$ et $-y_0$. Nous supposerons, pour fixer les idées, que u tend vers zéro par valeurs positives; a est une fonction continue dans le domaine de l'origine, tandis que μ est la somme d'une fonction admettant l'origine pour pôle et d'un terme logarithmique. Si l'on fait le changement de variable $u = \frac{1}{t}$, les formules deviennent

$$x = x_0 + \int_{\frac{1}{u_0}}^{t} \cos[F(t)] f(t)\, dt, \qquad y = y_0 + \int_{\frac{1}{u_0}}^{t} \sin[F(t)] f(t)\, dt, \tag{II'}$$

où l'on a posé

$$F(t) = \mu\left(\frac{1}{t}\right), \qquad f(t) = -\frac{1}{t^2} a\left(\frac{1}{t}\right).$$

On peut choisir u_0 assez petit pour que les fonctions $F(t)$ et $f(t)$ vérifient les conditions du lemme, car la partie principale de $\mu\left(\frac{1}{t}\right)$ est un polynome entier en t, ou un logarithme dans le cas déjà étudié où μ ne contient que le logarithme comme terme infini. Dans les deux cas, le rapport $\frac{f(t)}{F'(t)}$ tend bien vers zéro avec $\frac{1}{t}$ et sa valeur absolue est décroissante.

On voit donc que x et y tendent vers zéro avec u, en passant par une infinité de maxima positifs qui vont en décroissant et de minima négatifs qui vont en croissant. Entre un maximum et un minimum consécutifs de x, il y a un maximum ou un minimum de y et un seul, et inversement. La courbe de (Σ) obtenue en donnant à v une valeur constante se projette donc sur le plan des xy suivant une courbe en forme de spirale admettant l'origine pour point asymptote.

$\varphi_{\nu-1}$, ..., sont déterminés de proche en proche par des équations différentielles du second ordre, et chacun d'eux contient par conséquent deux constantes arbitraires qui ne figuraient pas dans les précédents. Si l'on substitue ce développement dans $\mathcal{F}$, on démontre, comme au paragraphe précédent, que l'on peut disposer de ces constantes de façon que $\mathcal{F}$ soit d'un degré infinitésimal aussi élevé qu'on le voudra par rapport à u.

Supposons que $\mathcal{F}$ soit du degré ρ en u, $\mathcal{F} = u^\rho \mathrm{H}$, H étant une fonction réelle et holomorphe, qui n'est pas nulle pour $u = 0$, et qui est positive pour cette valeur de u si ρ est pair. Les coefficients a et b ont pour expressions

$$a = 1 - \frac{\nu^2\varphi_\nu^2}{2}u^{2\nu-2} + \ldots, \qquad b = -\nu\varphi_\nu u^{\nu-1} + \ldots,$$

tandis que c est d'ordre $\frac{\rho}{2}$ en u; $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ est divisible par $u^{\nu-2}$, et les formules (18) donnent

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = \frac{\mathrm{A}}{u^{\frac{\rho}{2}-\nu+2}}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = \frac{\mathrm{B}}{u^{\frac{\rho}{2}-\nu+2}},$$

A et B étant des fonctions holomorphes dont la première A n'est pas nulle pour $u = 0$. Si l'exposant $\frac{\rho}{2} - \nu + 2$ est supérieur ou égal à un, μ est infini pour $u = 0$, et l'on a une singularité transcendante de la même nature que plus haut. Si $\frac{\rho}{2} - \nu + 2$ est plus petit que un, ou $\rho < 2\nu - 2$, l'exposant de u au dénominateur est au plus égal à $\frac{1}{2}$, mais il peut être négatif. Dans tous les cas possibles, on aura pour μ une fonction qui est nulle pour $\mu = 0$,

$$\mu = u^\sigma \mathrm{L}(u, v),$$

$\mathrm{L}(u, v)$ étant une fonction holomorphe qui n'est pas nulle pour $u = 0$, et σ un nombre entier ou la moitié d'un nombre impair. Les raisonnements du n° 17 peuvent être appliqués ici, et l'on peut adjoindre à l'intégrale $z(u, v)$ deux autres intégrales

$$x(u, v) = \alpha_0(v) + \alpha_1(v)u + \ldots,$$
$$y(u, v) = u^{\sigma+1}[\beta_0(v) + \beta_1(v)u + \ldots],$$

telles que $dx^2 + dy^2 = du^2 + C^2 dv^2 - dz^2$. En identifiant les coefficients de du^2 et de dv^2 dans les deux membres, on voit que l'on doit avoir $\alpha'_0 \neq 0$, $\alpha_1^2 = 1$. On peut donc prendre

$$x = u + u^2(\ldots)$$

et la surface (Σ) est tangente au plan $y = 0$ tout le long de la droite $x = y = 0$. Lorsque σ est la moitié d'un nombre impair, l'axe Oz est une droite de rebroussement. Lorsque σ est un nombre entier, tous les points de cette droite sont des points ordinaires de la surface (Σ) qui n'est pas traversée par son plan tangent lorsque σ est impair, tandis qu'elle traverse le plan tangent le long de la droite de contact lorsque σ est pair.

