PAUL MONTEL

Sur les domaines formés par les points représentant des valeurs d'une fonction analytique

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 1-23

<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__1_0>

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR

LES DOMAINES FORMÉS PAR LES POINTS

REPRÉSENTANT LES VALEURS D'UNE FONCTION ANALYTIQUE

PAR M. PAUL MONTEL

1. Si l'on représente sur le plan complexe, ou sur la sphère de Riemann, les valeurs $Z = f(z)$ d'une fonction holomorphe ou méromorphe dans un domaine (d), les points d'affixe Z remplissent certaines régions qui peuvent se recouvrir partiellement ou totalement plusieurs fois. Si le domaine (d) est connexe, il en est de même pour le domaine (D) du plan des Z qui lui correspond; si (d) est simplement connexe, (D) n'est pas nécessairement simplement connexe.

Sauf quelques remarques fondamentales, on connaît peu de résultats précis et généraux relatifs aux domaines (D). Je dois citer, dans cet ordre d'idées, le théorème de M. Kœbe relatif aux fonctions univalentes, le théorème de M. A. Bloch, et certains résultats de MM. Landau, Bohr, Fekete et Valiron.

Je me propose d'établir quelques théorèmes généraux relatifs aux domaines (D) correspondant à des fonctions appartenant à une famille dont aucune fonction limite n'est une constante. Certains des théorèmes cités apparaissent comme des cas particuliers de ces propositions; d'autres peuvent être aisément établis par la même méthode.

Les principaux résultats de ce travail ont été énoncés dans deux Notes insérées aux *Comptes rendus de l'Académie des Sciences de Paris* (¹).

2. Nous nous occuperons de fonctions $f(z)$, holomorphes ou méromorphes dans le cercle (d) : $|z| < 1$, et nous supposerons qu'aucune fonction limite ne soit une constante, c'est-à-dire, qu'il n'existe aucune suite infinie, extraite de la famille, convergeant uniformément dans l'intérieur de (d) vers une constante (²). Nous dirons qu'une telle famille de fonctions est une *famille sans limite constante*.

Nous dirons qu'un domaine (D) du plan complexe des Z est *couvert* par la fonction $f(z)$, si l'équation $f(z) = Z$ admet toujours une racine au moins intérieure à (d) lorsque Z est intérieur à (D). Nous dirons que (D) est *couvert p fois* par la fonction $f(z)$, si cette équation a toujours p racines au moins intérieures à (d).

Soit z_0 un point intérieur à (d); si $f'(z_0)$ n'est pas nul, la fonction $f(z)$ est univalente dans un cercle (γ) assez petit de centre z_0; on pourra appeler *rayon d'univalence* en ce point, le rayon maximum d'un cercle (γ) de centre z_0, intérieur à (d), dans lequel la fonction $f(z)$ est univalente. Ce rayon est nul aux zéros de la dérivée, et en ces points seulement.

Soit $Z_0 = f(z_0)$; si $f'(z_0)$ est différent de zéro, la fonction $f(z)$ fait la représentation conforme d'un petit domaine entourant z_0, sur un petit domaine entourant Z_0, les points z_0 et Z_0 se correspondant. A un petit cercle (Γ) du plan Z de centre Z_0, correspond une petite région du cercle (d) autour de z_0. La branche de la fonction inverse

(¹) *Sur le domaine correspondant aux valeurs d'une fonction analytique* (*Comptes rendus*, t. 183, 1926, p. 940-942). — *Sur les domaines correspondant aux valeurs des fonctions analytiques* (*Ibid.*, p. 1081-1083).

(²) Pour la définition de la convergence uniforme des fonctions méromorphes, *voir*, par exemple, P. MONTEL, *Leçons sur les familles normales de fonctions analytiques et leurs applications*, p. 124 (Paris, Gauthier-Villars et Cie, 1927).

de $f(z)$, définie par les valeurs initiales z_0, Z_0, est univalente dans le cercle (Γ). Le rayon de ce cercle a une limite supérieure, sinon la fonction inverse serait bornée dans tout le plan Z, et par conséquent constante. Le rayon de (Γ) a donc une valeur maximum que nous appellerons *module d'univalence au point* z_0 de la fonction $f(z)$. Ce module n'est pas le rayon d'univalence du point Z_0 de la branche considérée de la fonction inverse, car les valeurs z sont telles que $|z| < 1$. Lorsque z_0 varie dans (d), le module d'univalence n'est pas nécessairement borné, comme le montre l'exemple de la fonction $f(z) = \frac{z-1}{z+1}$. La borne supérieure finie ou infinie du module d'univalence en chaque point de (d) sera appelée le *module d'univalence du domaine.*

3. Considérons maintenant une famille (F) de fonctions holomorphes dans (d), sans limite constante. Puisque nous nous occupons de l'étendue du domaine (D) recouvert par le point Z, nous pouvons faire subir à ce domaine une translation arbitraire. Nous pouvons donc supposer que toutes les fonctions $f(z)$ sont nulles en un point déterminé z_0 de (d); il suffit de remplacer $f(z)$ par $f(z) - f(z_0)$, ce qui remplace (D) par le domaine obtenu au moyen de la translation $-f(z_0)$ effectuée sur (D). Une famille sans limite constante conserve cette propriété après les translations.

Nous appellerons couronne ou anneau le domaine compris entre deux cercles concentriques. Soit une suite infinie d'anneaux : (D_0), (D_1), ..., (D_n), ... Nous dirons que cette suite est *régulière* lorsque le rayon du cercle extérieur de l'anneau (D_n) tend vers zéro lorsque n augmente indéfiniment. Si l'on donne aux anneaux un centre commun, on peut toujours supposer, en supprimant au besoin certains d'entre eux, que deux anneaux consécutifs (D_n) et (D_{n+1}) n'empiètent pas l'un sur l'autre.

Dans certains cas, nous supposerons nuls les rayons intérieurs de certains anneaux qui seront alors des cercles; ou infinis les rayons extérieurs : nous aurons alors des domaines extérieurs à des cercles. Dans ces cas, les anneaux consécutifs empiètent nécessairement l'un sur l'autre quand ils sont concentriques.

Nous pouvons établir le théorème :

Étant données une famille (F), *sans limite constante, de fonctions holomorphes dans un domaine, et une suite régulière d'anneaux, à chaque anneau* (D_n) *de cette suite, on peut faire correspondre un anneau* (D_{n+p}) *tel que toute fonction de la famille qui ne couvre pas* (D_n) *couvre* (D_{n+p}).

