

# ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

HENRI VILLAT

**La théorie de l'expérience de M. Henri Bénard sur les tourbillons  
alternés dans une cuve limitée par deux parois fixes parallèles**

*Annales scientifiques de l'É.N.S. 3<sup>e</sup> série*, tome 46 (1929), p. 259-281

[http://www.numdam.org/item?id=ASENS\\_1929\\_3\\_46\\_\\_259\\_0](http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__259_0)

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1929, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (<http://www.elsevier.com/locate/ansens>) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (<http://www.numdam.org/conditions>). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme  
Numérisation de documents anciens mathématiques  
<http://www.numdam.org/>

LA THÉORIE DE L'EXPÉRIENCE DE M. HENRI BÉNARD  
SUR  
**LES TOURBILLONS ALTERNÉS**

DANS  
UNE CUVE LIMITÉE PAR DEUX PAROIS FIXES PARALLÈLES

PAR M. HENRI VILLAT

---

Nous n'avons pas besoin de rappeler ici le détail des belles expériences de M. Henri Bénard sur les tourbillons alternés qui prennent naissance à l'arrière d'un solide cylindrique en mouvement dans un liquide, dans certaines conditions de vitesses. Une théorie de ces expériences a été donnée par MM. Th. von Karman et Rubach (*Physikal. Zeitschrift*, 1912, p. 49, « Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes »). Ces auteurs ont supposé qu'il s'agissait d'un fluide *infini dans toutes les directions*. Or en fait, les expériences ont été réalisées dans une cuve de très grande longueur mais d'une largeur relativement faible (de 20 à 30 centimètres), en sorte qu'il est désirable que les circonstances puissent être examinées du point de vue théorique précisément dans des conditions analogues.

Dans les lignes qui suivent nous avons tenté l'établissement de la théorie dans un bassin de largeur finie.

A cet effet il est nécessaire de commencer par établir les équations propres à représenter l'état d'un fluide enfermé entre deux murs parallèles, et dans lequel se trouveraient deux files, *indéfinies dans les deux sens*, de tourbillons alternés. C'est à quoi l'on peut parvenir en utilisant un procédé indiqué par M. G. Jaffé (*Annalen der Physik*, 61, 1920, p. 173) et pour l'emploi duquel je renverrai à mes *Leçons sur la Théorie des Tourbillons* (un volume, Gauthier-Villars, éditeur, 1929, Chapitre VI).

On passera facilement de là à la configuration de l'expérience de Bénard, pour laquelle, à l'amont du corps cylindrique en mouve-

ment, le fluide est en repos, et, *loin* vers l'aval, les tourbillons alternés se sont établis réguliers, dans les conditions qui ont été souvent décrites. Si l'on examine ce qui se passe *très loin* à l'aval, on peut admettre, sans erreur sensible, que l'état des vitesses provient des tourbillons réellement existants, ne diffère que très peu de l'état des vitesses qui serait dû à la présence de deux files tourbillonnaires indéfinies dans les deux sens et ceci permet de faire, à partir de cette hypothèse, le calcul de la résistance qu'éprouve le solide à son avancement, avec la même approximation que pour le calcul de M. Karman en fluide indéfini.

Nous avons recherché ensuite ce que devenaient nos formules lorsqu'on faisait croître indéfiniment la largeur du canal dans lequel on opère. Bien entendu, les équations qui déterminent le mouvement des deux files des tourbillons, indéfinies dans les deux sens, dans le cas du canal, deviennent à la limite les équations qui conviennent à deux files indéfinies en un milieu illimité. Mais il se présente une circonstance curieuse, la valeur de la résistance éprouvée par le cylindre (par unité de longueur) *ne tend pas* vers l'expression que donne la théorie faite directement en fluide illimité. Nous examinons à la fin du présent travail les raisons de cette anomalie. Celle-ci montre que la représentation correcte (par les méthodes théoriques approchées établies pour un fluide illimité), d'un phénomène physique réalisé en un domaine limité, peut ne pas être sans dangers imprévus.

Les résultats du présent travail ont fait l'objet d'une Note aux *Comptes rendus* (avril 1929, t. 188, p. 1129). Dans un beau Mémoire, publié en juin 1929 (*Phil. Transact. of the Royal Soc.*, London, A.228, p. 275), M. L. Rosenhead a étudié de son côté la configuration des tourbillons alternés dans un canal. Il en a déterminé les conditions de stabilité, ce qui constitue un progrès essentiel pour la théorie, et il a effectué le calcul de la résistance moyenne éprouvée par l'obstacle solide, par une méthode différente de celle qu'on trouvera ci-dessous. Son point de départ est à ce propos un Mémoire de M. J. L. Synge (*Proc. Roy. Irish Academy*, vol. 37, A.8, 1927) qui établit une formule générale pour la résistance, sans faire d'approximation de la nature de celle qui est employée ici. M. L. Rosenhead échappe ainsi au paradoxe signalé pour le passage à la limite.

On trouvera dans nos *Leçons sur la Théorie des Tourbillons* citées, Chap. VI, un exposé du résultat de M. L. Rosenhead, et de la méthode de M. Syngé.

Nous montrons en quelques lignes, en terminant le présent travail, que l'expression adoptée ici pour le potentiel complexe se trouve spécialement appropriée pour l'application de la méthode de M. Syngé.

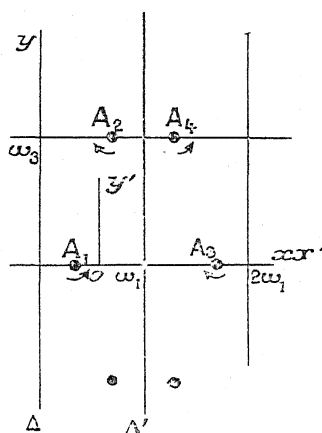


Fig. 1.

En désignant par  $\omega_1$  la distance des deux parois parallèles à l'axe  $ox$ , et opérant dans un plan horizontal  $xoy$ , nous savons que la vitesse complexe correspondant à deux files *indéfinies* de tourbillons, alternés selon la configuration de Bénard, est donnée par la formule

$$(1) \quad 2i\pi(u - iv) = 2i\pi \frac{d\zeta}{dz} = \sum_{k=1}^4 J_k [\zeta(z - z_k) - \frac{\eta_1}{\omega_1} (z - z_k)]$$

en désignant les deux parois par  $x=0$  et  $x=\omega_1$ , et en posant

$$J_1 = -J_2 = -J_3 = J_4 = J; \\ z_1 = a; \quad z_2 = \omega_3 + \omega_1 - a; \quad z_3 = 2\omega_1 - a; \quad z_4 = \omega_3 + \omega_1 + a,$$

de sorte que l'équidistance  $l$  dans chaque file est  $\frac{2\omega_3}{l}$ . En développant, on trouve immédiatement

$$\frac{2i\pi}{l}(u - iv) = \zeta(z - a) - \zeta(z + a) + \zeta(z - a + \omega_2) - \zeta(z + a + \omega_2) + \frac{4\eta_1 a}{\omega_1}.$$

Pour une raison qui apparaîtra plus loin, transformons cette expression, en prenant pour axes  $o'x'y'$  deux axes de symétrie de la bande  $(\Delta\Delta')$ ,  $o'x'$  coïncidant avec  $o'x$ . Nous poserons donc

$$z = z' + \frac{\omega_1}{2},$$

et nous désignerons par

$$\delta = \frac{\omega_1}{2} - a$$

la demi-distance des deux files des tourbillons.