Exemples : 1° Si $m = 3$, on a aussi $\nu = 3$; si l'on prend pour φ_3 une fonction telle que $\varphi'_3 - C_3$ soit différent de zéro, on a

$$\rho = 3, \qquad \frac{\rho}{2} - (\nu - 2) = \frac{1}{2},$$

et par suite $\sigma = \frac{1}{2}$. La surface a une droite de rebroussement. Si $\varphi'_3 = C_3$, $\rho \geqq 4$, $\frac{\rho}{2} - 1 \geqq 1$, l'axe des z est une singularité transcendante.

2° Soit $m = 4$. On peut prendre pour ν les deux valeurs $\nu = 3$, $\nu = 4$.

Si l'on prend $\nu = 3$ et si φ'_3 n'est pas nul, on a $\rho = 3$, et il y a une droite de rebroussement. Si $\varphi'_3 = 0$, on a $\rho \geqq 4$, et il y a une singularité transcendante.

Prenons $\nu = 4$; si φ'_4 est différent de C_4, $\rho = 4$, $\frac{\rho}{2} - (\nu - 2) = 0$, et la surface (Σ) est tangente à un plan tout le long d'une droite. Si $\varphi'_4 = C_4$, ρ est au moins égal à 5; si $\rho = 5$, on a une droite de rebroussement, et une singularité transcendante si $\rho > 5$.

Remarque. — Des trois intégrales x, y, z, la première et la dernière renferment tous les éléments d'une caractéristique double satisfaisant à la condition $\mathcal{F} = 0$, tandis que y renferme tous les éléments de la caractéristique double $u = p = q = y = 0$, qui satisfont à la relation $\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0$ (*cf.* n° 17).

23. Supposons enfin que l'on ait $V' = 0$, $V = \omega$, sur $\omega \neq 0$. Pour trouver des intégrales de l'équation (10) contenant tous les éléments de la caractéristique (48), posons encore

$$z = \cos\omega\, v + \sin\omega\, u + Z;$$

l'équation en sera Z

$$(64)\qquad C(RT - S^2) + \left[C^2 \frac{\partial C}{\partial u}(P + \sin\omega) - \frac{\partial C}{\partial v}(Q + \cos\omega)\right] R$$
$$+ 2\frac{\partial C}{\partial u}(Q + \cos\omega) S - C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2}(P + \sin\omega)^2$$
$$- \left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2} + \frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right][Q + \cos\omega]^2 + C^2 \frac{\partial^2 C}{\partial u^2} = 0.$$

Dans les coefficients de R et de S les termes de moindre degré en u sont respectivement $mC_m \sin\omega\, u^{m-1}$ et $2mC_m \cos\omega\, u^{m-1}$ tandis que dans le terme indépendant on a le terme

$$-2m(m-1) C_m \sin\omega\, P\, u^{m-2},$$

les termes en u étant de degré $2m - 2$ au moins, si l'on désigne par C_m le premier des coefficients C_i qui n'est pas nul.

Soit

$$(65)\qquad Z = \varphi_\nu u^\nu + \varphi_{\nu+1} u^{\nu+1} + \ldots \qquad (\varphi_\nu \neq 0)$$

le développement d'une intégrale holomorphe de l'équation (63), ν étant au moins égal à 2. Deux cas sont à distinguer suivant que ν est inférieur à m, ou égal ou supérieur à m.

Supposons d'abord $\nu < m$, ce qui ne peut avoir lieu dans le cas général où $m = 2$. On reconnaît facilement que les coefficients successifs φ_ν, $\varphi_{\nu+1}$, ..., doivent satisfaire à des équations différentielles du second ordre que l'on peut former de proche en proche. Admettons que l'on ait choisi les constantes dont dépendent ces fonctions de façon que la série (65) soit convergente. En substituant l'intégrale

$$z = \cos\omega\, v + \sin\omega\, u + \varphi_\nu u^\nu + \ldots,$$

dans $\mathcal{F} = C^2(1 - p^2) - q^2$, le résultat est en u de l'ordre infinitésimal $\nu - 1$, si φ_ν n'est pas nul comme on l'a supposé; on a donc $\rho = \frac{\nu - 1}{2}$, tandis que $\frac{\partial b}{\partial u} - \frac{\partial a}{\partial v}$ est de degré $\nu - 2$ en u. On en déduit des expressions de $\frac{\partial \mu}{\partial u}$, $\frac{\partial \mu}{\partial v}$

$$\frac{\partial \mu}{\partial u} = u^{\frac{\nu-3}{2}} \mathrm{M}, \qquad \frac{\partial \mu}{\partial v} = u^{\frac{\nu-3}{2}} \mathrm{N},$$