Nous verrons que (D_n) et (D_{n+p}) sont concentriques, et qu'on peut remplacer p par un entier supérieur quelconque. Les deux anneaux peuvent d'ailleurs être couverts l'un et l'autre.

Comme on peut faire commencer la suite des anneaux à l'un d'entre eux arbitrairement choisi, nous ferons la démonstration en partant de l'anneau (D_0) ; il faut démontrer que toute fonction couvre soit (D_0), soit (D_p), p étant convenablement choisi.

Nous pouvons toujours supposer que $f(z_0) = 0$; considérons alors les anneaux (D_n) ayant leur centre au point $Z = 0$. Nous allons montrer qu'il existe un de ces anneaux (D_p) qui possède la propriété énoncée.

En effet, si (D_p) n'existait pas, on pourrait trouver une fonction $f_1(z)$ ne prenant pas une valeur α_1 de l'anneau (D_0), ni une valeur β_1 de l'anneau (D_1) ; une fonction $f_2(z)$ ne prenant pas une valeur α_2 de l'anneau (D_0), ni une valeur β_2 de l'anneau (D_2) ; etc. La suite $f_1, f_2, \ldots, f_n, \ldots$ ne comprend qu'un nombre fini de fois chaque fonction, car chaque fonction couvre, si n est assez grand, tous les anneaux de rang supérieur à n, puisqu'elle couvre une petite région contenant $Z = 0$. Les fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n},$$

forment une famille normale, puisqu'elles ne prennent ni la valeur zéro, ni la valeur *un*; nous pouvons en extraire une suite partielle convergente que nous appellerons encore $g_n(z)$; $g_n(0)$ a pour limite zéro avec $\frac{1}{n}$, puisque β_n a pour limite zéro, et α_n reste dans l'anneau (D_0), donc les fonctions $g_n(z)$, qui ne prennent jamais la valeur zéro, ont pour limite zéro dans l'intérieur de (d) : $|z| < 1$. L'égalité

$$f_n(z) = \beta_n + (\alpha_n - \beta_n) g_n(z)$$

montre alors que $f_n(z)$ converge uniformément vers zéro dans l'intérieur de (d). Mais les fonctions de la famille (F) n'ont pas de limite constante. L'hypothèse est inacceptable, et, à partir d'un certain rang, soit l'anneau (D_0), soit l'anneau (D_n) est couvert par toute fonction de la famille. Désignons par p le rang du premier anneau pour lequel ce fait se produit : le théorème est établi.

Nous voyons qu'on peut prendre pour centres des anneaux les valeurs prises par les fonctions pour une même valeur arbitraire de z_0 telle que $|z_0| < 1$; que l'on peut supposer les anneaux aussi rapprochés que l'on veut du centre Z_0; le nombre p variera en général avec z_0. Dans chaque anneau, on peut inscrire des cercles : on peut donc dire que, autour de Z_0, et dans un cercle de rayon arbitrairement choisi ρ, la fonction couvre des cercles de rayon supérieur à un nombre fixe qui dépend de z_0 et de ρ, mais qui est indépendant de la fonction choisie; on peut choisir arbitrairement l'argument du centre de ce cercle autour du point Z_0, pris comme origine.

Remarquons aussi que l'on peut prendre comme centres des anneaux les points Z_i correspondant à des valeurs z_i variables avec la fonction $f_i(z)$; il suffit, dans ce qui précède de remplacer $f_i(z)$ par $f_i(z) - f_i(z_i)$; la nouvelle famille est encore sans limite constante, mais il est nécessaire que tous les points d'affixes z_i soient dans un cercle intérieur à (d), c'est-à-dire que $|z_i| \leqq \rho < 1$.

On ne peut, en général, dans le théorème précédent, remplacer les anneaux par des cercles; par exemple, les fonctions

$$f_n(z) = \frac{2}{n}\left[1 - \left(1 - \frac{z}{2}\right)^n\right] = z + \ldots,$$

n désignant un entier positif, appartiennent à une famille (F), sans limite constante, pour $|z| < 1$, puisque $f'_n(0) = 1$. Or la fonction $f_n(z)$ ne prend pas la valeur $\frac{2}{n}$, ni les valeurs voisines; et ces valeurs ont pour limite zéro.

4. Si l'on impose des conditions supplémentaires aux fonctions de la famille (F), on pourra remplacer les anneaux par des cercles. Ce sera en particulier le cas pour les fonctions *univalentes*.

En effet, supposons toujours $f(z_0) = 0$; alors, si une fonction couvre un anneau (D_n), il correspond à la circonférence extérieure (Γ_n) de cet anneau, une courbe fermée simple (γ_n) intérieure au cercle $|z| \leqq 1$; donc $f(z)$ fait la représentation conforme du domaine limité par cette courbe (γ_n) sur le cercle limité par la circonférence (Γ_n). Par conséquent, le cercle limité par (Γ_p) est toujours couvert par $f(z)$, car (Γ_p) est intérieur à (Γ_0).

Pour qu'une famille de fonctions univalentes dans le domaine $|z| < 1$ soit sans limite constante, on pourra par exemple prendre

$$f(z_0) = a, \qquad f(z_1) = b \qquad (a \neq b),$$

z_0 et z_1 étant deux points intérieurs du cercle (d); a et b deux valeurs constantes prises, aux points z_0 et z_1, par toutes les fonctions.

On peut prendre aussi $f^{(k)}(z_0) = c \neq 0$; en particulier, si $k = 1$, $c = 1$, on retrouve le théorème de M. Kœbe (¹) : les fonctions

$$f(z) = z + \ldots,$$

univalentes pour $|z| < 1$, recouvrent un cercle fixe de centre origine.

5. Reprenons le cas général de fonctions holomorphes quelconques. Si l'on suppose que les anneaux ont une épaisseur nulle, on voit que toute fonction de la famille recouvre une circonférence de rayon supérieur à un nombre fixe et de centre Z_0 par exemple. Si, en particulier, on prend la famille (F_1) pour laquelle

$$f(z) = z + \ldots,$$

on retrouve un théorème de M. Landau (²), avec une précision de plus puisque le cercle couvert est déterminé à une alternative près.

