ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

GEORGES GIRAUD

Sur le problème de Dirichlet généralisé (deuxième mémoire)

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 131-245
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__131_0>

SUR

LE PROBLÈME DE DIRICHLET GÉNÉRALISÉ

(DEUXIÈME MÉMOIRE)

PAR M. GEORGES GIRAUD

Introduction.

On connaît la difficulté à laquelle se heurtent les tentatives de résoudre par approximations successives le problème de Dirichlet généralisé pour des équations non linéaires. Si par exemple on considère dans l'espace à trois dimensions le potentiel

$$u = -\frac{1}{4\pi}\int^{'''} \frac{\rho}{r}\, dV, \tag{1}$$

il ne suffit pas que la densité ρ soit continue pour que l'on puisse en déduire la relation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = \rho. \tag{2}$$

Si ρ a ses dérivées partielles continues, on peut faire cette déduction; mais si ρ contient les dérivées partielles jusqu'au second ordre d'une fonction prise dans une suite d'approximations successives, on ne pourra calculer les dérivées secondes de u qu'à condition de connaître les dérivées troisièmes de la fonction précédente; on ne rencontre pas ainsi d'élément lié à chaque approximation et s'exprimant à l'aide de l'élément analogue lié à l'approximation précédente. La difficulté est la même si l'on remplace r^{-1}, dans la définition de u, par une fonction de Green.

Dans un Mémoire antérieur ([1]), on a cherché dans les propriétés

---

([1]) *Sur le problème de Dirichlet généralisé; équations non linéaires à m variables* (*Annales scient. de l'Éc. Norm. sup.*, t. XLIII, 1926, p. 1-128). Ce Mémoire sera par la suite désigné par la lettre D.

des fonctions de variables complexes un élément pouvant jouer ce rôle. On trouvait une limite supérieure de la valeur absolue de chaque approximation dans un domaine complexe à $2m$ dimensions (m étant le nombre des variables) contenant à son intérieur le domaine $\mathcal{D}$ où l'on veut résoudre le problème : dès lors toutes les dérivées étaient limitées dans un domaine à $2m$ dimensions intérieur au premier et un mode convenable d'approximations successives donnait la solution. Toutefois cette solution était soumise à des restrictions gênantes : il va sans dire que les données devaient être holomorphes, et en outre $\mathcal{D}$ devait être assez petit dans toutes ses dimensions et borné par un seul contour [1].

Or il n'est pas nécessaire que ρ ait ses dérivées continues pour que l'on puisse passer de (1) à (2). M. Dini a montré [2] qu'il suffit que ρ satisfasse à une condition de Lipschitz généralisée

$$(3)\quad |\rho(x, y, z) - \rho(a, b, c)| < k[(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{\frac{h}{2}} \qquad (0 < h \leqq 1).$$

On peut démontrer qu'alors non seulement les dérivées secondes de u existent, mais elles satisfont à une condition analogue, h étant remplacé par $h(1+h)^{-1}$. Ce résultat toutefois n'a lieu que dans un domaine fermé intérieur à celui dans lequel l'intégrale est prise et il doit être considérablement étendu pour s'adapter convenablement à notre objet. Quoi qu'il en soit, on voit se manifester là le phénomène analytique qui permet de découvrir, sans sortir du domaine réel, l'élément dont nous parlions plus haut. Simplement en ajoutant ce genre de considérations à celles du Mémoire cité, il est démontré dans un autre travail [3] que si l'on désigne par M_n une limite supérieure de la valeur absolue de la différence $u_{n+1} - u_n$ de deux approximations successives, de ses dérivées jusqu'au huitième ordre et du coefficient analogue à k relatif aux dérivées huitièmes pour un certain exposant q_n analogue à h et qui tend vers zéro quand n croît indéfiniment, on a une relation de récurrence

$$M_{n+1} = a_n M_n^2,$$

---

(1) Cette dernière hypothèse n'était pas indiquée, mais elle était nécessaire.

(2) DINI, *Acta mathematica*, t. 25, 1902, p. 185-230; voir D, p. 38 et suivantes.

(3) *Journal de Mathématiques*, 9e série, t. VIII, 1929.

où a_n augmente indéfiniment, mais d'une façon telle que l'on est assuré de la convergence dès que M_0 est assez petit. Toutefois le domaine $\mathcal{D}$ doit encore, avec ce mode de raisonnement, être petit dans toutes ses dimensions et borné par un seul contour.

Le présent travail ajoute aux méthodes précédentes deux nouveaux moyens d'investigations, dont l'un commande l'autre. Les approximations successives étant formées par la résolution d'une suite d'équations linéaires, il est évident que la théorie du problème de Dirichlet pour les équations linéaires doit être étudiée d'abord. Dans les travaux cités, on se sert d'une *solution élémentaire* de l'équation, selon le nom donné par M. Hadamard (¹). Cette solution élémentaire est formée par la méthode de M. E. E. Lévi, en résolvant une équation de Fredholm. Puis de cette solution élémentaire une autre équation de Fredholm permet de déduire la solution du problème de Dirichlet généralisé. Ici nous remplaçons ces deux équations de Fredholm successives par un seul système de Fredholm, contenant des intégrales d'ordres m et $m-1$ et deux fonctions inconnues, l'une de m, l'autre de $m-1$ variables; il est certainement avantageux pour le raisonnement d'avoir ainsi une seule fois à examiner si l'on est ou non dans le cas d'un pôle de la résolvante de Fredholm.

D'autre part il est un cas depuis longtemps signalé par M. Picard où les raisonnements se simplifient beaucoup; c'est, en nous bornant à l'équation

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+a\frac{\partial u}{\partial x}+b\frac{\partial u}{\partial y}+cu=0,$$

le cas où c est négatif, et plus particulièrement le cas où $a=b=0$, c étant constant et négatif (²). En nous plaçant dans le cas de l'équation linéaire générale du type elliptique à m variables,

$$(4)\qquad \mathcal{F}(u)=\sum\nolimits_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\sum\nolimits_\alpha b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=0\qquad (a_{\alpha,\alpha}>0),$$

où les coefficients satisfont à certaines conditions de régularité et se

(¹) HADAMARD, *C. R. Acad. des Sc.*, t. 170, 1920, p. 149.

(²) *Voir* par exemple PICARD, *Selecta*, p. 109, 123, 231. M. Picard a aussi insisté sur ces cas dans son enseignement, par exemple en 1910.

réduisent, hors d'une certaine hypersphère, à ceux de l'équation

$$\sum_{\alpha=1}^{m} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0 \qquad (g \text{ const.}), \tag{5}$$

il est possible d'établir que cette équation possède, si c est négatif dans tout l'espace, une solution élémentaire qui tend vers zéro, ainsi que ses dérivées, d'une façon exponentielle quand la distance des deux points augmente indéfiniment. Or là réside la raison du succès complet avec lequel l'emploi de la solution élémentaire permet, comme l'a montré M. Picard [1], de traiter le problème de Dirichlet pour l'équation (5). On peut donc s'attendre à pouvoir traiter complètement ce problème pour l'équation (4) si c est négatif dans $\mathcal{D}$, du moins si le coefficient analogue de l'adjointe est aussi négatif, car on pourra, si certaines conditions de régularité sont satisfaites, prolonger les coefficients hors de $\mathcal{D}$ de manière à remplir toutes les hypothèses. Mais il y a plus; on peut dans tous les cas choisir une fonction χ nulle hors d'une certaine hypersphère, et partout supérieure à c et au coefficient analogue de l'adjointe; en introduisant alors la solution élémentaire dont il vient d'être question, relative à $\mathcal{F}(u) - \chi u$, on peut former, pour résoudre le problème de Dirichlet relatif à (4), un système de Fredholm à deux fonctions inconnues l'une de m, l'autre de $m - 1$ variables, dont la discussion est entièrement parallèle à celle du problème de Dirichlet considéré : si ce dernier problème, quand les valeurs données sur le contour $\mathcal{S}$ sont nulles, n'a que la solution zéro, le système de Fredholm homogène n'a que la solution zéro, et par suite le problème de Dirichlet à données non nulles a une solution et une seule; si le problème de Dirichlet à données nulles a des solutions non nulles, il en est de même du système de Fredholm homogène, et le problème de Dirichlet à données quelconques n'est soluble que si le système de Fredholm l'est, chaque solution du problème étant donnée par une solution et une seule du système de Fredholm. Une autre conséquence de l'étude ici faite est que les problèmes de Dirichlet à données nulles relatifs à $\mathcal{F}$ et à son

---

(1) Picard, *Selecta*, p. 231. M. Picard n'a traité explicitement que le cas de trois variables, mais ses démonstrations s'étendent d'elles-mêmes.

adjointe ont le même nombre de solutions linéairement indépendantes. Ces résultats ont lieu quels que soient la mesure de $\mathcal{D}$ et le nombre des contours.

La répercussion sur la question relative aux équations non linéaires est immédiate : si l'on se donne une équation de type elliptique

$$\mathcal{F}(u) = \mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}; \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}; u; x_\alpha; t\right) = 0,$$

dépendant d'un paramètre t, et si les données sur $\mathcal{S}$ dépendent aussi de t et que l'on connaisse une solution u_0 relative à la valeur t_0 de ce paramètre, il existe, sous certaines conditions de régularité, une solution relative aux valeurs de t voisines de t_0 pourvu seulement que l'équation linéaire qu'on peut appeler équation aux solutions infiniment voisines n'ait pas d'autre solution nulle sur $\mathcal{S}$ que la solution zéro.

Dans les deux premières sections de ce Mémoire sont étudiées des fonctions représentées par des intégrales analogues à des potentiels, puis la composition de ce qu'on peut appeler les noyaux de ces intégrales. La troisième section voit introduire le problème de Dirichlet généralisé pour les équations linéaires et le système de Fredholm qui permet de le résoudre pour un domaine suffisamment petit et à un seul contour. Le résultat est appliqué dans la section suivante à l'étude des dérivées premières et secondes de la solution u sur la multiplicité $\mathcal{S}$, connaissant les valeurs de u sur $\mathcal{S}$. La cinquième section est consacrée au problème de Dirichlet pour un domaine quelconque. On établit alors (sixième section) le résultat qui vient d'être annoncé, relatif aux équations non linéaires. Enfin une septième section est consacrée au cas où les données sont holomorphes; on y établit, par la combinaison des méthodes actuelles avec la considération du domaine complexe, deux théorèmes donnant des conditions suffisantes l'un pour que u soit holomorphe dans $\mathcal{D}$, l'autre pour que u soit prolongeable analytiquement au delà de $\mathcal{S}$.

On a laissé entièrement de côté l'étude des cas où les valeurs données sur $\mathcal{S}$ ne sont pas continues, des cas où le contour $\mathcal{S}$ offre des singularités et de tous les cas analogues. De même on ne s'est pas occupé des problèmes autres que le problème de Dirichlet intérieur;

une exception a pourtant été faite pour le problème de Neumann extérieur, mais dans un cas de nature tout à fait artificielle et seulement comme moyen de démonstration en vue du problème de Dirichlet intérieur (section V).

On voit que, dans ce travail encore, l'instrument essentiel, pour les équations non linéaires, est la méthode des approximations successives de M. Picard. Certaines hypothèses paraissent, il est vrai, plus restrictives que ne comporte la question; la chose est certaine dans le cas de deux variables, comme on peut s'en rendre compte par la comparaison des résultats des sections VI et VII avec ceux de M. Serge Bernstein ([1]); cette imperfection a pour cause l'imperfection des connaissances relatives aux équations linéaires, et les résultats si intéressants obtenus par M. Gevrey ([2]), combinés avec les méthodes de ce travail, doivent donner une extension nouvelle à l'étude du problème de Dirichlet relatif aux équations non linéaires et des problèmes analogues ([3]).

I.

Définition. — Nous aurons souvent à considérer, dans le cours de ce travail, des fonctions satisfaisant à une condition de Lipschitz généralisée. On entend par là des fonctions $\varphi(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, ou $\varphi(X)$, X étant le *point* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, satisfaisant, quels que soient les points X et Y, à la condition

$$|\varphi(X) - \varphi(Y)| < k L^h(X, Y),$$

([1]) Serge Bernstein, *Sur la nature analytique des solutions des équations aux dérivées partielles du second ordre*, Thèse, Paris, 1903; *voir* aussi *Mathematische Annalen*, t. 62, 1906, p. 253-271, et t. 69, 1910, p. 82-136; *Annales scient. de l'Éc. Norm. sup.*, t. 27, 1910, p. 233-256.

([2]) Gevrey, *C.R. Acad. des Sc.*, t. 158, 1914, p. 1652; t. 171, 1920, p. 610 et 839; t. 173, 1921, p. 761; t. 182, 1926, p. 36 et 754; t. 184, 1927, p. 1109 et 1632; t. 185, 1927, p. 1565; *Ann. scient. de l'Éc. Norm. sup.*, t. 35, 1918, p. 129-190. M. Gevrey a aussi considéré des équations d'ordre supérieur au second et des équations intégro-différentielles.

([3]) Les résultats de ce travail ont fait l'objet de plusieurs Notes (*C.R. Acad. des Sc.*, t. 187, 1928, p. 498 et 632; t. 188, 1929, p. 765, 976 et 1221). Certaines de ces Notes restreignent des hypothèses trop larges faites dans les précédentes.

où k et h sont des constantes positives ($h \leqq 1$), et où L(X, Y) est la distance des deux points :

$$L(X, Y) = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \ldots + (x_m - y_m)^2}.$$

Pour abréger, nous dirons alors que $\varphi(X)$ *est continu* (L) *d'exposant h et de coefficient k*. La mention de l'exposant et celle du coefficient pourront être supprimées.

THÉORÈME 1. — *Dans l'espace* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$, *soient* $\mathcal{D}_1$ *un domaine borné ouvert de la multiplicité* $x_m = 0$, *et* $\mathcal{S}_1$ *sa frontière. Soient d'autre part* $\mathcal{D}$ *et* $\mathcal{S}$ *les ensembles des points dont les* $m - 1$ *premières coordonnées sont respectivement celles de points de* $\mathcal{D}_1$ *et de* $\mathcal{S}_1$, *et dont la dernière coordonnée* x_m *est comprise entre zéro (compris) et un nombre positif donné. Soient* $\varpi(A)$ *une fonction continue dans* $\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_1$ *et* G(X, A) *une fonction continue quand* X *appartient à* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ *et* A *à* $\mathcal{D}_1 + \mathcal{S}_1$ *et que ces deux points ne coïncident pas, les dérivées* $\dfrac{\partial G}{\partial x_\alpha}$ *étant continues dans les mêmes conditions et ces fonctions étant telles que*

$$(1) \qquad |G(X, A)| < NL^{\lambda - m + 1}(X, A), \quad \left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\right| < NL^{\lambda - m}(X, A)$$
$$(0 < \lambda \leqq 1;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où N *est une constante. Alors la fonction*

$$F(X) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m-1)} G(X, A)\, \varpi(A)\, dV_A \qquad [dV_A = d(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})]$$

est continue (L) *d'exposant* λ *si* $\lambda < 1$ *et d'exposant aussi voisin de un qu'on veut si* $\lambda = 1$.

Soient en effet X et Y deux points de $\mathcal{D}$, $\mathcal{D}''$ la partie commune à $\mathcal{D}$ et à une hypersphère de centre X et de rayon 2L(X, Y), $\mathcal{D}''_1$ la partie commune à $\mathcal{D}''$ et à $\mathcal{D}_1$, et $\mathcal{D}'_1$ le reste de $\mathcal{D}_1$. $\mathcal{D}''_1$ peut ne pas exister; c'est une hypersphère à $m - 1$ dimensions ayant pour centre le point X_1 de coordonnées $(x_1, x_2, \ldots, x_{m-1}, 0)$ (nous continuerons à désigner par M_1, avec un indice 1, la projection d'un point M quelconque sur ϖ_1), et pour rayon $\sqrt{4L^2(X, Y) - x_m^2}$.

On a

$$F(X) - F(Y) = \int_{\varpi_1''}^{(m-1)} G(X, A)\,w(A)\,dV_A - \int_{\varpi_1''}^{(m-1)} G(Y, A)\,w(A)\,dV_A$$
$$+ \int_{\varpi_1'}^{(m-1)} [G(X, A) - G(Y, A)]\,w(A)\,dV_A.$$

Comme $L(X_1, A) < L(X, A)$, on peut remplacer X par X_1 dans les seconds membres de (1) (si $m > 1$, comme nous le supposons toujours), et il en résulte (1) que chacune des intégrales étendues à ϖ_1'' est moindre que le produit de $MN\lambda^{-1}L^{\lambda}(X, Y)$ par un nombre dépendant seulement de m; M désigne le maximum de $|w(A)|$.

Reste l'intégrale étendue à ϖ_1'. Nous avons, en désignant par Ξ un point du segment de droite XY,

$$G(X, A) - G(Y, A) = \sum_{\alpha=1}^{m} (x_\alpha - y_\alpha) \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}(\Xi, A),$$

d'où

$$|G(X, A) - G(Y, A)| < \sqrt{m}\, N L(X, Y)\, L^{\lambda - m}(\Xi, A).$$

D'ailleurs, A appartenant à ϖ_1',

$$L(\Xi, A) \geqq L(X, A) - L(X, \Xi) > \frac{1}{2} L(X, A);$$

---

(1) Soit à limiter l'intégrale $\int_{\varpi}^{(m)} \rho^{-p}\, d(a_1, \ldots, a_m)$, ϖ étant un domaine de l'espace à m dimensions, ayant pour mesure Ω, et ρ désignant la distance $L(A, X)$, où X est un point fixe; p est une constante positive inférieure à m. En partageant l'intégrale en deux, à l'aide d'une hypersphère de centre X et de rayon arbitraire r, on voit qu'elle est moindre que

$$2\pi^{\frac{m}{2}} \left[(m-p)\,\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1} r^{m-p} + \Omega r^{-p}.$$

Quand r varie, le minimum de cette fonction est

$$m(m-p)^{-1} p^{-\frac{p}{m}} \left(2\pi^{\frac{m}{2}}\right)^{p} \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-p} \Omega^{\frac{m-p}{m}}.$$

Or $p^{-\frac{p}{m}} < e^{\frac{1}{me}}$, et les facteurs qui suivent ont un produit moindre que le plus grand des nombres *un* et

$$\left(2\pi^{\frac{m}{2}}\right)^{m} \left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-m}.$$

donc

$$|G(X, A) - G(Y, A)| < \sqrt{m}\, 2^{m-\lambda} N L(X, Y) L^{\lambda-m}(X, A).$$

En multipliant par M, on aura une limite supérieure de la valeur absolue de la fonction intégrée dans ϖ'_1; nous intégrerons le résultat dans la région

$$2L_0 > L(X, A) > 2L(X, Y),$$

qui contient ϖ'_1; L_0 est une longueur supérieure au maximum de $L(X, Y)$ dans $\varpi + \mathfrak{S}$. Soit $\rho = L(X_1, A)$; posons

$$a_\alpha = x_\alpha + \rho c_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1);$$

notre intégrale est moindre que [1] le produit de

$$MNL(X, Y) \int_r^{2L_0} \rho^{m-2} (\rho^2 + x_m^2)^{\frac{\lambda-m}{2}} d\rho,$$

par un facteur dépendant seulement de m; r désigne $\sqrt{4L^2(X, Y) - x_m^2}$ si cette quantité est réelle, et zéro dans le cas contraire. Si d'abord

$$r \leqq x_m \sqrt{3},$$

c'est à dire si

$$x_m \geqq L(X, Y),$$

l'intégrale ci-dessus est moindre que

$$x_m^{\lambda-1} \int_0^{\frac{2L_0}{x_m}} \frac{t^{m-2}\, dt}{(1+t^2)^{\frac{m-\lambda}{2}}};$$

si $\lambda < 1$, ceci est moindre que

$$x_m^{\lambda-1} \left[\int_0^1 \frac{t^{m-2}\, dt}{(1+t^2)^{\frac{m-1}{2}}} + \int_1^\infty t^{\lambda-2}\, dt \right],$$

ou que le produit de $(1-\lambda)^{-1} x_m^{\lambda-1}$ par une fonction de m, ou enfin que le produit de $(1-\lambda)^{-1} L^{\lambda-1}(X, Y)$ par une fonction de m; si $\lambda = 1$, c'est moindre que

$$\int_0^1 (1+t^2)^{\frac{1-m}{2}} t^{m-2}\, dt + \int_1^{2L_0 x_m^{-1}} \frac{dt}{t},$$

(1) *Voir* D., p. 28.

ou que le produit de $\log \frac{L_0}{X_m}$ par une fonction de m, ou enfin que le produit de $\log \frac{L_0}{L(X, Y)}$ par une fonction de m. Si maintenant

$$r > x_m\sqrt{3},$$

ce qui entraîne

$$r > L(X, Y)\sqrt{3},$$

cette intégrale est moindre que

$$\int_r^{2L_0} t^{\lambda-2} dt < \frac{r^{\lambda-1}}{1-\lambda} < \frac{L^{\lambda-1}(X, Y)}{1-\lambda} \qquad (\lambda < 1),$$

et, si $\lambda = 1$, elle est moindre que

$$\log \frac{2 L_0}{r} < \log \frac{L_0}{L(X, Y)} + \log \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

On voit donc que

$$(2) \qquad |F(X) - F(Y)| < \begin{cases} k\,MN\lambda^{-1}(1-\lambda)^{-1} L^{\lambda}(X, Y) & (\lambda < 1), \\ k\,MNL(X, Y) \log \dfrac{L_0}{L(X, Y)} & (\lambda = 1), \end{cases}$$

k dépendant seulement de m.

THÉORÈME 2. — *Si, en plus des hypothèses du théorème 1, les* $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m-1)$ *existent et sont continus pour* $X \neq A$ *et si*

$$(3) \quad \left| \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} \right| < NL^{\lambda+h-m}(X, A) \qquad (1 - \lambda < h \leqq 1;\ \alpha = 1, 2, \ldots, m-1),$$

et si $\varpi(A)$ *est continu* (L) *d'exposant* h, $F(X)$ *admet par rapport aux variables autres que* x_m *des dérivées continues en tout point de* $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ *non situé sur* $\mathcal{S}_1$.

Soient, sur $x_m = 0$, $\mathcal{D}''_1$ l'intérieur d'une hypersphère de centre X_1 et de rayon arbitraire r, $\mathcal{S}'_1$ sa frontière, $\mathcal{D}'_1$ la partie de $\mathcal{D}_1$ extérieure à $\mathcal{D}''_1$. On a

$$F(X) = \lim_{r=0} F_r(X), \quad F_r(X) = \int_{\mathcal{D}'_1}^{(m-1)} G(X, A)\,\varpi(A)\,dV_A.$$

Désignons par dS l'élément de l'hypersurface $\mathcal{S}'_1$:

$$dS_A = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m-1} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{m-1}, a_1, \ldots, a_{\alpha-1})^2},$$

et soit encore, en prenant $\mathcal{S}'_1$ dans le sens associé au sens $(a_1, a_2, \ldots, a_{m-1})$ de ϖ''_1,

$$\varpi_\alpha(A)\, dS_A = (-1)^{m(\alpha-1)} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m-1),$$

cette relation définissant $\varpi_\alpha(A)$; $(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$ désigne ce qu'on obtient en permutant circulairement $a_1, \ldots, a_{m-1}$ de façon à amener a_α en tête, puis en supprimant a_α. On aura, si r est assez petit pour que $\mathcal{S}'_1$ soit intérieur à ϖ_1,

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_\alpha} = \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} w(A)\, dV_A - \int_{\mathcal{S}'_1}^{(m-2)} G(X, A)\, w(A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.$$

Ceci s'écrit

$$\begin{aligned}\frac{\partial F_r}{\partial x_\alpha} = \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} [w(A) - w(X_1)]\, dV_A + w(X_1) \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A \\ - w(X_1) \int_{\varpi'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\, \partial V_A - \int_{\mathcal{S}'_1}^{(m-2)} G(X, A)\, w(A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A,\end{aligned}$$

et les deux derniers termes peuvent être remplacés par

$$\begin{aligned}&- w(X_1) \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A \\ &+ w(X_1) \int_{\mathcal{S}'_1}^{(m-2)} G(X, A)[w(X_1) - w(A)]\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.\end{aligned}$$

Si r tend vers zéro, les différents termes tendent vers des limites, uniformément par rapport à X; donc $\dfrac{\partial F}{\partial x_\alpha}$ existe et est continu, et

$$\begin{aligned}\text{(4)} \qquad \frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = &\int_{\varpi_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} [w(A) - w(X_1)]\, dV_A \\ &+ w(X_1) \int_{\varpi_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) dV_A \\ &- w(X_1) \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.\end{aligned}$$

Le théorème est démontré et nous allons, de plus, utiliser cette formule pour limiter ces dérivées. Soit M une limite supérieure de $|w(\mathrm{A})|$ et du coefficient de continuité (L) de w et considérons les points X dont la distance à $\mathcal{S}_1$ est au moins égale au nombre positif δ; alors

$$(5) \qquad \left|\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\alpha}\right| < \mathrm{MN}\left(\delta^{\lambda-m+1}\sigma + \frac{k}{\lambda+h-1}\Omega^{\frac{\lambda+h-1}{m-1}}\right),$$

σ étant la mesure de $\mathcal{S}_1$, Ω celle de ϖ_1 et k ne dépendant que de m.