Les propriétés élémentaires de la fonction  $\zeta$  conduisent à la formule

$$\begin{aligned} \frac{2i\pi}{J}(u - iv) = & \zeta(z' + \delta) - \zeta(z' - \delta + \omega_1) + \zeta(z' + \delta + \omega_2) \\ & - \zeta(z' - \delta - \omega_2) + 2\eta_1 - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$(2) \quad \frac{2i\pi}{J}(u - iv) = \zeta(z' + \delta) - \zeta_1(z' - \delta) + \zeta_2(z' + \delta) - \zeta_2(z' - \delta) - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}.$$

Si l'on néglige le terme en  $\frac{1}{z' + \delta}$  dans le second membre, et si l'on fait tendre ensuite  $z'$  vers  $-\delta$ , nous savons que nous obtiendrons ainsi la vitesse  $(u_0, v_0)$  du tourbillon  $A_1$ . On trouve ainsi

$$\frac{2i\pi}{J}(u_0 - iv_0) = \zeta_1(2\delta) + \zeta_2(2\delta) - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1},$$

c'est-à-dire

$$(3) \quad \begin{aligned} u_0 &= 0 \\ v_0 &= \frac{J}{2\pi} \left[ \zeta_1(2\delta) + \zeta_2(2\delta) - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1} \right]. \end{aligned}$$

Soit par un calcul direct, soit tout simplement en intégrant, par rapport à  $z'$ , l'équation (2), nous obtiendrons le potentiel complexe  $Z$  sous la forme

$$(4) \quad \frac{2i\pi}{J}Z = \log \frac{\sigma(z' + \delta)\sigma_2(z' + \delta)}{\sigma_1(z' - \delta)\sigma_2(z' - \delta)} - \frac{4\eta_1\delta}{\omega_1}z' + \text{const.}$$

et l'on pourra évidemment négliger la constante d'intégration; par

suite la fonction de courant  $\psi$  sera donnée par

$$(5) \quad -\frac{2\pi}{j} \psi = \log \left| \frac{\sigma(z' + \delta) \sigma_2(z' + \delta)}{\sigma_1(z' - \delta) \sigma_3(z' - \delta)} \right| - \frac{i\eta_1 \delta}{\omega_1} y'.$$

Nous allons aisément démontrer le résultat suivant :

THÉORÈME. — *Quel que soit  $y$ , la différence*

$$B = \psi\left(\frac{\omega_1}{2}, y'\right) - \psi\left(-\frac{\omega_1}{2}, y'\right)$$

*est nulle.*

On a effet

$$B = -i\eta_1 \delta + \log \left| \frac{\sigma\left(\frac{\omega_1}{2} + iy' + \delta\right) \sigma_2\left(\frac{\omega_1}{2} + iy' + \delta\right) \sigma_1\left(-\frac{\omega_1}{2} + iy' - \delta\right) \sigma_3\left(-\frac{\omega_1}{2} + iy' - \delta\right)}{\sigma_1\left(\frac{\omega_1}{2} + iy' - \delta\right) \sigma_3\left(\frac{\omega_1}{2} + iy' - \delta\right) \sigma\left(-\frac{\omega_1}{2} + iy' + \delta\right) \sigma_2\left(-\frac{\omega_1}{2} + iy' + \delta\right)} \right|$$

Posons

$$\frac{\omega_1}{2} + \delta = \alpha,$$

et par suite

$$\frac{\omega_1}{2} - \delta = \omega_1 - \alpha;$$

il vient

$$-\frac{2\pi}{j} B = -i\eta_1 \delta + \frac{1}{2} \log \left| \frac{\left\{ \begin{array}{l} \sigma(\alpha + iy') \sigma_2(\alpha + iy') \sigma_1(\alpha - iy') \sigma_3(\alpha - iy') \sigma(\alpha - iy') \\ \times \sigma_2(\alpha - iy') \sigma_1(\alpha + iy') \sigma_3(\alpha + iy') \end{array} \right\}}{\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1(iy' - \alpha + \omega_1) \sigma_3(iy' - \alpha + \omega_1) \sigma(iy' + \alpha - \omega_1) \\ \times \sigma_2(iy' + \alpha - \omega_1) \sigma_1(-iy' - \alpha + \omega_1) \\ \times \sigma_3(-iy' - \alpha + \omega_1) \sigma(\alpha - iy' - \omega_1) \sigma_2(\alpha - iy' - \omega_1) \end{array} \right\}} \right|.$$

Or on a (*cf.* TANNERY et MOLK, *Fonctions elliptiques*, form. XII)

$$\sigma(u \pm \omega_1) = \pm e^{\pm \eta_1 u} \sigma \omega_1 \sigma_1 u,$$

$$\sigma_1(u + \omega_1) = -e^{\eta_1 u} \frac{\sigma_2 \omega_1 \sigma_3 \omega_1}{\sigma \omega_1} \sigma u,$$

$$\sigma_2(u - \omega_1) = e^{-\eta_1 u} \sigma_2 \omega_1 \sigma_3 u,$$

$$\sigma_3(u + \omega_1) = e^{+\eta_1 u} \sigma_3 \omega_1 \sigma_2 u;$$

moyennant quoi la quantité sous le signe log devient

$$\left| \frac{e^{8\eta_1 z}}{(\sigma_2 \omega_1 \sigma_3 \omega_1)^4} \right| = \left| \frac{e^{i\eta_1 \omega_1 + 8\eta_1 \delta}}{(\sigma_2 \omega_1 \sigma_3 \omega_1)^4} \right|.$$

Mais on sait que

$$\sigma_2 \omega_1 \sigma_3 \omega_1 = e^{\eta_1 \omega_1},$$

il reste donc

$$-\frac{2\pi}{J} B = -4\eta_1 \delta + \frac{1}{2} \log(e^{\eta_1 \delta}) = 0$$

ce que nous voulions prouver.

Cela étant, nous allons examiner, dans les circonstances où s'établirait la configuration des tourbillons alternés de M. Bénard, quelle est en moyenne la valeur de la résistance éprouvée par l'unité de longueur du cylindre en mouvement dans le fluide. Nous supposons

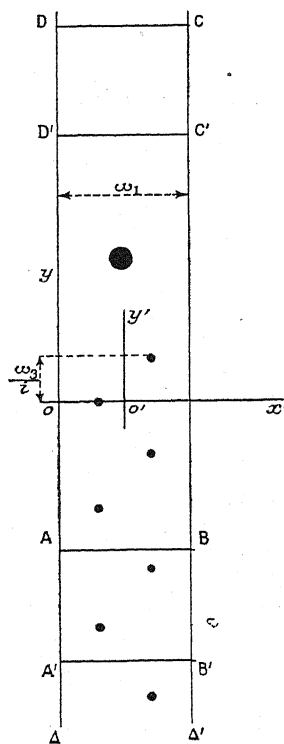


Fig. 2

donc que, dans notre plan  $x'o'y'$  (normal au cylindre), la base de ce cylindre — symétrique par rapport à la droite  $oy'$  — se déplace dans le sens  $o'y'$  avec la vitesse constante  $V$ .