Considérons encore la famille (F_2) pour laquelle

$$f(0) = 0, \qquad \max_{|z|=\rho} |f(z)| = 1 \qquad (\rho < 1),$$

ρ étant un nombre fixe; cette famille est sans limite constante. Le

(¹) P. Kœbe, *Ueber die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven* (*Nachr. von der königl. Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen, math.-phys. Klasse*, 1907, p. 191-210).

(²) E. Landau, *Zum Kœbeschen Verzerrungssatz* (*Rendiconti del Cir. mat. di Palermo*, t. 46, 1922, p. 347-348).

théorème général lui est applicable; si les anneaux ont une épaisseur nulle, on retrouve un théorème de M. H. Bohr [1].

On peut varier de bien des manières les conditions imposées aux fonctions de la famille (F) pour qu'il n'y ait aucune limite constante. Dans chaque cas, on obtiendra une forme particulière de notre théorème fondamental.

6. Examinons de plus près la démonstration de ce théorème donnée au paragraphe 3. Comme nous l'avons vu, on ne peut remplacer en général les anneaux par des cercles, mais (D_0) étant un anneau, la démonstration n'est pas changée, si (D_n) est un cercle pour $n \geqq 1$. On peut donc dire que, pour la famille (F), il existe un cercle (D_p) de rayon fixe tel que chaque fonction $f(z)$ couvre au moins soit l'anneau (D_0), soit le cercle (D_p).

Supposons que l'anneau (D_0) soit couvert moins de $q+1$ fois par une fonction $f_n(z)$; il existera un point α_n de cet anneau qui sera couvert q fois au plus. Si en outre l'anneau ou cercle (D_n) n'est pas couvert, il existe un point β_n de ce cercle qui n'est pas couvert, la fonction

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}$$

ne prend pas la valeur zéro et prend q fois au plus la valeur *un* : les fonctions $g_n(z)$ forment donc une famille normale [2] et le raisonnement demeure le même. Donc :

Toute fonction, appartenant à une famille sans limite constante, qui ne couvre pas plus de q fois un anneau (D_n), *couvre au moins une fois un cercle* (D_{n+p}).

Le cercle couvert varie en général avec le nombre q. Dans le raisonnement précédent, on ne peut pas intervertir le rôle des

---

(1) H. Bohr, *Scripta Univ. atque Biblioth. Hierosolymitanarum*, t. 1, 1923.

(2) *Voir* P. Montel, *Sur les familles de fonctions analytiques qui admettent des valeurs exceptionnelles dans un domaine* (*Annales de l'École Norm. sup.*, 3e série, t. XXIX, 1912, p. 487-535, et *Leçons sur les familles normales, etc.*, p. 69).

anneaux (D_0) et (D_n); on peut supposer que l'anneau (D_0) soit une circonférence.

En particulier, si l'on prend $q=1, f(0)=0, f'(1)=1$, on retrouve le théorème de M. Kœbe.

7. Remarquons encore que rien ne serait changé au raisonnement du paragraphe 3, si $f(z)$ admettait une valeur exceptionnelle α non nulle, ou une valeur non nulle α prise q fois au plus. Nous supposons toujours pour simplifier $f(z_0)=0$. Il suffirait, en effet, de faire jouer à α le rôle de α_n. Mais ici, l'alternative disparaît et le cercle (D_p) est toujours couvert. Donc :

Toute fonction appartenant à une famille sans limite constante couvre toujours un cercle fixe de centre origine, si l'on a $f(z_0)=0$ et s'il existe une valeur $\alpha \neq 0$ telle que l'équation $f(z)=\alpha$ ait toujours q racines au plus.

On peut d'ailleurs remarquer qu'il suffit de tracer un anneau (D_0) contenant α pour être placé dans les conditions du théorème du paragraphe précédent.

8. Nous avons admis l'existence d'un nombre $\alpha \neq 0$ pris moins de $q+1$ fois par la fonction $f(z)$. L'hypothèse que α n'est pas nul est nécessaire pour que les fonctions

$$g_n(z)=\frac{f(z)-\beta_n}{\alpha-\beta_n}$$

qui interviennent dans le raisonnement du paragraphe 3 aient pour limite zéro. Mais ce raisonnement, légèrement modifié, est encore valable pour $\alpha=0$; il suffit de remarquer que les fonctions

$$g_n(z)=\frac{f(z)-\beta_n}{-\beta_n},$$

qui ne prennent pas la valeur zéro et qui prennent q fois au plus la valeur *un*, forment une famille normale bornée puisque $g_n(z_0)=1$; les fonctions $g_n(z)$ sont donc bornées dans leur ensemble pour $|z|\leqq\rho<1$, et l'égalité

$$f_n(z)=\beta_n-\beta_n g_n(z)$$

montre encore que $f_n(z)$ a pour limite zéro, ce qui contredit l'hypothèse d'une famille sans limite constante. On peut donc dire :

Si chaque fonction d'une famille sans limite constante prend une valeur α, qui peut varier avec la fonction, une fois au moins et q fois au plus, elle couvre toujours un cercle de centre α et de rayon fixe.

Il suffit en effet de remplacer $f(z)$ par $f(z) - \alpha$ pour être ramené au cas précédent.

Supposons en particulier $\alpha = 0$, $f'(0) = 1$, nous aurons la famille des fonctions

$$f(z) = z + \ldots,$$

qui prennent q fois au plus la valeur zéro dans le cercle $|z| < 1$ où elles sont holomorphes : elles couvrent un cercle fixe de centre origine. Nous retrouvons ainsi un théorème de M. Fekete (¹).

On peut supposer dans les énoncés précédents que les fonctions $f(z)$ s'annulent en des points variables z_i tels que $|z_i| \leq \rho < 1$.

9. Si l'on ne fait aucune hypothèse supplémentaire sur les fonctions de la famille (F), nous savons qu'il n'existe pas de cercle fixe couvert par toutes les fonctions et que l'alternative subsiste entre un cercle et un anneau ou une circonférence. Mais on peut démontrer l'existence d'un cercle de rayon fixe contenant l'origine et toujours couvert; seulement, la position de ce cercle variera avec la fonction. C'est ce qu'a établi M. Valiron (²) pour le cas de la famille (F_1) des fonctions

$$f(z) = z + \ldots,$$

mais son théorème s'applique à toute famille (F) sans limite constante.

