ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GASTON JULIA

Remarques sur « La meilleure approximation en moyenne » et sur le problème de Dirichlet

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 247-258
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__247_0>

REMARQUES

SUR

« LA MEILLEURE APPROXIMATION EN MOYENNE »

ET SUR

LE PROBLÈME DE DIRICHLET

PAR M. GASTON JULIA

Introduction. — J'ai montré, dans un Mémoire inséré aux *Comptes rendus du Congrès International de Bologne* de septembre 1928, et exposant une Communication faite à ce Congrès, comment on pouvait résoudre le problème de Dirichlet relatif à l'aire bornée limitée par une *courbe de Jordan simple fermée* par le procédé d'approximation suivant : $f(m)$ étant la fonction donnée, continue sur C, vers laquelle doit tendre la fonction $F(x, y)$ cherchée, harmonique dans C quand le point (x, y) tend vers m de C, on détermine le (ou les) polynome harmonique $P_n(x, y)$ de degré $\leqq n$ dont « l'*écart à $f(m)$ sur* C » *est minimum;* lorsque n devient infini, $P_n(x, y)$ converge uniformément dans C et sur C vers la fonction $F(x, y)$ cherchée. Dans le Mémoire précédent, l'écart de $f(m)$ à $P_n(m)$ sur C a été défini comme le maximum de $|f(m) - P_n(m)|$ lorsque m décrit C. On va résoudre maintenant le même problème en donnant de l'écart une autre définition. La courbe de Jordan C étant représentée paramétriquement par $x = x(t)$, $y = y(t)$ et la donnée $f(m)$ sur C étant une fonction du paramètre t dénommée $f(t)$, nous appellerons ici écart à $f(t)$, sur C, du polynome $P(x, y)$ l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |f(t) - P[x(t), y(t)]|^p \, dt,$$

p étant un nombre fixe quelconque > 1. Nous montrerons l'existence d'un polynome harmonique d'ordre $\leqq n$ dont l'écart à $f(t)$ sur C est minimum, et nous montrerons qu'il tend dans C vers $F(x, y)$, solution du problème de Dirichlet relatif à la donnée $f(t)$.

Mais, *a priori*, la représentation paramétrique de C étant dans une large mesure indéterminée, si l'on veut que cette indétermination n'influe pas sur le polynome $P_n(x, y)$ d'écart minimum, il faut choisir un paramètre de représentation θ qui ait un *sens géométrique*. Une courbe de Jordan simple fermée n'étant pas rectifiable en général, il n'est pas possible de songer au paramètre s, abscisse curviligne, comme l'ont fait pour le cas particulier $p = 2$, M. Serge Bernstein (*Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris*, 148, 17 mai 1909), et après lui, M. Marcel Brillouin et M. Picone [V. Picone, *Rendiconti della reale Accademia dei Lincei*, 1922, p. 357].

Nous choisirons ici pour paramètre θ, celui sur lequel la représentation conforme a attiré l'attention, et grâce auquel on peut notamment, comme l'a montré M. Fejér, représenter paramétriquement toute courbe de Jordan simple fermée par des fonctions $x(\theta)$, $y(\theta)$, *continues et développables en série de Fourier*. Nous utiliserons ici surtout des propriétés de la représentation conforme, les travaux précédemment cités se rattachant surtout à la théorie des séries de fonctions orthogonales.

Définition du paramètre θ. — 1. Imaginons la courbe de Jordan C du plan $z = x + iy$, représentée paramétriquement à l'aide du paramètre $\theta (0 \leqq \theta \leqq 2\pi)$ dont le sens géométrique est le suivant :