A l'arrière du corps les tourbillons alternés se détachent (c'est un fait

d'expérience), et à une distance suffisante du corps, leur vitesse de déplacement absolu sera désignée par  $v'_0$ ; à l'avant du corps, aux grandes distances, le fluide est au repos. Au bout du temps  $T$  défini par

$$(6) \quad T(V - v'_0) = \frac{2\omega_3}{i},$$

— où  $v'_0$  représente la vitesse d'échappement des tourbillons — la configuration *relative* au corps a repris un aspect identique à l'aspect initial (fait d'expérience).

Dans ces conditions, en considérant le *mouvement relatif* du fluide par rapport aux axes  $o'x'y'$  liés aux tourbillons (et se déplaçant par suite avec la vitesse  $v'_0$ ), appliquons le théorème des quantités de mouvement à la masse fluide enfermée à chaque instant entre les parois  $\Delta, \Delta'$ , d'une part, et d'autre part une droite  $AB$  parallèle à  $o'x'$  à l'arrière du corps, à une distance notable, et traversant la bande précisément entre deux tourbillons consécutifs; et enfin une droite  $CD$ , loin vers l'avant, parallèle également à  $o'x'$ . Et appliquons notre théorème depuis l'instant  $\tau$  jusqu'à l'instant  $\tau + T$ .

En désignant par  $W$  la résistance (projetée sur  $oy$ ) qu'éprouve l'unité de longueur du cylindre, et par  $p$  la pression qui s'exerce sur un point de contour, on aura l'égalité

$$(7) \quad \Delta Q + M = - \int_{\tau}^{\tau+T} W dt + \int_{\tau}^{\tau+T} dt \int_{\uparrow \text{contour}} p dx'.$$

Au premier membre  $\Delta Q$  représente la différence des quantités de mouvement *présentes* dans le rectangle  $ADCD$  entre les deux instants  $\tau$  et  $\tau + T$  et  $M$  est la quantité du mouvement *sortie* du rectangle pendant le temps  $T$ .

Or, au bout du temps  $T$ , le corps a avancé, dans son mouvement relatif, de la longueur  $(V - v'_0)T = l$ ; et par suite la configuration dans le rectangle  $ABCD$  à l'instant  $\tau + T$  est identique à la configuration qui existait, à l'instant  $\tau$ , dans le rectangle  $A'B'C'D$  obtenu en décalant  $ABCD$  de la distance  $l$ .

La différence des quantités de mouvement *présentes* entre les deux instants considérés est donc égale à la quantité de mouvement du



rectangle ABA'B', diminuée de celle du rectangle DCD'C', au même instant  $\tau$ . Or, à l'avant, on a pour la vitesse *relative*

$$u' = 0, \quad v' = -v'_0$$

et à l'arrière

$$u' = \frac{\partial \psi}{\partial y'}, \quad v' = -\frac{\partial \psi}{\partial x'} - v'_0.$$

$\psi$  étant la fonction de courant donnée par l'équation (5).

A titre de vérification, nous constaterons que ces valeurs des vitesses nous fournissent bien, comme le bon sens l'exigeait, la même valeur pour le *débit* relatif, en amont et en aval. Car, en amont, la quantité de liquide qui traverse une section du canal pendant l'unité de temps est

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} -v'_0 dx' = -\omega_1 v'_0,$$

et en aval la quantité analogue sera

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x'} - v'_0 \right) dx' = -\omega_1 v'_0 - \left[ \psi \left( \frac{\omega_1}{2}, y' \right) - \psi \left( -\frac{\omega_1}{2}, y' \right) \right],$$

quantité égale à la précédente, à cause de la propriété essentielle de la fonction  $\psi$ , traduit par l'équation  $B = 0$ .

La différence des quantités de mouvement présentes dans ABCD est donc

$$\begin{aligned} & \rho \iint_{ABA'B'} \left( -\frac{\partial \psi}{\partial x'} - v'_0 \right) dx' dy' - \rho \iint_{CDC'D'} (-v'_0) dx' dy' \\ &= -\rho \iint_{ABA'B'} \frac{\partial \psi}{\partial x'} dx' dy' = -\rho \int_0^l \left[ \psi \left( \frac{\omega_1}{2}, y' \right) - \psi \left( -\frac{\omega_1}{2}, y' \right) \right] dy'. \end{aligned}$$

Elle est donc *nulle*, d'après le théorème démontré plus haut.

L'équation (7) devient donc, en désignant par  $W_m$  la valeur moyenne de  $W$  pendant le temps  $T$

$$(8) \quad T.W_m = \int_{\tau}^{\tau+T} dt \int_{\tau}^{\tau+T} p dx'$$

= Quantité du mouvement *entrée* dans ABCD pendant le temps  $T$ .

Évaluons maintenant le second membre de cette équation (8), en adoptant le même ordre d'approximation que l'on utilise dans la méthode classique concernant le fluide indéfini.

Nous savons que, si nous désignons par  $\alpha, \beta$  les cosinus directeurs de la normale extérieure à un contour fermé, la quantité du mouvement qui sort pendant l'unité de temps est, en projection sur  $o'y'$ ,

$$(9) \quad \int_{\Gamma} \rho (u' \alpha + v' \beta) v' ds = \rho \int_{\Gamma} v' (u' dy' - v' dx'),$$

$u', v'$  étant la vitesse relative aux tourbillons.

D'autre part, à cause de la permanence du mouvement *relatif*, aux *grandes distances*, nous pourrions y définir la pression  $p$  par l'équation

$$p = C - \frac{\rho}{2} (u'^2 + v'^2)$$

avec une approximation sans doute suffisante, et la contribution de la pression au second membre de (8) sera par suite

$$T \int_{\Gamma} - \frac{\rho}{2} (u'^2 + v'^2) dx' = T \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} (u'^2 + v'^2) dx'.$$

Au total nous trouvons donc

$$(10) \quad W_m = \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} (u'^2 - v'^2) dx' + 2 u' v' dy',$$

l'intégration étant effectuée sur ABCD.