M et N étant des fonctions holomorphes dont la première M n'est pas nulle pour $u = 0$. Par suite, on peut prendre pour μ une fonction de degré $\frac{\nu - 1}{2}$ en u, $\mu = u^{\frac{\nu-1}{2}} \mathrm{P}$, P étant aussi une fonction régulière. Les raisonnements déjà faits plusieurs fois prouvent que l'on peut adjoindre à l'intégrale $z(u, v)$ deux autres intégrales

$$(66) \qquad \begin{cases} y(u, v) = u^{\frac{\nu+1}{2}} \{ \beta_0 + \beta_1 u + \ldots \}, \\ x(u, v) = \alpha_0 + \alpha_1 u + \ldots, \end{cases}$$

telles que l'on ait $dx^2 + dy^2 = du^2 + \mathrm{C}^2 dv^2 - dz^2$. En égalant les coefficients de du^2 et de dv^2 dans les deux membres de l'identité

$$dx^2 + dz^2 = du^2 + \mathrm{C}^2 dv^2 - dy^2,$$

on voit facilement que l'on peut prendre $\alpha_0 = v \sin \omega$, $\alpha_1 = -\cos \omega$. La surface (Σ) ainsi obtenue est tangente tout le long de la droite $x = v \sin \omega$, $z = v \cos \omega$ au plan des xz, avec rebroussement ou non suivant la parité de ν. Si l'on fait tourner cette surface d'un angle ω autour de l'axe Oy, on peut remplacer les coordonnées x et z par $x' = z \sin \omega - x \cos \omega$, $z' = z \cos \omega + x \sin \omega$, et la nouvelle intégrale de l'équation (10) $z'(u, v)$ a un développement de la forme

$$z' = v + \ldots,$$

les termes non écrits étant au moins du second degré en u. Cette intégrale renferme tous les éléments de la caractéristique double (49), et nous retombons sur le cas qui vient d'être étudié en détail.

24. Si le développement d'une intégrale de l'équation (64) commence par un terme de degré m au moins

$$(67) \qquad \mathrm{Z} = \varphi_m u^m + \varphi_{m+1} u^{m+1} + \ldots,$$

ces coefficients se déterminent de proche en proche sans équations différentielles. En égalant à zéro le coefficient de u^{2m-3} dans le résultat de la substitution, on trouve qu'il faut prendre $\varphi_m = 0$. Le développement commence donc par un terme de degré $m+1$. Les coefficients $\varphi_{m+1}, \varphi_{m+2}, \ldots$, se déterminent sans ambiguïté jusqu'à φ_{2m-2}, mais le coefficient suivant φ_{2m-1} est indéterminé. Les calculs sont tout à fait pareils à ceux du n° 18, et conduisent à la même conclusion. On peut choisir d'une infinité de façons la fonction φ_{2m-1} de façon à obtenir un développement convergent

$$z = \cos\omega v + \sin\omega u + \varphi_{m+1} u^{m+1} + \varphi_{m+2} u^{m+2} + \ldots,$$

et, sur la surface (Σ) déduite de cette intégrale, la courbe $u = 0$ est la courbe de contact d'un cylindre circonscrit C. Comme cette ligne est une géodésique, elle coïncide nécessairement avec une hélice de ce cylindre.

V.

25. L'étude des caractéristiques doubles de l'équation (10) explique, nous l'avons vu, l'existence de certaines singularités des surfaces admettant un élément linéaire donné, courbes *planes* de rebroussement ou singularités transcendantes. Mais ces surfaces peuvent aussi posséder des courbes *gauches* de rebroussement, qui se rattachent analytiquement à des intégrales d'une autre espèce de l'équation (10). Reprenons une équation quelconque de Monge-Ampère

$$(67)\qquad \mathrm{H}r + 2\mathrm{K}s + \mathrm{L}t + \mathrm{M} + \mathrm{N}(rt - s^2) = 0;$$

conservant les notations antérieures, nous désignerons par u et v les variables indépendantes et par z la fonction. Une multiplicité d'éléments de contact $\mathfrak{M}_1$ définie par les formules

$$u = f_1(\lambda), \qquad v = f_2(\lambda), \qquad z = f_3(\lambda), \qquad p = \varphi_1(\lambda), \qquad q = \varphi_2(\lambda),$$

où λ est un paramètre variable, est une *multiplicité singulière* si les équations

$$\varphi_1'(\lambda) = rf_1'(\lambda) + sf_2'(\lambda), \qquad \varphi_2'(\lambda) = sf_1'(\lambda) + tf_2'(\lambda),$$