Théorème 3. — *Si, en plus des hypothèses du théorème 2, les* $\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$ *existent (sauf peut-être si* $\alpha = m$) *et sont continus pour* $\mathrm{X} \neq \mathrm{A}$, *et si*

$$(6) \qquad \left|\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\right| < \mathrm{NL}^{\lambda-m-1}(\mathrm{X}, \mathrm{A}),$$

les dérivées de F *par rapport aux variables autres que* x_m *sont continues* (L) *d'exposant* $\dfrac{\lambda+h-1}{h+1}$ *dans tout domaine fermé appartenant à* $\varpi + \mathcal{S}$, *mais sans point commun avec* $\mathcal{S}_1$.

En effet, soit $\delta > 0$ une borne inférieure de la distance de X à $\mathcal{S}_1$ et soit $l = (1+h)^{-1}$. Il nous suffit de considérer le cas où

$$\mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < 2^{-1-h}\delta^{1+h}, \qquad \mathrm{L}(\mathrm{X}, \mathrm{Y}) < 1.$$

Soient alors ϖ_1'' la partie de ϖ_1 intérieure à une hypersphère de centre X et de rayon $2\mathrm{L}^l(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^1$, $\mathcal{S}_1'$ la frontière de ϖ_1'' prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ de ϖ_1'', ϖ_1' la partie restante de ϖ_1. On a, d'après la formule (4),

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathrm{F}}{\partial x_\alpha} = {} & \int_{\varpi_1'}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha} w(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} + \int_{\varpi_1''}^{(m-1)} \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}[w(\mathrm{A}) - w(\mathrm{X}_1)]\, d\mathrm{V}_\mathrm{A} \\ & + w(\mathrm{X}_1)\int_{\varpi_1''}^{(m-1)}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a_\alpha}\right) d\mathrm{V}_\mathrm{A} - w(\mathrm{X}_1)\int_{\mathcal{S}_1'}^{(m-2)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\varpi_\alpha(\mathrm{A})\, d\mathrm{S}_\mathrm{A},\end{aligned}$$

et la formule subsiste si l'on remplace X par Y. Si ϖ_1'' n'existe pas, le premier terme subsiste seul. Or, quand A appartient à ϖ_1', on a

$$\left|\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{X}, \mathrm{A}) - \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha}(\mathrm{Y}, \mathrm{A})\right| < \sqrt{m}\,\mathrm{NL}(\mathrm{X}, \mathrm{Y})^{\lambda-m-1}(\Xi, \mathrm{A}),$$

où Ξ est un point du segment de droite XY. D'ailleurs on a, comme dans la démonstration du théorème 1, $L(\Xi, A) > 2^{-1} L(X, A)$. Le procédé, employé déjà dans ce théorème, nous donne comme contribution de l'intégrale étendue à ϖ'_1 dans la variation de $\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}$, une quantité inférieure en valeur absolue au produit de

$$MNL(X, Y) \int_r^{L_0} \rho^{m-2}(\rho^2 + x_m^2)^{\frac{\lambda - m - 1}{2}} d\rho$$

par une fonction de m seulement ; r désigne $\sqrt{4 L^{2l}(X, Y) - x_m^2}$ si cette quantité est réelle et zéro dans le cas contraire. Si $r \leqq x_m \sqrt{3}$, c'est-à-dire si $x_m \geqq L^l(X, Y)$, la dernière intégrale est moindre que

$$x_m^{\lambda-2} \left[\int_0^1 (1 + t^2)^{-\frac{m}{2}} t^{m-2}\, dt + \int_1^\infty t^{\lambda-3}\, dt \right],$$

ou que le produit de $(2 - \lambda)^{-1} x_m^{\lambda-2}$ par une fonction de m, ou enfin que le produit de $L^{l(\lambda-2)}(X, Y)$ par une fonction de m. Si $r > x_m \sqrt{3}$, ce qui entraîne $r > L^l(X, Y)\sqrt{3}$, cette intégrale est moindre que

$$\int_r^{L_0} t^{\lambda-3}\, dt < (2 - \lambda)^{-1} r^{\lambda-2} < L^{l(\lambda-2)}(X, Y).$$

En définitive, l'intégrale étendue à ϖ'_1 a, dans la variation de la dérivée, une contribution moindre en valeur absolue que le produit de

$$MNL^{1+l(\lambda-2)}(X, Y)$$

par une fonction de m seul ; l'exposant de L est $\frac{\lambda + h - 1}{h + 1}$.

Ensuite, les intégrales étendues à ϖ''_1, prises en X ou en Y, sont toutes moindres en valeur absolue que le produit de

$$(\lambda + h - 1)^{-1} MNL^{l(\lambda+h-1)}(X, Y)$$

par des fonctions de m seul ; l'exposant de L est le même que ci-dessus.

Pour l'intégrale étendue à $\mathfrak{S}'_1$, on écrit la différence

$$[w(Y_1) - w(X_1)] \int_{\mathfrak{S}'_1}^{(m-2)} G(X, A)\,\varpi_\alpha(A)\,dS_A$$
$$- w(Y_1) \int_{\mathfrak{S}'_1}^{(m-2)} [G(X; A) - G(Y, A)]\varpi_\alpha(A)\,dS_A.$$

En tenant compte de la valeur absolue constante de $L(X, A)$ sur $\mathfrak{S}'_1$ et de ce que le rayon r de $\mathfrak{S}'_1$ est moindre que $2L^l(X, Y)$, on voit que le premier terme est moindre en valeur absolue que le produit d'une fonction de m par

$$MNL^h(X_1, Y_1)[2L^l(X, Y)]^{\lambda-m+1} r^{m-2} < 2^{\lambda-1} MNL^{h+l(\lambda-1)}(X, Y),$$

où l'exposant de L est plus grand que $\frac{\lambda + h - 1}{1 + h}$. Dans le second terme, on applique la formule des accroissements finis, ce qui donne moins que le produit d'une fonction de m par

$$MNL(X, Y)[2L^l(X, Y)]^{\lambda-m} r^{m-2} < 2^{\lambda-2} MNL^{1+l(\lambda-2)}(X, Y).$$

Ainsi,

$$(7) \qquad \left|\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X) - \frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(Y)\right| < k(\lambda + h - 1)^{-1} MNL^{\frac{\lambda+h-1}{h+1}}(X, Y),$$

k ne dépendant que de m, de δ et du domaine $\mathfrak{D}$.

Théorème 4. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 3, $w(A)$ *a des dérivées premières continues et si les* $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ *ont, par rapport à* x_1, x_2, ..., x_m, *des dérivées continues pour* $X \neq A$ *et telles que* [1]

$$(8) \qquad \left|\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)\right| < NL^{\lambda-m+h-1}(X, A),$$

les dérivées de $F(X)$ *par rapport aux variables autres que* x_m *sont continues* (L) *dans tout domaine fermé appartenant à* $\mathfrak{D} + \mathfrak{S}$ *et sans point com-*

---

[1]) Cette partie de l'hypothèse n'intervient pas dans la démonstration de la formule (9).

mun avec $\mathcal{S}_1$, *avec l'exposant* $\lambda + h - 1$ *si* $\lambda + h - 1 < 1$, *et avec un exposant aussi voisin de un qu'on veut si* $\lambda = h = 1$.

En effet, l'expression de la dérivée de $F_r(X)$, trouvée au théorème 2, peut s'écrire

$$\frac{\partial F_r}{\partial x_\alpha} = \int_{\omega'_1}^{(m-1)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) w(A)\, dV_A$$
$$- \int_{\omega'_1}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} w(A)\, dV_A - \int_{\mathcal{S}'_1}^{(m-2)} G(X, A)\, w(A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.$$

ou, à l'aide d'une intégration par parties,

$$\frac{\partial x_\alpha}{\partial F_r} = \int_{\omega'_1}^{(m-1)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) w(A) + G(X, A) \frac{\partial w}{\partial a_\alpha}\right] dV_A$$
$$- \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\, w(A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A,$$

d'où, en faisant tendre r vers zéro,

$$\frac{\partial F}{\partial x_\alpha} = \int_{\omega_1}^{(m-1)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right) w(A) + G(X, A) \frac{\partial w}{\partial a_\alpha}\right] dV_A$$
$$- \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-2)} G(X, A)\, w(A)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A. \tag{9}$$

La continuité (L) se déduit alors du théorème 1 pour l'intégrale étendue à ω_1 [remarquer que $L^{\lambda-m+1}(X, Y) < L_0^{1-h} L^{\lambda-m+h}(X, Y)$, ce qui permet d'appliquer les mêmes conclusions aux deux termes de l'intégrale] et du fait qu'on peut dériver sous le signe $\int$ pour l'intégrale étendue à $\mathcal{S}_1$. On voit que l'exposant de continuité (L), fourni par ce théorème, est plus grand que celui qu'on déduit du théorème précédent.

Si M est supérieur aux valeurs absolues de w et de ses dérivées, la formule (9) nous montre que

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}\right| < k \frac{MN}{\lambda + h - 1}, \tag{10}$$

où k ne dépend que de m, de ω et de δ (minimum des distances de X à $\mathfrak{S}_1$). Ensuite, d'après le théorème 1,

$$\left|\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(X)-\frac{\partial F}{\partial x_\alpha}(Y)\right|<\begin{cases}\dfrac{kMN}{(\lambda+h-1)(2-\lambda-h)}L^{\lambda+h-1}(X,Y) \\ \qquad(\lambda+h<2), \\ kMNL(X,Y)\log\dfrac{L_0}{L(X,Y)} \\ \qquad(\lambda=h=1),\end{cases}\tag{11}$$

k dépendant toujours seulement de m, de ϖ et de δ.

Toutes ces démonstrations subsistent si ϖ se réduit à ϖ_1, mais, dans ce cas, il n'y a plus jamais lieu de dériver G par rapport à x_m. Changeons m en $m+1$, et posons

$$dV_A=d(a_1,\ldots,a_m);$$

nous parvenons aux théorèmes suivants qu'il suffit d'énoncer :

THÉORÈME 5. — *Soit ϖ un domaine borné ouvert de l'espace à m dimensions et soit $\mathfrak{S}$ sa frontière. Soient $w(A)$ une fonction continue dans $\varpi+\mathfrak{S}$ et $G(X,A)$ une fonction continue ainsi que ses dérivées par rapport aux $x_\alpha(\alpha=1,2,\ldots,m)$ quand X et A appartiennent à $\varpi+\mathfrak{S}$ et ne coïncident pas, et telle que* (¹)

$$G(X,A)=O[L^{\lambda-m}(X,A)],\qquad \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}O[L^{\lambda-m-1}(X,A)]\qquad(0<\lambda\leqq 1).$$

Alors la fonction

$$F(X)=\int_\varpi^{(m)}G(X,A)w(A)\,dV_A$$

est continue (L) *d'exposant λ si $\lambda<1$, et d'exposant aussi voisin de un qu'on veut si $\lambda=1$.*

THÉORÈME 6. — *Si, en plus des hypothèses du théorème 5, les $\dfrac{\partial G}{\partial a_\alpha}$ sont continus pour $X\neq A$, et si*

$$\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}=O[L^{\lambda-m+h-1}(X,A)]\qquad(1-\lambda<h\leqq 1;\ \alpha=1,2,\ldots,m),$$

(¹) La notation $y=O(z)$ signifie que yz^{-1} est borné, et la notation $y=o(z)$ signifie que $\lim yz^{-1}=0$.

et si $\varpi(\mathrm{A})$ *est continu* (L) *d'exposant* h, $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ *a des dérivées premières continues en tout point de* $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 7. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 6, *les* $\dfrac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}$ *sont continus pour* $\mathrm{X} \neq \mathrm{A}$, *et si*

$$\frac{\partial^2 \mathrm{G}}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{\lambda-m-2}(\mathrm{X}, \mathrm{A})] \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

les dérivées de F *sont continues* (L) *d'exposant* $\dfrac{\lambda + h - 1}{h + 1}$ *dans tout domaine fermé intérieur à* $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 8. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 7, ϖ *a des dérivées continues, et si* $\dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial \mathrm{G}}{\partial a_\alpha}$ *a, par rapport aux* x_β, *des dérivées continues pour* $\mathrm{X} \neq \mathrm{A}$, *et telles que*

$$\frac{\partial}{\partial x_\beta}\left(\frac{\partial \mathrm{G}}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial \mathrm{G}}{\partial a_\alpha}\right) = \mathrm{O}[\mathrm{L}^{\lambda-m+h-2}(\mathrm{X}, \mathrm{A})] \qquad (\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m),$$

et si X *reste dans un domaine fermé intérieur à* $\mathcal{D}$, *les dérivées de* $\mathrm{F}(\mathrm{X})$ *sont continues* (L) *d'exposant* $\lambda + h - 1$ *si* $\lambda + h < 2$ *et d'exposant aussi voisin de un qu'on veut si* $\lambda = h = 1$.

II.

THÉORÈME 1. — *Soit* $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ *une fonction définie et continue quand les points* X *et* A *appartiennent au domaine* $\mathcal{D}$ *du théorème* 1 *de la section* I *et que leurs* $m - 1$ *premières coordonnées ne sont pas les mêmes; soit* $\mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi)$ *une autre fonction définie et continue quand* A *et* Ξ *appartiennent à* $\mathcal{D}$ *et que leurs* $m - 1$ *premières coordonnées ne sont pas les mêmes; supposons, en outre, que*

$$(1) \qquad |\mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})| < \mathrm{M}\mathrm{L}^{\lambda-m+1}(\mathrm{X}_1, \mathrm{A}_1),$$
$$|\mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi)| < \mathrm{N}\mathrm{L}^{\mu-m+1}(\mathrm{A}_1, \Xi_1) \qquad (0 < \lambda < m - 1;\ 0 < \mu < m - 1)$$

(l'indice *un* servant, comme plus haut, à désigner les projections sur $\mathcal{D}$). *Alors la fonction*

$$\mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\,\mathrm{H}(\mathrm{A}, \Xi)\, d\mathrm{V}_\mathrm{A}$$

est continue si $X_1 \neq \Xi_1$ *et*

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1) & (\lambda + \mu < m - 1), \\ O\left[\log \dfrac{L_0}{L(X_1, \Xi_1)}\right] & (\lambda + \mu = m - 1), \\ O(1) & (\lambda + \mu > m - 1); \end{cases}$$

dans ce dernier cas, $K(X, \Xi)$ *est partout continu.*

Par une homothétie suivie d'un déplacement, nous pouvons faire revenir sur elle-même la multiplicité $a_m = 0$ de façon que le point X_1 vienne à l'origine et le point Ξ_1 en $(1, 0, \ldots, 0)$. Alors

$$|K(X, \Xi)| < MNL^{\lambda+\mu-m+2}(X_1, \Xi_1) \times \int^{(m)} \frac{dV_A}{(a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2)^{\frac{m-\lambda-1}{2}} [(a_1 - 1)^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2]^{\frac{m-\mu-1}{2}}},$$

l'intégrale étant prise dans le domaine

$$0 < a_m < L_0 L^{-1}(X_1, \Xi_1), \qquad a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < L_0^2 L^{-2}(X_1, \Xi_1).$$

En effectuant d'abord l'intégration par rapport à a_m, nous avons

$$|K(X, \Xi)| < MNL_0 L^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1) \times \int^{(m-1)} \frac{d(a_1, \ldots, a_{m-1})}{(a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2)^{\frac{m-\lambda-1}{2}} [(a_1 - 1)^2 + \ldots + a_{m-1}^2]^{\frac{m-\mu-1}{2}}}.$$

Si $\lambda + \mu < m - 1$, nous intégrons dans l'espace $(a_1, \ldots, a_{m-1})$ entier; en intégrant séparément dans deux hypersphères de centres respectifs l'origine et le point $(1, 0, \ldots, 0)$ et de même rayon *un demi*, puis dans la région extérieure à ces hypersphères et intérieure à une hypersphère ayant pour centre l'origine et pour rayon *deux*, puis dans tout l'extérieur de cette dernière, nous trouvons

$$(2) \quad |K(X, \Xi)| < k[\lambda\mu(m - \lambda - \mu - 1)]^{-1} MNL^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1) \quad (\lambda + \mu < m - 1),$$

k ne dépendant que de m et du domaine $\mathcal{D}$.

Si $\lambda + \mu = m - 1$, la dernière intégrale sera seulement étendue à la région comprise entre les hypersphères de rayons respectifs *deux* et $L_0 L^{-1}(X_1, \Xi_1)$, ce qui donne

$$(2\ bis) \qquad |K(X, \Xi)| < \frac{k}{\lambda\mu} MN \log \frac{L_0}{L(X_1, \Xi_1)} \qquad (\lambda + \mu = m - 1).$$

Enfin, si $\lambda + \mu > m - 1$, le même procédé conduit à

$$(2\ ter) \qquad |K(X, \Xi)| < k[\lambda\mu(\lambda + \mu - m + 1)]^{-1} MN \qquad (\lambda + \mu > m - 1).$$

L'intégrale est, dans ce cas, continue, même si X_1 et Ξ_1 viennent se confondre; en effet, si l'on étend l'intégrale à la région des points qui satisfont à l'une au moins des inégalités

$$L(X_1, A_1) < r, \qquad L(\Xi_1, A_1) < r,$$

où r est une longueur quelconque (région qui contient les singularités), cette intégrale est moindre en valeur absolue que

$$2MN \int^{(m)} (a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2)^{\frac{\lambda+\mu}{2} - m + 1} dV_A,$$

cette nouvelle intégrale étant étendue à la région

$$0 < a_m < L_0, \qquad a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < r^2,$$

et étant, par suite, infiniment petite avec r; il y a donc convergence uniforme et la continuité en résulte ([1]).

THÉORÈME 2. — *Si* $G(X, A)$ *est défini et continu quand* X_1 *et* A *sont différents, le second de ces points appartenant à* $\mathcal{D}_1$ *et* X *étant quelconque dans* $\mathcal{D}$; *si* $H(A, \Xi)$ *est défini et continu quand* A *et* Ξ_1 *sont différents,* A *appartenant à* $\mathcal{D}_1$ *et* Ξ *étant quelconque dans* $\mathcal{D}$; *si, enfin,*

$$|G(X, A)| < ML^{\lambda - m + 1}(X_1, A),$$
$$|H(A, \Xi)| < NL^{\mu - m + 1}(A, \Xi_1) \qquad (0 < \lambda < m - 1,\ 0 < \mu < m - 1),$$

([1]) La démonstration prouve qu'on peut, dans les limitations (2), (2 *bis*), (2 *ter*), remplacer les inverses des produits $\lambda\mu(m - \lambda - \mu - 1$, $\lambda\mu$, ... par la somme des inverses des facteurs

$$\frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu} + \frac{1}{m - \lambda - \mu - 1} \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{\lambda} + \frac{1}{\mu}, \ldots.$$

De même dans la suite de cette section.

la fonction

$$K(X, \Xi) = \int_{\varpi_1}^{(m-1)} G(X, A) H(A, \Xi)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

est continue pour $X \neq \Xi$ *et*

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1)] & (\lambda + \mu < m - 1), \\ O\left[\log \dfrac{L_0}{L(X_1, \Xi_1)}\right] & (\lambda + \mu = m - 1), \\ O[1] & (\lambda + \mu > m - 1); \end{cases}$$

dans ce dernier cas, la fonction est toujours continue.

Il suffit, pour le voir, de considérer $G(X, A)$ et $H(A, \Xi)$ comme des fonctions de deux points de ϖ, toutes deux indépendantes de a_m. La fonction K est alors le produit d'un facteur constant par l'intégrale

$$\int_{\varpi}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A,$$

ce qui nous ramène au théorème précédent.

Théorème 3. — *Si* ϖ *est un domaine borné de l'espace à m dimensions et si* $G(X, A)$ *et* $H(A, \Xi)$ *sont deux fonctions définies et continues quand* X *et* A *ou* A *et* Ξ *sont différents et appartiennent à* ϖ; *si, enfin,*

$$|G(X, A)| < ML^{\lambda-m}(X, A),$$
$$|H(A, \Xi)| < NL^{\mu-m}(A, \Xi) \qquad (0 < \lambda < m,\ 0 < \mu < m).$$

la fonction

$$K(X, \Xi) = \int_{\varpi}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A$$

est continue pour $X \neq \Xi$ *et*

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m}(X, \Xi)] & (\lambda + \mu < m), \\ O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (\lambda + \mu = m), \\ O[1] & (\lambda + \mu > m); \end{cases}$$

la fonction est, dans le dernier cas, toujours continue.

Cette proposition, d'ailleurs classique, se ramène aussi au théorème 1. Il suffit de considérer G et H comme fonctions de deux points d'un espace à $m+1$ dimensions, indépendantes des dernières coordonnées x_{m+1}, a_{m+1}, ξ_{m+1}, qui pourront varier de *zéro* à *un*. L'intégrale qui définit K peut être remplacée par une intégrale d'ordre $m+1$; on retrouve le théorème 1 au changement près de m en $m+1$.

THÉORÈME 4. — *Soit* $G(X, A)$ *une fonction définie et continue quand* X *et* A *appartiennent au domaine* ϖ *du théorème* 1 *de la section* I *et que leurs* $m-1$ *premières coordonnées sont différentes, et telle que*

$$|G(X, A)| < ML^{\lambda-m+1}(X_1, A_1) \qquad (0 < \lambda < m-1);$$

soit, en outre, $H(A, \Xi)$ *une fonction définie et continue quand* A *et* Ξ *appartiennent au domaine* ϖ *et sont différents, et telle que*

$$|H(A, \Xi)| < NL^{\mu-m}(A, \Xi) \qquad (0 < \mu < m);$$

alors la fonction

$$K(X, \Xi) = \int_{\varpi}^{(m)} G(X, A) H(A, \Xi)\, dV_A$$

est continue pour $X_1 \neq \Xi_1$ *et*

$$K(X, \Xi) = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1)] & (\lambda+\mu < m-1), \\ O[\log L_0 - \log L(X_1, \Xi_1)] & (\lambda+\mu = m-1), \\ O[1] & (\lambda+\mu > m-1); \end{cases}$$

dans ce dernier cas, la fonction est toujours continue.

Nous voyons immédiatement que

$$|K(X, \Xi)| < MN \int_{\varpi}^{(m)} L^{\lambda-m+1}(X_1, A_1) L^{\mu-m}(A, \Xi)\, dV_A.$$

Une homothétie suivie d'un déplacement peuvent faire revenir la multiplicité $a_m = 0$ sur elle-même, mais en amenant X_1 à l'origine et Ξ_1 en $(1, 0, \ldots, 0)$; on voit ainsi que

$$|K(X, \Xi)| < MNL^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1) \times \int^{(m)} \frac{dV_A}{(a_1^2+\ldots+a_{m-1}^2)^{\frac{m-\lambda-1}{2}} [(a_1-1)^2+\ldots+a_{m-1}^2+(a_m-h)^2]^{\frac{m-\mu}{2}}},$$

avec $h = a_m L^{-1}(X_1, \Xi_1)$; le domaine d'intégration est

$$a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < L_0^2 L^{-2}(X_1, \Xi_1), \qquad 0 < a_m < L_0 L^{-1}(X_1, \Xi_1).$$

Pour limiter cette intégrale, nous remarquons que, si $\alpha > \frac{1}{2}$ et $l > 0$,

$$\int_0^{+\infty} \frac{dx}{(x^2+l^2)^\alpha} = l^{1-2\alpha} \int_0^{+\infty} \frac{dx}{(1+x^2)^\alpha} < l^{1-2\alpha} \left(\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^{2\alpha}} \right);$$

cette intégrale est donc moindre que $k(2\alpha - 1)^{-1} l^{1-2\alpha}$, k étant constant si α est borné supérieurement. Dans notre limitation de $K(X, \Xi)$, nous pouvons intégrer par rapport à a_m et appliquer le résultat ci-dessus si $\mu < m - 1$; le résultat est inférieur au produit d'une constante par

$$\frac{MNL^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1)}{m - \mu - 1} \times \int^{(m)} \frac{d(a_1, \ldots, a_{m-1})}{(a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2)^{\frac{m-\lambda-1}{2}} [(a_1 - 1)^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2]^{\frac{m-\mu-1}{2}}};$$

or la dernière intégrale a déjà été rencontrée (théor. 1). On voit ainsi que

$$(3) \qquad |K(X, \Xi)| < \begin{cases} \dfrac{kMN}{\lambda\mu(m-\mu-1)(m-\lambda-\mu-1)} L^{\lambda+\mu-m+1}(X_1, \Xi_1) \\ \qquad (\lambda + \mu < m - 1), \\ \dfrac{kMN}{\lambda\mu(m-\mu-1)} \log \dfrac{L_0}{L(X_1, \Xi_1)} \qquad (\lambda + \mu = m - 1), \\ \dfrac{kMN}{\lambda\mu(m-\mu-1)(\lambda+\mu-m+1)} \\ \qquad (\lambda + \mu > m - 1,\ \mu < m - 1); \end{cases}$$

dans ce dernier cas, on démontre à peu près, comme plus haut (théor. 1), que K est toujours continu. Si $\mu \geqq m - 1$, on peut le remplacer par $\mu' < m - 1$, de façon que $\lambda + \mu' > m - 1$; en multipliant le résultat par $L_0^{\mu-\mu'}$, la limitation en sera augmentée; en particularisant μ', on aura une limitation de la fonction partout continue $K(X, \Xi)$; par exemple, si

$$\mu' = m - 1 - 2^{-1}\lambda,$$

on trouve

$$(3\ bis) \qquad |K(X, \Lambda)| < k\lambda^{-3} MN$$

Dans ces limitations, k ne dépend que de m et de $\mathcal{D}$.