On sait que O, origine du plan z, étant un point intérieur à C, on peut représenter l'intérieur de C d'une manière conforme sur l'intérieur du cercle Γ du plan Z ayant pour centre l'origine O du plan Z et pour rayon l'unité. La fonction de correspondance conforme $Z = g(z)$ est parfaitement définie si l'on donne l'argument de $g'(0)$; nous choisissons ici $g'(0)$ réel et positif [arg. de $g'(0)$ nul]. Alors, on sait (Carathéodory) que $g(z)$ est continue sur C et fait correspondre à chaque point m de C un point M et un seul de Γ, la correspondance entre m et M étant biunivoque et bicontinue. Appelons θ l'argument du point M de Γ qui correspond ainsi au point m d'affixe (z) de C. Les coordonnées de m seront ainsi des fonctions $x(\theta)$ et $y(\theta)$ continues et périodiques au moyen desquelles C sera représenté paramétriquement et correspondra d'une manière biunivoque et bicontinue au cercle Γ. On remarquera que, si l'argument de $g'(o)$ est choisi $\neq$ o, cela revient, comme on sait, à multiplier $g(z)$ par une constante $e^{i\alpha}$ (α réel), donc à augmenter tous les θ d'une même constante, et ceci n'a aucune importance pour ce qui va suivre [1].

2. La représentation de C sur Γ par $z = x(\theta) + iy(\theta)$ étant ainsi faite, une fonction continue $f(m)$ de m sur C devient une fonction continue de θ que nous désignons par $f(\theta)$. Soit $\varphi(x, y)$ une fonction continue de x et y dans C et sur C, nous appellerons ici *écart de φ à f*

---

[1] A vrai dire, le point M de Γ (et, par suite, la valeur de θ) correspondant à un point m de C, dépend du point O choisi pour origine dans le plan z. Ce que l'on dira dans la suite, par exemple, la définition du polynome harmonique P_n de degré n, qui s'écarte le moins de $f(m)$ sur C, dépendra évidemment du choix de O. Remplacer O par un autre point O_1, revient à faire correspondre à m (intérieur à C) successivement M et M_1 (intérieurs à Γ) et liés entre eux par une relation homographique conservant le cercle Γ

$$\left[Z_1 = \frac{aZ + b}{cZ + d}\right];$$

cette relation donne la relation qui lie θ_1(argument de Z_1 lorsqne m est sur C) à θ (argument de Z). L'intégrale définissant l'écart, avec le nouveau choix O_1 de l'origine, sera

$$\int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \, d\theta_1 = \int_0^{2\pi} |f(m) - g(m)|^p \frac{d\theta_1}{d\theta} \cdot d\theta.$$

On reconnaît aisément que $\theta_1(\theta)$ est toujours croissante et que l'on a, Z étant sur Γ,

$$\frac{d\theta_1}{d\theta} = \left|\frac{ad - bc}{(cZ + d)^2}\right|.$$

Lorsque z décrit C, Z décrit Γ, $cZ + d$ ne s'annule pas sur Γ, le point $Z = -\frac{d}{c}$ étant certainement extérieur à Γ, donc $\frac{d\theta_1}{d\theta}$ reste compris entre deux limites positives. Le changement de O et son remplacement par O_1 équivaut, par conséquent, à remplacer la moyenne qui définit l'écart par une moyenne où *chaque élément différentiel est affecté d'un poids* $\left(\frac{d\theta_1}{d\theta}\right)$.

Cette modification, bien qu'entraînant avec elle une modification des polynomes P_n de meilleure approximation, n'infirme aucune des conclusions qui suivent : existence, unicité, convergence des polynomes de meilleure approximation.

sur C *l'intégrale*

$$\int_0^{2\pi} |f(\theta) - \varphi[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta,$$

p étant un nombre positif > 1.

3. *Existence.* — Parmi tous les polynomes harmoniques en (x, y), de degré $\leqq n$ (ils dépendent de $2n+1$ paramètres réels linéairement indépendants), en existe-t-il un ou plusieurs $P_n(x, y)$ pour lesquels l'écart à f sur C

$$I(P_n) = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta$$

soit minimum?