qui, jointes à l'équation de Monge-Ampère, déterminent les valeurs de r, s, t le long de $\mathfrak{M}_1$, donnent pour l'une au moins de ces inconnues une valeur infinie. Pour étudier les intégrales, s'il en existe, renfermant tous les éléments de $\mathfrak{M}_1$, nous pouvons toujours, en effectuant d'abord une transformation ponctuelle convenable, supposer la multiplicité $\mathfrak{M}_1$ définie par les équations

$$u = z = p = q = 0.$$

Les relations $dp = r\,du + s\,dv$, $dq = s\,du + t\,dv$ donnent $s = t = 0$ tout le long de $\mathfrak{M}_1$. Quant à la valeur de r, elle se déduira de l'équation (67), où l'on remplacera u, z, p, q, s, t par zéro. Cette équation devient ainsi

$$H_0 r + M_0 = 0,$$

H_0 et M_0 se déduisant des coefficients H et M par la substitution indiquée. Si H_0 n'est pas nul identiquement, $\mathfrak{M}_1$ est une multiplicité ordinaire à laquelle on peut appliquer le théorème classique de Cauchy. Si l'on a à la fois $H_0 = M_0 = 0$, $\mathfrak{M}_1$ est une multiplicité caractéristique. Enfin lorsque $H_0 = 0$, sans que M_0 soit nul, $\mathfrak{M}_1$ est une *multiplicité singulière*, il n'existe pas d'intégrale holomorphe renfermant tous les éléments de $\mathfrak{M}_1$, mais il existe en général une intégrale non holomorphe satisfaisant à cette condition.

Pour le démontrer, appliquons à l'équation (67) la transformation d'Ampère (*voir* n° 10)

$$(68) \qquad u = P, \qquad v = Y, \qquad z = PX - Z, \qquad p = X, \qquad q = -Q,$$

d'où l'on tire inversement

$$X = p, \qquad Y = v, \qquad Z = pu - z, \qquad P = u, \qquad Q = -q;$$

en la prolongeant, on a les valeurs des dérivées secondes

$$r = \frac{1}{R}, \qquad s = -\frac{S}{R}, \qquad t = \frac{S^2 - RT}{R}, \qquad rt - s^2 = -\frac{T}{R};$$

et l'équation de Monge-Ampère devient, après la transformation,

$$(67)' \qquad H' - 2K'S + L'(S^2 - RT) + M'R - N'T = 0,$$

où H', K', L', M', N' se déduisent de H, K, L, M, N par la transformation de contact (68). La multiplicité $\mathfrak{M}_1$ est elle-même remplacée par une multiplicité $\mathfrak{M}'_1$ définie par les formules

$$X = Z = P = Q = 0.$$

Toute intégrale de l'équation (67) renfermant tous les éléments de $\mathfrak{M}_1$ se change en une intégrale de la nouvelle équation $(67)'$ renfermant tous les éléments de $\mathfrak{M}'_1$, et inversement. Par hypothèse M' n'est pas nul pour les éléments de $\mathfrak{M}'_1$, tandis que $H' = 0$. L'équation $(67)'$ donne donc $R = 0$ pour tous les éléments de $\mathfrak{M}'_1$, mais on peut appliquer à la nouvelle équation le théorème de Cauchy. Elle admet donc une intégrale holomorphe dont le développement suivant les puissances de X commence par un terme du 3ᵉ degré au moins. Le degré de ce terme, on le voit aisément, est égal au degré du terme de moindre degré en X (indépendant de P, Q, Z) dans H' augmenté de deux unités. Si dans H' ne figure aucun terme indépendant de P, Q, Z, l'équation transformée n'admet pas d'autre intégrale holomorphe renfermant tous les éléments de $\mathfrak{M}'_1$ que $Z = 0$, et l'on ne peut en déduire aucune intégrale de l'équation $(67)'$.

Laissant de côté ce cas particulier, supposons que l'équation en Z admette l'intégrale

$$Z = \Phi_m(v)X^m + \Phi_{m+1}(v)X^{m+2} + \ldots, \qquad m \geqq 3, \ \Phi_m(v) \neq 0,$$

Φ_m, Φ_{m+1}, ..., étant des fonctions holomorphes de v dans le domaine de l'origine, par exemple, dont la première n'est pas nulle pour $v = 0$. On en déduit

$$u = P = mX^{m-1}\Phi_m(v) + \ldots,$$
$$z = PX - Z = (m-1)X^m\Phi_m(v) + \ldots.$$

De la première de ces formules on tire un développement de X suivant les puissances de $u^{\frac{1}{m-1}}$, et en substituant ce développement de X dans z, on obtient une intégrale non holomorphe de l'équation (67), qui contient tous les éléments de $\mathfrak{M}_1$,

$$z = u^{\frac{m}{m-1}}\left[\psi_0(v) + \psi_1(v)u^{\frac{1}{m-1}} + \ldots\right],$$

ψ_0, ψ_1 ..., étant des fonctions holomorphes de v. Dans le cas général où $m = 3$ le développement commence par un terme en $u^{\frac{3}{2}}$.