THÉORÈME 5. — *Si, dans les hypothèses du théorème 3 et en plus de celles-ci, les fonctions* $\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}$, $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$, $\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}$ *existent et sont continues pour* $X \neq A$ *et* $A \neq \Xi$, *et si*

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\right| < ML^{\lambda-m-1}(X, A),$$

$$\left|\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right| < ML^{\lambda+h-m-1}(X, \Xi) \qquad (1-\lambda < h \leqq 1,\ h > 0),$$

$$\left|\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}\right| < NL^{\mu-m-1}(A, \Xi),$$

et si, en outre, la fonction $w(A)$ *est continue* (L) *dans* $\mathcal{D}$ *avec l'exposant* h *et le coefficient* $\varkappa$, *avec la condition*

$$|w(A)| < \varkappa,$$

la fonction

$$K(X, \Xi) = \int_{\mathcal{D}}^{(m)} G(X, A)\, w(A)\, H(A, \Xi)\, dV_A$$

admet une dérivée $\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}$ *continue quand* X *appartient à* $\mathcal{D}$ *et est différent de* Ξ; *de plus, si* X *reste dans un domaine fermé intérieur à* $\mathcal{D}$,

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m-1}(X, \Xi)] & (\lambda+\mu < m+1), \\ O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (\lambda+\mu = m+1), \\ O(1) & (\lambda+\mu > m+1); \end{cases}$$

dans le dernier cas, cette dérivée est toujours continue.

Tout d'abord, si $\lambda > 1$, $\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}$ se calcule par dérivation sous le signe $\int$, et le théorème 3 fournit les conclusions annoncées sans intervention des hypothèses relatives à $\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}$, à $\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}$ et à la continuité (L) de w.

Si $\lambda \leqq 1$, soient $\mathcal{S}_r$ la frontière d'une hypersphère de centre X et de rayon arbitraire $r < L(X, \Xi)$, prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de son intérieur, $\mathcal{D}_r$ la partie restante de $\mathcal{D}$, et soit

$$K_r(X, \Xi) = \int_{\mathcal{D}_r}^{(m)} G(X, A)\, w(A)\, H(A, \Xi)\, dV_A.$$

Posons symboliquement, sur une multiplicité à $m-1$ dimensions prise dans un certain sens,

$$dS_A = \sqrt{\sum_{\alpha=1}^{m} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})^2},$$

$$\varpi_\alpha(A)\, dS_A = (-1)^{(m-1)(\alpha-1)} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

$(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})$ désignant ce qu'on obtient en permutant circulairement $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de façon à amener a_α en tête, puis en supprimant a_α.

On a

$$\frac{\partial K_r}{\partial x_\alpha} = \int_{\mathfrak{D}_r}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} w(A)\, H(A, \Xi)\, dV_A - \int_{\mathfrak{S}_r}^{(m-1)} G(X, A)\, w(A)\, H(A, \Xi)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.$$

Introduisons un domaine $\mathfrak{D}''$ contenant X et $\mathfrak{S}_r$ mais non A, et dont la partie commune avec $\mathfrak{D}_r$ est $\mathfrak{D}''_r$; sa frontière prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathfrak{D}''$ sera nommée $\mathfrak{S}'$, et la partie restante de $\mathfrak{D}$ sera $\mathfrak{D}'$. Nous avons

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_r}{\partial x_\alpha} = {} & \int_{\mathfrak{D}'}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} w(A)\, H(A, \Xi)\, dV_A + \int_{\mathfrak{D}''_r}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} [w(A) - w(X)]\, H(A, \Xi)\, dV_A \\ & + w(X) \int_{\mathfrak{D}''_r}^{(m)} \left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} \right) H(A, \Xi)\, dV_A + w(X) \int_{\mathfrak{D}_r}^{(m)} G(X, A) \frac{\partial H}{\partial a_\alpha}\, dV_A \\ & - w(X) \int_{\mathfrak{S}'}^{(m-1)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A \\ & + \int_{\mathfrak{S}_r}^{(m-1)} G(X, A)\, [w(X) - w(A)]\, H(A, \Xi)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.\end{aligned}$$

Si r tend vers zéro, les différents termes tendent uniformément vers des limites, ce qui prouve que

$$(4) \qquad \begin{aligned}\frac{\partial K}{\partial x_\alpha} = {} & \int_{\mathfrak{D}'}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} w(A)\, H(A, \Xi)\, dV_A \\ & + \int_{\mathfrak{D}''}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} [w(A) - w(X)]\, H(A, \Xi)\, dV_A \\ & + w(X) \int_{\mathfrak{D}''}^{(m)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha} \right) H(A, \Xi) + G(X, A) \frac{\partial H}{\partial a_\alpha} \right] dV_A \\ & - w(X) \int_{\mathfrak{S}'}^{(m-1)} G(X, A)\, H(A, \Xi)\, \varpi_\alpha(A)\, dS_A.\end{aligned}$$

Reste la limitation. Soit δ le minimum de la distance des points X considérés à la frontière $\mathcal{S}$. Considérons d'abord le cas où $L(X,\Xi) < 2\delta$. Alors nous prendrons pour $\mathcal{S}'$ une hypersphère de centre X et de rayon $2^{-1}L(X,\Xi)$. Limitons d'abord l'intégrale étendue à $\mathcal{D}'$, et considérons d'abord la partie de $\mathcal{D}'$ comprise entre $\mathcal{S}'$ et l'hypersphère de centre X et de rayon $2L(X,\Xi)$. Dans cette partie de $\mathcal{D}'$, la valeur absolue de la dérivée de G est moindre que $2^{m+1}ML^{\lambda-m-1}(X,\Xi)$ et la mesure du champ d'intégration est moindre que le produit de $L^m(X,\Xi)$ par une fonction de m; en tenant compte de la limitation de H, on voit que cette partie d'intégrale est moindre que le produit de

$$\mu^{-1}MN\varkappa L^{\lambda+\mu-m-1}(X,\Xi)$$

par une fonction de m. Dans la partie restante de $\mathcal{D}'$, on a

$$L(A,\Xi) \geqq L(A,X) - L(X,\Xi) \geqq 2^{-1}L(A,X);$$

l'intégrale correspondante est donc (puisque $\lambda+\mu < m+1$) inférieure au produit de

$$(m+1-\lambda-\mu)^{-1}MN\varkappa L^{\lambda+\mu-m-1}(X,\Xi),$$

par une fonction de m (*voir* § I, la démonstration du théorème 1).

Dans $\mathcal{D}''$,

$$L(A,\Xi) \geqq 2^{-1}L(X,\Xi);$$

on voit ainsi que les intégrales portant sur H sont moindres que le produit de

$$(\lambda+h-1)^{-1}MN\varkappa L^{\lambda+\mu+h-m-1}(X,\Xi)$$

par des fonctions de m, et l'intégrale restante, moindre que le produit de

$$\lambda^{-1}MN\varkappa L^{\lambda+\mu-m-1}(X,\Xi)$$

par une fonction de m.

Enfin sur $\mathcal{S}'$ la fonction intégrée est

$$O[L^{\lambda+\mu-2m}(X,\Xi)],$$

pendant que la mesure du champ est le produit de $L^{m-1}(X,\Xi)$ par une fonction de m.

Si $L(X,\Xi) \geqq 2\delta$, en prenant pour $\mathcal{S}'$ une hypersphère de centre X et de rayon δ, on arrive à une limitation dépendant de m, de δ et de

L_0, mais indépendante de X et de Ξ. Ainsi

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}\right| < \begin{cases} k\mathrm{MN}\varkappa[(\lambda+h-1)\,\mu(m+1-\lambda-\mu)]^{-1}\,L^{\lambda+\mu-m-1}(X,\Xi) & (\lambda\leq 1), \\ k\mathrm{MN}\varkappa[(\lambda-1)\,\mu(m+1-\lambda-\mu)]^{-1}\,L^{\lambda+\mu-m-1}(X,\Xi) & \\ \qquad (\lambda>1,\ \lambda+\mu<m+1), & \\ k\mathrm{MN}\varkappa[(\lambda-1)\,\mu]^{-1}[\log L_0-\log L(X,\Xi)] & (\lambda+\mu=m+1), \\ k\mathrm{MN}\varkappa[(\lambda-1)\,\mu(\lambda+\mu-m-1)]^{-1} & (\lambda+\mu>m+1). \end{cases}$$

Le facteur k dépend seulement de m, de δ et de L_0 dans le premier cas, seulement de m dans les autres.

Remarque. — Si l'on avait considéré la fonction

$$K_1(X,\Xi)=\int_{\varpi}^{(m)} G(X,A)\,[w(A)-w(\Xi)]\,H(A,\Xi)\,dV_A,$$

en supposant $-1<\mu<m$ (au lieu de $0<\mu<m$), et en ajoutant l'hypothèse $h>-\mu$, le même procédé exactement aurait fourni

$$\begin{aligned}\frac{\partial K_1}{\partial x_\alpha}&=\int_{\varpi'}^{(m)}\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[w(A)-w(\Xi)]\,H\,dV_A+\int_{\varpi''}^{(m)}\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[w(A)-w(X)]\,H\,dV_A \\ &+[w(X)-w(\Xi)]\int_{\varpi''}^{(m)}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)H+G\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}\right]dV_A \\ &-[w(X)-w(\Xi)]\int_{s'}^{(m-1)} GH\varpi_\alpha\,dS_A.\end{aligned}$$

THÉORÈME 6. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 5, $\dfrac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}$ *existe et est continu quand* A *et* Ξ *sont distincts, et si*

$$\left|\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}+\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\right|<\mathrm{N}L^{\mu+h-m-1}(A,\Xi)\qquad (h>1-\mu),$$

la dérivée $\dfrac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}$ *existe et est continue quand* X *et* Ξ *sont distincts dans* $\mathfrak{D}$ *et*

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}=\begin{cases} O[L^{\lambda+\mu+h-m-1}(X,\Xi)] & (\lambda+\mu+h<m+1), \\ O[\log L_0-\log L(X,\Xi)] & (\lambda+\mu+h=m+1), \\ O(1) & (\lambda+\mu+h>m+1), \end{cases}$$

pourvu que X *et* Ξ *restent dans un domaine fermé intérieur à* $\mathfrak{D}$.

Tout d'abord, si $\lambda>1$, $\mu>1$, on a

$$\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}=\int_{\varpi}^{(m)}\left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}H(A,\Xi)+G(X,A)\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\right]w(A)\,dV_A.$$

ou

$$(5)\quad \frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}=\int_{\mathcal{D}}^{(m)}\left[\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}H(A,\Xi)+G(X,A)\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\right][w(A)-w(X)]\,dV_A$$
$$+w(X)\int_{\mathcal{D}}^{(m)}\left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)H(A,\Xi)+G(X,A)\left(\frac{\partial H}{\partial a_\alpha}+\frac{\partial H}{\partial \xi_\alpha}\right)\right]dV_A$$
$$-w(X)\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)}G(X,A)\,H(A,\Xi)\,\varpi_\alpha(A)\,dS_A$$

(dans le raisonnement, avant d'intégrer par parties, on a introduit des hypersphères infiniment petites de centres X et Ξ). L'intégrale étendue à $\mathcal{S}$ a une valeur absolue moindre que le produit de $MN\varkappa$ par un facteur dépendant de m, de $\mathcal{D}$ et de δ (borne inférieure des distances de X et de Ξ à $\mathcal{S}$). Les autres intégrales ont une limitation du type de l'énoncé (théorème 3). Le théorème se vérifie donc.

Si $\lambda \leqq 1$, $\mu > 1$, on constate, d'après le théorème précédent, que la même formule (5) est valable; l'énoncé se vérifie encore.

Si $\lambda \leqq 1$, $\mu \leqq 1$, nous partageons $\mathcal{D}$ en une région $\mathcal{D}''$ contenant X et une région $\mathcal{D}'$ contenant Ξ; soient $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ les frontières complètes de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{D}''$, prises dans les sens associés aux sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathcal{D}'$ et de $\mathcal{D}''$ respectivement. La partie de $\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}$ qui provient de $\mathcal{D}''$ se déduit de (5) en remplaçant $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ par $\mathcal{D}''$ et $\mathcal{S}''$; l'autre partie se déduit de (5) en remplaçant $w(X)$ par $w(\Xi)$ et $\mathcal{D}$ et $\mathcal{S}$ par $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{S}'$, La partie commune à $\mathcal{S}'$ et à $\mathcal{S}''$ peut être l'hypersphère de centre X et de rayon $2^{-1}L(X,\Xi)$; l'intégrale correspondante ayant $w(X)-w(\Xi)$ en facteur, l'énoncé se vérifie encore.

Ainsi

$$\left|\frac{\partial K}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial K}{\partial \xi_\alpha}\right|<\begin{cases}\dfrac{kMN\varkappa L^{\lambda+\mu+h-m-1}(X,\Xi)}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)(m+1-\lambda-\mu-h)} & (\lambda+\mu+h<m+1),\\[2ex] \dfrac{kMN\varkappa[\log L_0-\log L(X,\Xi)]}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)} & (\lambda+\mu+h=m+1),\\[2ex] \dfrac{kMN\varkappa}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)(\lambda+\mu+h-m-1)} & (\lambda+\mu+h>m+1);\end{cases}$$

dans le dernier cas, il y a continuité même pour $X = \Xi$; k ne dépend que de m, de ϖ et de δ.

Théorème 7. — *Si, en plus des hypothèses du théorème 6, les dérivées* $\dfrac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}$ *et* $\dfrac{\partial^2 H}{\partial a_\alpha \partial \xi_\beta}$ *existent et sont continues pour* $X \neq A$ *et pour* $A \neq \Xi$, *et si*

$$\left|\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}\right| < M L^{\lambda-m-2}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial^2 H}{\partial a_\alpha \partial \xi_\beta}\right| < N L^{\mu-m-2}(A, \Xi),$$

la dérivée $\dfrac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial \xi_\beta}$ *existe et est continue pour* $X \neq \Xi$ *et*

$$\frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial \xi_\beta} = \begin{cases} O[L^{\lambda+\mu-m-2}(X, \Xi)] & (\lambda + \mu < m + 2), \\ O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)] & (\lambda + \mu = m + 2), \\ O(1) & (\lambda + \mu > m + 2), \end{cases}$$

pourvu que X *et* Ξ *restent dans un domaine fermé intérieur à* ϖ.

En effet, dans l'expression (4), l'intégrale étendue à ϖ' se dérive par rapport à ξ_β en employant la marche du théorème 5; les intégrales étendues à ϖ'' et à $\mathcal{S}'$ se dérivent sous le signe $\int$.

Pour la limitation, supposons d'abord $L(X,\Xi) < 2\delta$, δ étant le minimum des distances de X et de Ξ aux points de $\mathcal{S}$. Soient ϖ' et ϖ'' des hypersphères de centres Ξ et X et de même rayon $2^{-1}L(X,\Xi)$, $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ leurs frontières prises dans les sens associés aux sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de leurs intérieurs, ϖ''' le reste de ϖ; on a

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 K}{\partial x_\alpha \partial \xi_\beta} = & \int_{\varpi'}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[w(A) - w(\Xi)] \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} dV_A \\ & + w(\Xi) \int_{\varpi'}^{(m)} \left[\frac{\partial^2 G}{\partial x_\alpha \partial a_\beta} H(A, \Xi) + \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}\left(\frac{\partial H}{\partial a_\beta} + \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta}\right)\right] dV_A \\ & + \int_{\varpi''}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha}[w(A) - w(X)] \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} dV_A \\ & + w(X) \int_{\varpi''}^{(m)} \left[\left(\frac{\partial G}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G}{\partial a_\alpha}\right)\frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} + G(X, A) \frac{\partial^2 H}{\partial a_\alpha \partial \xi_\beta}\right] dV_A \\ & - w(\Xi) \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} H(A, \Xi)\, \varpi_\beta(A)\, dS_A \\ & - w(X) \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} G(X, A) \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \varpi_\alpha(A)\, dS_A + \int_{\varpi'''}^{(m)} \frac{\partial G}{\partial x_\alpha} w(A) \frac{\partial H}{\partial \xi_\beta} \partial V_A. \end{aligned}$$

On évalue alors des limites supérieures de chaque terme, en considérant à part, comme au théorème 5, la partie de ϖ''' intérieure à une hypersphère de centre X et de rayon $2\mathrm{L}(\mathrm{X},\Xi)$, on considère enfin le cas où $\mathrm{L}(\mathrm{X},\Xi) > 2\delta$, et l'on trouve

$$\left|\frac{\partial^2 \mathrm{K}}{\partial x_\alpha \partial \xi_\beta}\right| < \begin{cases} \dfrac{k\mathrm{MN}\varkappa \mathrm{L}^{\lambda+\mu-m-2}(\mathrm{X},\Xi)}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)(m+2-\lambda-\mu)} & (\lambda+\mu < m+2), \\ \dfrac{k\mathrm{MN}\varkappa[\log \mathrm{L}_0 - \log \mathrm{L}(\mathrm{X},\Xi)]}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)} & (\lambda+\mu = m+2), \\ \dfrac{k\mathrm{MN}\varkappa}{(\lambda+h-1)(\mu+h-1)(\lambda+\mu-m-2)} & (\lambda+\mu > m+2), \end{cases}$$

la fonction étant, dans le dernier cas, toujours continue, et les facteurs k ne dépendant que de m, de ϖ et de δ.

Théorème 8. — *Si, en plus des hypothèses du théorème 7, les fonctions* G *et* H *peuvent être dérivées jusqu'à* $2p$ *fois* ($p \geqq 2$), *dont* p *dérivations au plus par rapport aux coordonnées de chacun des deux points, dans un ordre quelconque, les dérivées obtenues étant continues quand les deux points sont différents; si le résultat de* n *dérivations de cette sorte* ($n \leqq 2p$) *appliquées à* G *vaut* $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{\lambda-m-n}(\mathrm{X},\mathrm{A})]$ *et si les opérations* $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial a_\alpha}$ *appliquées une ou plusieurs fois, quand cela est possible d'après ces hypothèses, à* G *ou à une de ces dérivées d'ordre* n, *n'en change pas l'ordre par rapport à* $\mathrm{L}(\mathrm{X},\mathrm{A})$, *exception faite du cas où l'on applique* p *de ces opérations à* G, *cas où le résultat est* $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{\lambda+h-m-1}(\mathrm{X},\mathrm{A})]$; *s'il en est de même pour* H *en remplaçant* λ *par* μ *et* X *et* A *par* A *et* Ξ; *si* ϖ *a toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre* $p-1$ *continues, celles d'ordre* $p-1$ *étant continues* (L) *d'exposant* h; *si toutes ces conditions sont remplies,* K *possède les mêmes propriétés que* G *ou* H, *en remplaçant* λ *ou* μ *par* $\lambda+\mu$, *tant que les exposants restent négatifs et pourvu que* X *et* Ξ *restent dans un domaine fermé intérieur à* ϖ.

En effet on constate qu'on peut calculer toutes ces dérivées par application des théorèmes précédents; tant qu'il y a au plus $p-1$ dérivations par rapport à chacun des systèmes de variables x_α ou ξ_β, on peut procéder comme si $\varpi = 1$, en soudant le facteur ϖ à l'une des fonctions G ou H. Pour les opérations $\dfrac{\partial}{\partial x_\alpha} + \dfrac{\partial}{\partial \xi_\alpha}$, on emploie le théorème 6.

III.

Soit $\mathcal{D}$ un domaine borné ouvert de l'espace à m dimensions où l'équation

$$\mathcal{F}(u) = \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} + cu = f(X) \tag{1}$$

$$(\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, m)$$

soit de type elliptique; on suppose que $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$. Les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et f sont des fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$; les fonctions b_α, c, f et les dérivées partielles des $a_{\alpha,\beta}$ sont continues (L) dans $\mathcal{D}$.

Dire que cette équation est du type elliptique, c'est dire que la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(X) p_\alpha p_\beta$ en $p_1, p_2, \ldots, p_m$ est définie; nous la supposerons *positive;* nous désignerons par g une limite inférieure positive des racines s du discriminant de

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} p_\alpha p_\beta - s \Sigma_\alpha p_\alpha^2,$$

quand X est quelconque dans $\mathcal{D}$.

Soit D le déterminant des $a_{\alpha,\beta}$ $(D > 0)$; soit $A_{\alpha,\beta}$ le quotient par D du mineur de $a_{\alpha,\beta}$; nous poserons

$$H(X, \Xi) = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta); \tag{2}$$

soit encore, en supposant $m \geqq 3$, cas auquel nous nous bornerons (¹),

$$\lambda = 2^{-2} \pi^{-\frac{m}{2}} \Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right). \tag{2 bis}$$

On peut chercher à satisfaire à l'équation (1) par une fonction u du type

$$u(X) = -\lambda \int_{\mathcal{D}}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi) D^{\frac{-1}{2}}(\Xi) \rho(\Xi) dV_\Xi, \tag{3}$$

où ρ est une fonction à déterminer. Les dérivées premières de u se calculent par dérivation sous le signe $\int$. *Si* $\rho(\Xi)$ *est continu* (L), les dérivées secondes de u se calculent alors par application du théorème 6,

---

(¹) *Voir* D., p. 43.

section I, et l'on arrive [1] à l'équation

$$(4)\qquad \rho(X) - \lambda \int_{\varpi}^{(m)} K(X, \Xi) \frac{\rho(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} dV_{\Xi} = f(X),$$

avec

$$K(X, \Xi) = \mathcal{F}_X\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi)\right].$$

C'est une équation de Fredholm, dont la fonction déterminante n'est certainement pas nulle si la mésure de ϖ est assez petite [2].

Quand cette fonction déterminante n'est pas nulle, la solution $\rho(X)$ de cette équation est certainement continue si $f(X)$ l'est. Mais alors l'intégrale figurant au premier membre est certainement continue (L). En effet,

$$\begin{aligned}(5)\qquad K(X, \Xi) = {} & (m-2) H^{-\frac{m+2}{2}}(X, \Xi) \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}[a_{\alpha,\beta}(X) - a_{\alpha,\beta}(\Xi)] \\ & \times [m A_{\alpha,\gamma}(\Xi) A_{\beta,\delta}(\Xi) - A_{\alpha,\beta}(\Xi) A_{\gamma,\delta}(\Xi)](x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta) \\ & - (m-2) H^{-\frac{m}{2}}(X, \Xi) \Sigma_{\alpha,\beta} b_\alpha(X) A_{\alpha,\beta}(\Xi)(x_\beta - \xi_\beta) \\ & + c(X) H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi);\end{aligned}$$

à la partie d'intégrale provenant de la première somme s'applique le théorème 5, section I; la seconde somme donne lieu à m intégrales dont chacune est multipliée par l'un des $b_\alpha(X)$, et à chacune desquelles s'applique le même théorème; enfin le dernier terme conduit au produit de $c(X)$ par une intégrale dérivable sous le signe $\int$. L'intégrale du premier membre de (4) est donc continue (L) avec un exposant égal au plus petit de ceux des b_α et de c si celui-ci est inférieur à *un*, et avec un exposant aussi voisin de *un* qu'on veut dans le cas contraire.

Mais nous avons supposé $f(X)$ continu (L). Donc $\rho(X)$, somme de deux fonctions continues (L), est continu (L), avec un exposant égal au plus petit de ceux des b_α, de c et de f si celui-ci est inférieur à *un*, et avec un exposant aussi voisin de *un* qu'on veut dans le cas contraire.

---

(1) D., p. 32 à 43.
(2) D., p. 52 à 55.

Donc (§ I, théorèmes 6 et 7), les dérivées secondes de $u(X)$ existent et sont continues (L) d'exposant $h(1+h)^{-1}$, h étant l'exposant qui vient d'être trouvé pour ρ; en outre l'équation (1) est satisfaite; ces conclusions ne sont toutefois valables que dans un domaine fermé quelconque intérieur à ϖ.