Il est aisé de s'assurer que, en revenant aux vitesses *absolues* ( $u, v$ ) par les formules

$$u' = u, \quad v' = v - v'_0,$$

les termes en  $v'_0{}^2$  et en  $v'_0$  disparaissent dans (10), et qu'il reste

$$(11) \quad W_m = + \frac{\rho}{2} \int_{\Gamma} (u^2 - v^2) dx' + 2 uv dy',$$

Mais si l'on a

$$\frac{dz'}{dz} = u - iv$$

et

$$dz' = dx' + i dy',$$

il vient

$$(12) \quad W_m = \frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int \left( \frac{dz}{dz'} \right)^2 dz'.$$

Maintenant, sur AD et BC,  $u$  est nul,  $\left( \frac{dz}{dz'} \right)^2$  est réel,  $\int \left( \frac{dz}{dz'} \right)^2 dz'$  est imaginaire pure. On peut donc négliger les côtés verticaux AD et BC dans l'intégrale qui figure au second membre de (12). On peut aussi y négliger la portion concernant DC puisque dans cette région  $u$  et  $v$  sont nuls : ce n'est que loin à l'arrière, que les formules (2) et (5) sont valables (elles le sont sur AB). De sorte que dans (12) il ne reste à considérer que la portion AB du contour,  $\frac{dz}{dz'}$  s'y trouvant définie par les formules (1) et (2).

Dans ces conditions nous voyons qu'il viendra

$$W_m = -\frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int_{AB} \left( \frac{dz}{dz'} \right)^2 dx'.$$

A cause de la périodicité de la fonction définie par (1) et (2), et à cause du choix de AB, il revient au même de faire le calcul sur la droite

$$x' = \pm \frac{\omega_3}{2i},$$

et tout est donc amené au calcul de l'intégrale

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left( \frac{dz}{dz'} \right)^2 dx',$$

et l'on aura enfin

$$(13) \quad W_m = + \frac{\rho J^2}{8\pi^2} \mathcal{R} \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} S^2 dx',$$

avec

$$(14) \quad S = \zeta \left( \frac{\omega_3}{2} + x' + \delta \right) - \zeta_1 \left( \frac{\omega_3}{2} + x' - \delta \right) + \zeta_2 \left( \frac{\omega_3}{2} + x' + \delta \right) \\ - \zeta_3 \left( \frac{\omega_3}{2} + x' - \delta \right) - \frac{4\eta_1 \delta}{\omega_1}.$$

Tout revient donc au calcul de l'intégrale d'une certaine fonction elliptique.

Faisons la décomposition de  $S^2$  en éléments simples, en opérant avec la variable  $x' + \frac{\omega_3}{3} = z'$ , pour ne pas compliquer inutilement. Les pôles (doubles) sont  $z' = -\partial, \partial - \omega_1, -\partial - \omega_2, \partial + \omega_3$  dans le rectangle principal des périodes, construit sur les sommets  $-\omega_1, \omega_1, \omega_1 + 2\omega_3, -\omega_1 + 2\omega_3$  (légèrement décalé vers le bas).

Posant  $z' = -\partial + h$ , et

$$(15) \quad P = \zeta_1(2\partial) + \zeta_3(2\partial) - \frac{4\eta_1\partial}{\omega_1},$$

on trouve immédiatement

$$S^2 = \frac{1}{h^2} + \frac{2P}{h} + \text{série entière en } h.$$

De même, pour  $z' = \partial - \omega_1 + h'$ , il vient

$$S^2 = \frac{1}{h'^2} - \frac{2P}{h'} + \dots$$

Pour  $z' = -\partial - \omega_2 + h''$ ,

$$S^2 = \frac{1}{h''^2} + \frac{2P}{h''} + \dots$$

Pour  $z' = \omega_3 + \partial + h'''$ ,

$$S^2 = \frac{1}{h'''^2} - \frac{2P}{h'''} + \dots$$

On peut donc écrire

$$(16) \quad S^2 = p(z' + \partial) + p(z' - \partial + \omega_1) + p(z' + \partial + \omega_2) + p(z' - \partial - \omega_3) \\ + 2P \{ \zeta(z' + \partial) - \zeta(z' - \partial + \omega_1) + \zeta(z' + \partial + \omega_2) - \zeta(z' - \partial - \omega_3) \} + Q,$$

en désignant par  $Q$  une constante, dont on trouvera la valeur en donnant à  $z'$  une valeur quelconque, par exemple  $z' = 0$ , dans le rectangle des périodes. Cette substitution donne immédiatement

$$(17) \quad \left( \zeta\partial + \zeta_1\partial + \zeta_2\partial + \zeta_3\partial - \frac{4\eta_1\partial}{\omega_1} \right)^2 = p\partial + p(\omega_1 + \partial) + p(\omega_2 + \partial) + p(\omega_3 + \partial) \\ + 2P[\zeta\partial + \zeta_1\partial + \zeta_2\partial + \zeta_3\partial - 2\eta_1] + Q.$$

Mais la formule bien connue (Tannery et Molk, XI, 3)

$$\sigma(2\partial) = 2\sigma\partial\sigma_1\partial\sigma_2\partial\sigma_3\partial$$

donne

$$2\zeta(2\partial) = \zeta\partial + \zeta_1\partial + \zeta_2\partial + \zeta_3\partial$$

et

$$4p(2\partial) = p\partial + p(\partial + \omega_1) + p(\partial + \omega_2) + p(\partial + \omega_3),$$

de sorte que la relation (17) devient

$$(18) \quad Q = 4 \left\{ \left[ \zeta(2\delta) - \frac{3\omega_1\delta}{\omega_1} \right]^2 - P(2\delta) - P[\zeta(2\delta) - \omega_1] \right\}.$$

Il nous faut maintenant calculer l'intégrale

$$L = \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} S^2 dv',$$

ou, ce qui revient au même,

$$(19) \quad L = \int_{\frac{\omega_3}{2} - \frac{\omega_1}{2}}^{\frac{\omega_3}{2} + \frac{\omega_1}{2}} S^2(z') dz',$$

$S^2(z')$  étant la fonction de  $z'$  définie par (16), et  $P$  et  $Q$  ayant les valeurs (15) et (18). L'intégrale indéfinie fournira les trois éléments suivants :

$$\begin{aligned} \alpha &= -\zeta(z' + \delta) - \zeta(z' - \delta + \omega_1) - \zeta(z' + \delta + \omega_2) - \zeta(z' - \delta - \omega_3), \\ \beta &= 2P \left\{ \log \frac{\sigma(z' + \delta) \sigma(z' + \delta + \omega_2)}{\sigma(z' - \delta + \omega_1) \sigma(z' - \delta - \omega_3)} \right\}, \\ \gamma &= Q z', \end{aligned}$$

et par suite l'intégrale  $L$  sera la somme

$$(20) \quad L = \alpha_1 + \beta_1 + \gamma_1$$

des trois quantités suivantes :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= -\zeta\left(\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} + \delta\right) - \zeta\left(\frac{3\omega_1 + \omega_3}{2} - \delta\right) - \zeta\left(-\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} + \delta\right) \\ &\quad - \zeta\left(\frac{\omega_1 - \omega_3}{2} - \delta\right) + \zeta\left(\frac{\omega_3 - \omega_1}{2} + \delta\right) + \zeta\left(\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} - \delta\right) \\ &\quad + \zeta\left(-\frac{3\omega_1 + \omega_3}{2} + \delta\right) + \zeta\left(-\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} - \delta\right), \\ \beta_1 &= 2P \log \frac{\left\{ \sigma\left(\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} + \delta\right) \sigma\left(-\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} + \delta\right) \right\}}{\left\{ \sigma\left(\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} - \delta\right) \sigma\left(-\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} - \delta\right) \right\}} \\ &\quad \frac{\left\{ \sigma\left(\frac{\omega_3 + 3\omega_1}{2} - \delta\right) \sigma\left(\frac{\omega_1 - \omega_3}{2} - \delta\right) \right\}}{\left\{ \sigma\left(\frac{\omega_3 + \omega_1}{2} + \delta\right) \sigma\left(-\frac{3\omega_1 + \omega_3}{2} + \delta\right) \right\}}, \\ \gamma_1 &= Q \omega_1. \end{aligned}$$