26. Appliquons ces généralités à l'équation (10). Soit $\mathfrak{M}_1$ une multiplicité d'éléments de contact définie par les relations

$$(69) \qquad u=0, \qquad p=p_0(v), \qquad q=q_0(v), \qquad z=\int q_0(v)\,dv,$$

$p_0(v)$ et $q_0(v)$ étant des fonctions de la variable v, que nous supposons holomorphes dans le domaine où l'on fait varier v. Cherchons d'abord à quelles conditions doivent satisfaire ces fonctions pour que $\mathfrak{M}_1$ soit une multiplicité singulière. En posant

$$z=\int q_0\,dv+p_0 u+z',$$

et désignant par p', q', r', s', t' les dérivées de la nouvelle fonction inconnue, l'équation (10) se change en une nouvelle équation de Monge-Ampère où le coefficient de r' est

$$C(q_0'+p_0''u)+C^2\frac{\partial C}{\partial u}(p_0+p')-\frac{\partial C}{\partial v}(q_0+p_0'u+q'),$$

tandis que le terme indépendant de r', s' t' est

$$-C(p_0')^2+2\frac{\partial C}{\partial u}p_0'(q_0+p_0'u+q')-C^2\frac{\partial C}{\partial u}(p_0+p')^2$$
$$-\left[\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}+\frac{1}{C}\left(\frac{\partial C}{\partial u}\right)^2\right][q_0+p_0'v+q']^2+C^2\frac{\partial^2 C}{\partial u^2}.$$

Pour $u=p'=q'=0$, le coefficient de r' se réduit à $q_0'+V'p_0$, tandis que le terme indépendant est égal à $2C_2(1-p_0^2-q_0^2)-(p_0'-V'q_0)^2$. Pour que la multiplicité $\mathfrak{M}_1$ définie par les formules (69) soit une multiplicité singulière de l'équation (10), il faut donc que l'on ait

$$(70) \qquad q_0'+V'p_0=0, \qquad 2C_2(1-p_0^2-q_0^2)-(p_0'-V'q_0)^2\neq 0.$$

Supposons ces conditions remplies. La transformation de contact

$$u=P, \qquad v=Y, \qquad z'=PX-Z, \qquad p'=X, \qquad q'=-Q,$$

conduit enfin à une troisième équation de Monge-Ampère où le seul terme de H' indépendant de P, Q, est, en tenant compte de la condition (70), $V'X$. Si $V'=0$, la dernière équation n'admet pas d'autre intégrale que $Z=0$, renfermant tous les éléments de la multiplicité $\mathfrak{M}'_1$. Si V' n'est pas nul, l'équation en Z admet une intégrale holomorphe

$$Z = AX^3 + BX^4 + \ldots,$$

dont les coefficients sont des fonctions réelles et holomorphes de v, où le premier coefficient A a pour expression

$$A = -\frac{1}{6} \frac{V'}{2C_2(1 - p_0^2 - q_0^2) - (p'_0 - V'q_0)^2}.$$

Supposons $A > 0$; de la relation $u = P = 3AX^2\ldots$, on tire pour X un développement suivant les puissances de $u^{\frac{1}{2}}$

$$X = \alpha_1 u^{\frac{1}{2}} + \alpha_2 u + \ldots,$$

dont les coefficients sont des fonctions réelles et holomorphes de v, α_1 n'étant pas nul. On en déduit pour z' un développement de même espèce commençant par un terme en $u^{\frac{3}{2}}$, et par suite l'équation (10) admet une intégrale de la forme

$$(71) \qquad z = \int q_0(v)\,dv + p_0(v)u + \varphi_2(v)u^{\frac{3}{2}} + \varphi_3(v)u^2 + \ldots,$$

$\varphi_2, \varphi_3, \ldots,$ étant des fonctions réelles et holomorphes de v. Cette intégrale contient bien tous les éléments de la multiplicité $\mathfrak{M}_1$, mais elle n'est réelle que pour les valeurs positives de u dans le voisinage de la valeur $u = 0$.