Étant donné un nombre positif $\varepsilon < \pi$, arbitrairement petit, il lui correspond un nombre $R(\varepsilon)$ tel qu'un cercle de rayon $R(\varepsilon)$ soit couvert par chaque fonction, à l'exception peut-être de points que

(¹) M. Fekete, *Zum Kœbeschen Verzerrungssatz* (*Nachr. der Gesellschaft der Wiss. zu Göttingen; Math.-Phys. Klasse*, 1925, p. 142-150).

(²) G. Valiron, *Sur un théorème de MM. Kœbe et Landau* (*Bull. des Sc. math.*, t. LI, 1927, p. 34-42); *Sur les valeurs des fonctions holomorphes dans un cercle*, 2ᵉ série (*Comptes rendus Acad. Sc.*, t. 183, 1926, p. 1256-1258).

l'on peut enfermer dans un cercle vu sous l'angle ε du centre du premier.

Supposons $f(z_0)=0$; alors, s'il en était autrement, il existerait, quel que soit l'entier n, une fonction $f_n(z)$ qui ne couvrirait pas le cercle $|z|<\frac{1}{n}$ dans les conditions précédentes. Il y aurait donc, dans ce cercle, deux points au moins α_n et β_n non couverts, qu'on ne pourrait enfermer dans un cercle vu de l'origine sous l'angle ε. Il est nécessaire pour cela que

$$\left|\frac{\alpha_n-\beta_n}{\beta_n}\right|>k, \qquad \left(k=\sin\frac{\varepsilon}{2}\right),$$

sinon le point α_n serait dans un cercle ayant pour centre le point β_n et vu de l'origine sous l'angle ε (¹). Il suffit alors de reprendre le raisonnement du paragraphe 3; on a

$$|g_n(0)|=\left|\frac{\beta_n}{\alpha_n-\beta_n}\right|<\frac{1}{k};$$

les fonctions $g_n(z)$ ont leurs modules bornés pour $|z|\leqq\rho<1$ et l'égalité

$$f_n(z)=\beta_n+(\alpha_n-\beta_n)g_n(z),$$

dans laquelle $|\alpha_n|<\frac{1}{n}$, $|\beta_n|<\frac{1}{n}$, montre que $f_n(z)$ aurait pour limite zéro. Le théorème est donc démontré.

Il en résulte qu'on peut tracer un cercle de rayon $\frac{1}{2}R(\varepsilon)$, contenant le point $Z=0$ et couvert par les valeurs de $f(z)$: la position de ce cercle varie avec la fonction choisie.

10. Dans tout ce qui précède, nous avons démontré l'existence de domaines couverts par la fonction $f(z)$ sans nous occuper du nombre de fois que chaque point est couvert. Il résulte d'un théorème de M. A. Bloch (²) qu'il existe toujours un cercle de rayon fixe dans

(¹) La condition du texte n'est pas suffisante. On aurait une condition suffisante, mais non nécessaire, en remplaçant k par $\frac{2k}{1-k}$.

(²) A. Bloch, *Les théorèmes de M. Valiron sur les fonctions entières et la théorie de l'uniformisation* (*Annales de la Fac. des Sc. de Toulouse*, 3ᵉ série, t. XVII, 1925, p. 1-22).

lequel la fonction inverse est univalente, c'est-à-dire un cercle obtenu par la représentation conforme d'un domaine intérieur à $|z| < 1$ au moyen de la fonction $f(z)$: avec les dénominations introduites au paragraphe 2, nous dirons que le module d'univalence de chaque fonction de la famille reste supérieur à un nombre positif fixe.

Voici d'abord comment on peut énoncer le théorème de M. A. Bloch :

Le module d'univalence de chaque fonction de la famille (F_1)

$$f(z) = z + \ldots,$$

holomorphe pour $|z| < 1$, reste supérieur à un nombre positif fixe δ.

Il en résulte aussitôt que [1] : les fonctions holomorphes dans (d) pour lesquelles le module d'univalence est borné par un nombre R forment une famille normale. En effet, en un point z situé dans le cercle $|z| \leqq \rho < 1$, le module d'univalence est supérieur à

$$(1-\rho)\delta\,|f'(z)|,$$

donc

$$|f'(z)| < \frac{(1-\rho)\delta}{R}.$$

Les fonctions $f(z)$ ont leurs dérivées bornées dans le domaine (d) : elles forment une famille normale.

M. Valiron a déduit de cette dernière proposition l'extension du théorème de M. A. Bloch à une famille (F) sans limite constante [2]. Voici sa démonstration. Supposons toujours $f(z_0) = 0$ avec $|z_0| < 1$. Si le module d'univalence ne restait pas supérieur à un nombre fixe positif, il y aurait, quel que soit l'entier n, une fonction $f_n(z)$ dont le module d'univalence serait inférieur à $\frac{1}{n}$. Les fonctions $nf_n(z)$ auraient des modules d'univalence inférieurs à l'unité et formeraient une famille normale, d'après le théorème de M. A. Bloch. Comme ces fonctions sont nulles à l'origine, elles seraient bornées en module pour $|z| \leqq \rho < 1$; on aurait donc, pour ces valeurs de z,

$$|f_n(z)| < \frac{M}{n},$$

---

[1] A. Bloch, *Loc. cit.*, p. 9.

[2] Dans une lettre qu'il m'a adressée le 29 novembre 1926.

M désignant la limite supérieure du module et $f_n(z)$ tendrait vers zéro dans (d), ce qui est contraire à l'hypothèse. Si $f(z_0)$ n'était pas nul, on remplacerait, dans la démonstration, $f(z)$ par $f(z) - f(z_0)$.

11. On sait qu'on appelle multivalente d'ordre q, ou plus brièvement q-valente, une fonction qui, dans le domaine où on la considère, prend q fois au plus chacune de ses valeurs et prend effectivement q fois l'une d'elles (1). Par conséquent, si une fonction prend q fois une de ses valeurs, elle est au moins q-valente dans tout domaine fermé intérieur au premier (2). Nous allons dans la suite nous occuper des fonctions $f(z)$, holomorphes dans le cercle (d) et au moins q-valentes dans le cercle $|z| \leqq \rho < 1$, et des familles (F_q), sans limite constante, formées avec de telles fonctions.