Or en posant

$$\frac{\omega_1 + \omega_3}{2} + \partial = \lambda,$$

$$\frac{\omega_1 - \omega_3}{2} + \partial = \mu.$$

il vient

$$(21) \quad \frac{1}{2} \alpha_1 = -\zeta \lambda + \zeta_1 \mu + \zeta_1 \lambda - \zeta_1 \mu - 2 \eta_1.$$

Nous nous préoccupons, en vue de de l'équation (13), uniquement de la partie réelle de l'intégrale L, donc des parties réelles  $\alpha'_1$ ,  $\beta'_1$ ,  $\gamma'_1$ , de  $\alpha_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\gamma_1$ . Il est clair, puisque  $\lambda$  et  $\mu$  sont deux imaginaires conjugués, que l'on a d'après (21) :

$$(22) \quad \alpha'_1 = -4 \eta_1.$$

Examinons maintenant  $\beta_1$ , et transformons-en l'expression en y faisant également apparaître les nombres  $\lambda$  et  $\mu$ . Il vient aisément

$$\frac{\beta_1}{2P} = \log \left( \frac{\sigma \lambda \sigma (\mu - \omega_1)}{\sigma (\lambda - \omega_1) \sigma (\mu - 2\omega_1)} \right)^2 = \log \left( \frac{\sigma \lambda}{\sigma \mu} \frac{\sigma_1 \mu}{\sigma_1 \lambda} e^{\eta_1 (\lambda + \mu - 2\omega_1)} \right)^2,$$

Comme les quotients  $\frac{\sigma \lambda}{\sigma \mu}$ ,  $\frac{\sigma_1 \lambda}{\sigma_1 \mu}$  ont pour module l'unité, la partie réelle de  $\beta_1$  est fournie par l'égalité

$$\beta'_1 = 4P (\lambda + \mu - 2\omega_1) \eta_1,$$

ou bien

$$(23) \quad \beta'_1 = 4P \eta_1 (2\partial - \omega_1),$$

Enfin, comme le coefficient Q est réel,

$$\gamma'_1 = Q \omega_1.$$

Par suite, il vient en définitive

$$\mathcal{R}(L) = \alpha'_1 + \beta'_1 + \gamma'_1$$

ou en réduisant

$$(25) \quad \mathcal{R}(L) = 4\omega_1 \left\{ \left[ \zeta(2\partial) - \frac{2\eta_1 \partial}{\omega_1} \right]^2 - p(2\partial) - \zeta(2\partial) \left[ \zeta_1(2\partial) + \zeta_3(2\partial) - \frac{4\eta_1 \partial}{\omega_1} \right] + 8\eta_1 \partial \left[ \zeta_1(2\partial) + \zeta_3(2\partial) - \frac{4\eta_1 \partial}{\omega_1} \right] - 4\eta_1 \right\}$$

Après quoi nous aurons, par (13),

$$(26) \quad W = \frac{\rho J^2}{8\pi^2} \mathcal{R}(L).$$

*Examen du cas limite où l'on opère dans une bande de largeur indéfinie.* — Le cas limite où la largeur de la bande est infinie est celui où l'on opère en fluide illimité, c'est celui qui a été examiné dans le calcul de Karman. Voyons d'un peu près à quel résultat nous serons amenés : il nous faut pour cela supposer que  $\omega_1$  devient infini, la distance  $2\delta$  des deux files tourbillonnaires restant finie, ainsi que l'équidistance  $\frac{2\omega_3}{i}$ .

Dans ces conditions il est bien connu que l'on a (Tannery et Molk, CXXII)

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\omega_1} &\sim \frac{\pi^2}{12\omega_3^2}, \\ p u &\sim -\frac{\pi^2}{4\omega_3^2} \left( \frac{1}{3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{i\pi u}{2\omega_3}} \right), \\ \zeta u &\sim \frac{i\pi}{2\omega_3} \left( -\frac{i\pi u}{6\omega_3} + \coth \frac{i\pi u}{2\omega_3} \right), \\ \zeta_1 u &\sim \frac{\pi^2 u}{12\omega_3^2}, \\ \zeta_2 u &\sim \frac{\pi^2 u}{12\omega_3^2}, \\ \zeta_3 u &\sim \frac{\pi^2 u}{12\omega_3^2} + \frac{i\pi}{2\omega_3} \operatorname{th} \frac{i\pi u}{2\omega_3}. \end{aligned}$$

Si l'on transporte ces résultats dans l'expression (25) de  $\mathcal{R}(L)$ , on trouve  $\frac{\pi^2 \omega_1}{\omega_3^2} \left( -\coth^2 \frac{i\pi \delta}{\omega_3} + \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{i\pi \delta}{\omega_3}} + 1 \right)$ , c'est-à-dire zéro : l'approximation n'est pas suffisante pour les fonctions  $\zeta$  et  $p$ ; il faut utiliser des développements plus étendus. A cet effet, puisque nous sommes dans le cas où le module  $q = e^{-\frac{\pi \omega_3}{i\omega_1}}$  tend vers 1, il est opportun de passer, des fonctions elliptiques construites sur les demi-périodes  $\omega_1$  et  $\omega_3$ , aux fonctions construites sur

$$\omega'_1 = \frac{\omega_3}{i} \quad \text{et} \quad \omega'_3 = i\omega_1.$$

Les formules d'homogénéité bien connues nous donneront alors

$$\begin{aligned}\zeta(iu | i\omega_1, i\omega_3) &= -i\zeta(u | \omega_1 \omega_3), \\ p(iu | i\omega_1, i\omega_3) &= -p(u | \omega_1 \omega_3).\end{aligned}$$

On aura donc, en marquant de l'accent les éléments relatifs aux fonctions construites sur  $\omega'_1, \omega'_3$ ,

$$\begin{aligned}\gamma'_1 &= i\gamma_3, & \gamma'_3 &= -i\gamma_1, \\ e'_1 &= -e_3, & e'_2 &= -e_2, & e'_3 &= -e_1,\end{aligned}$$

puis

$$\begin{aligned}\zeta_1\left(iu \left| \frac{\omega_3}{i}, i\omega_1 \right. \right) &= \zeta\left(iu + \frac{\omega_3}{i} \left| i\omega_1, i\omega_3 \right. \right) - i\gamma_3 \\ &= -i\zeta(u - \omega_3 | \omega_1 \omega_3) - i\gamma_3 \\ &= -i[\zeta_3(u | \omega_1 \omega_3) - \gamma_3] - i\gamma_3 = -i\zeta_3(u | \omega_1 \omega_3),\end{aligned}$$

d'où les trois formules semblables :

$$\begin{aligned}\zeta_1(iu | i\omega_1, i\omega_3) &= -i\zeta_3(u | \omega_1 \omega_3), \\ \zeta_2(iu | i\omega_1, i\omega_3) &= -i\zeta_2(u | \omega_1 \omega_3), \\ \zeta_3(iu | i\omega_1, i\omega_3) &= -i\zeta_1(u | \omega_1 \omega_3).\end{aligned}$$

Enfin  $q' = e^{-\frac{\pi\omega'_3}{i\omega'_1}}$  tendra maintenant vers zéro.