Théorème 1. — *Dans une hypersphère suffisamment petite ayant pour centre un point quelconque intérieur à ϖ, un changement simultané de fonction inconnue et de variables indépendantes permet de remplacer l'équation* (1) *par une autre de même type mais où les coefficients correspondant aux b_α et à* **c** *sont nuls.*

Pour le démontrer, remarquons que si, dans les formules (3) et (4), on remplace ϖ par une hypersphère de rayon variable r et de centre donné intérieur à ϖ, et si M est une limite supérieure de $|f(X)|$, on aura, dès que r sera assez petit,

$$|\rho(X)| < k\mathrm{M},$$

k étant une constante; par suite

$$|u(X)| < k_1 r^2 \mathrm{M}, \qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right| < k_2 r \mathrm{M} \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

k_1 et k_2 étant d'autres constantes.

Déterminons alors, par les formules (3) et (4) où ϖ sera remplacé par notre hypersphère, une fonction $\varphi(X)$ telle que

$$\mathcal{F}[\varphi(X)] = c(X).$$

D'après ce qui vient d'être dit, $1 - \varphi(X)$ ne s'annulera nulle part dans l'hypersphère, pourvu que r soit assez petit. Nous poserons alors

$$u(X) = [1 - \varphi(X)]\, v(X),$$

où $v(X)$ est une nouvelle fonction inconnue; en substituant dans (1) et en divisant par $1 - \varphi(X)$, nous obtenons une équation de même type, mais où c est remplacé par *zéro*; les coefficients des dérivées secondes ne sont pas changés; b_α est remplacé par

$$b_\alpha - [1 - \varphi(X)]^{-1} \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta};$$

f est remplacé par $[1-\varphi(X)]^{-1}f$. Cette première opération réussirait aussi bien si, au lieu d'une hypersphère de rayon r, on prenait un domaine de mesure suffisamment petite.

Après cette première opération, nous allons reprendre l'équation (1) en ajoutant aux hypothèses déjà faites celle que $c=0$ (c'est en somme un changement de notation). Nous allons maintenant déterminer, par les équations (3) et (4) où ϖ est remplacé par notre hypersphère, des fonctions $f_\alpha(X)$ telles que

$$\mathcal{F}[f_\alpha(X)] = b_\alpha(X).$$

D'après ce qui a été dit, le déterminant fonctionnel des m fonctions $x_\alpha - f_\alpha(x_1, \ldots, x_m)$ ne s'annulera pas dans l'hypersphère si r est assez petit. Nous ferons alors le changement de variables défini par les équations

$$t_\alpha = x_\alpha - f_\alpha(x_1, x_2, \ldots, x_m) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où les t_α sont les nouvelles variables. Ce changement est valide dans une hypersphère de rayon suffisamment petit ayant le centre donné; les dérivées partielles premières et secondes des t_α par rapport aux x_α et des x_α par rapport aux t_α existent et sont continues (L) dans une hypersphère concentrique à cette dernière et de rayon plus petit. Si nous écrivons la nouvelle équation

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a'_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 u}{\partial t_\alpha \partial t_\beta} + \Sigma_\alpha b'_\alpha \frac{\partial u}{\partial t_\alpha} + c'u = f'(t_1, \ldots, t_m),$$

où f' est ce que devient f par le changement de variables, les formules liant les nouveaux coefficients aux anciens sont (en ne supposant pas $c=0$)

$$(6) \quad \left\{\begin{aligned} a'_{\alpha,\beta} &= \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\gamma,\delta} \frac{\partial t_\alpha}{\partial x_\gamma} \frac{\partial t_\beta}{\partial x_\delta}, \\ b'_\alpha &= \Sigma_{\gamma,\delta} a_{\gamma,\delta} \frac{\partial^2 t_\alpha}{\partial x_\gamma \partial x_\delta} + \Sigma_\gamma b_\gamma \frac{\partial t_\alpha}{\partial x_\gamma}, \\ c' &= c. \end{aligned}\right.$$

Ici nous en concluons que

$$c' = b'_\alpha = 0 \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m).$$

D'ailleurs les $a'_{\alpha,\beta}$, considérés comme fonctions de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ont des dérivées continues (L); il en est donc de même si on les considère comme fonctions de $t_1, t_2, \ldots, t_m$ [1]. Le théorème est démontré. Il suffit de reprendre le calcul pour voir que l'exposant de continuité (L) des dérivées des $a'_{\alpha,\beta}$ est $h(1+h)^{-1}$ si $h < 1$ est le plus petit de ceux des b_α et de c et que $h(1+h)^{-1}$ ne dépasse pas l'exposant de continuité (L) des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$; si $h(1+h)^{-1}$ dépasse ce dernier exposant, c'est ce dernier qu'il faut prendre; si $h=1$, il faut le remplacer par un nombre inférieur et la suite s'applique.

Généralisation du problème de Dirichlet. — Revenons à l'équation (1). Nous supposerons que la frontière $\mathcal{S}$ de $\mathcal{D}$ est telle que les coordonnées de ses points puissent s'exprimer à l'aide de $m-1$ paramètres s_1, $s_2, \ldots, s_{m-1}$ par des fonctions dont les dérivées partielles existent et sont continues (L) et dont les m déterminants fonctionnels ne peuvent s'annuler ensemble; il n'est pas nécessaire que la même représentation soit valable pour la multiplicité $\mathcal{S}$ entière, mais nous supposerons que chaque point de $\mathcal{S}$ est intérieur à une partie de $\mathcal{S}$ dans toute l'étendue de laquelle une même représentation paramétrique est valable, et que le nombre total des représentations nécessaires est fini.

Nous nous donnerons une fonction $f_1(Y)$, définie quand Y est un point de $\mathcal{S}$, et qui soit alors fonction continue de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$. Nous nous proposons de trouver une fonction u, continue dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, ayant ses dérivées secondes continues dans $\mathcal{D}$, satisfaisant dans ce domaine à l'équation (1), et prenant sur $\mathcal{S}$ les valeurs $f_1(Y)$. C'est ce que nous entendons par *problème de Dirichlet généralisé* pour les équations linéaires.

On peut, comme plus haut, décomposer $K(X, \Xi)$ en une combi-

---

[1] Si $\omega = f(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ est une fonction de $u_1, u_2, \ldots, u_p$ continue (L) d'exposant h et de coefficient M, et que $u_1, u_2, \ldots, u_p$ soient des fonctions de

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

continues (L) d'exposant k et de coefficient N, ω est une fonction composée de

$$x_1, x_2, \ldots, x_m$$

qui est continue (L) d'exposant hk et de coefficient $M(\sqrt{p}N)^h$.

naison linéaire de $m+2$ fonctions, dont $m+1$ sont multipliées soit par l'un des $b_\alpha(X)$, soit par $c(X)$, et qui toutes satisfont aux mêmes hypothèses que la fonction G du théorème 7 de la section II; ici $\lambda = 1$, et h est l'exposant de continuité (L) des b_α, de c, et des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$. Posons

$$(7) \qquad K^{(p)}(X, \Xi) = \int_{\mathcal{O}}^{(m)} K(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A) K^{(p-1)}(A, \Xi) dV_A, \qquad K^{(1)} = K;$$

on voit de proche en proche (§ II, théor. 3, 5, 6, 7) que les $K^{(p)}$ sont susceptibles de la même décomposition que K, λ étant seulement remplacé par p, en convenant que, dans les limitations des $K^{(p)}$ et de leurs dérivées, quand on est conduit à un exposant nul pour $L(X, \Xi)$, il faut ajouter le facteur $O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)]$, et quand on est conduit à un exposant positif, il faut seulement affirmer que la fonction correspondante est continue même pour $X = \Xi$ [1].

Celles de ces conclusions qui concernent les dérivées des $K^{(p)}$ ne sont pourtant valables que si les points X et Ξ restent à une distance de $\mathcal{S}$ supérieure à un minimum positif d'ailleurs quelconque. Pour y obvier nous supposerons que les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c satisfont aux hypothèses déjà dites dans un domaine $\mathcal{O}_1$ comprenant $\mathcal{O}$ à son intérieur. Les intégrations qui servent à former les $K^{(p)}$ seront étendues au domaine $\mathcal{O}_1$, au lieu de $\mathcal{O}$. De la sorte, les propriétés que nous avons en vue auront lieu dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{O}_1$, en particulier dans $\mathcal{O} + \mathcal{S}$.

Si les coefficients de $\mathcal{F}(u)$ étaient donnés seulement dans $\mathcal{O} + \mathcal{S}$, on pourrait procéder de la façon suivante, qui suppose qu'aux points de $\mathcal{S}$, les $a_{\alpha,\beta}$ ont leurs dérivées secondes continues (L). En désignant, comme nous l'avons déjà fait, par $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ les cosinus directeurs de la normale à $\mathcal{S}$, nous choisirons m fonctions $c_1, c_2, \ldots, c_m$ dont les dérivées par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ soient continues (L), dont la somme des carrés fasse *un*, et qui soient telles que $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha c_\alpha$ ne soit jamais nul. Pour cela on pourra d'abord former m fonctions continues sur $\mathcal{S}$ et dans son intérieur et se réduisant sur $\mathcal{S}$ respecti-

---

[1] C'est par erreur que dans D., page 56, on n'a pas supposé la continuité (L) des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$.

vement à $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ (ces fonctions seront, par exemple, des solutions du problème de Dirichlet ordinaire, et si $\mathcal{S}$ se compose de plusieurs contours séparés, on pourra opérer séparément pour chacun de ceux-ci); puis on formera m polynomes en $x_1, x_2, \ldots, x_m$ dont chacun représente l'une des fonctions précédentes à l'intérieur de $\mathcal{S}$ (ou d'un des contours formant $\mathcal{S}$) avec un écart moindre que $m^{-\frac{1}{2}}$; enfin $c_1, c_2, \ldots, c_m$ seront proportionnels, en chaque point de $\mathcal{S}$, à ces polynomes. On considérera ensuite les équations

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) + s_m c_\alpha(s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

où $x_\alpha = \varphi_\alpha$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{S}$; ces équations définissent $s_1, s_2, \ldots, s_m$ comme fonctions continues et à dérivées continues (L) de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, tant qu'on ne s'éloigne pas trop de $\mathcal{S}$. On limitera l'intervalle d'oscillation de s_m à deux constantes opposées, telles qu'on obtienne un champ où il y ait ainsi correspondance biunivoque, et telles qu'un même point de ce champ ne puisse être obtenu à partir de deux points de $\mathcal{S}$ situés dans des régions admettant des représentations paramétriques différentes. Dans la partie de ce champ extérieure à $\mathcal{D}$, on prendra pour les $a_{\alpha,\beta}$ des fonctions linéaires de s_m, à coefficients dépendant de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, choisies de façon que ces fonctions et leurs dérivées par rapport à s_m soient continues sur $\mathcal{S}$; d'après notre hypothèse, les $\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial s_m}$ ont des dérivées continues (L) par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$; les fonctions obtenues ont donc, par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, leurs dérivées continues (L) et remplissant les conditions imposées. On diminuera au besoin l'intervalle de variation de s_m de façon que l'équation reste de type elliptique dans le domaine étendu. Les coefficients b_α et c pourront recevoir, en dehors de $\mathcal{D}_1$ des valeurs indépendantes de s_m, de façon à respecter la continuité sur $\mathcal{S}$.

Les $K^{(p)}$ étant ainsi formés à l'aide de $\mathcal{D}_1$, la fonction

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A) K^{(p)}(A, \Xi) dV_A,$$

vaut $O[L^{p+2-m}(X, \Xi)]\,(p+2<m)$ sa dérivée par rapport à x_α, cal-

culée par dérivation sous le signe $\int$, vaut

$$O[L^{p+1-m}(X, \Xi) \qquad (p+1<m);$$

on peut encore (§ II, théorèmes 5 à 7) calculer ses dérivées $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}$ qui valent $O[L^{p-m}(X, \Xi)$ $(p<m)]$, les combinaisons $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}$ qui valent $O[L^{p+h-m}(X, \Xi)]$ $(p+h<m)$, et les dérivées $\frac{\partial^3}{\partial x_\alpha \partial x_\beta \partial a_\gamma}$ qui valent $O[L^{p-m-1}(X, \Xi)]$ $(p<m+1)$; si p atteint les bornes indiquées, il faut remplacer $O[L^0(X, \Xi)]$ par $O[\log L_0-\log L(X, \Xi)]$, et si p dépasse ces bornes, les fonctions correspondantes sont continues même pour $X=\Xi$ (toutes ces fonctions sont continues pour $X\neq\Xi$). Ces résultats sont valables pour tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}_1$, en particulier dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$.

Nous poserons alors

$$(8) \qquad H(X, \Xi; p)=H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{p}\lambda^n\int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)D^{-\frac{1}{2}}(A)K^{(n)}(A, \Xi)\,dV_A,$$

λ étant toujours défini par (2 *bis*). Cette fonction peut être dérivée jusqu'à trois fois, dont deux fois par rapport aux x_α et une fois par rapport aux a_α, dans un ordre quelconque; toutes ces dérivées et les combinaisons $\frac{\partial}{\partial x_\alpha}+\frac{\partial}{\partial a_\alpha}$, $\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}+\frac{\partial^2}{\partial x_\alpha \partial a_\beta}$ sont continues pour $X\neq\Xi$ et ont des limitations de même sorte que les résultats des mêmes opérations appliquées à $H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi)$. On trouve d'ailleurs que

$$(9) \qquad \mathcal{F}_X[H(X, \Xi; p)]=\lambda^p K^{(p+1)}(X, \Xi).$$

Soit $\mathcal{D}_2$ un domaine ouvert, de frontière $\mathcal{S}_2$, telle que $\mathcal{D}_2+\mathcal{S}_2$ soit intérieur à $\mathcal{D}_1$ et contienne $\mathcal{D}$. Nous supposons que la fonction $f(X)$ soit continue (L) en tout point de $\mathcal{D}_2$, ou bien que nous l'avons prolongée dans ce domaine comme il a été dit. Nous allons chercher, pour notre problème de Dirichlet généralisé, une solution qui soit du type

$$(10)\quad u(X) = -\lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi) D^{-\frac{1}{2}}(\Xi)\rho(\Xi) dV_\Xi$$
$$- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} \varpi_\alpha(A)\, ds_A,$$

où ρ et σ sont deux fonctions inconnues dépendant la première d'un point de $\mathcal{D}_2$, la deuxième d'un point de $\mathcal{S}$; $\mathcal{S}$ est pris dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathcal{D}$; on suppose $p \geqq 2$.

Nous supposerons que ρ est continu (L) dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}_2$, et que σ est continu. Dans ces conditions, l'équation (1) se traduit par

$$(11)\quad \rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} K(X, \Xi) \frac{\rho(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} dV_\Xi$$
$$- 2\lambda^{p+1} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial K^{(p+1)}(X, A)}{\partial a_\beta} \varpi_\alpha(A)\, dS_A = f(X),$$

et la condition sur $\mathcal{S}$ par (¹)

$$(12)\quad \sigma(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(Y, \Xi) D^{-\frac{1}{2}}(\Xi)\rho(\Xi) dV_\Xi$$
$$- 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(Y, A; p)}{\partial a_\beta} \varpi_\alpha(A)\, dS_A = f_1(Y).$$

Nous dirons que la première intégrale de (10) est un *potentiel de domaine attirant*, et la seconde, un *potentiel de double couche;* ρ et σ sont les *densités* de ces potentiels. Si $\mathcal{D}_2$ déborde $\mathcal{D}$, l'équation (11) signifie que, dans tout $\mathcal{D}_2$ sauf sur $\mathcal{S}$, l'équation (1) est satisfaite par la somme de nos deux potentiels; l'équation (12) entraîne que la limite de $u(X)$ est $f_1(Y)$ quand X tend vers Y *par points intérieurs* à $\mathcal{D}$.

Le système formé par les équations (11) et (12) peut être considéré comme un système de Fredholm. En effet on peut tout d'abord rem-

(¹) D., p. 69 à 80; une modification n'altérant en rien la marche générale du raisonnement vient de ce qu'actuellement nous ne supposons pas l'existence des dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathcal{S}$; à cause de cela, dans l'intégrale d'ordre $m-1$ de (12), la fonction est d'ordre $1+h-m$ quand les deux points viennent se confondre; *voir* ci-après (§ IV).

placer σ par une fonction dépendant non seulement des $m-1$ paramètres des points de $\mathfrak{S}$, mais d'une variable supplémentaire t, et l'on superposera aux intégrales d'ordre $m-1$ une intégration par rapport à t entre les limites *zéro* et *un* : toutes les intégrales du système sont alors d'ordre m; mais, sur les quatre termes de l'équation remplaçant (12), σ est le seul qui puisse dépendre de t : il n'en dépend donc pas en réalité, de sorte que toute solution du système ainsi transformé donne une solution du système des équations (11) et (12). Or pour prouver que ce système transformé est un système de Fredholm, il suffit de prouver que le procédé classique de l'itération conduit à un noyau borné; c'est ce qui est (§ II, théorèmes 1 à 4), car les noyaux des intégrales d'ordre m sont respectivement

$$O[L^{1-m}(X, \Xi)] \quad \text{et} \quad O[L^{2-m}(Y, \Xi)],$$

et ceux des autres intégrales, après la transformation ci-dessus, sont

$$O[L^{p-m}(S_1, T_1)] \quad \text{et} \quad O[L^{1+h-m}(S_1, T_1)],$$

où S_1 et T_1 désignent les points de $\mathfrak{S}$ qui correspondent respectivement à Y et à A :

$$L(S_1, T_1) = \sqrt{(s_1-t_1)^2+(s_2-t_2)^2+\ldots+(s_{m-1}-t_{m-1})^2};$$

h désigne l'exposant de continuité (L) des dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$; il suffit donc d'appliquer l'itération un nombre de fois supérieur à $m-1$ et à $(m-1-h)h^{-1}$ pour avoir un noyau borné [1].

Montrons maintenant que, si le système des équations (11) et (12) est soluble, $u(X)$ satisfait à l'équation (1) et à la condition sur $\mathfrak{S}$. Tout d'abord ρ et σ sont continus, ce qui d'après (12) entraîne la condition sur $\mathfrak{S}$. Alors l'intégrale d'ordre $m-1$ figurant dans (11) représente (§ I, théorème 1) une fonction continue (L); il en est de même (§ I, théorème 5) de l'intégrale d'ordre m; or le second membre $f(X)$ est lui-même continu (L) par hypothèse; donc $\rho(X)$, seul terme restant, est continu (L), et par suite l'équation (11) entraîne l'équation (1).

---

(1) Dans une Note (*Comptes rendus*, 187, p. 499), j'ai parlé de m itérations, ce qui est l'entier correspondant à $h=1$.

Or il y a un cas où nous sommes sûrs que la fonction déterminante de notre système de Fredholm n'est pas nulle : le cas du problème de Dirichlet classique, et plus généralement le cas où les $a_{\alpha,\beta}$ sont constantes et où $b_\alpha = c = 0$ ($\alpha = 1, 2, \ldots, m$) (ce cas se ramène au cas classique), quand le contour $\mathfrak{S}$ est d'un seul tenant. Dans ce cas, en effet, $K(X, \Xi)$ est nul, de sorte que l'équation (11) se réduit à

$$\rho(X) = f(X)$$

et l'équation (12) introduit un potentiel de double couche au sens classique du mot. On sait (¹) que le problème a alors une solution et une seule, quel que soit $f_1(Y)$.

Mais on peut établir que si les coefficients $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont fonctions *continues* d'un paramètre, la fonction déterminante correspondant à un noyau itéré fini quelconque varie aussi peu qu'on veut (²) quand le paramètre varie assez peu.

Or si l'on transforme $\mathcal{D}$ par homothétie de rapport k variable sans que ce domaine sorte de la région où les hypothèses sur les coefficients sont remplies, cela revient à remplacer l'équation par une autre dans laquelle, si k est assez petit, les $a_{\alpha,\beta}$ ont dans $\mathcal{D}$ des oscillations aussi petites qu'on voudra pendant que leurs dérivées et les fonctions b_α et c restent aussi petites qu'on voudra. Si donc k est assez petit et que $\mathfrak{S}$ soit d'un seul tenant, la résolvante du système des équations (11) et (12) existe, et le problème a une solution et une seule (³). On a donc le théorème suivant :

THÉORÈME 2. — *Si $f(X)$, les coefficients b_α et c et les dérivées des coef-*

(¹) *Voir* par exemple E. GOURSAT, *Cours d'Analyse mathématique*, t. III, 2ᵉ édition, p. 512; ou HEYWOOD et FRÉCHET, *L'équation de Fredholm et ses applications à la Physique mathématique*, p. 113. Si $\mathfrak{S}$ se compose de $q+1$ contours, dont q sont situés à l'intérieur du dernier, on voit facilement que l'équation de Fredholm formée à la manière classique n'est soluble que moyennant q conditions. Cela ne signifie pas que le problème ne soit pas possible dans ce cas (on sait au contraire qu'il l'est), mais seulement que sa solution n'est pas représentable par un potentiel ordinaire.

(²) D., p. 83; l'adaptation des raisonnéments au cas présent n'offre aucune difficulté.

(³) On peut prouver (*voir* § V ci-après) qu'il ne peut y avoir plusieurs fonctions u si k est assez petit; celle qu'on représente par l'expression (10) est donc la seule solution.

ficients $a_{\alpha,\beta}$ sont continus (L) *dans une région débordant $\mathcal{D}$, et si le domaine $\mathcal{D}$, homothétique d'un domaine fixe dans un rapport suffisamment petit, a un contour d'un seul tenant et satisfaisant aux hypothèses déjà énoncées, le problème de Dirichlet admet une solution et une seule.*

IV.

Nous nous proposons maintenant d'étudier ce que deviennent sur le contour $\mathcal{S}$ d'un domaine $\mathcal{D}$ quelconque les dérivées des solutions du problème de Dirichlet généralisé. Nous ne pourrons le faire qu'en imposant aux coefficients de l'équation et à $\mathcal{S}$ des conditions supplémentaires de régularité.

Même si $\mathcal{D}$ n'est pas très petit dans toutes ses dimensions, le cas qui fait l'objet du théorème 2 de la section précédente suffira à notre étude. En effet, en procédant comme pour le prolongement des coefficients hors de $\mathcal{D}$, nous introduirons des variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$ corespondant d'une façon biunivoque à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ tant qu'on ne s'éloigne pas trop de $\mathcal{S}$, qui correspond à $s_m = 0$. Faisons en sorte que $s_\alpha = 0$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ corresponde à un point donné de $\mathcal{S}$. En supposant $s_m < 0$ dans $\mathcal{D}$, nous pourrons considérer le domaine des points remplissant soit les conditions simultanées

$$0 < s_m < 2r, \qquad s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{m-1}^2 < 4r^2,$$

soit les conditions simultanées

$$s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_{m-1}^2 \geqq 4r_2,$$
$$(s_1^2 + s_2^2 + \ldots + s_m^2 - 2rs_m + 4r^2)^2 < 16r^2(s_1^2 + \ldots + s_{m-1}^2);$$

r étant une longueur aussi petite qu'on veut. En revenant à $x_1, x_2, \ldots, x_m$, on constate que la frontière de ce domaine remplit les conditions imposées à $\mathcal{S}$; si r est assez petit, ce domaine est intérieur à $\mathcal{D}$ et la méthode de la section III permet de résoudre pour lui le problème de Dirichlet (même raisonnement que pour des domaines homothétiques à un domaine fixe). Il suffira donc de considérer u comme donné sur la frontière de ce domaine, et d'étudier ce que deviennent ses dérivées quand X tend vers la partie $s_m = 0$ de cette frontière.

Il nous sera commode d'opérer dans le système des variables (s_1, s_2, ..., s_m. Nous nommerons (s_1, s_2, ..., s_m) ou S ce que devient X, et (t_1, t_2, ..., t_m) ou T ce que devient Ξ.