Considérons une famille (F_q), *sans limite constante, de fonctions holomorphes et au moins q-valentes dans un domaine intérieur à* (d), *et une suite régulière d'anneaux; à chaque anneau* (D_n) *de cette suite, on peut faire correspondre un anneau* (D_{n+p}) *tel que toute fonction de la famille qui ne couvre pas* (D_n) *q fois au moins couvre q fois au moins* (D_{n+p}).

En effet, partons de l'anneau (D_0); si le théorème n'était pas vrai, il existerait, quel que soit n, une fonction $f_n(z)$ ne couvrant pas q fois (D_0), ni (D_n). A chaque fonction $f(z)$ correspond une valeur a qui peut varier avec la fonction et qui est prise q fois au moins; nous prendrons le point a comme centre des anneaux correspondant à cette fonction; en remplaçant $f(z)$ par $f(z) - a$, on pourra toujours supposer que les anneaux ont leurs centres à l'origine.

La fonction $f_n(z)$ prend donc $q - 1$ fois au plus une valeur α_n de l'anneau (D_0) et une valeur β_n de l'anneau (D_n) : le module de α_n reste supérieur au rayon intérieur de l'anneau (D_0); β_n tend vers zéro

---

(1) *Voir* P. Montel, *Sur les familles quasi-normales de fonctions holomorphes* (*Mémoires de l'Acad. royale de Belgique classe, des sciences*, 2e série, t. VI, 1922, p. 1-41).

(2) Toute fonction méromorphe dans un domaine fermé à un ordre de multivalence fini.

avec $\frac{1}{n}$. Les fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}$$

prennent $q - 1$ fois au plus les valeurs zéro et *un* : elles forment une famille quasi-normale d'ordre total $q - 1$ [1]; la suite $g_n(z)$ est génératrice d'une suite partielle, que nous appellerons encore $g_n(z)$, qui converge uniformément dans l'intérieur de (d), ou qui augmente indéfiniment d'une manière uniforme, sauf peut-être en certains points irréguliers dont la somme des ordres ne dépasse pas $q - 1$. Je dis que ce dernier cas ne peut se présenter ici. En effet, si $g_n(z)$ augmentait indéfiniment, sauf aux points irréguliers, l'équation

$$g_n(z) + \frac{\beta_n}{\alpha_n - \beta_n} = 0$$

aurait, d'après le théorème de Rouché, autant de racines que l'équation $g_n(z) = 0$, à partir d'une certaine valeur de n, dans tout domaine intérieur à (d); mais la première équation, qui peut s'écrire $f_n(z) = 0$ a q racines au moins, tandis que la seconde en a $q - 1$ au plus.

Donc $g_n(z)$ converge uniformément vers une fonction holomorphe. Si cette fonction n'est pas la constante zéro, en considérant la même équation et en remarquant que $\frac{\beta_n}{\alpha_n - \beta_n}$ tend vers zéro, on arriverait à la même contradiction. Donc $g_n(z)$ a pour limite zéro. L'égalité

$$f_n(z) = \beta_n + (\alpha_n - \beta_n) g_n(z)$$

montre qu'il en serait de même de $f_n(z)$, ce qui contredit l'hypothèse. Le théorème est démontré.

Remarquons que les q points où $f(z)$ est égale à a n'ont pas besoin d'être distincts; il suffit que la somme des degrés de multiplicité des zéros de $f(z) - a$, de modules inférieurs à $\rho < 1$, soit égale ou supérieure à q.

---

[1] *Voir* P. MONTEL, *Sur les familles quasi-normales, etc.* (*loc. cit.*) et *Sur les suites de fonctions analytiques qui ont pour limite une constante* (*Bull. de la Soc. math. de France*, t. LIII, 1925, p. 246-257).

Si l'on suppose, en particulier, que les anneaux ont une épaisseur nulle, on voit que toute fonction $f(z)$ couvre une circonférence de rayon supérieur à un nombre fixe. Dans le cas de la famille

$$f(z) = z^q + \ldots,$$

on retrouve une généralisation du théorème cité de M. Landau due à M. Fekete [1], avec une précision nouvelle.

On peut varier beaucoup les conditions imposées aux fonctions de la famille (F_q) : on peut supposer par exemple que $f(z)$ ait q zéros au moins et $f(z) - 1$, un zéro au moins dans le cercle $|z| \leqq \rho < 1$; ou que $f(z) = 0$ avec $\max\limits_{|z|=\rho} |f(z)| = 1$, $\rho < 1$; si $f(z)$ a q zéros au moins et $f(z) - 1$, q' zéros au moins dans ce cercle, l'un des anneaux (D_n) ou (D_{n+p}) au moins est couvert q fois au moins si $q \geqq q'$, et q' fois au moins si $q \leqq q'$.

Enfin, observons que, ici encore, on peut remplacer la couronne (D_{n+p}) par un cercle. Le raisonnement n'est pas modifié.

12. Remarquons que, dans le théorème précédent, rien ne serait changé aux raisonnements si l'on supposait que (D_0) est couvert moins de $q' + 1$ fois, au lieu d'être couvert moins de q fois. La famille des fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n},$$

α_n désignant ici l'affixe d'un point de (D_0) couvert moins de $q' + 1$ fois, est une famille quasi-normale dont l'ordre total est égal ou plus petit des deux nombres $q - 1$ et $q' + 1$. Cet ordre ne dépasse donc pas $q - 1$ et la suite du raisonnement demeure la même. Par conséquent :

Étant donnée une famille (F_q) sans limite constante de fonctions holomorphes dans le cercle $|z| < 1$ et q-valentes au moins dans le cercle $|z| \leqq \rho < 1$, un entier arbitraire q', et une suite régulière d'anneaux, à chaque anneau (D_n) correspond un anneau (D_{n+p}) tel que toute fonction de la famille qui ne couvre pas plus de q' fois (D_n) couvre q fois au moins (D_{n+p}).

---

(1) M. FEKETE, *loc. cit.*

On peut supposer que les anneaux qui suivent (D_n) soient des cercles.

L'alternative entre les deux anneaux disparaîtra, si l'on peut affirmer que le premier anneau est couvert moins de q' fois par toute fonction. Cela se présentera en particulier pour une famille sans limite constante de fonctions q-valentes au moins pour $|z| \leqq \rho < 1$ et q'-valentes au plus pour $|z| < 1$. On a ainsi le théorème suivant qui généralise celui de M. Kœbe :

Soit une famille, sans limite constante, de fonctions holomorphes pour $|z| < 1$, q-valentes au moins pour $|z| \leqq \rho < 1$, et q'-valentes au plus pour $|z| < 1$: toute fonction de la famille couvre q fois au moins un cercle de rayon fixe.