Observons que l'écart $I(P_n)$ est fonction continue des $2n+1$ paramètres figurant dans P_n. De plus, x est un polynome harmonique de degré $\leqq n$. Si donc on ne considère que les P_n dont l'écart à f est moindre que celui de x, ils seront tels que

$$\int_0^{2\pi} |f - P_n|^p \, d\theta \leqq \int_0^{2\pi} |f(\theta) - x(\theta)|^p \, d\theta = \lambda.$$

Or, on sait que pour $p > 1$,

$$\left[\int_0^{2\pi} |P_n|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \left[\int_0^{2\pi} |P_n - f|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{2\pi} |f|^p \, d\theta\right]^{\frac{1}{p}} \leqq \lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}},$$

en posant

$$\int_0^{2\pi} |f|^p \, d\theta = \mu.$$

Les P_n entre lesquels il faut choisir sont donc tels que

$$\int_0^{2\pi} |P_n|^p \, d\theta \leqq \left[\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

Or,

$$\int_0^{2\pi} |P_n| \, d\theta < \int_0^{2\pi} |P_n|^p \, d\theta \qquad \text{puisque } p > 1.$$

Il en résulte que les $|P_n|$ sont bornés dans tout domaine intérieur à C.

En effet, si l'on fait correspondre $z = x + iy$ intérieur à C et $Z = X + iY$ intérieur à Γ par $Z = g(z)$ ou la fonction inverse $z = h(Z)$, $P_n(x, y)$ devient une fonction $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ harmonique dans Γ et continue sur Γ ; on a

$$P_n[x(\theta), y(\theta)] = \mathfrak{P}_n(\cos\theta, \sin\theta).$$

Donc,

$$\int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}_n(\cos\theta, \sin\theta)| d\theta < \left[\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}\right]^p.$$

La fonction harmonique $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ ayant son module borné *en moyenne* sur Γ sera elle-même bornée en module dans tout domaine intérieur à Γ. En effet (X, Y) étant un point intérieur au cercle Γ et (A, B) un point de ce cercle, la fonction de Green $G(X, Y; A, B)$ et sa dérivée normale au point (A, B), $\frac{dG}{dn}$, restent uniformément bornées tant que (X, Y) appartient à un domaine fermé Δ intérieur à Γ ; par suite, puisque

$$\mathfrak{P}_n(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \mathfrak{P}_n(A, B) \frac{dG}{dn} d\theta,$$

on aura, dans Δ,

$$|\mathfrak{P}_n(X, Y)| < \frac{M}{2\pi} \int_0^{2\pi} |\mathfrak{P}_n(A, B)| d\theta < \frac{M\left(\lambda^{\frac{1}{p}} + \mu^{\frac{1}{p}}\right)^p}{2\pi},$$

si l'on a dans Δ

$$\left|\frac{dG}{dn}\right| < M.$$

Il en résulte que les P_n envisagés sont tous en module $< \mathfrak{M}$ ($\mathfrak{M}$ étant un nombre constant) lorsque (x, y) reste dans un domaine D intérieur à C. Les coefficients de ces P_n sont donc, eux aussi, bornés en module — ; dans l'espace à $(2n + 1)$ dimensions, le point ayant pour coordonnées ces $(2n + 1)$ coefficients, reste dans un domaine borné $\mathcal{D}$. $I(P_n)$ est une fonction continue positive de ce point dans $\mathcal{D}$, elle atteint son minimum en un point au moins de $\mathcal{D}$. L'existence d'un polynome P_n au moins, dont l'écart à f sur C soit minimum, est donc établie de ce fait. [Nous appellerons ε_n l'écart minimum ainsi défini pour chaque degré n.]

4. *Unicité*. — S'il y en avait deux, P_n et Q_n, tout polynome $aP_n + bQ_n$

(a et b réels) serait harmonique comme eux, en particulier

$$\frac{1}{2}P_n + \frac{1}{2}Q_n = R_n.$$

Puisque

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f - P_n|^p \, d\theta = \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p \, d\theta,$$

et puisque

$$f - \frac{P_n + Q_n}{2} = \frac{1}{2}[(f - P_n) + (f - Q_n)],$$

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p \, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{|(f - P_n) + (f - Q_n)|^p}{2} \, d\theta.$$

Or, pour $p > 1$,

$$\left|\frac{\alpha + \beta}{2}\right|^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2} \qquad (\text{excepté si } \alpha = \beta)$$