Des formules de transformation [§ III, (6)], il résulte que le déterminant D′ des $a'_{\alpha,\beta}$ vaut

$$\text{(1)}\qquad D' = \left[\frac{d(s_1, s_2, \ldots, s_m)}{d(x_1, x_2, \ldots, x_m)}\right]^2 D.$$

H(X, Ξ) devient une fonction H′(S, T) qui n'est pas un polynome en s_1, s_2, ..., s_m, mais

$$\begin{aligned} H'(S, T) &= \Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi)(x_\gamma - \xi_\gamma)(x_\delta - \xi_\delta) \\ &= \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(\Xi) \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial t_\alpha} \frac{\partial \xi_\delta}{\partial t_\beta}(s_\alpha - t_\alpha)(s_\beta - t_\beta) + O[L^{2+h}(S, T)], \end{aligned}$$

h étant l'exposant de continuité (L) des dérivées de ξ_1, ξ_2, ..., ξ_m. Or dans $\dfrac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)}$, le mineur relatif à $\dfrac{\partial t_\alpha}{\partial \xi_\gamma}$ est $\dfrac{d(t_1, \ldots, t_m)}{d(\xi_1, \ldots, \xi_m)} \dfrac{\partial \xi_\gamma}{\partial t_\alpha}$. On en conclut

$$A'_{\alpha,\beta} = \Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta} \frac{\partial \xi_\gamma}{\partial t_\delta} \frac{\partial \xi_\delta}{\partial t_\beta},$$

et par suite

$$\text{(2)}\qquad H'(S, T) = \Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta}(T)(s_\alpha - t_\alpha)(s_\beta - t_\beta) + O[L^{2+h}(S, T)].$$

Cherchons ce que devient l'intégrale d'ordre $m-1$ de la formule (10) de la section III. En désignant par H′(S, T; p) ce que devient H(X, A; p), nous aurons l'égalité symbolique

$$\begin{aligned} &\Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \\ &\quad = \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H'(S, T; p)}{\partial t_\gamma} \frac{\partial t_\gamma}{\partial a_\beta} \frac{\partial(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1})}{\partial(t_{\delta+1}, \ldots, t_{\delta-1})} \\ &\qquad \times d(t_{\delta+1}, \ldots, t_{\delta-1}) \\ &\quad = \Sigma_{\gamma,\delta}(-1)^{(m-1)(\delta-1)} a'_{\gamma,\delta}(T) \frac{\partial H'(S, T; p)}{dt_\gamma} \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(t_1, \ldots, t_m)} \\ &\qquad \times d(t_{\delta+1}, \ldots, t_{\delta-1}), \end{aligned}$$

les $a'_{\gamma,\delta}$ étant définis par la première équation (6) de la section III.

Puisque $\mathcal{S}$ est la multiplicité $s_m = 0$, on a, en posant $\sigma(A) = \sigma'(T)$,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} & \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} \\ & \times d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \\ & = (-1)^{m-1} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma'(T)}{\sqrt{D(A)}} \frac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(t_1, \ldots, t_m)} \Sigma_\beta a'_{m,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T; p)}{\partial t_\beta} \\ & \times d(t_1, \ldots, t_{m-1}).\end{aligned}$$

L'intégrale doit être prise dans le sens associé au sens $(t_1, \ldots, t_m)$ de ϖ ou dans le sens opposé selon que $\dfrac{d(a_1, \ldots, a_m)}{d(t_1, \ldots, t_m)}$ est positif ou négatif; on peut la prendre toujours dans le sens associé au sens $(t_1, \ldots, t_m)$ à condition de remplacer le déterminant fonctionnel par sa valeur absolue, ce qui donne

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} & D^{-\frac{1}{2}}(A) \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} \\ & \quad \times d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \\ & = D'^{-\frac{1}{2}}(T) \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a'_{\alpha,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T; p)}{\partial t_\beta} \\ & \quad \times d(t_{\alpha+1}, \ldots, t_{\alpha-1}),\end{aligned}\right.$$

$$(4)\quad \left\{\begin{aligned} & \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} \\ & \quad \times d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{\alpha-1}) \\ & = (-1)^{m-1} \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \frac{\sigma'(T)}{\sqrt{D'(T)}} \Sigma_\beta a'_{m,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T; p)}{\partial a_\beta} d(t_1, \ldots, t_{m-1}).\end{aligned}\right.$$

Si l'on veut regarder $d(t_1, \ldots, t_{m-1})$ comme positif, il faudra multiplier par $(-1)^m$ si t_m est positif dans ϖ, et par $(-1)^{m-1}$ si t_m est négatif dans ϖ.

Cherchons la partie d'ordre $1-m$ dans le second membre de (3); elle provient exclusivement de

$$\begin{aligned}\frac{2-m}{2} D'^{-\frac{1}{2}}(T) H'^{-\frac{m}{2}}(S, T) \Sigma_{\alpha,\beta}(-1)^{(m-1)(\alpha-1)} a'_{\alpha,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T)}{\partial t_\beta} \\ \times d(t_{\alpha+1}, \ldots, t_{\alpha-1}).\end{aligned}$$

Mais

$$\frac{\partial H'(S, T)}{\partial t_\beta} = \Sigma_\gamma \frac{\partial H(X, A)}{\partial a_\gamma} \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\beta} = -2\Sigma_{\alpha,\gamma} A_{\alpha,\gamma}(A) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\beta}(x_\alpha - a_\alpha)$$
$$+ O[L^2(S, T)]$$
$$= -2\Sigma_{\alpha,\gamma,\delta} A_{\alpha,\gamma}(A) \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\beta} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\delta}(s_\delta - t_\delta) + O[L^{1+h}(S, T)];$$

h étant l'exposant de continuité (L) des dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ (¹); cela s'écrit

$$\frac{\partial H'(S, T)}{\partial t_\beta} = -2\Sigma_\delta A'_{\beta,\delta}(T)(s_\delta - t_\delta) + O[L^{1+h}(S, T)].$$

Cette partie d'ordre $1 - m$ est donc

$$(m-2) D'^{-\frac{1}{2}}(T) H'^{-\frac{m}{2}}(S, T) \Sigma_\delta (-1)^{(m-1)(\delta-1)}(s_\delta - t_\delta) d(t_{\delta+1}, \ldots, t_{\delta-1});$$

si T est sur $\mathfrak{S}$, il faut donner à δ la seule valeur m.

Pour manier commodément la différence entre $\Sigma_\beta a'_{m,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T)}{\partial t_\beta}$ et sa partie du premier ordre $-2(s_m - t_m)$, nous emploierons la notation suivante. Nous poserons

$$s_\alpha - t_\alpha = \delta t_\alpha \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m),$$

en considérant cela comme une différentielle de la variable indépendante t_α. Si $F(t_1, \ldots, t_m)$ est une fonction quelconque, nous noterons δF, $\delta^2 F$, ... les différentielles totales correspondantes du premier, du second ordre, ... ; ΔF désignera $F(s_1, \ldots, s_m) - F(t_1, \ldots, t_m)$. Alors

$$\Sigma_\beta a'_{m,\beta}(T) \frac{\partial H'(S, T)}{\partial t_\beta} = -2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma} a'_{m,\beta}(T) A_{\alpha,\gamma}(A) \Delta a_\gamma \frac{\partial a_\alpha}{d t_\beta}$$
$$+ \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\delta} a'_{m,\beta}(T) \frac{\partial A_{\gamma,\delta}(A)}{\partial a_\alpha} \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta} \Delta a_\gamma \Delta a_\delta.$$

(¹) Si $F(t_1, \ldots, t_m)$ a ses dérivées continues (L) d'exposant h et de coefficient M,

$$F(s_1, s_2, \ldots, s_m) - F(t_1, t_2, \ldots, t_m)$$
$$= \Sigma_\alpha (s_\alpha - t_\alpha) \frac{\partial F}{\partial t_\alpha}[t_1 + \theta(s_1 - t_1), \ldots, t_m + \theta(s_m - t_m)] \qquad (0 < \theta < 1),$$

d'où

$$\left| F(s_1, \ldots, s_m) - F(t_1, \ldots, t_m) - \Sigma_\alpha (s_\alpha - t_\alpha) \frac{\partial F}{\partial t_\alpha}(t_1, \ldots, t_m) \right|$$
$$< M\theta^h L^h(S, T) \Sigma_\alpha |s_\alpha - t_\alpha| \leqq M\sqrt{m} L^{1+h}(S, T).$$

Retranchons

$$-2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\mathrm{A}_{\alpha,\gamma}(\mathrm{A})\frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\delta a_\gamma,$$

qui, on l'a vu, se réduit à $-2\delta\mu_m$; il reste

$$(5)\quad\left\{\begin{aligned}&-2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\mathrm{A}_{\alpha,\gamma}(\mathrm{A})\frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}(\Delta a_\gamma-\delta a_\gamma)\\&+\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{A}_{\gamma,\varepsilon}}{\partial a_\alpha}\frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\Delta a_\gamma\Delta a_\varepsilon.\end{aligned}\right.$$

Nous pouvons dériver par rapport à s_ζ cette expression qui vaut $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{S},\mathrm{T})]$; la dérivée est

$$\begin{aligned}&-2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\mathrm{A}_{\alpha,\gamma}(\mathrm{A})\Delta\frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\zeta}\\&+2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\frac{\partial \mathrm{A}_{\gamma,\varepsilon}}{\partial a_\alpha}\frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\frac{\partial x_\gamma}{\partial s_\zeta}\Delta a_\varepsilon;\end{aligned}$$

ce résultat vaut $\mathrm{O}[\mathrm{L}^h(\mathrm{S},\mathrm{T})]$.

Donc, dans l'intégrale du second membre de (4), si S est sur $\mathfrak{S}$, le coefficient de $\sigma'(\mathrm{T})$ est $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h-m}(\mathrm{S},\mathrm{T})]$ et ses dérivées par rapport à $s_1, \ldots, s_m$ valent $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{h-m}(\mathrm{S},\mathrm{T})]$. Cela suffit (§ I, théor. 5) à prouver que, si $\sigma'(\mathrm{T})$ ou $\sigma(\mathrm{A})$ est continu, l'intégrale est continue (L). Or cette intégrale est la seconde de celles de l'équation (12) de la section III; la première intégrale de cette même équation est dérivable sous le signe $\int$; donc, si $f_1(\mathrm{Y})$ est continu (L), il en est de même de $\sigma(\mathrm{Y})$. Si l'exposant de continuité (L) de $f_1(\mathrm{Y})$ par rapport à $s_1, \ldots, s_m$ est k, celui de σ est le plus petit des nombres h et k, à moins que $h=k=1$; dans ce dernier cas, l'exposant est, pour σ, aussi peu inférieur à *un* qu'on veut.

Théorème 1. — *Si les fonctions b_α, c, f et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont continues* (L) *dans un domaine débordant $\mathfrak{D}$ et que les dérivées des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ soient continues* (L), *si, en outre, une solution u de l'équation* (1) *de la section* III *est continue dans $\mathfrak{D}+\mathfrak{S}$, et que ses dérivées secondes soient continues en tout point de $\mathfrak{D}$, les produits $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\delta$ tendent uniformément vers zéro en même temps que la plus courte distance δ de X aux points de $\mathfrak{S}$.*

Pour le démontrer, nous allons remplacer $\mathcal{D}$ par le domaine défini au début de cette section, de façon à pouvoir utiliser les équations (10) à (12) de la section III. Nous savons que, dans nos hypothèses, $\sigma(Y)$ est continu; il suffit donc de démontrer que la fonction u représentée par l'équation (10) (§ III) a des dérivées dont le produit par s_m tend vers zéro avec s_m, pourvu que σ soit continu. Pour simplifier la notation, nous confondrons les systèmes de variables $(s_1, s_2, \ldots, s_m)$ et $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$; ce que nous allons dire sera vrai, quel que soit le système qui a servi à former la fonction $H(X, A; p)$. Ainsi, une partie de $\mathcal{S}$ se réduit à $x_m = 0$; l'origine est à l'intérieur de cette partie de $\mathcal{S}$ et nous avons à démontrer que $x_m \dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ tend vers zéro quand X tend vers l'origine.

Or, la première intégrale du second membre de (10) (§ III) a des dérivées continues même sur $\mathcal{S}$. Il nous suffit donc de nous occuper de la seconde intégrale. Dans celle-ci, nous pouvons, de même, laisser de côté l'intégrale étendue à une partie de $\mathcal{S}$ ne contenant pas l'origine. Nous avons donc à démontrer que

$$2\lambda x_m \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

tend vers zéro quand X tend vers O $\Big[$les $a_{m,\beta}$ ne sont autres, à l'aide du système primitif de variables, que les $\Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \dfrac{\partial s_m}{\partial x_\gamma} \dfrac{\partial s_\beta}{\partial x_\delta}$; ne pas oublier, en effet, que, dans nos hypothèses, il n'y a pas d'équation analogue à (1) (§ III) pour les variables $s_1, \ldots, s_m$, puisque les fonctions x_α de $s_1, \ldots, s_m$ n'ont pas de dérivées secondes assurées$\Big]$; $d(a_1, \ldots, a_{m-1})$ est regardé comme positif et l'intégrale est étendue à la région

$$a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < r^2, \qquad a_m = 0;$$

x_m est supposé positif dans $\mathcal{D}$.

Nous pouvons encore laisser de côté, sous le signe $\int$, toute fonction $O[L^{h-m}(X, A)]$, car l'intégrale correspondante vaut

$$O\left[\int_0^r (s^2 + x_m^2)^{\frac{h-m}{2}} s^{m-2}\, ds\right] = O\left[x_m^{h-1} \int_0^{r x_m^{-1}} (1 + t^2)^{\frac{h-m}{2}} t^{m-2}\, dt\right];$$

si $h < 1$, cela fait $O(x_m^{h-1})$, car l'intégrale de *zéro* à l'infini existe; si $h = 1$, l'intégrale est moindre que

$$\int_0^a (1+t^2)^{\frac{1-m}{2}} t^{m-2}\, dt + \log \frac{r}{a x_m},$$

où $a = r L_0^{-1}$, L_0 étant supérieur au maximum de la distance mutuelle de deux points de ϖ; dans les deux cas, cette intégrale est $o(x_m^{-1})$ et nous pouvons la laisser de côté.

Nous sommes ainsi ramenés à

$$2\lambda x_m \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{x_m}{[\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(A)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)]^{\frac{m}{2}}} d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

en négligeant un facteur constant; en ajoutant encore une fonction $O[L^{1-m}(X, A)]$ à la fonction intégrée, cela devient

$$-2\lambda x_m \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \frac{x_m - a_m}{[\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)]^{\frac{m}{2}}} d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

On peut faire passer x_m sous le signe $\int$ en le remplaçant par $x_m - a_m$; on a ainsi le produit de $\sigma(A) D^{-\frac{1}{2}}(A)(x_m - a_m) d(a_1, \ldots, a_{m-1})$ par

$$\frac{\partial}{\partial a_\alpha} \frac{x_m - a_m}{[\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)]^{\frac{m}{2}}},$$

qui est une fonction homogène d'ordre $-m$ des $a_\alpha - x_\alpha$. Cette fonction a le signe de

$$(x_m - a_m) \Sigma_\beta A_{\alpha,\beta}(X)(x_\beta - a_\beta) \quad (\alpha \neq m),$$
$$m(x_m - a_m) \Sigma_\beta A_{m,\beta}(X)(x_\beta - a_\beta) - \Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma) \quad (\alpha = m),$$

c'est-à-dire le signe d'une forme quadratique. On peut décomposer cette forme en deux autres formées l'une de carrés positifs, l'autre de carrés négatifs, et l'on verra comme dans un travail antérieur (1) qu'en remplaçant $\sigma(A) D^{-\frac{1}{2}}(A)$ par *un* et en étendant l'intégrale à une frac-

(1) D., p. 73 à 76.

tion quelconque de la région donnée, la valeur absolue du résultat est inférieure à un nombre fixe. On en conclut, comme dans ce même travail, que si σ est nul à l'origine, notre expression tend vers zéro quand X tend vers l'origine.

Il suffit de voir maintenant ce qui arrive si $\sigma(A)D^{-\frac{1}{2}}(A)$ est constant, égal à *un*, par exemple. Dans ce cas, nous remplacerons

$$(-1)^{m-1}(x_m - a_m)\,d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \quad \text{par} \quad \Sigma_\alpha(x_\alpha - a_\alpha)\varpi_\alpha(A)\,dS_A,$$

et nous intégrerons sur une surface fermée, comprenant la multiplicité d'intégration que nous avions déjà. Nous ferons sur les $a_\alpha - x_\alpha$ un changement linéaire de variables tel que

$$\Sigma_{\beta,\gamma}A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma) = \Sigma_\beta t^2,$$

les t_β étant les nouvelles variables. On a alors des combinaisons linéaires d'intégrales

$$\int^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial t_\alpha} \frac{t_\beta}{(t_1^2 + \ldots + t_m^2)^{\frac{m}{2}}} \Sigma_\gamma(-1)^{(m-1)(\gamma-1)} t_\gamma\, d(t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\gamma-1})$$

qu'on peut prendre sur la multiplicité $t_1^2 + \ldots + t_m^2 = \text{const.}$, car on peut déformer la multiplicité d'intégration sans altérer la valeur de l'intégrale [1]. On a ainsi des intégrales

$$\int^{(m-1)} t_\alpha t_\beta \Sigma_\gamma(-1)^{(m-1)(\gamma-1)} t_\gamma\, d(t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\gamma-1}) \qquad (\alpha \neq \beta),$$

$$\int^{(m-1)} (t_1^2 + t_2^2 + \ldots + t_m^2 - m t_\alpha^2)\Sigma_\gamma(-1)^{(m-1)(\gamma-1)} t_\gamma\, d(t_{\gamma+1}, \ldots, t_{\gamma-1}) \quad (\alpha = \beta),$$

c'est-à-dire zéro dans les deux cas, d'après la formule de Green. *Le théorème est démontré.*

Supposons maintenant que *les dérivées secondes des $\alpha_{\alpha,\beta}$ et les dérivées des b_α et de c sont continues* (L) *d'exposant h, ainsi que les dérivées secondes des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$* (pour les $a_{\alpha,\beta}$, b_α et c, les conditions sont supposées remplies dans le domaine $\mathcal{D}_1$ débordant $\mathcal{D}$; on suppose toujours que les déterminants

---

[1] D., p. 69.

fonctionnels des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ ne peuvent s'annuler ensemble).

Alors, d'après le théorème 8 de la section II, on peut dériver $H(X, A; p)$ jusqu'à cinq fois, dont trois par rapport aux x_α et deux par rapport aux a_α; l'ordre par rapport à $L(X, A)$ diminue d'une unité à chaque dérivation; une opération $\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}$ ne change pas l'ordre, mais deux telles opérations de suite l'abaissent de $1 - h$.

L'expression (5) est du second ordre par rapport à $L(S, T)$ et ses dérivées par rapport aux s_ζ sont du premier ordre. L'opération $\frac{\partial}{\partial s_\zeta} + \frac{\partial}{\partial t_\zeta}$, appliquée à l'expression (5), donne

$$\begin{aligned}
&- 2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\, a'_{m,\beta}(T)\, A_{\alpha,\gamma}(A)\, \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\left(\Delta \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\zeta} - \delta \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\zeta}\right) \\
&+ 2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}\, a'_{m,\beta}(T)\, \frac{\partial A_{\gamma,\varepsilon}}{\partial a_\alpha}\, \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\, \Delta \frac{\partial a_\gamma}{\partial t_\zeta}\, \Delta a_\varepsilon \\
&- 2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\, \frac{\partial}{\partial t_\zeta}\left[a'_{m,\beta}(T)\, A_{\alpha,\gamma}(A)\, \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\right](\Delta a_\gamma - \delta a_\gamma) \\
&+ \Sigma_{\alpha,\beta,\gamma,\varepsilon}\, \frac{\partial}{\partial t_\zeta}\left[a'_{m,\beta}(T)\, \frac{\partial A_{\gamma,\varepsilon}}{\partial a_\alpha}\, \frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\right]\Delta a_\gamma\, \Delta a_\varepsilon.
\end{aligned}$$

ce qui est $O[L^{1+h}(S, T)]$. Ce résultat lui-même a une dérivée par rapport à s_η, et elle est $O[L^h(S, T)]$. Donc le noyau de la seconde intégrale de l'équation (12) de la section III peut être dérivé deux fois par rapport aux s_α et une fois par rapport aux t_α, chaque dérivation abaissant l'ordre d'une unité et l'opération $\frac{\partial}{\partial s_\alpha} + \frac{\partial}{\partial t_\alpha}$ l'abaissant seulement de $1 - h$.

Lemme. — *Soit $H^\star(X, A; p)$ la fonction jouant le même rôle pour l'équation*

$$(6) \qquad \mathcal{G}(v) = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 (a_{\alpha,\beta} v)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Sigma_\alpha \frac{\partial (b_\alpha v)}{\partial x_\alpha} + cv = 0$$

adjointe à $\mathcal{F}(u) = 0$, que $H(X, A; p)$ pour $\mathcal{F}(u) = 0$. On a

$$(7) \qquad H(X, \Xi; p) - H^\star(\Xi, X; p) = O[L^{p+3-m}(X, \Xi)] \qquad (p + 3 < m),$$

pourvu que X et Ξ restent à une distance de la frontière de $\mathcal{D}_1$ supérieure à une longueur positive fixe.

Soient u et v des fonctions du point A, continues ainsi que leurs dérivées secondes. On a la formule de Green

$$\int^{(m)} [v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v)]\,dV_A$$
$$= \int^{(m-1)} \Sigma_\alpha \left\{ \Sigma_\beta \left[a_{\alpha,\beta} v \frac{\partial u}{\partial a_\beta} - u \frac{\partial (a_{\alpha,\beta} v)}{\partial a_\beta} \right] + b_\alpha u v \right\} \varpi_\alpha(A)\, dS_A.$$

Nous allons appliquer cette formule aux fonctions $u = H(A, \Xi; p)$, $v = H^\star(A, X; p)$. Les intégrales seront étendues au domaine $\mathcal{D}_1$ et à sa frontière $\mathcal{S}_1$ prise dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de $\mathcal{D}_1$; on isole préalablement les points X et Ξ par de petites hypersphères dont on fait tendre le rayon vers zéro [remarquer que $H^\star(A, X; p)$ peut être dérivé deux fois par rapport aux a_α, une fois par rapport aux x_α]. On trouve ainsi [1]

$$(8)\quad \left\{ \begin{aligned} & H(X, \Xi; p) - H^\star(\Xi, X; p) \\ & \quad = -\lambda \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \Sigma_\alpha \left\{ \Sigma_\beta \left[a_{\alpha,\beta} v \frac{\partial u}{\partial a_\beta} - u \frac{\partial (a_{\alpha,\beta} v)}{\partial a_\beta} \right] + b_\alpha u v \right\} \varpi_\alpha(A)\, dS_A \\ & \qquad + \lambda \int^{(m)} [v\mathcal{F}(u) - u\mathcal{G}(v)]\, dV_A. \end{aligned} \right.$$

Or [§ III, (9)], $\mathcal{F}[H(A, \Xi; p)] = O[L^{p+1-m}(A, \Xi)]$ et de même pour $\mathcal{G}(H^\star)(p < m - 1)$. Donc [§ II, théor. 3], l'intégrale d'ordre m vaut $O[L^{p+3-m}(X, \Xi)]$ si $p + 3 < m$, $O[\log L_0 - \log L(X, \Xi)]$ si $p + 3 = m$, $O(1)$ si $p + 3 > m$, la fonction étant, dans ce dernier cas, continue. Dans l'intégrale d'ordre $m - 1$, tout est continu et borné si les distances à $\mathcal{S}_1$ de X et de Ξ ont une borne inférieure positive. La proposition est démontrée, et l'on voit ce qui arrive si $p + 3 \geqq m$.

Corollaire. — *On a*

$$\mathcal{G}_\Xi[H(X, \Xi; p)] = O[L^{p+1-m}(X, \Xi)] \qquad (p < m - 1),$$
$$\frac{\partial}{\partial x_\alpha} \mathcal{G}_\Xi[H(X, \Xi; p)] = O[^{p-m}(X, \Xi)] \qquad (p < m).$$

En effet [*voir* § III, (9)], on peut effectuer l'opération $\mathcal{G}$ sur l'intégrale d'ordre m au second membre de (8) en appliquant le théorème 5 de la section II, et l'on parvient ainsi au résultat annoncé. La déri-

---

(1) Calcul analogue à celui de D., p. 37.

vation par rapport à x_α ne nécessite aucune nouvelle explication. Si $p \geqq m-1$, on voit aussi qu'il faut modifier les limitations à la manière ordinaire.

THÉORÈME 2. — *Si $f(X)$, c, les dérivées des b_α et les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ sont continus (L), ainsi que les dérivées secondes par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$, et si les valeurs $f_1(Y)$ de u sur $\mathfrak{S}$ ont des dérivées continues, u admet par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ des dérivées continues même sur $\mathfrak{S}$.*

Nous remplacerons $\mathcal{D}$ par le domaine décrit au début de cette section, r étant assez petit pour qu'on puisse employer les équations (10) à (12) de la section III. A l'aide du théorème 1 de la section III, nous pouvons changer de fonction inconnue de manière à annuler c; les b_α et les $a_{\alpha,\beta}$ satisferont encore aux conditions de l'énoncé; ainsi on peut, sans diminuer la généralité, supposer que c a, comme les b_α, des dérivées continues (L).

D'après ce que nous avons déjà vu, $\sigma(A)$ est continu (L); donc [§ I, théor. 6), l'intégrale d'ordre $m-1$ de l'équation (12) (§ III) a des dérivées continues; comme il en est de même de l'autre intégrale et de $f_1(Y)$, $\sigma(Y)$ a lui-même des dérivées continues.