Pour $q = q' = 1$ et la famille (F_1)

$$f(z) = z + \ldots,$$

on retrouve le théorème de M. Kœbe.

13. Mais il suffit, pour faire disparaître l'alternative et affirmer l'existence d'un cercle couvert p fois, de savoir qu'une valeur particulière est prise q' fois au plus dans (d).

Supposons d'abord que $f(z)$ prenne une valeur fixe a, q fois au moins pour $|z| \leqq \rho < 1$, et une valeur fixe b, différente de la première, q' fois au plus. En remplaçant $f(z)$ par $f(z) - a$, les valeurs correspondantes deviennent o et $b - a = \alpha \neq 0$; comme on peut toujours supposer que (D_0) contient α, l'existence du cercle couvert q fois est assurée. Si les valeurs a et b sont égales, α est nul; les fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{-\beta_n}$$

forment une famille quasi-normale d'ordre $q - 1$ au plus; comme elles prennent la valeur *un* en q points, la famille est normale et bornée, alors l'égalité

$$f_n(z) = \beta_n - \beta_n g_n(z)$$

montre que $f_n(z)$ tend vers zéro et le résultat demeure exact.

Si les nombres a et b varient avec $f(z)$, il faudra remplacer α par α_n;

si $|\alpha_n|$ reste supérieur à un nombre fixe, on pourra supposer que α_n est dans (D_0); si α_n tend vers zéro, on verra comme plus haut que les fonctions $g_n(z)$ sont bornées dans leur ensemble et l'égalité

$$f_n(z) = \beta_n + (\alpha_n - \beta_n) g_n(z)$$

montre que le cercle couvert q fois existe toujours. Donc :

Étant donnée une famille sans limite constante de fonctions holomorphes dans (d) qui prennent q fois au moins une valeur dans un domaine intérieur à (d), et q' fois au plus cette valeur, ou une autre, dans (d), il existe un cercle de rayon fixe couvert q fois au moins par chaque fonction de la famille.

Considérons, en particulier, la famille des fonctions

$$f(z) = z^q + \ldots,$$

holomorphes pour $|z| < 1$ et ne s'annulant pas pour $0 < |z| < 1$. Ces fonctions couvrent au moins q fois un cercle fixe dont le centre est à l'origine. C'est un résultat dû à M. Fekete [1].

14. On peut aussi étendre aux fonctions q-valentes au moins le théorème de M. Valiron étudié au paragraphe 9.

Étant données une famille sans limite constante, de fonctions holomorphes et q-valentes au moins dans un domaine, et un nombre ε positif, inférieur à π et arbitrairement petit, il lui correspond un nombre $R(\varepsilon)$ tel que toute fonction couvre au moins q fois un cercle de rayon $R(\varepsilon)$, sauf peut-être des points qui peuvent être enfermés dans un cercle vu sous l'angle ε du centre du premier.

En remplaçant $f(z)$ par $f(z) - a$ nous pourrons supposer que le cercle couvert a son centre à l'origine. Si le théorème n'était pas vrai, à chaque entier ε correspondrait au moins une fonction $f_n(z)$ ne remplissant pas les conditions de l'énoncé dans le cercle $|z| \leqq \frac{1}{n}$. Il existerait donc deux points au moins de ce cercle, α_n et β_n, qui seraient couverts moins de q fois et qu'on ne pourrait enfermer dans

(1) M. Fekete, *loc. cit.*

un cercle vu de l'origine sous l'angle ε, ce qui entraîne

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n}\right| > k \qquad \left(k = \sin\frac{\varepsilon}{2}\right).$$

La famille des fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{\alpha_n - \beta_n}$$

est quasi-normale d'ordre $q - 1$ au plus dans (d) et chaque fonction est bornée en q points puisque $|g_n(z)| < \frac{1}{k}$ aux q points où $f_n(z)$ s'annule. Ces points sont situés dans le cercle $|z| \leqq \rho < 1$. Donc, la famille considérée est normale et bornée; alors l'égalité suivante, dans laquelle $|\alpha_n| < \frac{1}{n}$, $|\beta_n| < \frac{1}{n}$,

$$f_n(z) = \beta_n + (\alpha_n - \beta_n) g_n(z),$$

montre que $f_n(z)$ tend vers zéro, ce qui contredit l'hypothèse.

Comme précédemment, on déduit de ce résultat que chaque fonction $f(z)$ couvre q fois au moins un cercle de rayon $\frac{1}{2}R(\varepsilon)$, contenant l'origine, dont la position peut varier avec la fonction [1].

15. Proposons-nous d'étendre aux fonctions méromorphes dans (d) les résultats obtenus dans les paragraphes précédents. Nous introduirons une double suite régulière d'anneaux (D_n), définis pour toutes les valeurs entières positives, négatives ou nulles de n et tels que le rayon extérieur de l'anneau (D_n) tende vers zéro quand n tend vers $+\infty$, le rayon intérieur de l'anneau (D_n) augmente indéfiniment lorsque n tend vers $-\infty$. Nous pouvons démontrer la proposition suivante :

Étant données une famille, sans limite constante, de fonctions méromorphes pour $|z| < 1$, et une double suite régulière d'anneaux, à chaque anneau (D_n) correspond un couple d'anneaux (D_{n-p}) et (D_{n+p}) tels que chaque fonction $f(z)$ couvre l'un au moins des trois anneaux (D_{n-p}), (D_n), (D_{n+p}).