Pour que cette intégrale conduise à une surface (Σ), réelle pour les valeurs de u, v dans le domaine du plan (u, v), limité par un segment de l'axe $u = 0$, ou contenant un tel segment à l'intérieur, il faut que pour les valeurs de v comprises entre certaines limites, l'expression $1 - p_0^2 - q_0^2$ ne soit pas négative, d'après les conditions (15). Nous pouvons écarter le cas où l'on aurait

$$p_0^2 + q_0^2 = 1;$$

des deux équations

$$q'_0 + V'p_0 = 0, \qquad p_0^2 + q_0^2 - 1 = 0,$$

on tire en effet

$$q_0 = \cos(V + \omega), \qquad p_0 = \sin(V + \omega),$$

ω étant constant, et la multiplicité $\mathfrak{M}_1$ serait une caractéristique double, et non une multiplicité singulière. Supposons donc que pour les valeurs de v comprises dans un intervalle $(-h, +h)$ par exemple, on ait $p_0^2 + q_0^2 < 1$. Donc l'identité

$$(72) \qquad dx^2 + dy^2 = du^2 + C^2 dv^2 - dz^2,$$

remplaçons u par u'^2, elle devient

$$(72)' \qquad dx^2 + dy^2 = 4u'^2\left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right] du'^2 + -4u' \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v} du' dv + \left[C^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2\right] dv^2.$$

La forme quadratique du second membre peut être décomposée en deux formes linéaires conjuguées

$$[a\,du + b\,dv + ic\,dv][a\,du + b\,dv - ic\,dv],$$

où l'on a

$$a^2 = 4u'^2\left[1 - \left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)^2\right], \qquad ab = -2u' \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial z}{\partial v}, \qquad c^2 = C^2 - \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)^2 - b^2;$$

$\frac{\partial z}{\partial u}$, $\frac{\partial z}{\partial v}$, se réduisent à p_0 et à q_0 pour $u' = 0$. Il s'ensuit que a et b sont des fonctions réelles holomorphes de u', v, qui contiennent u' en facteur, tandis que c est une fonction réelle et holomorphe qui, pour $u' = 0$, prend une valeur positive $\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}$. Si l'on cherche deux facteurs intégrants $e^{i\mu}$, $e^{-i\mu}$ pour ces deux formes linéaires, on est conduit à une équation aux différentielles totales

$$d\mu = A\,du' + B\,dv,$$

où A et B sont des fonctions réelles et holomorphes dans le domaine de l'origine. On en déduit pour μ, et par suite pour x et y, des fonctions de même nature

$$(73) \qquad \begin{cases} x = a_0 + a_1 u' + a_2 u'^2 + \ldots, \\ y = b_0 + b_1 u' + b_2 u'^2 + \ldots. \end{cases}$$

Les coefficients a_1 et b_1 sont nuls; en effet $dx^2 + dy^2$ contient le terme $\frac{a_1^2 + b_1^2}{4u} du^2$ qui ne se réduit avec aucun autre, tandis que le coefficient de du^2 dans $du^2 + C^2 dv^2 - dz^2$ ne renferme pas de terme en $\frac{1}{u}$. On a donc $a_1 = b_1 = 0$, et en remplaçant u' par $u^{\frac{1}{2}}$, on obtient pour x et y des développements suivant les puissances de $u^{\frac{1}{2}}$ commençant par un terme en u, dont tous les coefficients sont des fonctions réelles et holomorphes de v, dans l'intervalle $(-h, +h)$. Les conclusions sont analogues à celles du n° 10. En donnant à u des valeurs positives voisines de zéro, et en attribuant au radical $\sqrt{u}$ ses deux déterminations, on obtient deux portions de surfaces, applicables l'une sur l'autre qui se rejoignent suivant une arête de rebroussement (Γ), dont on obtient les équations en faisant $u = 0$ dans les formules qui donnent les coordonnées d'un point de la surface. Cette courbe (Γ) est en général une courbe gauche; pour le démontrer, nous allons calculer le rayon de courbure et le rayon de torsion.

27. Soient, d'une façon générale

$$(74) \qquad \begin{cases} x = x_0(v) + x_1(v)u + \ldots, \\ y = y_0(v) + y_1(v)u + \ldots, \\ z = z_0(v) + z_1(v)u + \ldots, \end{cases}$$

des formules qui expriment au moyen des deux paramètres u, v, les coordonnées rectangulaires d'un point d'une surface (Σ) dont l'élément linéaire est donné par la formule (8); les termes non écrits dans les séries (74) ne contiennent que des puissances de u supérieures à la première, mais peuvent contenir des puissances fractionnaires comme dans le cas que nous étudions. En identifiant les coefficients de du^2, $du\,dv$, dv^2 dans les deux membres de l'identité

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = du^2 + C^2\,dv^2,$$

on obtient quatre relations entre les six fonctions

$$x_i(v), \qquad y_i(v), \qquad z_i(v) \qquad (i = 0, 1),$$

$$(75) \qquad \begin{cases} x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 = 1, & (x'_0)^2 + (y'_0)^2 + (z'_0)^2 = 1, \\ x'_0 x'_1 + y'_0 y'_1 + z'_0 z'_1 = V, & x_1 x'_0 + y_1 y'_0 + z_1 z'_0 = 0, \end{cases}$$

qui permettent de déterminer x_0, y_0, x_1, y_1 connaissant z_0, z_1. Des équations (75) on tire en effet, en les différentiant, les relations

$$x'_0 x''_0 + y'_0 y''_0 = -z'_0 z''_0, \qquad x_1 x''_0 + y_1 y''_0 = -z_1 z''_0 - V'.$$