Nous allons maintenant calculer les dérivées de u, cette fonction étant donnée par la formule (10) (§ III). Comme pour le théorème 1, il suffit de nous occuper de l'intégrale d'ordre $m-1$; nous pourrons, dans la suite du calcul, confondre les variables $s_1, s_2, \ldots, s_m$ avec $x_1, x_2, \ldots, x_m$ et ne considérer que la partie d'intégrale étendue à

$$a_m = 0, \qquad a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < r^2,$$

c'est-à-dire

$$2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_\beta A_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

la multiplicité d'intégration étant prise dans le sens $(a_1, \ldots, a_{m-1})$.

Tant que x_m n'est pas nul, la dérivée à étudier est

$$(10) \quad \left\{ \begin{aligned} & 2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \right) \Sigma_\beta a_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}) \\ & - 2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}). \end{aligned} \right.$$

Occupons-nous d'abord de la première intégrale. Nous pouvons y remplacer $H(X, A; p)$ et ses dérivées par $H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)$ et ses dérivées, car cela ajoute une intégrale portant sur $O[L^{2-m}(X, A)]$, et qui, par suite, est continue (L) (§ I, théor. 1); cela donne

$$2(m-2)\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \times \left[H^{-\frac{m}{2}}(X, A)(x_m - a_m)\right] d(a_1, \ldots, a_{m-1}) + \ldots,$$

les points tenant lieu d'une intégrale continue (L), même sur $\mathfrak{S}$, comme portant sur une fonction $O[L^{1+h-m}(X, A)]$ ayant des dérivées $O[L^{h-m}(X, A)]$. En négligeant encore une fonction $O[L^{2-m}(X, A)]$ ayant des dérivées $O[L^{1-m}(X, A)]$, on aura

$$\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right)\left[H^{-\frac{m}{2}}(X, A)(x_m - a_m)\right] = -\frac{m}{2}(x_m - a_m) H^{-\frac{m+2}{2}}(X, A) \Sigma_{\beta,\gamma} \frac{\partial A_{\beta,\gamma}}{\partial a_\alpha}(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma) + \ldots.$$

Nous sommes donc ramenés à l'intégrale

$$-m(m-2)\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \frac{x_m - a_m}{H^{\frac{m+2}{2}}(X, A)} \times \Sigma_{\beta,\gamma} \frac{\partial A_{\beta,\gamma}}{\partial a_\alpha}(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Nous pouvons remplacer $\sigma(A)$ par $\sigma(X_1)$, X_1 étant le point

$$(x_1, \ldots, x_{m-1}, 0),$$

$H(X, A)$ par $\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma)$ et prendre en X, au lieu de A, les fonctions $A_{\beta,\gamma}$ et leurs dérivées; $D(A)$ sera remplacé par $D(X)$; toutes ces opérations reviennent, en effet, à ajouter une intégrale portant sur une fonction $O[L^{2-m}(X, A)]$, ayant des dérivées $O[L^{1-m}(X, A)]$. L'intégrale porte alors sur le produit de

$$(x_m - a_m)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

par une fonction homogène d'ordre $-m$ des $x_\beta - a_\beta$, dépendant aussi de $x_1, \ldots, x_m$. Nous pouvons y remplacer $(a_m - x_m)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1})$

par $\Sigma_\varepsilon(-1)^{(m-1)(\varepsilon-1)}(x_\varepsilon - a_\varepsilon)\,d(a_{\varepsilon+1}, \ldots, a_{\varepsilon-1})$, l'intégrale étant prise dans le sens qui correspond au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de ϖ, puisque $a_m = 0$ sur notre multiplicité. Nous ajouterons ensuite à cette multiplicité une autre multiplicité de manière à former une multiplicité M fermée. Alors, selon une proposition déjà invoquée, on peut déformer M sans changer l'intégrale pourvu que M ne rencontre pas X.

Remarquons même qu'*une intégrale*

$$\int_{M}^{(m-1)} \varphi(x_1, \ldots, x_m)\,\Sigma_\alpha(-1)^{(m-1)(\alpha-1)}x_\alpha\,d(x_{\alpha+1}, \ldots, x_{\alpha-1})$$

(φ *homogène d'ordre* $-m$) *ne change pas si* M *se déforme en passant continuellement par* O *tangentiellement à un plan fixe*. En effet, on peut supposer que ce plan soit $x_m = 0$; en O et dans son voisinage, x_m est une fonction continue et à dérivées continues de $x_1, \ldots, x_{m-1}$. On peut passer d'une position de M à une autre en faisant dépendre x_m d'un paramètre t, de façon que les dérivées $\dfrac{\partial^2 x_m}{\partial x_\alpha \partial t}$ et $\dfrac{\partial^2 x_m}{\partial t\, \partial x_\alpha}$ soient continues, et, par suite, nulles en O, ainsi que $\dfrac{\partial x_m}{\partial t}$, quel que soit t. Or la dérivée de ce qui reste de notre intégrale, si l'on isole O par le contour C, intersection de M avec

$$x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 = a^2,$$

est (¹)

$$\int_{C}^{(m-2)} \varphi(x_1, \ldots, x_m) \sum_{\alpha=1}^{m-1} x_\alpha \frac{\partial x_m}{\partial t}\, d(x_1, \ldots, x_{\alpha-1}, x_{\alpha+1}, \ldots, x_{m-1}),$$

car, sur C, $x_1, \ldots, x_{m-1}$ ne dépendent pas de t. Or, sur C, $\left|\dfrac{\partial x_m}{\partial t}\right|$ est inférieur à une fonction $o(a)$, indépendante de t. Donc la fonction intégrée est $o(a^{2-m})$, pendant que la mesure de C est $O(a^{m-2})$. Donc l'intégrale tend vers zéro avec a, uniformément par rapport à t. Donc l'intégrale étendue à M est indépendante de t.

Ici, tant que X n'est pas sur $\mathfrak{S}$, nous pouvons intégrer sur l'hypersurface

$$\Sigma_{\beta,\gamma} A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta - a_\beta)(x_\gamma - a_\gamma) = a^2,$$

(¹) D., p. 18.

ce qui donne

$$m(m-2)\lambda\frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}}\,a^{-m-2}$$
$$\times\int^{(m-1)}\Sigma_{\beta,\gamma}\frac{\partial A_{\beta,\gamma}(X)}{\partial x_\alpha}(x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma)\Sigma_\varepsilon(x_\varepsilon-a_\varepsilon)\varpi_\varepsilon(A)\,dS_A.$$

La formule de Green permet de remplacer l'intégrale par une d'ordre m portant sur

$$-(m+2)\Sigma_{\beta,\gamma}\frac{\partial A_{\beta,\gamma}(X)}{\partial x_\alpha}(x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma)\,dV_A.$$

Effectuons sur les $a_\beta-x_\beta$ une transformation linéaire et homogène, de déterminant $\sqrt{D(X)}$, qui ramène le domaine d'intégration à

$$c_1^2+c_2^2+\ldots+c_m^2<a^2;$$

la fonction intégrée devient une forme quadratique $\Sigma_{\beta,\gamma}h_{\beta,\gamma}c_\beta c_\gamma$, et l'on a (¹)

$$a^{-m-2}\int^{(m)}\Sigma_{\beta,\gamma}h_{\beta,\gamma}c_\beta c_\gamma\,d(c_1,\ldots,c_m)=\frac{\pi^{\frac{m}{2}}}{2\Gamma\left(\frac{m}{2}+2\right)}\Sigma_\beta h_{\beta,\beta}.$$

Or $\Sigma_\beta h_{\beta,\beta}$ est le coefficient de s^{m-1} dans le discriminant de

$$\Sigma_{\beta,\gamma}h_{\beta,\gamma}c_\beta c_\gamma+s(c_1^2+\ldots+c_m^2),$$

qui est le produit par $D(X)$ de celui de

$$\Sigma_{\beta,\gamma}\frac{\partial A_{\beta,\gamma}(X)}{\partial x_\alpha}(x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma)+s\Sigma_{\beta,\gamma}A_{\beta,\gamma}(X)(x_\beta-a_\beta)(x_\gamma-a_\gamma);$$

donc

$$\Sigma_\beta h_{\beta,\beta}=\Sigma_{\beta,\gamma}a_{\beta,\gamma}(X)\frac{\partial A_{\beta,\gamma}}{\partial x_\alpha}.$$

En tenant compte de la valeur de λ, on trouve pour notre intégrale la valeur

$$-\sigma(X_1)\Sigma_{\cdot\gamma}a_{\beta,\gamma}(X)\frac{\partial A_{\beta,\gamma}}{\partial x_\alpha}. \tag{11}$$

(¹) Ces intégrales se ramènent aux intégrales de Dirichlet, en posant $c_\beta^2=t_\beta$.

Si maintenant X est sur $\mathcal{S}$, on a une multiplicité d'intégration formée d'une partie de $a_m = 0$, et dont le reste peut être pris comme ci-dessus. On arrive ainsi à la moitié de l'expression précédente où X_1 ne diffère plus de X.

Par conséquent, *la première intégrale* (10) *coïncide dans* $\mathcal{O}$ *avec une fonction continue dans* $\mathcal{O} + \mathcal{S}$; sa limite quand X vient sur $\mathcal{S}$ s'obtient en ajoutant à l'intégrale elle-même la moitié de l'expression (11), où $X_1 = X$.

Passons à l'autre intégrale (10) que nous étendrons seulement à la même partie de $a_m = 0$ que la première; soit $\mathcal{C}$ la frontière prise dans le sens associé à celui qu'on a choisi dans son intérieur. Ici intervient l'hypothèse $\alpha \neq m$, grâce à laquelle cette intégrale devient

$$-(-1)^{m(\alpha-1)} 2\lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-2)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_{\alpha+1}, \ldots, a_{m-1}, a_1, \ldots, a_{\alpha-1})$$
$$+ 2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\partial \cdot}{\partial a_\alpha} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \Sigma_\beta a_{m,\beta}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

L'intégrale d'ordre $m-2$ représente une fonction continue. L'autre intégrale est un potentiel de double couche; elle coïncide dans $\mathcal{O}$ avec une fonction continue dans $\mathcal{O} + \mathcal{S}$, et sa limite, quand X vient sur $\mathcal{S}$, s'obtient en retranchant de l'intégrale elle-même l'expression

$$\sqrt{D(X)} \frac{\partial}{\partial x_\alpha} \frac{\sigma(X)}{\sqrt{D(X)}}.$$

Ainsi, $\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ coïncide dans $\mathcal{O}$ avec une fonction continue dans $\mathcal{O} + \mathcal{S}$ [du moins continue sur la partie spécifiée de $\mathcal{S}$, où les dérivées de $f_1(Y)$ sont continues]; quand X tend vers un point de cette partie de $\mathcal{S}$, il y a donc une limite atteinte uniformément, donc cette limite est la valeur de $\dfrac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ sur $\mathcal{S}$. Le théorème est démontré.

Théorème 3. — *Si, en plus des hypothèses du théorème* 2, *les dérivées de* $f_1(Y)$ *sont continues* (L), *toutes les dérivées de u sont continues* (L).

Nous procéderons comme pour le théorème précédent. Il n'y a rien à changer à ce que nous avons dit pour la première intégrale (10), même pour $\alpha = m$; toutes les intégrales que nous avons négligées en cours de route sont continues (L) et il en est de même de l'expression (11) à laquelle nous sommes parvenus. Dans la seconde intégrale (10), il n'y a rien à changer non plus si $\alpha < m$: des deux intégrales auxquelles nous nous ramenons, celle d'ordre $m-2$ est non seulement continue (L) mais dérivable, et le potentiel de double couche a une densité continue (L); en effet l'intégrale d'ordre $m-1$ de l'équation (12) de la section III a des dérivées continues (L) (§ I, théorème 7), et puisqu'il en est de même de $f_1(Y)$ et de l'autre intégrale, il en est de même de $\sigma(Y)$; or les raisonnements qui ont servi à prouver que la première intégrale (10) est continue (L) peuvent évidemment être répétés pour un potentiel de double couche à densité continue (L).

Il nous reste donc seulement à étudier la seconde intégrale (10) quand $\alpha = m$. Dans ce cas le corollaire de l'identité (8) nous donne

$$\Sigma_\beta a_{m,\beta}(A)\frac{\partial^2 H(X, A; p)}{\partial a_m \partial a_\beta} = -\sum_{\alpha=1}^{m-1}\sum_{\beta=1}^{m} a_{\alpha,\beta}(A)\frac{\partial^2 H(X, A; p)}{\partial a_\alpha \partial a_\beta} + O[L^{p+1-m}(X, A) + \ldots,$$

les points tenant lieu d'une fonction linéaire et homogène de H et de ses dérivées par rapport aux a_β. La fonction $O[L^{p+1-m}(X, A)]$ donne lieu (§ I, théorème 1) à une intégrale continue (L). Les termes contenant les dérivées secondes s'intégreront par parties par rapport à a_α, et les intégrales étendues à $\mathcal{C}$ seront continues (L) et même dérivables.

Nous obtenons ainsi une intégrale portant sur une fonction linéaire de H et de ses dérivées par rapport aux a_β. Le terme en H est continu (L) (§ I, théorème 1). Nous pouvons retrancher encore un potentiel de double couche choisi de façon à faire disparaître la dérivée par rapport à a_m; ce potentiel ayant une densité continue (L), il est continu (L).

Ce qui reste contient seulement les dérivées de H par rapport à $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}$; les coefficients de ces dérivées contiennent linéairement $\sigma(A)D^{-\frac{1}{2}}(A)$ et ses dérivées; la partie qui provient de $\sigma(A)D^{-\frac{1}{2}}(A)$ peut être intégrée par parties, et l'on voit ainsi qu'elle est continue (L).

Nous avons donc seulement à considérer des intégrales telles que

$$(12)\qquad \int^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial a_\alpha} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \varphi(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$= \int^{(m-1)} \psi(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

où $\psi(A)$ est continu (L) ($\beta \neq m$). Or cela s'écrit

$$\int^{(m-1)} [\psi(A) - \psi(X_1)] \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$+ \psi(X_1) \int^{(m-1)} \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Le second terme se réduit à une intégrale étendue à $\mathcal{C}$; il est donc continu (L). En appelant F(X) le premier terme, nous allons former $F(Y) - F(X)$. Soient $\mathcal{S}_1$ la multiplicité d'intégration sur $a_m = 0$, $\mathcal{S}''$ l'ensemble des points A de $\mathcal{S}_1$ tels que $L(X, A) < 2L(X, Y)$, $\mathcal{S}'$ le reste de $\mathcal{S}_1$:

$$F(X) - F(Y) = \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} [\psi(A) - \psi(X_1)] \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$- \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} [\psi(A) - \psi(Y_1)] \frac{\partial H(Y, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$+ \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [\psi(A) - \psi(X_1)] \left[\frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\beta} - \frac{\partial H(Y, A; p)}{\partial a_\beta} \right] d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$+ [\psi(Y_1) - \psi(X_1)] \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \frac{\partial H(Y, A; p)}{\partial a_\beta} d(a_1, \ldots, a_{m-1}).$$

Si h est l'exposant de continuité (L) de $\psi(A)$, les deux premiers termes sont $O[L^h(X, Y)]$; en remarquant que l'intégrale du dernier terme peut être remplacée par une intégrale d'ordre $m - 2$ étendue à la frontière de $\mathcal{S}'$, on voit que ce terme est aussi $O[L^h(X, Y)]$, pourvu que Y ne soit pas trop voisin de $\mathcal{C}$, ce qui évidemment est sans inconvénient à cause de l'arbitraire du choix de $\mathcal{C}$. Enfin la formule des accroissements finis (*voir* § I, théorème 1) prouve que le troisième terme est de la même forme si $h < 1$, de la forme

$$L(X, Y)\,O[\log L_0 - \log L(X, Y)]$$

si $h = 1$.

Notre théorème est donc démontré.

Nous voulons maintenant trouver des limitations des valeurs absolues de u et de ses dérivées et du coefficient de continuité (L) de ces dernières ainsi que l'exposant correspondant, dans les conditions suivantes : les valeurs absolues des coefficients de $\mathcal{F}(u)$, des dérivées premières et secondes des $a_{\alpha,\beta}$ et des dérivées des b_α et de c, et les coefficients de continuité (L) des dérivées des b_α et de c et des dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ sont bornés; en outre, g étant une constante positive,

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, p_\alpha p_\beta < g\Sigma_\alpha p_\alpha^2,$$

quels que soient les p_α; $\mathcal{D}$ et par suite $\mathcal{D}_1$ sont fixes; $f_1(Y)$ est nul sur la partie de $\mathcal{S}$ dont on s'approche, et sa valeur absolue est inférieure à un nombre variable M sur le reste de $\mathcal{S}$; la valeur absolue et le coefficient de continuité (L) de $f(X)$ sont inférieurs à M; enfin l'exposant de continuité (L) de $f(X)$, des dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ et des dérivées des b_α et de c est un nombre variable h moindre que l'exposant de continuité (L) des expressions paramétriques des coordonnées des points de $\mathcal{S}$, lui-même inférieur à *un*.

On suppose $\mathcal{D}$ assez petit dans toutes ses dimensions pour que le système de Fredholm [(11) et (12), § III] soit toujours soluble dans ces conditions.

Pour abréger, nous désignerons par Q un facteur constant dans les conditions où nous sommes, c'est-à-dire quand M et h seuls varient.

Alors

$$|H(X, A_{ip})| < QL^{2-m}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial H(X, A; p)}{\partial x_\alpha}\right| < QL^{1-m}(X, A),$$

$$\left|\frac{\partial H(X, A; p)}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\alpha}\right| < QL^{2-m}(X, A), \qquad \left|\frac{\partial^2 H(X, A; p)}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}\right| < QL^{-m}(X, A).$$

On voit alors que $|\rho|$ et $|\sigma|$ sont moindres que QM. Le noyau de la seconde intégrale (12) (§ III) est moindre que $QL^{2-m}(Y, A)$. Le coefficient de continuité (L) de σ, pour l'exposant *un demi*, est QM; on en déduit que σ a des dérivées de valeur absolue moindre que QMh^{-1}, ainsi que leur coefficient de continuité (L), l'exposant correspondant étant égal au plus petit des nombres h et *un tiers;* mais alors on peut dériver les deux membres de l'équation (12) (§ III) en utilisant le théorème 8 de la section I; en appliquant le théorème 5 de la section I à l'expression obtenue, on remontera l'exposant de continuité (L) des dérivés de σ à la valeur h, le coefficient gardant la même limitation.

Nous avons maintenant à suivre, à l'aide de ces résultats, l'étude faite plus haut des dérivées de u (il est immédiat que $|u| < \mathrm{QM}$). On voit ainsi que les valeurs absolues des dérivées sont moindres que $\mathrm{QM}h^{-1}$ et leur coefficient de continuité (L) moindre que $\mathrm{QM}h^{-2}$, l'exposant correspondant étant h.

Théorème 4. — *Si les dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta}$, les dérivées secondes des b_α et les dérivées de c sont continues* (L) *et que les dérivées troisièmes des coordonnées des points de* S *par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ soient continues* (L), *et si les dérivées secondes de $f_1(\mathrm{Y})$ sont continues* (L), *les dérivées secondes de u sont continues* (L) *dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.*

Nous commencerons par montrer que, dans toute hypersphère suffisamment petite, la transformation du théorème 1 de la section III nous permet d'annuler c sans altérer le reste de l'hypothèse. Il suffit de prouver que le rapport des deux fonctions inconnues a des dérivées troisièmes continues (L). Nous savons déjà que la densité ρ correspondante est continue (L); donc (§ I, théorème 6) l'intégrale

$$\int^{(m)} \mathrm{K}(\mathrm{X}, \Xi)\, \mathrm{D}^{-\frac{1}{2}}(\Xi)\, \rho(\Xi)\, d\mathrm{V}_\Xi$$

a des dérivées continues; le second membre c ayant lui-même des dérivées continues, il en est de même de ρ; mais alors en dérivant les deux membres de l'équation (4) (§ III), où $f(\mathrm{X})$ est remplacé par c, on obtient (§ I, théorème 8) une équation dont tous les termes autres que $\dfrac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}$ sont continus (L); donc $\dfrac{\partial\rho}{\partial x_\alpha}$ est continu (L). En transportant ce résultat dans l'expression (3) (§ III), nous en déduisons (§ I, théorème 8) une expression des dérivées secondes de l'inconnue d'où nous concluons enfin (§ I, théorèmes 6 et 7) que les dérivées troisièmes sont continues (L).

Nous ne diminuerons donc pas la généralité en admettant, dans les calculs ultérieurs, que c a des dérivées secondes continues (L).

Nous procéderons encore comme au théorème 2. Les x_α ont maintenant, par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_m$, des dérivées troisièmes continues (L). Nous confondrons encore les deux systèmes de variables; la fonction $H(X, A; p)$ peut être dérivée trois fois par rapport aux x_α et trois fois par rapport aux a_α (avant le changement de variables, on pouvait même dériver quatre fois par rapport aux x_α).

Alors la fonction σ de l'équation (12) de la section III admet, comme $f_1(Y)$, des dérivées secondes continues (L). En effet, nous savons déjà que les dérivées de σ sont continues (L); en dérivant (§ I, théorème 8) cette équation (12) (§ III), on constate que les intégrales ont des dérivées continues (§ I, théorème 6); donc σ a des dérivées secondes continues; une nouvelle dérivation montre que ces dérivées secondes sont continues (L).

Nous devons alors étudier les dérivées secondes de la seconde intégrale de l'équation (10) de la section III, l'autre intégrale ayant des dérives secondes continues (L). Nous aurons une simplification importante en étudiant seulement les dérivées $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$ où $\alpha \neq m$; en effet l'ordre des dérivations est indifférent à cause de la continuité en tout point de $\mathcal{D}$, et d'autre part l'équation $\mathcal{F}(u) = f(X)$ elle-même nous donnera le résultat pour $\frac{\partial^2 u}{\partial x_m^2}$ quand nous l'aurons établi pour les autres dérivées.

Or $\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}$ est une somme d'intégrales dont les unes, d'ordre m ou étendues à des multiplicités ne contenant pas les positions considérées de X, se dérivent sans difficulté et leurs dérivées sont continues (L); les autres sont

$$2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}} \left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \Sigma_\gamma\, a_{m,\gamma}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\gamma}\, d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$
$$+ 2\lambda \int^{(m-1)} \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\left[\frac{\sigma(A)}{\sqrt{D(A)}}\right] \Sigma_\gamma\, a_{m,\gamma}(A) \frac{\partial H(X, A; p)}{\partial a_\gamma}\, d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

ces intégrales étant étendues à $a_m = 0$, $a_1^2 + \ldots + a_{m-1}^2 < r^2$. La seconde de ces intégrales est un potentiel de double couche dont la densité a des dérivées continues (L); les raisonnements des théorèmes 2 et 3 prouvent donc qu'elle admet, par rapport à x_β ($\beta = 1, 2, \ldots, m$) des dérivées continues (L).

La première intégrale se traite tout à fait de même, la fonction $\frac{\partial H}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial H}{\partial a_\alpha}$ remplaçant H dans la formation d'une sorte de potentiel de double couche. Le seul point qui appelle un nouveau calcul est l'évaluation de

$$
\begin{aligned}
-2(m-2)\lambda \frac{\sigma(X_1)}{\sqrt{D(X)}} \int^{(m-1)} & \left(\frac{\partial}{\partial x_\beta} + \frac{\partial}{\partial a_\beta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial}{\partial a_\alpha}\right) \\
& \times \left[\Sigma_{\gamma,\delta} A_{\gamma,\delta}(X)(x_\gamma - a_\gamma)(x_\delta - a_\delta)\right]^{-\frac{m}{2}} \Sigma_\varepsilon (x_\varepsilon - a_\varepsilon)\varpi_\varepsilon(A)\, dS_A,
\end{aligned}
$$

étendue à une multiplicité fermée; on trouve, X étant à l'intérieur,

$$
\begin{aligned}
-\frac{\sigma(X_1)}{2} \Bigg(& 2\,\Sigma_{\gamma,\delta,\varepsilon,\zeta} \begin{vmatrix} a_{\gamma,\varepsilon} & a_{\gamma,\zeta} \\ a_{\delta,\varepsilon} & a_{\delta,\zeta} \end{vmatrix} \times \begin{vmatrix} \dfrac{\partial A_{\gamma,\varepsilon}}{\partial x_\alpha} & \dfrac{\partial A_{\gamma,\zeta}}{\partial x_\alpha} \\ \dfrac{\partial A_{\delta,\varepsilon}}{\partial x_\alpha} & \dfrac{\partial A_{\delta,\zeta}}{\partial x_\beta} \end{vmatrix} \\
& - 3\,\Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial x_\alpha} \times \Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \frac{\partial A_{\gamma,\delta}}{\partial x_\beta} + 2\,\Sigma_{\gamma,\delta}\, a_{\gamma,\delta} \frac{\partial^2 A_{\gamma,\delta}}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta} \Bigg),
\end{aligned}
$$

expression continue (L); si X est sur la multiplicité, on n'a plus que la moitié de cette valeur.