Considérons les valeurs de $f(z)$ en un point z_0 fixe dans (d); on

(1) Pour le cas de la famille (F_2), *voir* G. VALIRON, *loc. cit.*, p. 38.

pourrait aussi considérer des valeurs z_0 variables avec la fonction et contenues dans un cercle intérieur à (d), comme nous l'avons fait pour les fonctions holomorphes. Si $f(z_0)$ est fini, nous remplaçons $f(z)$ par $f(z)-f(z_0)$; si z_0 est un pôle, nous conservons $f(z)$. La nouvelle famille est aussi sans limite constante. Nous prendrons le point $Z=0$ comme centre des anneaux. Partons de (D_0), comme on peut toujours le faire; s'il n'existe pas de disques (D_{-p}) et (D_p) remplissant les conditions énoncées, à chaque entier positif n correspond au moins une fonction $f_n(z)$ qui ne couvre pas un point α_n au moins de (D_0), un point β_n au moins de (D_n), un point γ_n au moins de (D_{-n}). Le module de α_n reste compris entre deux limites fixes finies et positives; β_n tend vers zéro et γ_n augmente indéfiniment lorsque n augmente indéfiniment. La fonction

$$g_n(z)=\frac{f_n(z)-\beta_n}{f_n(z)-\gamma_n}:\frac{\alpha_n-\beta_n}{\alpha_n-\gamma_n}=(\beta_n, \gamma_n, f_n, \alpha_n)$$

ne prend ni la valeur zéro, ni la valeur *un*, ni la valeur infinie : les fonctions $g_n(z)$ forment une famille normale. Nous pouvons en extraire une suite partielle convergente, que nous appellerons encore $g_n(z)$.

Si $f_n(z_0)$ est nul, $g_n(z_0)=\frac{\beta_n}{\gamma_n}\cdot\frac{\alpha_n-\gamma_n}{\alpha_n-\beta_n}$ tend vers zéro avec $\frac{1}{n}$; si $f_n(z_0)$ est infini, $g_n(z_0)=\frac{\alpha_n-\gamma_n}{\alpha_n-\beta_n}$ augmente indéfiniment avec n.

S'il y a une infinité de valeurs $f_n(z_0)$ qui soient finies, extrayons la suite nouvelle correspondante et appelons-la toujours $g_n(z)$. On a alors

$$\frac{f_n(z)-\beta_n}{f_n(z)-\gamma_n}=\frac{\alpha_n-\beta_n}{\alpha_n-\gamma_n}g_n(z)=h_n(z).$$

La suite convergente $g_n(z)$ a pour limite zéro pour $z=z_0$; comme les fonctions $g_n(z)$ ne s'annulent pas dans (d), la limite est la constante zéro. De même, $h_n(z)$ a pour limite zéro et

$$\gamma_n h_n(z)=\frac{\gamma_n}{\alpha_n-\gamma_n}\cdot(\alpha_n-\beta_n)g_n(z)$$

tend aussi vers zéro ; alors

$$f_n(z)=\frac{\beta_n-\gamma_n h_n(z)}{1-h_n(z)}$$

aurait pour limite zéro, ce qui est contraire à l'hypothèse.

Supposons donc que z_0 soit un pôle pour une infinité de fonctions $f_n(z)$; extrayons la suite correspondante que nous appellerons encore $g_n(z)$; $g_n(z_0)$ augmentant indéfiniment, la limite de $g_n(z)$ est la constante infinie; cherchons celle de $f_n(z)$; formons pour cela le rapport

$$(\beta_n, \alpha_n, f_n, \gamma_n) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{f_n(z) - \alpha_n} : \frac{\gamma_n - \beta_n}{\gamma_n - \alpha_n} = \frac{g_n(z)}{g_n(z) - 1} = k_n(z),$$

ce rapport a pour limite l'unité; on a

$$\frac{f_n(z) - \beta_n}{f_n(z) - \alpha_n} = \frac{\gamma_n - \beta_n}{\gamma_n - \alpha_n} k_n(z) = h_n(z),$$

$h_n(z)$ a aussi pour limite l'unité, et

$$\frac{1}{f_n(z)} = \frac{1 - h_n(z)}{\beta_n - \alpha_n h_n(z)}$$

a pour limite zéro; ainsi $f_n(z)$ aurait pour limite la constante infinie, ce qui est contraire à l'hypothèse. Donc, il existe un entier p à partir duquel les conditions énoncées sont réalisées : $f(z)$ couvre l'un au moins des trois anneaux (D_{-p}), (D_0), (D_p).

On peut d'ailleurs remplacer les anneaux (D_p) par des cercles lorsque $p > 0$; et par l'extérieur d'un cercle lorsque $p < 0$. On peut aussi supposer nulle l'épaisseur de (D_0); on peut donc dire que : *Étant donnée une circonférence* (D_0), *toute fonction* $f(z)$ *qui ne couvre pas cette circonférence couvre au moins, soit l'intérieur d'un cercle fixe, soit l'extérieur d'un cercle fixe.*

Si l'on suppose que tous les anneaux ont une épaisseur nulle, on retrouve une extension, aux fonctions méromorphes, du théorème de M. Landau cité au paragraphe 5 :

Considérons une famille, sans limite constante, de fonctions méromorphes pour $|z| < 1$ *et supposons que chaque fonction soit nulle ou infinie pour* $z = 0$. *Toute fonction de la famille couvre l'une au moins de trois circonférences fixes ayant leurs centres à l'origine.*

Pour obtenir des familles de fonctions sans limite constante, on peut, comme pour les fonctions holomorphes, fixer les valeurs de $f(z)$ en deux points fixes :

$$f(z_0) = a, \qquad f(z_1) = b, \qquad b \neq a,$$

ou fixer la valeur d'une dérivée en un point, par exemple

$$f(z_0) = a, \qquad f^{(k)}(z_1) = a' \neq 0;$$

ou encore, adopter les conditions suivantes :

$$f(0) = 0, \qquad \max_{|z|=\rho} |f(z)| \equiv 1 \qquad 0 < \rho < 1.$$

16. La démonstration du paragraphe précédent est à peine modifiée si l'on impose à la fonction $f(z)$ de couvrir $q+1$ fois l'anneau (D_0) : le résultat demeure le même. En effet, dans le cas contraire, on définirait une suite de fonctions $g_n(z)$ par l'égalité

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{f_n(z) - \gamma_n} : \frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_n - \gamma_n},$$

α_n désignant l'affixe d'un point de (D_0) qui serait couvert moins de $q+1$ fois; les fonctions $g_n(z)$ ne prennent ni la valeur zéro, ni la valeur infinie et prennent la valeur 1, q fois au plus. Une telle famille est normale, et le raisonnement se poursuit comme précédemment, car $g_n(z)$ tend soit vers la constante zéro, soit vers la constante infinie, dans toute suite partielle convergente.

On peut donc, dans les énoncés précédents, supposer que l'anneau ou la circonférence (D_0) est couvert plus de q fois, q étant un entier arbitraire.