On en déduit, après quelques réductions faciles, l'expression du rayon de courbure R de la courbe (Γ) décrite par le point de coordonnées $x_0(v), y_0(v), z_0(v)$

$$(76)\qquad \frac{1}{R^2} = (x''_0)^2 + (y''_0)^2 + (z''_0)^2 = \frac{(z''_0)^2 + 2V'z_1 z''_0 + V'^2_1(1 - z'_0)^2}{1 - z_1^2 - z'^2_0}.$$

On voit que $(x''_0)^2 + (y''_0)^2$ s'exprime uniquement au moyen des fonctions z_0, z_1 et de leurs dérivées. Comme d'autre part, on a

$$(x'_0)^2 + (y'_0)^2 = 1 - (z'_0)^2,$$

x_0 et y_0 s'obtiendront par des quadratures. Le calcul est tout pareil à celui qui donne les coordonnées d'un point d'une courbe plane dont on connaît le rayon de courbure en fonction de l'arc, ce qui s'explique aisément.

Dans le cas que nous étudions, nous avons

$$z'_0 = q_0, \qquad z_1 = p_0, \qquad z''_0 = q'_0 = -V'p_0,$$

et la formule (76) devient $\frac{1}{R^2} = V'^2$, d'où l'on tire $R = \left|\frac{1}{V'}\right|$. Le rayon de courbure de la courbe (Γ) au point correspondant à la valeur v du paramètre est donc égal au rayon de courbure géodésique de la courbe $u = 0$ au point correspondant sur une surface quelconque admettant l'élément linéaire (8). On vérifie d'ailleurs immédiatement que la condition $q'_0 + V'p_0 = 0$ est nécessaire pour qu'il en soit ainsi.

Conservant les notations habituelles de la théorie des courbes gauches, désignons par α, β, γ, α', β', γ', α'', β'', γ'' les cosinus des angles que font avec les axes les arêtes du trièdre de Frenet relatif à la courbe (Γ). On peut prendre $\gamma = z'_0 = q_0$. Des relations

$$\frac{1}{R} = |V'|, \qquad q'_0 + V'p_0 = 0, \qquad \frac{d\gamma}{dv} = \frac{\gamma'}{R},$$

on déduit $\frac{\gamma'}{R} + V'p_0 = 0$; on a donc $p_0 = \varepsilon\gamma'$, ε étant égal à ± 1, suivant le signe de V'. On a ensuite

$$\gamma'' = \pm\sqrt{1 - \gamma^2 - \gamma'^2} = \pm\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2},$$

et la formule de Frenet $\frac{d\gamma''}{ds} = \frac{\gamma'}{T}$ devient ici

$$\frac{p_0 p'_0 + q_0 q'_0}{\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}} = \pm \frac{p_0}{T},$$

ou, en remplaçant q'_0 par $V' p_0$,

$$\frac{p_0(p'_0 - q_0 V')}{\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}} = \pm \frac{p_0}{T}.$$

On a donc, si p_0 n'est pas nul,

$$(77) \qquad \frac{1}{T} = \pm \frac{p'_0 - q_0 V'}{\sqrt{1 - p_0^2 - q_0^2}},$$

et cette formule subsiste, même si p_0 est nul. Dans ce cas en effet, γ et γ'' sont constants, la courbe (Γ) est une hélice située sur un cylindre dont les génératrices sont parallèles à Oz, et le rapport $\frac{R}{T}$ est égal à $\pm \frac{\gamma}{\gamma''} = \pm \frac{q_0}{\sqrt{1 - q_0^2}}$, conformément à la formule (76).

Pour que la courbe (Γ) fût une courbe plane, il faudrait que l'on eût à la fois

$$q'_0 = V' p_0, \qquad p'_0 - q_0 V' = 0;$$

on tire de ces équations différentielles

$$p_0 = m \sin(V + \omega), \qquad q_0 = m \cos(V + \omega_0),$$

m et ω étant deux constantes et $|m| < 1$. En se reportant au n° 11, on voit aisément que l'intégrale de l'équation (10) qui a un développement de la forme

$$z = \int m \cos(V + \omega)\, dv + m \sin(V + \omega)\, u + \varphi_2 u^{\frac{3}{2}} + \ldots,$$

se déduit par un changement de coordonnées des intégrales x, y, z, qui ont été définies à ce paragraphe, et l'on retombe sur le premier cas examiné.