Le théorème est démontré. On peut remarquer que si α et β sont tous deux différents de m, la continuité des dérivées secondes de f_1 suffit pour assurer la continuité de $\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\, \partial x_\beta}$.

Nous allons maintenant appliquer ce résultat dans des conditions analogues à ce que nous avons fait pour le théorème 3. Nous ajouterons seulement aux hypothèses faites alors que les dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta}$, secondes des b_α et de c, et leurs coefficients de continuité (L) sont bornés, et que les dérivées troisièmes des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$ ont un exposant de continuité (L) inférieur à *un* et plus grand que l'exposant h qui convient aux dérivées troisièmes des $a_{\alpha,\beta}$, secondes des b_α et de c, et à $f(X)$.

La première intégrale de l'équation (12) de la section III admet maintenant des dérivées secondes continues (L) d'exposant $h(1+h)^{-1}$ et de coefficient $\mathrm{QM}h^{-1}$, Q désignant encore n'importe quel coefficient constant dans les conditions où nous nous plaçons.

Pour voir ce qu'il advient de la seconde intégrale de la même équation, nous devons étudier la répercussion de nos nouvelles hypothèses sur son noyau. Celui-ci peut être dérivé trois fois par rapport aux s_ζ, deux fois par rapport aux t_ζ, chaque opération abaissant d'au plus une unité l'ordre par rapport à $\mathrm{L}(\mathrm{S}, \mathrm{T})$; l'opération $\left(\frac{\partial}{\partial s_\eta}+\frac{\partial}{\partial t_\eta}\right)\left(\frac{\partial}{\partial s_\zeta}+\frac{\partial}{\partial t_\zeta}\right)$ appliquée à (5) donne, en négligeant des termes d'ordre supérieur,

$$-2\Sigma_{\alpha,\beta,\gamma}\, a'_{m,\beta}(\mathrm{T})\,\mathrm{A}_{\alpha,\gamma}(\mathrm{A})\,\frac{\partial a_\alpha}{\partial t_\beta}\left(\Delta\frac{\partial^2 a_\gamma}{\partial t_\zeta\,\partial t_\eta}-\delta\frac{\partial^2 a_\gamma}{\partial t_\zeta\,\partial t_\eta}\right),$$

c'est-à-dire $\mathrm{O}[\mathrm{L}^{1+h}(\mathrm{S}, \mathrm{T})]$. Donc les dérivées secondes de σ sont continues (L) de coefficient $\mathrm{QM}h^{-1}$ et d'exposant $h(1+h)^{-1}$ (§I, théorèmes 6 à 8).

Il reste alors à suivre le calcul des dérivées de u jusqu'au second ordre. On trouve immédiatement que

$$|u|<\mathrm{QM},\qquad \left|\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right|<\mathrm{QM},\qquad \left|\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}\right|<\mathrm{QM}h^{-1};$$

enfin le coefficient de continuité (L) des dérivées secondes est $\mathrm{QM}h^{-2}$, et l'exposant est $h(1+h)^{-1}$.

V.

Dans cette section, nous allons nous affranchir de la restriction que $\mathcal{D}$ est suffisamment petit dans toutes ses dimensions et que son contour est d'un seul tenant. Nous verrons que, moyennant seulement des conditions de régularité pour les coefficients de $\mathcal{F}(u)$, $f(\mathrm{X})$, la multiplicité $\mathcal{S}$ et $f_1(\mathrm{Y})$, la résolution du problème de Dirichlet est exactement équivalente à celle d'un système de Fredholm analogue au système des équations (11) et (12) de la section III.

THÉORÈME 1. — *Soit $\varphi(\mathrm{X})$ une solution de l'équation*

$$(1)\qquad \mathcal{F}(u)=\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta}+\Sigma_\alpha\, b_\alpha\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}+cu=0,$$

qui est de type elliptique ($a_{\alpha,\alpha}>0$), et où l'on suppose que c, les dérivées des b_α et les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ sont continues (L) *dans $\mathcal{D}$. On sup-*

pose que $\varphi(X)$ a ses dérivées secondes continues en tout point du domaine $\mathcal{D}$, sauf peut-être en un point Ξ; de plus, quand X tend vers Ξ,

$$\varphi(X) = o[L^{2-m}(X, \Xi)], \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial x_\alpha} = o[L^{1-m}(X, \Xi)].$$

Alors $\varphi(X)$ et ses dérivées jusqu'au second ordre sont continues en Ξ.

Soit

$$\mathcal{G}(u) = \Sigma_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2(a_{\alpha,\beta} u)}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} - \Sigma_\alpha \frac{\partial(b_\alpha u)}{\partial x_\alpha} + cu = 0, \tag{2}$$

l'équation adjointe à (1) et soit

$$K^\star(X, Y) = \mathcal{G}_X\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, Y)\right].$$

Nous remplacerons $\mathcal{D}$ par une hypersphère $\mathcal{D}_1$ de centre A et de rayon assez petit pour que la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n K^{\star(n)}(X, Y),$$

où l'on a posé

$$K^{\star(1)} = K^\star, \qquad K^{\star(n)}(X, Y) = \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} K^\star(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A) K^{\star(n-1)}(A, Y)\, dV_A,$$

soit convergente dans $\mathcal{D}_1$. On fait en outre en sorte que c ait ses dérivées continues (L) dans $\mathcal{D}_1$ (§ III, théorème 1). La fonction

$$F(X, Y) = H^{\frac{2-m}{2}}(X, Y) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int_{\mathcal{D}_1}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A) K^{\star(n)}(A, Y)\, dV_A$$

satisfait à $\mathcal{G}_X(F) = 0$. Soient $\mathcal{D}'$ une hypersphère intérieure à $\mathcal{D}_1$ et dont la frontière est $\mathcal{S}'$, et $\mathcal{D}''$ une hypersphère intérieure à $\mathcal{D}'$ et dont la frontière est $\mathcal{S}''$; on suppose que $\mathcal{D}'$ et $\mathcal{D}''$ ont comme centre Ξ; $\mathcal{S}'$ et $\mathcal{S}''$ sont prises dans les sens associés aux sens $(x_1, \ldots, x_m)$ de leurs intérieurs.

Appliquons la formule de Green (§ IV, lemme) dans le domaine $\mathcal{D}' - \mathcal{D}''$ aux fonctions $u = \varphi(X)$, $v = 1$:

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \Sigma_\alpha\left[\Sigma_\beta\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} - \varphi\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right) + b_\alpha\varphi\right]\varpi_\alpha(X)\, d\mathcal{S}_X + \int_{\mathcal{D}'-\mathcal{D}''}^{(m)} c\varphi\, dV_X$$
$$= \int_{\mathcal{S}''}^{(m-1)} \Sigma_\alpha\left[\Sigma_\beta\left(a_{\alpha,\beta}\frac{\partial\varphi}{\partial x_\beta} - \varphi\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta}\right) + b_\alpha\varphi\right]\varpi_\alpha(X)\, d\mathcal{S}_X.$$

L'intégrale de $c\varphi$ étant convergente dans $\mathcal{D}'$, il en résulte que l'intégrale étendue à $\mathcal{S}''$ tend vers une limite l quand le rayon de $\mathcal{S}''$ tend vers zéro.

Soit maintenant Y un point quelconque de $\mathcal{D}' - \mathcal{D}''$; nous isolons Y par un contour infiniment petit dans toutes ses dimensions. Nous appliquons la formule de Green à $u = \varphi(X)$, $v = F(X, Y)$, dans la partie restante de $\mathcal{D}' - \mathcal{D}''$ et nous passons à la limite :

$$2\lambda \int_{\mathcal{S}'-\mathcal{S}''}^{(m-1)} \Sigma_\alpha \Big\{ \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} F(X, Y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \Sigma_\beta \varphi(X) \frac{\partial [a_{\alpha,\beta} F(X, Y)]}{\partial x_\beta} + b_\alpha(X) \varphi(X) F(X, Y) \Big\} \varpi_\alpha(X)\, d\mathcal{S}_X = \varphi(Y).$$

Faisons tendre vers zéro le rayon de $\mathcal{S}''$. L'intégrale correspondante tend vers une limite, car si l'on remplace $F(X, Y)$ par $F(X, Y) - F(\Xi, Y)$, l'intégrale ajoutée tend vers une limite, et il est évident que l'intégrale obtenue tend vers zéro. Nous voyons donc que

$$\varphi(Y) = -lF(\Xi, Y) + 2\lambda \int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} \Sigma_\alpha \Big\{ \Sigma_\beta a_{\alpha,\beta} F(X, Y) \frac{\partial \varphi}{\partial x_\beta} - \Sigma_\beta \varphi \frac{\partial [a_{\alpha,\beta} F(X, Y)]}{\partial x_\beta} + b_\alpha \varphi F(X, Y) \Big\} \varpi_\alpha(X)\, d\mathcal{S}_X.$$

Mais $l = 0$ sans quoi $\varphi(Y) = O[L^{2-m}(Y, \Xi)]$ et non $o[L^{2-m}(Y, \Xi)]$; donc $\varphi(Y)$ est égal à l'intégrale étendue à $\mathcal{S}'$, d'où résulte le théorème.

Ce théorème nous montre en particulier que les *solutions élémentaires* de l'équation (1) [selon le nom donné par M. Hadamard aux solutions *équivalentes* à $H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi)$ quand X tend vers Ξ] ne diffèrent les unes des autres que par des fonctions continues ainsi que leurs dérivées premières et secondes.

THÉORÈME 2. — *Supposons que, dans tout l'espace, les coefficients b_α et c de l'équation* (1), *ainsi que les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$, soient continus* (L); *de plus, à l'extérieur d'une certaine hypersphère, on a identiquement*

$$(3) \qquad a_{\alpha,\alpha} = 1, \qquad a_{\alpha,\beta} = 0\,(\beta \neq \alpha), \qquad b_\alpha = 0, \qquad c_\alpha = -g^2,$$

où g est une constante positive; enfin c est négatif dans tout l'espace. Dans ces conditions, l'équation (1) *admet une et une seule solution élémentaire* $G(X, \Xi)$ *existant dans tout l'espace pourvu que* X *et* Ξ *soient distincts et tendant, ainsi que ses dérivées par rapport aux* x_α, *vers zéro plus rapidement que toute puissance négative de* $L(X, \Xi)$ *quand cette distance augmente indéfiniment.*

Si les identités (3) avaient lieu dans tout l'espace, la proposition serait immédiatement vérifiée. En cherchant la solution élémentaire parmi les fonctions de $r = L(X, \Xi)$, on a pour cela l'équation

$$\frac{d^2 u}{dr^2} + \frac{m-1}{r}\frac{du}{dr} - g^2 u = 0,$$

qui est une équation de Bessel. Elle admet la solution (¹)

$$(4) \qquad F(r) = \frac{(2g)^{\frac{m-3}{2}}}{\Gamma(m-2)} e^{-gr} r^{\frac{1-m}{2}} \int_0^{+\infty} t^{\frac{m-3}{2}} \left(1+\frac{t}{2gr}\right)^{\frac{m-3}{2}} e^{-t}\, dt,$$

qui pour $r = 0$ équivaut à r^{2-m} et qui, pour r infini, admet le développement asymptotique indéfiniment dérivable terme à terme

$$\frac{\Gamma\left(\frac{m-1}{2}\right)}{\Gamma(m-2)} (2g)^{\frac{m-3}{2}} e^{-gr} r^{\frac{1-m}{2}} \left\{1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-2gr)^{-n}}{n!} \prod_{p=1}^{n} \left[\left(\frac{2p-1}{2}\right)^2 - \left(\frac{m-2}{2}\right)^2\right]\right\},$$

ce qui vérifie entièrement notre énoncé dans ce cas.

Nous allons considérer l'équation

$$(5) \qquad \mathcal{F}(u; h) = h\mathcal{F}(u) + (1-h)\left(\Sigma_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u\right) = 0 \qquad (0 \leqq h \leqq 1),$$

pour laquelle nous connaissons la solution annoncée quand $h = 0$. Connaissant cette solution pour $\mathcal{F}(u; h)$, où h a une valeur déterminée,

---

(¹) WHITTAKER et WATSON, *Modern Analysis*, 3ᵉ édition, Chap XVI et XVII. *Voir* PICARD, *Selecta*, p. 231 (reproduction d'un article des *Rendiconti di Palermo*, t. 37, 1914, p. 249-261), où dans le cas $m = 3$ [cas où $F(r) = r^{-1} e^{-gr}$] se trouve l'extension de la théorie classique du problème de Dirichlet au cas où les identités (3) ont lieu dans tout l'espace; la démonstration de M. Picard s'étend d'elle-même au cas où m est différent de *trois*.

nous allons chercher à en déduire celle de $\mathcal{F}(u; h+\Delta h)$ $(\Delta h > 0)$, de manière à arriver finalement à $h=1$.

Posons

$$a_{\alpha,\beta}(X; h) = \begin{cases} h\, a_{\alpha,\beta}(X) & (\beta \neq \alpha), \\ h\, a_{\alpha,\alpha}(X) + 1 - h & (\beta = \alpha); \end{cases}$$

soient $D(X; h)$ le déterminant des $a_{\alpha,\beta}(X; h)$ et $A_{\alpha,\beta}(X; h)$ le quotient par D du mineur de $a_{\alpha,\beta}$. Posons

$$H(X, \Xi; h) = \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}(\Xi; h)(x_\alpha - \xi_\alpha)(x_\beta - \xi_\beta), \tag{6}$$

$$\Psi(X, \Xi; h) = F[\sqrt{H(X, \Xi; h)}], \tag{7}$$

$$K(X, \Xi; h) = \mathcal{F}_X[\Psi(X, \Xi; h); h]. \tag{8}$$

Cette dernière fonction est nulle pour $h=0$; si $h \neq 0$ et qu'en outre X et Ξ soient dans la région des identités (3), K est encore nul. Il existe un nombre positif σ, indépendant de X, de Ξ et de h, tel que

$$\sqrt{H(X, \Xi; h)} > \sigma L(X, \Xi).$$

Par suite, si $L(X, \Xi)$ dépasse une longueur positive fixe, on a

$$0 < \Psi(X, \Xi; h) < k e^{-\sigma g L(X, \Xi)} L^{\frac{1-m}{2}}(X, \Xi),$$

k étant une constante. On peut aussi écrire, quels que soient X et Ξ,

$$0 < \Psi(X, \Xi; h) < e^{-\sigma g L(X, \Xi)} \left[k L^{\frac{1-m}{2}}(X, \Xi) + k' L^{2-m}(X, \Xi) \right],$$

k et k' étant des constantes.

Supposons maintenant que les dérivées cinquièmes des $a_{\alpha,\beta}$, quatrièmes des b_α, troisièmes de c existent et soient continues (L). Nous allons prouver que dans cette hypothèse, plus restreinte que celle de l'énoncé, non seulement la fonction $G(X, \Xi)$ existe, mais elle satisfait, relativement à Ξ, à l'équation adjointe (2).

Nous distinguerons par une étoile ce qui se rapporte à l'adjointe; ainsi

$$a^\star_{\alpha,\beta} = a_{\alpha,\beta}, \qquad b^\star_\alpha = -b_\alpha + 2\Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta},$$

et ainsi de suite.

Nous constatons que Ψ est identique à $\Psi^\star$ et peut être dérivé jusqu'à trois fois par rapport à $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$, et indéfiniment par rapport aux x_α. Il en résulte que K et K^* se comportent comme les fonctions G et H du théorème 8 de la section II, avec $p = 3$.

Les dérivées d'ordre quelconque de Ψ^* sont aussi $O[e^{-\nu L(X, \Xi)}]$ pour $L(X, \Xi)$ très grand, en posant $\nu = \sigma g$; nous supposerons $\sigma < 1$ de sorte que $\nu < g$. K et K^* et leurs dérivées de tout ordre ont donc la même sorte de limitation quand $L(X, \Xi)$ est grand.

Soit $R - \delta$ $(\delta > 0)$ le rayon d'une sphère de centre O telle que les identités (3) aient lieu dans tout son extérieur. Alors on peut écrire

$$K(X, \Xi; h) = \begin{cases} O[L^{1-m}(X, \Xi)] & \text{si} \quad L(O, X) < R \quad \text{et} \quad L(O, \Xi) < R, \\ O[\psi(X, \Xi)], & \text{avec} \quad \psi(X, \Xi) = e^{-\mu[L(O, X) + L(O, \Xi)]} \\ \text{si} \quad L(O, X) \geqq R & \text{ou} \quad L(O, \Xi) \geqq R \qquad (0 < \mu < \nu). \end{cases}$$

Cette dernière limitation se prouve en remarquant que K est nul si les deux points sont hors de l'hypersphère de centre O et de rayon R, et que si un seul, X par exemple, y est, on peut écrire

$$L(X, \Xi) \geqq L(O, X) - L(O, \Xi) > L(O, X) + L(O, \Xi) - 2R,$$
$$e^{-\nu L(X, \Xi)} < e^{2\nu R} \psi(X, \Xi),$$

K^* a les mêmes limitations. Les dérivées de tout ordre de K et de K^* ont les mêmes limitations si $L(O, X) \geqq R$ ou si $L(O, \Xi) \geqq R$, et l'on a vu comment elles se comportent dans la région restante.

Nous pouvons alors poser, en étendant les intégrales à tout l'espace,

$$K^{(1)} = K, \qquad K^{(n)}(X, \Xi; h) = \int^{(m)} K(X, A; h) D^{-\frac{1}{2}}(A; h) K^{(n-1)}(A, \Xi; h)\, dV_A,$$
$$K^{*(1)} = K^*, \qquad K^{*(n)}(X, \Xi; h) = \int^{(m)} K^*(X, A; h) D^{-\frac{1}{2}}(A; h) K^{*(n-1)}(A, \Xi; h)\, dV_A.$$

On constate que, si $L(O, X) < R$ et $L(O, \Xi) < R$,

$$K^{(n)}(X, \Xi; h) = \begin{cases} O[L^{n-m}(X, \Xi)] & (n < m), \\ O[\log(3R) - \log L(X, \Xi)] & (n = m), \\ O(1) & (n > m), \end{cases}$$

et les dérivées se comportent comme dans le théorème 8 de la section II, avec $p = 3$; on peut en dire autant de $K^{*(n)}$; dans la région restante, ces fonctions sont toutes $O[\psi(X, \Xi)]$. En effet, si l'on suppose les propriétés vraies pour $K^{(n-1)}$, on aura, si $L(O, X) > R$

et $L(O, \Xi) > R$,

$$K^{(m)}(X, \Xi; h) = O\left[\int^{(m)} \psi(X, A)\psi(A, \Xi)\, dV_A\right],$$

l'intégrale étant étendue seulement à la région $L(O, A) < R$; ou bien

$$K^{(m)}(X, \Xi; h) = O\left[\psi(X, \Xi)\int^{(m)} e^{-2\mu L(O, A)}\, dV_A\right];$$

on majorera le résultat en étendant l'intégrale à tout l'espace, cas où

$$\int^{(m)} e^{-2\mu L(O, A)}\, dV_A = 2\pi^{\frac{m}{2}}\left[\Gamma\left(\frac{m}{2}\right)\right]^{-1}\Gamma(m)(2\mu)^{-m}.$$

Si $L(O, X) > R$, $L(O, \Xi) < R$, on aura

$$\begin{aligned} K^{(m)}(X, \Xi; h) &= O\left[\int^{(m)} e^{-\nu L(X, A)} L^{n-m-1}(A, \Xi)\, dV_A\right] \\ &= O\left[e^{-\nu L(X, \Xi)}\int^{(m)} L^{n-m-1}(A, \Xi)\, dV_A\right], \end{aligned}$$

l'intégrale étant étendue à $L(O, A) < R$, car

$$e^{-\nu L(X, A)} \leqq e^{\nu L(A, \Xi) - \nu L(X, \Xi)} \leqq e^{2\nu R - \nu L(X, \Xi)};$$

or l'intégrale est moindre que le produit de R^{n-1} par une fonction de m, et l'on a déjà vu que l'autre facteur se limite à l'aide de $\psi(X, \Xi)$. Si $L(O, X) < R$, $L(O, \Xi) > R$, on écrit

$$K^{(m)}(X, \Xi; h) = \int^{(m)} K^{(n-1)}(X, A; h)\, D^{-\frac{1}{2}}(A; h) K(A, \Xi; h)\, dV_A,$$

et l'on a des calculs analogues. Enfin si $L(O, X) < R$ et $L(O, \Xi) < R$, l'intégrale étendue à $L(O, A) < R$ donne $O[L^{n-m}(X, \Xi)]$ (§ II, théor. 3), et l'intégrale étendue au reste de l'espace donne

$$O\left[\int^{(m)} \psi(X, A)\psi(A, \Xi)\, dV_A\right] = O[\psi(X, \Xi)].$$

La vérification est faite pour les $K^{(m)}$, et elle s'applique aussi aux $K^{\star(m)}$. Pour les dérivées de tout ordre (jusqu'à trois dérivations relatives aux x_α et trois dérivations relatives aux ξ_α), on peut recommencer les calculs des théorèmes 5 à 8 de la section II : on étend d'abord les intégrales à une hypersphère de rayon fini, et l'on fait croître indéfiniment le rayon; toutes les intégrales tendent uniformément vers des limites, et en particulier celles qui sont étendues au contour de l'hypersphère infiniment grande tendent vers zéro; on retrouve pour ces dérivées de tout ordre la limitation $O[\psi(X, \Xi)]$ valable si $L(O, X) > R$ ou $L(O, \Xi) > R$.

Nous poserons enfin

$$(9)\quad \Phi(X, \Xi; h) = \Psi(X, \Xi; h) + \sum_{n=1}^{p} \lambda^n \int^{(m)} \Psi(X, A; h) D^{-\frac{1}{2}}(A; h) K^{(n)}(A, \Xi; h)\, dV_A,$$

p étant un entier fixe quelconque au moins égal à $m+4$; λ a la valeur déjà dite [§ III, (2 *bis*)]; de même pour $\Phi^\star$. Ces fonctions peuvent être dérivées jusqu'à sept fois, dont quatre au plus par rapport aux x_α et trois au plus par rapport aux ξ_α, car toutes les intégrales introduites dans le calcul sont uniformément convergentes, et les limitations sont toujours du même type; par exemple, en intégrant dans tout l'espace,

$$\begin{aligned}\lambda \int^{(m)} \psi(A, \Xi) L^{2-m}(X, A) e^{-\nu L(X, A)} dV_A \\ < \lambda \psi(X, \Xi) \int^{(m)} e^{(\mu-\nu) L(X, A)} L^{2-m}(X, A)\, dV_A \\ = (m-2)^{-1} (\nu - \mu)^{-2} \psi(X, \Xi).\end{aligned}$$

Tous les calculs antérieurs s'appliquant, on voit que

$$(10)\qquad \mathcal{F}_X[\Phi(X, \Xi; h); h] = \lambda^p K^{(p+1)}(X, \Xi; h),$$

$$(10\ bis)\qquad \mathcal{G}_X[\Phi^\star(X, \Xi; h); h] = \lambda^p K^{\star(p+1)}(X, \Xi; h).$$

Les seconds membres sont continus dans tout l'espace ainsi que leurs dérivées jusqu'au quatrième ordre, pourvu qu'il y ait au plus trois dérivations par rapport aux coordonnées de chacun des deux points. Ces seconds membres et ces dérivées jusqu'au quatrième ordre sont, dans tout l'espace, $O[\psi(X, \Xi)]$.

Par rapport à h, toutes les fonctions introduites jusqu'ici peuvent être dérivées un nombre arbitraire de fois, toutes ces dérivées ayant des limitations de même sorte que les fonctions dont elles proviennent; les dérivations par rapport à h et aux autres variables peuvent se permuter d'une manière quelconque.

Supposons qu'il existe des solutions élémentaires, jouissant des propriétés annoncées, pour $\mathcal{F}(u;h)$ et pour son adjointe $\mathcal{G}(u;h)$ [bien que $c^\star(X;h)$ ne soit pas nécessairement négatif dans tout l'espace]; soient $G(X, \Xi; h)$ et $G^\star(\Xi, X; h)$ ces solutions. Je dis que

$$G^\star(X, \Xi; h) = G(\Xi, X; h). \tag{11}$$

Pour le voir, nous appliquons la formule de Green aux fonctions $u = G(A, X; h)$, $v = G^\star(A, \Xi; h)$, dans la région limitée extérieurement par une hypersphère $\mathcal{C}$ infiniment grande de centre O et intérieurement par des hypersphères $\mathcal{C}'$ et $\mathcal{C}''$ infiniment petites de centre X et Ξ; nous obtenons, en supprimant la mention de h,

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} \Sigma_\alpha \Big\{ & \Sigma_\beta G^\star(A, \Xi)\, a_{\alpha,\beta}(A) \frac{\partial G(A, X)}{\partial a_\beta} \\ & - \Sigma_\beta G(A, X) \frac{\partial [a_{\alpha,\beta}(A)\, G^\star(A, \Xi)]}{\partial a_\beta} \\ & + b_\alpha(A)\, G(A, X)\, G^\star(A, \Xi) \Big\} \varpi_\alpha(A)\, dS_A = \int_{\mathcal{C}'}^{(m-1)} + \int_{\mathcal{C}''}^{(m-1)},\end{aligned}$$

les fonctions intégrées étant les mêmes partout, et les trois hypersphères étant prises dans les sens associés aux sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de leurs intérieurs. A la limite le premier membre tend vers *zéro* et le second vers $\lambda^{-1}[G(\Xi, X) - G^\star(X, \Xi)]$, d'où résulte l'identité (11).