Utilisons maintenant les formules CVI, 2 et 3, de TANNERY et MOLK, il viendra immédiatement :

$$\begin{aligned}\zeta(2\delta | \omega_1 \omega_3) - \frac{2\gamma_1\delta}{\omega_1} &= -\frac{2\delta\gamma'_1}{\omega'_1} + \frac{i\pi}{2\omega'_1} \cotg \frac{i\pi\delta}{\omega'_1} \\ &\quad + \frac{2i\pi}{\omega'_1} \sum_1^\infty \frac{q'^{2r}}{1-q'^{2r}} \sin \frac{2i\pi r\delta}{\omega'_1} + \frac{2\gamma'_3\delta}{\omega'_3} \\ &= -\frac{i\pi\delta}{\omega'_1\omega'_3} + \frac{\pi}{2\omega'_1} \coth \frac{\pi\delta}{\omega'_1} - \frac{2\pi}{\omega'_1} \sum_1^\infty \frac{q'^{2r}}{1-q'^{2r}} \operatorname{sh} \frac{2\pi r\delta}{\omega'_1}.\end{aligned}$$

On trouvera de même

$$\begin{aligned}\zeta_1(2\delta) + \zeta_3(2\delta) - \frac{4\gamma_1\delta}{\omega_1} &= -\frac{2i\pi\delta}{\omega'_1\omega'_3} + \frac{\pi}{2\omega'_1} \operatorname{th} \frac{\pi\delta}{\omega'_1} \\ &\quad - \frac{2\pi}{\omega'_1} \sum_1^\infty (-1)^r \frac{q'^{2r}}{1-q'^{2r}} \operatorname{sh} \frac{2\pi r\delta}{\omega'_1} \\ &\quad - \frac{2\pi}{\omega'_1} \sum_1^\infty \frac{q'^r}{1-q'^{2r}} \operatorname{sh} \frac{2\pi r\delta}{\omega'_1}.\end{aligned}$$



Portons ces résultats dans  $R(L)$ , en y remplaçant en outre  $\gamma_1$  par  $i\gamma'_3$ , ou bien par  $\frac{i\gamma'_1\omega'_3}{\omega'_1} + \frac{\pi}{2\omega'_1}$ , et en utilisant encore l'expression classique

$$p(2\partial|\omega_1\omega_3) = -p(2i\partial|\omega'_1\omega'_3) = \left\{ \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} + \frac{\pi^2}{4\omega'^2_1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi\partial}{\omega'_1}} + \frac{2\pi^2}{\omega'^2_1} \sum_1^\infty \frac{r q'^{2r}}{1 - q'^{2r}} \operatorname{ch} \frac{2\pi r \partial}{\omega'_1} \right\}.$$

On écrira sans peine le résultat de cette transcription. Il y figurera des termes en  $\frac{1}{\omega'_3}$ , qui tendront vers zéro à la limite puisque c'est maintenant  $\omega'_3$  qui devient infini; on aura aussi des termes de la forme  $Aq'^k\omega'_3$ , ou encore  $A \frac{\omega'_3}{e^{\frac{K\pi\omega'_3}{i\omega'_1}}}$  qui tendront également vers zéro. Le terme en  $\omega'_3$  aura pour coefficient

$$\begin{aligned} & \frac{\pi^2}{i\omega'^2_1} \coth \frac{\pi\partial}{\omega'_1} - \frac{4\gamma'_1}{i\omega'_1} - \frac{\pi^2}{i\omega'^2_1} \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi\partial}{\omega'_1}} \\ & - \frac{4}{i} \left( -\frac{2\partial\gamma'_1}{\omega'_1} + \frac{\pi}{2\omega'_1} \coth \frac{\pi\partial}{\omega'_1} \right) \frac{\pi}{2\omega'_1} \operatorname{th} \frac{\pi\partial}{\omega'_1} \\ & + 8i\partial \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} \frac{\pi}{2\omega'_1} \operatorname{th} \frac{\pi\partial}{\omega'_1} - 4i \frac{\gamma'_1}{\omega'_1}, \end{aligned}$$

c'est-à-dire

$$\frac{\pi^2}{i\omega'^2_1} \left( \coth^2 \frac{\pi\partial}{\omega'_1} - \frac{1}{\operatorname{sh}^2 \frac{\pi\partial}{\omega'_1}} - 1 \right),$$

ou encore zéro. Ceci est le résultat déjà rencontré plus haut.

Enfin il reste le terme indépendant de  $\omega'_3$  et ne contenant aucune puissance de  $q'$  en facteur; ce terme se présente immédiatement sous la forme

$$\begin{aligned} & -\frac{8\pi\partial}{\omega'_1} \left( \frac{\pi}{2\omega'_1} \coth \frac{\pi\partial}{\omega'_1} \right) + \frac{8\pi\partial}{\omega'_1} \left( -\frac{2\partial\gamma'_1}{\omega'_1} + \frac{\pi}{2\omega'_1} \coth \frac{\pi\partial}{\omega'_1} \right) + 8i\partial \frac{\gamma'_1}{\omega'_1} \left( -\frac{2i\pi\partial}{\omega'_1} \right) \\ & + 8i\partial \left( -\frac{i\pi}{2\omega'_1} \right) \left( \frac{\pi}{2\omega'_1} \operatorname{th} \frac{\pi\partial}{\omega'_1} \right) - 4i \left( -\frac{i\pi}{2\omega'_1} \right) \end{aligned}$$

ou en réduisant

$$\frac{2\pi^2\partial}{\omega'^2_1} \operatorname{th} \frac{\pi\partial}{\omega'_1} - \frac{2\pi}{\omega'_1}.$$

En sorte que la formule (26) nous donne à la limite

$$W' = \lim W = \frac{\rho J^2}{4\omega_1^2} \operatorname{th} \frac{\pi \delta}{\omega_1} - \frac{\rho J^2}{4\pi\omega_1}.$$

En revenant aux notations de M. Karman, et désignant par  $l$  l'équidistance  $\frac{2\omega_3}{l}$ , par  $h$  la distance  $2\delta$  des deux files de tourbillons, cette formule prend en définitive la forme

$$-W' = \frac{\rho J^2}{2\pi l} \left( 1 - \frac{\pi h}{l} \operatorname{th} \frac{\pi h}{l} \right).$$

Cette formule ne coïncide pas avec la formule de Karman (Ch. v. KARMAN et H. RUBACH (*Physikalische Zeitschrift*, 1912, p. 49, « Ueber den Mechanismus des Flüssigkeits und Luftwiderstandes »)). Elle en diffère du terme  $\frac{\rho Jh}{T}$  qui, dans le raisonnement de Karman, provenait de la différence de la quantité de mouvement dans les deux régions ABA'B', et CDC'D' envisagées dans le fluide où l'on avait isolé d'abord un rectangle ABCD de grande largeur AB.