28. Supposons maintenant $p_0 - q_0 V'$ différent de zéro. L'arête de

rebroussement (Γ) est une courbe gauche qui est complètement définie de forme, à une symétrie près, quand on connaît deux fonctions p_0 et q_0 de v vérifiant les relations

$$q_0' + V' p_0 = 0, \qquad p_0^2 + q_0^2 < 1.$$

Les fonctions $x(u, v)$, $y(u, v)$, qu'il faut adjoindre à l'intégrale $z(u, v)$ pour avoir la surface (Σ), contiennent aussi dans leurs développements des puissances fractionnaires de u; nous avons remarqué en effet qu'une intégrale de l'équation (10) holomorphe dans le voisinage de la ligne $u = 0$, ne peut conduire à une surface (Σ) ayant une courbe gauche pour arête de rebroussement. Les intégrales $x(u, v)$, $y(u, v)$ sont aussi des intégrales renfermant tous les éléments de deux multiplicités singulières que l'on déduirait de $\mathfrak{M}_1$ en remplaçant q_0 et p_0 par x_0' et x_1 ou par y_0' et y_1. Il s'ensuit que les cosinus directeurs α, β, γ, α', β', γ' de la tangente et de la normale principale à la courbe (Γ) ont pour valeurs

$$\alpha = \left(\frac{\partial x}{\partial v}\right)_{u=0}, \qquad \alpha' = \varepsilon\left(\frac{\partial x}{\partial u}\right)_{u=0}, \qquad \beta = \left(\frac{\partial y}{\partial v}\right)_{u=0}, \qquad \beta' = \varepsilon\left(\frac{\partial y}{\partial u}\right)_{u=0},$$
$$\gamma = \left(\frac{\partial z}{\partial v}\right)_{u=0}, \qquad \gamma' = \varepsilon\left(\frac{\partial z}{\partial u}\right)_{u=0}.$$

Les relations

$$\alpha\alpha'' + \beta\beta'' + \gamma\gamma'' = 0, \qquad \alpha'\alpha'' + \beta'\beta'' + \gamma'\gamma'' = 0,$$

montrent que la binormale à la courbe (Γ) coïncide avec la normale à la surface (Σ) en tout point de (Γ). Le plan tangent coïncide donc avec le plan osculateur.

Étant donnée une portion de surface (S) dont l'élément linéaire est donné par la formule (8), correspondant à un domaine D du plan (u, v) qui contient le segment de l'axe $u = 0$, obtenu en faisant varier v de $-h$ à $+h$, soit C la courbe de (S) qui a pour équation $u = 0$ en coordonnées curvilignes, il résulte de ce qui précède qu'on peut déformer la surface (S) de façon qu'une partie de cette surface vienne s'appliquer sur la surface (Σ) que nous venons de définir, la courbe (C) venant s'appliquer sur la courbe de rebroussement (Γ). Dans cette déformation, il se produit nécessairement une déchirure suivant C. La partie de (S) qui vient s'appliquer sur (Σ)

correspond aux valeurs de u telles que le produit

$$\frac{V'u}{2C_2(1-p_0^2-q_0^2)-(p'_0-V'_{u_0})^2},$$

soit négatif, condition qui s'écrit en tenant compte de la relation (77)

$$V'u\left[\frac{1}{T^2}+2C_2\right]=V'u\left[\frac{1}{T^2}+K\right]>0,$$

K désignant la courbure totale de la surface. La discussion se fait comme au n° 12; la région de (Σ') qui vient s'appliquer sur (Σ) après la déformation est la région de convexité géodésique si $\frac{1}{T^2}+K$ est positif, et la région de convexité géodésique si $\frac{1}{T^2}+K$ est négatif (¹) (*voir* le fascicule déjà cité de M. Gambier, p. 43).

Remarques. — 1° Il résulte de la démonstration précédente que l'on peut déformer une surface (S) de façon qu'une courbe arbitraire (C) tracée sur cette surface prenne une configuration donnée à l'avance (Γ), pourvu que la courbure de (Γ) soit égale à la courbure géodésique de (C), et cette courbe (Γ) est, pour la surface obtenue par la déformation, une ligne de rebroussement.

2° Pour que la multiplicité $\mathfrak{M}_1$ soit une caractéristique de l'équation (10) il faut que l'on ait à la fois, R et T étant les rayons de courbure et de torsion de la courbe (Γ),

$$q'_0+V'p_0=0, \qquad \frac{1}{T^2}+K=0.$$

La première exprime, nous l'avons vu, que le rayon de courbure de (Γ) est égal à la courbure géodésique de la même courbe, tandis que la seconde exprime que cette courbe (Γ) est une ligne asymptotique (¹).

(¹) G. Darboux, *Leçons sur la Théorie des surfaces*, t. III, p. 280.