$\Bigg[$car, d'une part, $\left|\frac{|\alpha + \beta|}{2}\right| \leqq \frac{|\alpha| + |\beta|}{2}$, et, d'autre part, pour $p > 1$, la courbe $y = x^p$ étant concave vers le haut, on aura

$$\left|\frac{|\alpha| + |\beta|}{2}\right|^p < \frac{|\alpha|^p + |\beta|^p}{2}\Bigg].$$

Il en résulte que

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p \, d\theta < \frac{1}{2}\left\{\int_0^{2\pi} |f - P_n|^p \, d\theta + \int_0^{2\pi} |f - Q_n|^p \, d\theta\right\}$$

ou

$$\int_0^{2\pi} |f - R_n|^p \, d\theta < \varepsilon_n$$

sans égalité possible, à moins que P_n ne soit égal à Q_n en tout point de C, ce qui entraînerait $P_n \equiv Q_n$. Le polynome R_n aurait donc sur C un écart à f moindre que celui de P_n et de Q_n, moindre que ε_n, ce qui est impossible puisque ε_n est l'écart minimum pour le degré n. *Le polynome* P_n *est donc unique*, on l'appelle polynome harmonique d'écart minimum ε_n sur C.

5. En particulier supposons $p = 2$ et supposons que C soit un cercle de centre O, de rayon 1. Alors

$$x(\theta) = \cos\theta, \qquad y(\theta) = \sin\theta,$$

puisque
$$z = h(Z) \equiv Z \quad \text{et} \quad g(z) \equiv z.$$

Le polynome harmonique général de degré n est

$$\begin{aligned} P_n(x, y) &= P_n(r\cos\theta, r\sin\theta) \\ &= \frac{\alpha_0}{2} + r(\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots + r^n(\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta), \end{aligned}$$

en posant
$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta, \\ y &= r\sin\theta. \end{aligned}$$

$f(\theta)$ étant continue, le polynome d'écart minimum est celui pour lequel l'intégrale

$$\begin{aligned} I(P_n) = \int_0^{2\pi} \Big| f(\theta) - \Big[\frac{\alpha_0}{2} &+ (\alpha_1\cos\theta + \beta_1\sin\theta) + \ldots \\ &+ (\alpha_n\cos n\theta + \beta_n\sin n\theta) \Big] \Big|^2 d\theta \end{aligned}$$

est minimum. Ce polynome a donc pour coefficients α_i, β_i les *coefficient de Fourier* de $f(\theta)$. Si le développement de Fourier de $f(\theta)$ est

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n\cos n\theta + b_n\sin n\theta).$$

le polynome d'écart minimum sur C sera pour chaque degré n

$$P_n(r\cos\theta, r\sin\theta) \equiv \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{k=n} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta).$$

On sait que, dans ce cas particulier, le polynome $P_n(r\cos\theta, r\sin\theta)$ converge uniformément dans toute aire intérieure à C vers la somme de la série

$$\frac{a_0}{2} + \sum_1^{\infty} r^k(a_k\cos k\theta + b_k\sin k\theta),$$

qui n'est autre que la valeur au point $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$ $(r < 1)$ de la fonction harmonique dans C prenant sur C la valeur $f(\theta)$ au point d'argument θ. On sait d'ailleurs *a priori* (Du Bois-Reymond, Fejér, Lebesgue) que, la série de Fourier d'une fonction continue $f(\theta)$

pouvant être divergente, $P_n(\cos\theta, \sin\theta)$ peut n'avoir pas de limite, c'est-à-dire que *le polynome* P_n *d'écart minimum peut n'avoir aucune limite sur* C. Nous allons maintenant étudier la convergence des P_n à l'intérieur de C dans le cas général.