Dans nos hypothèses actuelles, nous avons constaté que cette différence était *nulle*, et elle le restera tant qu'il y aura des *parois solides* AD et BC, même si celles-ci sont très éloignées.

Cependant notre fonction  $\psi$  définie par l'équation (5) deviendra bien, à la limite, la fonction de courant qui convient aux tourbillons de Bénard. Cela est facile à vérifier en utilisant les formules suivantes (cf. TANNERY et MOLL, *Fonct. elliptiques*, f. CXXII, 11) concernant le cas où  $\omega_1$  est infini :

$$\begin{aligned} \frac{\eta_1}{\omega_1} &\sim \frac{\pi^2}{12\omega_3^2}, \\ \sigma u &\sim \frac{2\omega_3}{i\pi} \operatorname{sh} \frac{i\pi u}{2\omega_3} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}, \\ \sigma_1 u &\sim e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}, \\ \sigma_2 u &\sim e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}, \\ \sigma_3 u &\sim \operatorname{ch} \frac{i\pi u}{2\omega_3} e^{\frac{\pi^2 u^2}{24\omega_3^2}}. \end{aligned}$$

En appelant  $\psi'$  ce qui devient (à une constante près) la fonction  $\psi$ , on trouve ainsi

$$\psi' = \frac{J}{2\pi} \log \left| \frac{\operatorname{ch} \frac{i\pi(z' - \delta)}{2\omega_3}}{\operatorname{sh} \frac{i\pi(z' + \delta)}{2\omega_3}} \right|.$$

Or dans le calcul concernant les tourbillons de Bénard en fluide

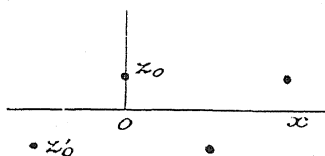


Fig. 3.

indéfini, et avec les axes de la figure ci-dessus, on avait la fonction de courant

$$\psi'' = \frac{J}{2\pi} \log \left| \frac{\sin \frac{\pi}{l}(z - z'_0)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - z_0)} \right|.$$

En posant  $z_0 = \frac{ih}{2} = i\delta$ ,  $z'_0 = -i\delta - \frac{l}{2}$ , il vient

$$\psi'' = \frac{J}{2\pi} \log \left| \frac{\cos \frac{\pi}{l}(z + i\delta)}{\sin \frac{\pi}{l}(z - i\delta)} \right|.$$

Si enfin nous faisons la transformation  $z' = iz$  qui correspond à une rotation de la figure, d'un angle droit, nous retomberons, à une constante près, sur  $\psi'$ .

*Il y a donc raccord à la limite, entre les deux fonctions de courant, ce qui du reste n'est pas très surprenant. Mais, tandis que la fonction  $\psi''$  fournit dans la résistance le terme  $\frac{\rho Jh}{T}$ , la fonction  $\psi$  concernant le fluide limité, dans un canal même très large, ne pouvait nous conduire à ce terme.*

Il est clair que la vitesse  $V$  de déplacement du cylindre, qui n'intervient pas explicitement, figure implicitement dans ces formules, car c'est elle qui régit les conditions d'établissement du phénomène, et de

cette vitesse dépendent évidemment les quantités  $\partial$ ,  $\omega_3$ , et par suite  $v_0$ .

Il est assez vraisemblable que la non-concordance de la formule limite, avec la formule classique, dépend du fait que dans la méthode suivie l'approximation, signalée plus haut pour le calcul qui concerne  $p$ , est sans doute devenue insuffisante alors que cette même méthode était entièrement suffisante dans le cas du fluide indéfini. Et, en effet, cette vue se confirme par le travail de M. L. Rosenhead que nous signalons à la fin de notre Introduction.

Il est facile de voir que l'expression trouvée ci-dessus pour la fonction  $\gamma(z')$  est spécialement appropriée à l'application du théorème de M. Syngé dont fait usage M. Rosenhead.

M. J.-L. Syngé (*Proc. Roy. Irish Acad.*, t. XXXVII, A, 1927, p. 95) a démontré qu'en désignant par  $(X_m, Y_m)$  les composantes de la résistance moyenne éprouvée par l'unité de longueur d'un cylindre immergé avec production de tourbillons alternés en régime bien périodique, on a la formule

$$(27) \quad T(X_m - iY_m) = -\rho \int_{\gamma} [\bar{\varphi}]_0^T (dY + i dX) - \frac{i\rho}{2} \int_0^T dt \int_{\gamma} \bar{\omega}^2 dZ.$$

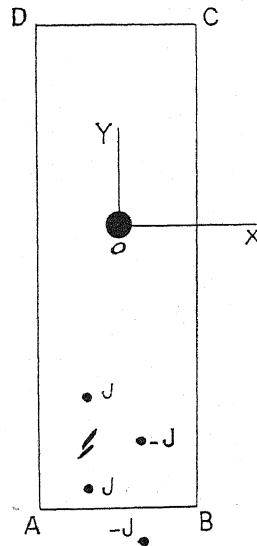


Fig. 4.

Les axes OXY sont ici des axes *liés au corps*;  $\bar{\omega} = \bar{u} - i\bar{v}$  représente la vitesse complexe par rapport à ces axes, et  $\bar{\varphi}$  est le potentiel ( $\bar{\gamma}$ , le

potentiel complexe) dans le même mouvement relatif. Enfin  $\gamma$  représente ici le contour ABCD formé d'une section du canal, loin en aval (passant entre deux tourbillons consécutifs, par exemple à mi-distance verticale de ceux-ci), de deux bords BC et DA du canal, et de la section CD loin en amont.

On a donc, pour les vitesses  $\bar{u}$ ,  $\bar{v}$ , les valeurs 0,  $-V$ , à l'amont, et

$$\frac{\partial \psi}{\partial y}, -\frac{\partial \psi}{\partial x} = V$$

à l'aval.