Supposons, en particulier, que $f(z)$ soit univalente; alors on peut prendre $q=1$, (D_0) n'est jamais couvert plus d'une fois, donc l'un des anneaux (D_{-p}) ou (D_p) est certainement couvert. Nous obtenons ainsi une extension aux fonctions méromorphes du théorème de M. Kœbe :

Soit une famille, sans limite constante, des fonctions méromorphes et univalentes pour $|z| < 1$: *il existe un nombre positif* δ *tel que toute fonction de la famille couvre soit l'intérieur d'un cercle de rayon* δ, *soit l'extérieur d'un cercle de rayon* $\frac{1}{\delta}$.

Comme précédemment, il y a d'autres cas où l'anneau (D_0) peut être éliminé et où il ne reste qu'une alternative entre (D_p) et (D_{-p}). Je me borne à indiquer le cas où chaque fonction de la famille prend q fois au plus une valeur qui peut d'ailleurs varier avec la fonction.

17. On peut également étendre, aux familles de fonctions méromorphes, le théorème de M. Valiron rappelé au paragraphe 9. Nous aurons, ici encore, une alternative entre deux domaines. Voici l'énoncé :

Étant donnée une famille sans limite constante de fonctions méromorphes dans (d), *à chaque nombre positif* ε, *inférieur à* π *et arbitrairement petit, correspond un nombre* $R(\varepsilon)$ *tel que toute fonction de la famille, ou bien couvre un cercle de rayon* $R(\varepsilon)$, *à l'exception peut-être de points que l'on peut enfermer dans un cercle vu sous l'angle* ε *du centre du premier; ou bien couvre l'extérieur d'un cercle de rayon* $\frac{1}{R(\varepsilon)}$, *à l'exception peut-être de points que l'on peut enfermer dans un cercle vu du centre sous l'angle* ε.

Remarquons tout de suite que le nombre $R(\varepsilon)$ convient aussi bien à la famille des fonctions $f(z)$ qu'à la famille des fonctions $\frac{1}{f(z)}$. Nous pouvons donc toujours supposer $f(z_0) = 0$, en remplaçant au besoin f par $\frac{1}{f}$.

Si le nombre $R(\varepsilon)$ n'existait pas, à chaque entier n correspondrait une fonction $f_n(z)$ de la famille qui ne couvrirait pas le cercle $|Z| < \frac{1}{n}$ dans les conditions indiquées, ni le domaine $|Z| > n$ dans ces mêmes conditions. Il existerait donc deux points au moins, intérieurs au cercle $|Z| < \frac{1}{n}$, tels que

$$\left|\frac{\alpha_n - \beta_n}{\beta_n}\right| > k \qquad \left(k = \sin\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

et un point γ_n, non couvert et tel que $|\gamma_n| > n$.

Faisons correspondre, à la suite infinie des fonctions $f_n(z)$, la suite des fonctions

$$g_n(z) = \frac{f_n(z) - \beta_n}{f_n(z) - \gamma_n} : \frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_n - \gamma_n}.$$

Ces fonctions, ne prenant aucune des valeurs o, 1, ∞, forment une famille normale; on a

$$g_n(z_0) = \frac{\beta_n}{\alpha_n - \beta_n} \cdot \frac{\alpha_n - \gamma_n}{\gamma_n};$$

or,

$$\left|\frac{\beta_n}{\alpha_n - \beta_n}\right| < \frac{1}{k}, \quad \left|\frac{\alpha_n - \gamma_n}{\gamma_n}\right| < 1 + \frac{1}{n^2} \leqq 2;$$

donc

$$|g_n(z_0)| < \frac{2}{k}.$$

Les fonctions $g_n(z)$, étant bornées en un point, sont bornées dans l'intérieur de (d).

On peut écrire

$$\frac{f_n(z) - \beta_n}{f_n(z) - \gamma_n} = \frac{\alpha_n - \beta_n}{\alpha_n - \gamma_n} g_n(z) = h_n(z);$$

$h_n(z)$ a pour limite zéro puisque $g_n(z)$ est bornée; il en est de même de $\gamma_n h_n(z)$, car on peut écrire

$$\gamma_n h_n(z) = \frac{\gamma_n}{\alpha_n - \gamma_n}(\alpha_n - \beta_n) g_n(z).$$

L'égalité

$$f_n(z) = \frac{\beta_n - \gamma_n h_n(z)}{1 - h_n(z)}$$

montre que $f_n(z)$ aurait pour limite zéro, contrairement à l'hypothèse.

Il est donc nécessaire que, pour n assez grand, l'un des deux domaines soit recouvert dans les conditions indiquées.

On en déduit, en particulier, que $f(z)$ couvre toujours soit un cercle de rayon $\frac{1}{2}R(\varepsilon)$ contenant l'origine, soit l'extérieur d'un cercle de rayon $\frac{2}{R(\varepsilon)}$ [1].

Si z_0 n'est un pôle pour aucune fonction de la famille, on voit

---

[1] Pour le cas de la famille (F_1), M. G. Valiron a obtenu une extension de son théorème dans une autre direction (*loc. cit.*, p. 36).

que $f(z)$ couvre, ou bien le cercle de rayon $R(\varepsilon)$ dans les conditions énoncées, ou bien le cercle de rayon $\frac{1}{R(\varepsilon)}$ tout entier.

18. Il serait facile d'étendre, aux familles de fonctions méromorphes, les résultats obtenus pour les fonctions holomorphes au moins p-valentes. La marche des démonstrations serait semblable à celle des paragraphes précédents, en substituant aux familles normales des fonctions $g_n(z)$, des familles quasi-normales comme nous l'avons fait dans l'étude des fonctions holomorphes. Les résultats ne différeront que par l'introduction d'une alternative entre deux domaines couverts tandis que, pour les fonctions holomorphes, nous sommes conduits à des affirmations.

Cette alternative disparaît lorsque les fonctions de la famille admettent une valeur exceptionnelle a, car la substitution de $\frac{1}{f(z)-a}$ à $f(z)$ conduit à une famille de fonctions holomorphes, possédant des propriétés semblables, et le domaine extérieur au cercle (D_{-p}) n'est certainement pas couvert.

Remarquons enfin que les diverses hypothèses que l'on a faites sur les fonctions $f(z)$ se conservent dans toute transformation homographique à coefficients constants effectuée sur ces fonctions.

Septembre 1927.