6. *Convergence des* P_n *dans le cas général.* — Prouvons d'abord que

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0.$$

J'ai en effet démontré dans le Mémoire antérieurement cité [Congrès de Bologne, 1928] qu'il est possible de développer toute fonction harmonique dans C et continue sur C, en série de polynomes harmoniques convergeant uniformément dans C et sur C, c'est-à-dire que, pour tout ε positif donné, on peut trouver un polynome harmonique $Q_n(x, y)$ de degré n assez élevé, tel que

$$|f(\theta) - Q_n[x(\theta), y(\theta)]| < \varepsilon,$$

quel que soit θ. L'écart de ce Q_n à f sur C sera donc $< 2\pi\varepsilon^p$. L'écart minimum ε_n correspondant au degré n sera donc *a fortiori* $< 2\pi\varepsilon^p$, c'est-à-dire que $\lim\limits_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$.

On a donc

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - P_n[x(\theta), y(\theta)]|^p \, d\theta = 0,$$

et en appelant $\mathfrak{P}_n(X, Y)$ la fonction harmonique dans Γ issue de $P_n(x, y)$ par la représentation conforme $z = h(Z)$, on aura

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathfrak{P}_n(\cos\theta, \sin\theta)|^p \, d\theta = 0.$$

Par l'exemple de $p = 2$ et C cercle unité, nous savons qu'il ne faut pas chercher à prouver la convergence de $\mathfrak{P}_n$ vers $f(\theta)$ sur Γ. Mais que la convergence de $\mathfrak{P}_n(r\cos\theta, r\sin\theta)$ vers la fonction harmonique dans Γ, prenant sur Γ les valeurs $f(\theta)$, est plausible.

Démontrons en effet cette convergence.

7. Désignons par $F(x, y)$ la fonction harmonique dans C continue

sur C prenant sur C les valeurs données $f(\theta)$, c'est-à-dire telle que

$$F[x(\theta), y(\theta)] = f(\theta).$$

Par la transformation

$$z = x + iy = h(X + iY),$$

elle devient la fonction $\mathcal{F}(X, Y)$ harmonique dans Γ, continue sur Γ, et l'on a

$$\mathcal{F}(\cos\theta, \sin\theta) = f(\theta).$$

Envisageons l'intégrale

$$\varepsilon_n(r) = \int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \mathfrak{P}_n(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p\, d\theta.$$

Puisque $\mathcal{F}$ et $\mathfrak{P}_n$ sont uniformément continues, dans et sur Γ on a

$$\lim_{r=1} \varepsilon_n(r) = \varepsilon_n.$$

Admettons, *ce que nous démontrerons plus loin*, que $U(X, Y)$ étant harmonique dans C et continue sur C, l'intégrale

$$\int_0^{2\pi} |U(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p\, d\theta$$

est une fonction croissante de r pour $r < 1$, lorsque $p > 1$.

Ce point étant admis, on aura

$$\varepsilon_n(r) < \varepsilon_n,$$

et, par conséquent, quel que soit r

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n(r) = 0,$$

uniformément dans tout Γ.

Il va en résulter que

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{P}_n(X, Y) = \mathcal{F}(X, Y),$$

uniformément dans tout domaine Δ intérieur à Γ.

En effet, de la relation

$$\varepsilon_n = \int_0^{2\pi} |f(\theta) - \mathfrak{P}_n(\cos\theta, \sin\theta)|^p\, d\theta,$$

on a vu qu'il résulte que

$$\left[\int_0^{2\pi} |\mathcal{T}_n|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_n^{\frac{1}{p}} + \left[\int_0^{2\pi} |f(\theta)|^p d\theta\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Les $\int_0^{2\pi} |\mathcal{T}_n|^p d\theta$ et par suite les $\int_0^{2\pi} |\mathcal{T}_n| d\theta$ sont donc bornés supérieurement quel que soit n par un même nombre μ. Le raisonnement fait au n° 3, prouve d'autre part que, dans un domaine quelconque Δ intérieur à Γ, toutes les fonctions harmoniques $\mathcal{T}_n$ auront leur module $|\mathcal{T}_n|$ limité supérieurement par un même nombre $\mathfrak{M}$.