On a aussi, à l'amont,  $\bar{w} = iV$ , et à l'aval

$$(28) \quad \bar{w} = w + iV.$$

Cela étant, on tire de la formule (27)

$$(29) \quad T\gamma_m = \rho \int_{AB+CD} [\bar{\varphi}]_0^T dN + \frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int_0^T dt \int_{\gamma} \bar{w}^2 dZ.$$

Pour le premier terme qui figure à droite dans la formule (29), tout revient à calculer l'intégrale

$$\int_{AB} [\bar{\varphi}]_0^T dN,$$

ou encore

$$\int_{AB} [\varphi]_0^T dN,$$

puisque

$$\bar{\varphi} = \varphi + iVX.$$

A cet effet, M. L. Rosenhead remarque qu'il suffit de s'occuper individuellement des deux files tourbillonnaires, en remplaçant l'existence des parois du canal par des files doubles en nombre infini, obtenues par des symétries successives relativement à ces parois. Bien que l'intégration soit faite sur AB, c'est-à-dire *sur un domaine fini*, il n'est pas évident que l'erreur commise en considérant les files tourbillonnaires comme indéfinies *dans les deux sens* tende vers zéro lorsque AB s'éloigne à l'infini. Il en est cependant ainsi, car au moyen d'un raisonnement élémentaire, on voit que les tourbillons fictifs obtenus par les images indiquées produisent le même effet que si l'on ne tenait compte que des tourbillons réellement existant dans le canal, mais en intégrant sur une largeur infinie (dans les deux sens) au lieu de se

contenter de la largeur AB. On peut alors conclure, comme dans nos *Leçons sur la Théorie des Tourbillons*, (Chap. VI, p. 150), que dans ces conditions on peut remplacer la portion de  $[\varphi]_0^T$  qui correspond à une file où l'intensité est J, par

$$(30) \quad \frac{J}{2\pi} \oint \sum_{-\infty}^{+\infty} \arg(Z - Z_n).$$

Mais comme, dans le temps qui s'écoule de O à T, chaque tourbillon s'est trouvé exactement décalé d'un rang vers le bas, on voit immédiatement que la contribution (30) est égale à  $\frac{\varepsilon J}{2}$ ,  $\varepsilon$  étant égal à  $\pm 1$  suivant que le point Z se trouve à droite ou à gauche de la file envisagée. De même, pour une file où l'intensité est  $-J$ , la contribution analogue sera la même, mais changée de signe,  $-\frac{\varepsilon J}{2}$ .

On voit donc que ce qui proviendra, sur AB, des doubles files fictives à gauche ou à droite du canal sera *nul*; et il ne restera à envisager que les deux files réellement existant à l'intérieur du canal. Elles fourniront du reste au total *zéro*, sauf si le point Z est *entre les deux* files, auquel cas on obtiendra

$$\frac{J}{2} + \frac{J}{2} = J.$$

Le premier terme à droite dans (29) sera donc égal à  $2\rho J\delta$  et fournira pour  $Y_m$  la portion  $\frac{2\rho J\delta}{T}$ , ou encore, en appelant  $h$  la distance des deux files de tourbillons,  $\frac{\rho J h}{T}$ . C'est là *justement le terme de la formule de Karman* qui n'était pas obtenu par la première méthode.

Il ne reste plus qu'à examiner le second terme de la formule (29) et à constater qu'il nous fournit la même expression que celle que nous avons obtenue dans la première partie de ce travail.

Sur BC et DA,  $\bar{\omega}$  étant imaginaire pure, la portion correspondante de  $\int \bar{\omega}^{-2} dZ$  ne fournira aucune contribution à  $Y_m$ . Sur CD, on a

$$\bar{\omega} = iV$$

et

$$\int_{CD} \bar{\omega}^{-2} dZ = - \int_{\omega_1}^{\frac{\omega_1}{2}} (-V^2) dX = \omega_1 V^2.$$

Sur AB, on a

$$\begin{aligned}\int_{AB} \frac{-2}{\omega^2} dZ &= \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left[ -V^2 + 2iV \frac{dZ}{dX} + \left( \frac{dZ}{dX} \right)^2 \right] dX \\ &= -V^2 \omega_1 + 2iV \left[ \varphi \right]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} - 2V \left[ \psi \right]_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} + \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \omega^2 dX,\end{aligned}$$

et par suite, à cause de la propriété essentielle démontrée pour la fonction  $\psi$ ,

$$\mathcal{R} \int_{AB} \frac{-2}{\omega^2} dZ = -V^2 \omega_1 + \mathcal{R} \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left( \frac{dZ}{dX} \right)^2 dX.$$

Le dernier terme de la formule (29) se réduit donc, en définitive, à

$$(31) \quad \frac{\rho}{2} \mathcal{R} \int_0^T dt \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left( \frac{dZ}{dX} \right)^2 dX.$$

A cause de la formule (2) qui donne  $u - iv = w$ , c'est-à-dire  $\frac{dZ}{dX}$ , l'expression à intégrer par rapport à  $X$  n'est autre, à un facteur constant près, que l'intégrale

$$\int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left[ \zeta(z' + \delta) - \zeta_1(z' - \delta) + \zeta_2(z' + \delta) - \zeta_3(z' - \delta) - \frac{4\eta_1 \delta}{\omega_1} \right]^2 dx',$$

effectuée à une certaine section droite  $H_1$  du canal. Or, la partie réelle

$$U_{H_1} = \mathcal{R} \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left[ \zeta(z' + \delta) - \dots - \frac{4\eta_1 \delta}{\omega_1} \right]^2 dx'$$

est indépendante de la section sur laquelle on aura intégré.

On a en effet, en intégrant la fonction

$$S^2 = \left[ \zeta(z' + \delta) - \dots - \frac{4\eta_1 \delta}{\omega_1} \right]^2,$$

le long du contour  $abcd$  de la figure,

$$\int_{abcd} S^2 dz' = 2i\pi \Sigma \text{Résidus},$$

les résidus étant ceux de la fonction  $S^2$  dans le rectangle  $abcd$ .

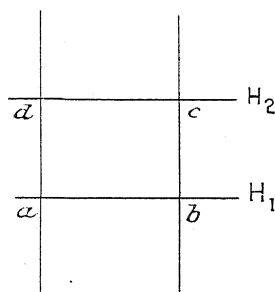


Fig. 5.

Comme  $S$  est imaginaire pure sur les parois du canal (où  $u = 0$ ), les quantités

$$\int_{bc} S^2 i dy' \quad \text{et} \quad \int_{da} S^2 i dy'$$

sont imaginaires pures, et l'on a

$$U_{H_1} - U_{H_2} = -2\pi \Sigma \text{Résidus de } S^2.$$

Or nous avons constaté, dans un calcul antérieur, que les résidus de  $S^2$  étaient *réels* et égaux à

$$\pm 2 \left[ \zeta_1(2\partial) + \zeta_3(2\partial) - \frac{4\eta_1\partial}{\omega_1} \right].$$

Il en résulte donc

$$U_{H_1} = U_{H_2}$$

et par suite l'expression (31) se réduira à

$$\rho \frac{T}{2} \mathcal{R} \int_{-\frac{\omega_1}{2}}^{+\frac{\omega_1}{2}} \left[ \frac{dZ \left( x' + \frac{\omega_3}{2} \right)}{dZ} \right]^2 dx',$$

c'est-à-dire l'expression  $-TW_m$  de notre première méthode, ce qui achève la vérification annoncée.