Ces fonctions harmoniques $\mathcal{T}_n$ forment donc dans Δ une famille également continue dont il est possible d'extraire une suite partielle $\mathcal{T}_{n_1}, \mathcal{T}_{n_2}, \ldots$, convergeant uniformément dans Δ vers une limite $\Phi(X, Y)$ qui est nécessairement *harmonique* [cela se voit aisément par la formule classique] :

$$\mathcal{T}_n(X, Y) = \frac{1}{2\pi}\left[\int_0^{2\pi} \mathcal{T}_n(A, B)\frac{dG}{dn}\,d\theta\right].$$

On aura évidemment

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta \\ &\quad = \lim_{i=\infty}\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \mathcal{T}_{n_i}(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = \lim \varepsilon_{n_i}(r) = 0,\end{aligned}$$

pour toute valeur de r donnant un cercle intérieur à Δ, c'est-à-dire, en définitive, puisque Δ est arbitrairement voisin de Γ, pour tout $r < 1$.

Mais

$$\int_0^{2\pi} |\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) - \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta)|^p d\theta = 0$$

n'est possible pour deux fonctions continues de θ que si

$$\mathcal{F}(r\cos\theta, r\sin\theta) = \Phi(r\cos\theta, r\sin\theta),$$

pour toute valeur de θ et pour toute valeur $r < 1$.

Donc

$$\Phi(X, Y) \equiv \mathcal{F}(X, Y)$$

dans Γ, ce qui démontre que la suite des $\mathfrak{L}_n(X, Y)$ a pour limite $\mathcal{F}(X, Y)$, et uniformément, dans tout domaine intérieur à Γ.

Il en résulte que, *pour* $p > 1$, *les polynomes harmoniques* $P_n(x, y)$ *d'écart minimum à* $f(\theta)$ *sur* C *ont pour limite dans* C *la fonction harmonique* $F(x, y)$ *solution du problème de Dirichlet relatif à la donnée* $f(\theta)$ *sur* C, *la convergence ayant lieu dans tout* C *et uniformément dans tout domaine intérieur à* C. L'exemple de $p = 2$, C cercle unité, nous avertit que la convergence peut ne pas se produire sur C et dépend des propriétés différentielles de $f(\theta)$.

8. Il reste, pour terminer, à prouver le lemme invoqué au n° 7. Pour toute fonction $U(r, \theta)$ harmonique dans Γ la fonction de r

$$I(r) = \int_0^{2\pi} |U(r, \theta)|^p d\theta$$

est croissante lorsque $p > 1$.

On reconnaît aussitôt que la fonction

$$V(r, \theta) = |U(r, \theta)|^p$$

est dérivable et l'on a

$$I'(r) = \int_0^{2\pi} \frac{\partial V}{\partial r} d\theta = \frac{1}{r} \int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds,$$

γ étant le cercle de centre O de rayon r et $\frac{dV}{dn_e}$ la dérivée normale extérieure de V. On a d'ailleurs

$$\int_\gamma \frac{dV}{dn_e} ds = \int\int_\gamma \Delta V \, d\sigma.$$

Nous montrerons que $I(r)$ croît avec r, si nous prouvons que $\int\int_\gamma \Delta V \, d\sigma > 0$, pour tout cercle γ de centre O de rayon $r < 1$.

Or ceci résulte de l'inégalité $\Delta V > 0$, vérifiée dans tout Γ comme on le reconnaît aussitôt.

En effet, un calcul simple donne

$$\Delta V = \frac{\partial^2 V}{\partial X^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial Y^2} = (2p - 2)|U|^{p-2}(U_X'^2 + U_Y'^2),$$

en tenant compte de la relation $\Delta U = 0$. Du fait que $p > 1$ on a $\Delta V > 0$ et, d'autre part, $(p-2)$ étant > 1 il n'y a pas de difficulté réelle dans l'intégrale $\int\int_\gamma \Delta V \, d\sigma$ le long des lignes éventuelles où U peut s'annuler.

Le lemme invoqué au n° 7 est donc démontré. Il résulte d'ailleurs immédiatement des travaux bien connus de M. F. Riesz sur les fonctions *subharmoniques*.