Remarquons maintenant que

$$\mathcal{F}_X[G(X, \Xi; h) - \Phi(X, \Xi; h); h] = -\lambda^p K^{(p+1)}(X, \Xi; h). \tag{12}$$

Or quand X est quelconque dans l'espace et h quelconque entre *zéro* et *un*, le second membre est $O[e^{-\mu L(0, \Xi)}]$. D'autre part nous chercherons G parmi les fonctions telles que $G - \Phi$ et ses dérivées jusqu'au second ordre par rapport aux x_α soient continues (théor. 1) et nulles à l'infini. Comme c est négatif, $G - \Phi$ ne peut avoir (¹) ni maximum supérieur au maximum de

$$-\lambda^p c^{-1}(X)\, K^{(p+1)}(X, \Xi; h),$$

(¹) On s'appuie ici sur la proposition suivante : si $\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta$ et $\Sigma_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta$ sont deux formes quadratiques, la première définie positive, la seconde décomposable en carrés tous positifs, $\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, b_{\alpha,\beta}$ est positif (on suppose $a_{\alpha,\beta} = a_{\beta,\alpha}$, $b_{\alpha,\beta} = b_{\beta,\alpha}$). En effet soit $\Sigma_{\alpha,\beta}\, a'_{\alpha,\beta}\, x_\alpha x_\beta$ la forme qui a pour adjointe la première forme donnée. Notre expression n'est autre que le coefficient de s dans le discriminant ni minimum inférieur au minimum de cette dernière fonction. Toutes ces fonctions étant nulles à l'infini, $|G-\Phi|$ reste inférieur au maximum de $|\lambda^p c^{-1} K^{(p+1)}|$ quand Ξ reste fixe, c'est-à-dire à $O[e^{-\mu L(0,\Xi)}]$.

Appliquons maintenant la formule de Green à

$$G(A, \Xi; h) - \Phi(A, \Xi; h)$$

et à $\Phi^\star(A, X; h)$; après un passage à la limite, nous obtenons, en supprimant encore h,

$$(13) \quad G(X, \Xi) - \Phi(X, \Xi) = -\lambda^{p+1} \int^{(m)} \{ [G(A, \Xi) - \Phi(A, \Xi)] K^{\star(p+1)}(A, X) - K^{(p+1)}(A, \Xi) \Phi^\star(A, X) \} \, dV_A.$$

On voit que le premier terme de notre intégrale est limité par

$$e^{-\mu L(0,\Xi)} \int^{(m)} \psi(A, X) \, dV_A = \Gamma(m) \mu^{-m} \psi(X, \Xi);$$

on a une limitation semblable pour le second terme et l'on en conclut

$$(14) \qquad G(X, \Xi) - \Phi(X, \Xi) = O[\psi(X, \Xi)].$$

En outre on peut dériver (13) jusqu'à trois fois par rapport aux x_α, et l'on trouve ainsi que les dérivées de $G-\Phi$ par rapport aux x_α, jusqu'au troisième ordre, sont toutes $O[\psi(X, \Xi)]$. Pour $G-\Phi$ et pour ces dérivées, les constantes impliquées dans les symboles O sont indépendantes de $h (0 \leqq h \leqq 1)$.

Pour une certaine valeur de h, regardons $G(X, \Xi; h)$ comme connu et posons

$$G(X, \Xi; h + \Delta h) = G(X, \Xi; h) - \Phi(X, \Xi; h) + \Phi(X, \Xi; h + \Delta h) - u(X, \Xi),$$

u étant une fonction qui doit satisfaire à l'équation

$$\mathcal{F}_X[u(X, \Xi); h + \Delta h] = \mathcal{F}_X[G(X, \Xi; h) - \Phi(X, \Xi; h) + \Phi(X, \Xi; h + \Delta h); h + \Delta h]$$

---

de $\Sigma_{\alpha,\beta}(a'_{\alpha,\beta} + s b_{\alpha,\beta}) x_\alpha x_\beta$. Un changement linéaire de variables nous ramène au cas où tous les $b_{\alpha,\beta}$ sont nuls, sauf certains des $b_{\alpha,\alpha}$ qui sont positifs, et dans ce cas la proposition est évidente.

On en déduit que l'ensemble des termes contenant les dérivées premières et secondes de $F(u)$ est négatif ou nul pour un maximum de u, positif ou nul pour un minimum.

dont nous désignerons le second membre par $\Omega((X, \Xi)$; u doit être continu dans tout l'espace, ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre, et s'annuler à l'infini plus rapidement que toute puissance négative de $L(X, \Xi)$. Or on a

$$\begin{aligned}\Omega(X, \Xi) = \lambda^p[K^{(p+1)}(X, \Xi; h+\Delta h) - K^{(p+1)}(X, \Xi; h)] \\ + \Delta h \{ \mathcal{F}_X[G(X, \Xi; h) - \Phi(X, \Xi; h); 1] \\ - \mathcal{F}_X[G(X, \Xi; h) - \Phi(X, \Xi; h); 0] \}.\end{aligned}$$

On voit que

$$|\Omega(X, \Xi)| < k \Delta h \psi(X, \Xi),$$

k étant indépendant de X, de Ξ, de h et de Δh $(0 \leq h < h + \Delta h \leq 1)$; les dérivées de Ω par rapport aux x_α ont une limitation pareille. Pour calculer u nous poserons

$$\begin{aligned}u(X, \Xi) = -\lambda \int^{(m)} \rho(A, \Xi)[G(X, A; h) - \Phi(X, A; h) \\ + \Phi(X, A; h+\Delta h)] D^{-\frac{1}{2}}(A; h)\, dV_A,\end{aligned}$$

ρ devant lui-même satisfaire à l'équation

$$\rho(X, \Xi) - \lambda \int^{(m)} \rho(A, \Xi)\Omega(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A; h)\, dV_A = \Omega(X, \Xi).$$

Soient

$$\Omega^{(1)} = \Omega, \qquad \Omega^{(n)}(X, \Xi) = \int^{(m)} \Omega(X, A) D^{-\frac{1}{2}}(A; h)\, \Omega^{(n-1)}(A, \Xi)\, dV_A;$$

si Δh est assez petit, on aura

$$\rho(X, \Xi) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} \Omega^{(n)}(X, \Xi);$$

il suffit pour cela que le second membre soit convergent et ait des dérivées continues par rapport aux x_α. Or si $D^{-\frac{1}{2}} < k'$, k' étant une constante,

$$|\lambda \Omega^{(2)}(X, \Xi)| < \lambda k' k^2 (\Delta h)^2 \psi(X, \Xi) \int^{(m)} e^{-2\mu L(0, A)} dV_A,$$

d'où

$$|\lambda \Omega^{(2)}(X, \Xi)| < (m-2)^{-1}(2\mu)^{-m}\Gamma(m) k' k^2 (\Delta h)^2 \psi(X, \Xi),$$
$$|\lambda^{n-1} \Omega^{(n)}(X, \Xi)| < [(m-2)^{-1}(2\mu)^{-m}\Gamma(m) k']^{n-1} k^n (\Delta h)^n \psi(X, \Xi);$$

il y a donc convergence si

$$\Delta h < (m-2)(2\mu)^m k'^{-1} k^{-1}[\Gamma(m)]^{-1}, \tag{15}$$

et alors la série des dérivées converge elle-même uniformément puisqu'on peut dériver sous le signe $\int$ la relation qui donne $\Omega^{(n)}$.

Mais $\Phi^\star(X, \Xi; h) - \Phi(\Xi, X; h) = O[\psi(X, \Xi)]$, comme on le voit en reprenant le lemme de la section IV. Donc aussi

$$G(\Xi, X; h) - \Phi^\star(X, \Xi; h) = O[\psi(X, \Xi)].$$

On peut alors récrire (13) en échangeant les rôles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$. On en déduit que les dérivées jusqu'au troisième ordre de

$$G(\Xi, X; h) - \Phi^\star(X, \Xi; h),$$

par rapport aux x_α sont aussi $O[\psi(X, \Xi)]$, la constance impliquée dans O étant indépendante de h. Les calculs ultérieurs peuvent être repris en substituant $\mathcal{G}$ à $\mathcal{F}$ (quoique $c^\star$ puisse ne pas être partout négatif); la conclusion est que, moyennant une condition analogue à (15), $G^\star(X, \Xi; h+\Delta h)$ existe aussi, et est par suite égal à

$$G(\Xi, X; h+\Delta h).$$

Comme la limite supérieure trouvée pour Δh est indépendante de h, un nombre fini d'opérations suffit pour arriver à $h = 1$. Le théorème est donc vérifié, avec des hypothèses plus étroites que celles de l'énoncé, et nous savons en outre que, dans ces hypothèses plus étroites, $G(X, \Xi)$ satisfait, relativement à Ξ, à l'équation adjointe.

Il s'agit maintenant de revenir aux hypothèses de l'énoncé lui-même. Pour cela nous allons former des fonctions tendant uniformément vers les coefficients de $\mathcal{F}$, de la façon suivante. Soit $f(X)$ une fonction qui soit constante pour $L(O, X) \geqq R - \delta$; supposons que $f(X)$ ait des dérivées de certains ordres continues (L); soit p un entier supérieur au plus grand des ordres de ces dérivées. Considérons la fonction égale à $[f(X) - f(\infty)][R^2 - L^2(O, X)]^{-p}$ pour $L(O, X) < R$ et à zéro pour $L(O, X) \geqq R$. Cette fonction admet, dans tout l'espace, autant de dérivées continues ou continues (L) que $f(X)$; nous pouvons la représenter dans le domaine $|x_\alpha| < R$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, m)$ par la limite d'une suite conformément convergente de polynomes, dont les suites des dérivées de la sorte considérée soient aussi uniformément convergentes; les polynomes correspondant à une dérivée continue (L) satisferont tous à une même condition de Lipschitz généralisée, c'est-à-dire que l'exposant et le coefficient seront les mêmes pour tous ces polynomes ([1]). Considérons alors la fonction égale à $f(\infty)$ pour $L(O, X) \geqq R$, et, pour $L(O, X < R)$, au produit d'un de ces polynomes par $[R^2 - L^2(O, X)]^p$, augmenté de $f(\infty)$; quand on avance dans la suite de polynomes, cette fonction tend uniformément vers $f(X)$, et ses dérivées des sortes considérées convergent uniformément et satisfont à une même condition de Lipschitz généralisée. Nous appliquerons ce procédé à tous les coefficients de $\mathcal{F}$ avec $p \geqq 6$; dès que l'approximation sera suffisante, nous aurons une équation $\mathcal{F}'(u) = 0$ du type elliptique, à laquelle s'appliquent tous les raisonnements qui viennent d'être faits.

Nous distinguerons par un accent tout ce qui se rapporte à $\mathcal{F}'$. Le raisonnement qui a été fait à la suite de la relation (12) prouve que

$$G'(X, \Xi) - \Phi'(X, \Xi) = O[e^{-\mu L(O, \Xi)}],$$

μ et la constante impliquée dans O étant indépendants de l'approximation réalisée pourvu que celle-ci soit assez étroite, car ils ne dépendent que de limites supérieures des valeurs absolues des $a'_{\alpha,\beta}$, b'_{β}, c' et des dérivées des $a'_{\alpha,\beta}$ et d'une limite inférieure positive des valeurs de s qui annulent le discriminant de

$$\Sigma_{\alpha,\beta} A'_{\alpha,\beta} p_\alpha p_\beta - s \Sigma_\alpha p_\alpha^2.$$

Pour aller plus loin, considérons l'équation

$$\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u = 0; \tag{17}$$

montrons que si l'on impose à une solution élémentaire $F_1(X, \Xi)$ de

---

([1]) Pour le voir aisément, on peut considérer la série de Fourier d'une fonction $f(x)$ périodique et continue (L), et en prendre les sommes introduites par Fejér dans cette théorie : toutes ces sommes sont continues (L) avec le même coefficient et le même exposant que $f(x)$. On passe aisément de là au cas de l'approximation par des polynomes d'une fonction de plusieurs variables dont certaines dérivées, d'ordre quelconque, sont continues (L).

cette équation d'exister quand les deux points sont extérieurs à une hypersphère de centre O et de rayon $R+\delta$, de s'annuler si X est sur cette hypersphère, et de s'annuler, ainsi que ses dérivées, plus rapidement que toute puissance de $L(X, \Xi)$ quand X s'éloigne indéfiniment, $F_1(X, \Xi)$ existe. Soit $\mathcal{C}$ le contour de l'hypersphère, pris dans le sens associé au sens $(a_1, \ldots, a_m)$ de son intérieur, et soient $r = L(X, \Xi)$, $\rho = L(A, \Xi)$; posons

$$F_1(X, \Xi) = F(r) - \lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} \sigma(A, \Xi) F'(\rho) \frac{d\rho}{dn} dS_A,$$

$F(r)$ étant la fonction (4), $F'(r)$ étant sa dérivée, $\frac{d\rho}{dn}$ étant la dérivée de ρ suivant la normale extérieure en A, et σ étant une fonction inconnue qui se calcule par l'équation de Fredholm

$$\sigma(X, \Xi) + \lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} \sigma(A, \Xi) F'(\rho) \frac{d\rho}{dn} dS_A = F(r),$$

où X est sur $\mathcal{C}$. Or nous ne sommes pas dans le cas d'un pôle de la résolvante car si nous y étions, l'équation

$$\sigma_1(X) + \lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} \sigma_1(A) F'(\rho) \sum_\alpha \frac{\partial \rho}{\partial x_\alpha} \varpi_\alpha(X) dS_A = 0$$

aurait une solution non nulle; l'intégrale

$$u(X) = -\lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} \sigma_1(A) F(\rho) dS_A \tag{17}$$

représenterait à l'intérieur de $\mathcal{C}$ une solution de (16) telle que, sur $\mathcal{C}$,

$$\sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \varpi_\alpha(X) = 0;$$

cette intégrale serait donc nulle à l'intérieur de $\mathcal{C}$, car

$$u\left(\sum_\alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha^2} - g^2 u\right) = \sum_\alpha \frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(u \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right) - \sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 - g^2 u^2;$$

ce qui montre que l'intégrale de $\sum_\alpha \left(\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\right)^2 + g^2 u^2$ étendue à l'intérieur de $\mathcal{C}$ serait nulle, et par suite que u y serait nul. Cette même intégrale (17) représenterait donc à l'extérieur de $\mathcal{C}$ une solution de (16) nulle sur $\mathcal{C}$ et nulle à l'infini, donc identiquement nulle puisqu'elle ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif; la discontinuité sur $\mathcal{C}$ de $\sum_\alpha \frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \varpi_\alpha(X)$ serait donc nulle, ce qui prouve que σ_1 serait nul. Cette contradiction prouve que $F_1(X, \Xi)$ existe. Rien, on le voit, ne suppose que $\mathcal{C}$ soit une hypersphère, et l'on pourrait raisonner de même pour un domaine borné à frontière simple ou multiple; ce mode de raisonnement est emprunté à M. Picard [1].

Appliquons donc la formule de Green à $G'(A, \Xi) - \Phi'(A, \Xi)$ et à $F_1(A, X)$ dans la région extérieure à $\mathcal{C}$; nous obtenons

$$
\begin{aligned}
G'(X, \Xi) - \Phi'(X, \Xi) = & -\lambda^{p+1} \int^{(m)} K'^{(p+1)}(A, \Xi)\, F_1(A, X)\, dV_A \\
& + \lambda \int_{\mathcal{C}}^{(m-1)} [G'(A, \Xi) - \Phi'(A, \Xi)] \frac{dF_1}{dn} dS_A.
\end{aligned}
$$

Or

$$
F_1(X, \Xi) - F(r) = O\{e^{-g[L(O, X) + L(O, \Xi)]}\},
$$

car on voit immédiatemant que $\sigma(X, \Xi) = O[e^{-g L(O, \Xi)}]$. Les dérivées de tout ordre de $F_1 - F$, soit par rapport aux x_α, soit par rapport aux ξ_α, ont une limitation de même sorte que $F_1 - F$; d'ailleurs la formule de Green montre que F_1 est symétrique par rapport aux deux points. Comme $g > \mu$, on en déduit d'abord que $G' - \Phi'$ admet la limitation (14), la constante impliquée dans O ne dépendant que des limitations des $a'_{\alpha,\beta}$, b'_α, c', des dérivées des $a'_{\alpha,\beta}$ et d'une limite inférieure positive des racines de l'équation en s déjà mentionnée. Les dérivées par rapport aux x_α admettent la même limitation dans les mêmes conditions. Enfin (§II, théor. 5) on a la même limitation pour les dérivées secondes par rapport aux x_α, mais la constante impliquée dans O dépend en outre des coefficients de continuité (L) des b'_α, de c' et des dérivées des $a'_{\alpha,\beta}$, coefficients qui peuvent être pris constants dès que l'approximation est assez grande.

Tout cela s'applique dès que $L(O, X) \geqq R + \delta$, quel que soit Ξ : pour éviter d'examiner comment se comporte F_1 quand Ξ vient sur $\mathcal{C}$, on peut faire le calcul pour deux valeurs différentes de δ. Pour voir ce qui

---

(1) Picard, *Selecta*, p. 231.

arrive si $L(O, X) < R + \delta$, il suffit de remarquer que la limitation $G' - \Phi' = O[e^{-\mu L(O, \Xi)}]$ est encore valable. Dès lors on pourra trouver un nombre fini d'hypersphères de rayon assez petit pour qu'à chacune d'elles s'appliquent les équations (11) et (12) de la section III, et telles que tout point intérieur à $\mathcal{C}$ soit intérieur à au moins une d'elles. Nous obtenons ainsi pour les dérivées de $G' - \Phi'$ jusqu'au second ordre par rapport aux x_α, des limitations $O[e^{-\mu L(O, \Xi)}]$, ce qui revient à $O[\psi(X, \Xi)]$, puisque $e^{-\mu L(O, \Xi)} < \psi(X, \Xi)\, e^{\mu(R+\delta)}$; la constante impliquée dans O ne dépend toujours que des mêmes grandeurs.

Pour calculer $G(X, \Xi)$, nous poserons alors

$$G(X, \Xi) = G'(X, \Xi) - \Phi'(X, \Xi) + \Phi(X, \Xi) - u(X, \Xi),$$

$$u(X, \Xi) = -\lambda \int^{(m)} \rho(A, \Xi)[G'(X, A) - \Phi'(X, A) + \Phi(X, A)] D^{-\frac{1}{2}}(A)\, dV_A$$

de sorte qu'en posant

$$\Omega(X, \Xi) = \mathcal{F}_X[G'(X, \Xi) - \Phi'(X, \Xi) + \Phi(X, \Xi)],$$

on devra avoir

$$\rho(X, \Xi) - \lambda \int^{(m)} \rho(A, \Xi)\, \Omega(X, A)\, D^{-\frac{1}{2}}(A)\, dV_A = \Omega(X, \Xi).$$

Or d'après ce qui précède, $\Omega(X, \Xi) = O[\eta \psi(X, \Xi)]$, où η désigne une limite supérieure des $|a_{\alpha,\beta} - a'_{\alpha,\beta}|$, $|b_\alpha - b'_\alpha|$, $|c - c'|$, $\left|\frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\gamma} - \frac{\partial a'_{\alpha,\beta}}{\partial x_\gamma}\right|$, pourvu que l'entier arbitraire p qui figure dans la définition de Φ et de Φ' soit pris au moins égal à $(m+4)h^{-1}$, où h représente l'exposant de continuité (L) des b_α, de c et des dérivées des $a_{\alpha,\beta}$. Donc, dès que η est assez petit, u existe. D'ailleurs $K^{(p+1)}(X, A)$ ayant, par rapport aux x_α, des dérivées continues, on peut en dire autant de $\Omega(X, A)$, et par suite de ρ. Donc u admet des dérivées secondes continues et satisfait à l'équation $\mathcal{F}(u) = \Omega$. La fonction G satisfait à toutes les conditions du théorème.

Cette fonction G est d'ailleurs unique, car s'il y en avait une autre G_1, la différence partout continue $G - G_1$, qui s'annule à l'infini et qui ne peut avoir ni maximum ni minimum, serait identiquement nulle.

En prenant p assez grand, on constate que $G' - \Phi'$ a toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre qu'on veut, par rapport aux coordonnées des deux points indifféremment, continues et valant $O[\psi(X, \Xi)]$. On en déduit que $G(X, \Xi)$ peut être dérivé jusqu'à deux fois par rapport aux x_α et une fois par rapport aux ξ_α, dans un ordre quelconque, toutes ces dérivées étant continues pour $X \neq \Xi$. Quand $L(X, \Xi)$ augmente indéfiniment, toutes ces dérivées sont $O[e^{-\mu L(X,\Xi)}]$. Quand X tend vers Ξ, ces dérivées se comportent comme celles de Φ.

Plus généralement, si les dérivées d'ordre $q+1$ des $a_{\alpha,\beta}$, d'ordre q des b_α et de c sont continues (L), G peut être dérivé $q+2$ fois par rapport aux x_α et $q+1$ fois par rapport aux ξ_α, dans un ordre indifférent, toutes ces dérivées étant continues pour $X \neq \Xi$; quand $L(X, \Xi)$ augmente indéfiniment, ces dérivées sont $O[e^{-\mu L(X,\Xi)}]$, et quand X tend vers Ξ, elles se comportent comme celles de Φ. Pour le voir, il suffit de remarquer que Φ possède toutes ces dérivées, et de reprendre alors le calcul de G.

Corollaire. — *Si les $a_{\alpha,\beta}$ ont des dérivées secondes continues* (L) *et les b_α des dérivées continues* (L), *c étant toujours continu* (L), *la fonction* $G(X, \Xi)$ *satisfait, relativement à Ξ, à l'équation adjointe.*

En effet on peut alors reprendre les calculs précédents, en remplaçant $\mathcal{F}$ et $\mathcal{F}'$ par leurs adjointes. La solution élémentaire de l'adjointe existe donc; elle ne peut alors, d'après ce qui a été démontré, différer de $G(X, \Xi)$, Ξ étant la variable.

Théorème 3. — *Supposons que les coefficients de l'équation* (1) *soient définis dans un domaine ouvert $\mathcal{D}$ borné, limité par un ou plusieurs contours dont la réunion prise dans le sens associé au sens* $(x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *de $\mathcal{D}$ sera nommée $\mathcal{S}$. On suppose que les coordonnées des points de $\mathcal{S}$ sont exprimables à l'aide de $m-1$ paramètres par des fonctions dont les dérivées secondes sont continues* (L) *et dont les m déterminants fonctionnels ne s'annulent pas ensemble, chaque point de $\mathcal{S}$ étant intérieur à une partie de $\mathcal{S}$ ainsi représentable et le nombre total des systèmes de paramètres nécessaires étant fini. On suppose que, dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, l'équation est de type elliptique et que c, les dérivées des b_α et les dérivées secondes des $a_{\alpha,\beta}$ sont continus* (L); *de plus, sur $\mathcal{S}$, les $a_{\alpha,\beta}$ admettent, par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$, des dérivées quatrièmes continues* (L), *et les b_α, des dérivées secondes continues* (L).

Supposons que l'équation (1) *n'ait pas d'autre solution continue dans* $\mathcal{D}+\mathcal{S}$, *ayant des dérivées secondes continues en tout point de* $\mathcal{D}$, *et nulle sur* $\mathcal{S}$, *que* $u=0$. *Alors quelles que soient les valeurs continues données sur* $\mathcal{S}$, *le problème de Dirichlet généralisé pour les équations* (1) *et* (2) *admet une solution et une seule.*

Commençons par mettre la formule de Green sous une forme qui va nous être utile. Faisons choix de m fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ de X, continues ainsi que leurs dérivées. Posons

$$\Theta_\alpha[u(\mathrm{X})] = \Sigma_\alpha a_{\alpha.\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} - \theta_\alpha u, \tag{18}$$

$$\mathrm{Z}_\alpha[v(\mathrm{X})] = \Sigma_\beta \frac{\partial(a_{\alpha.\beta}v)}{\partial x_\beta} - (\theta_\alpha + b_\alpha)v \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots, m), \tag{19}$$

et, si X est sur une surface dont la normale, dans le sens choisi, a pour cosinus directeurs $\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$,

$$\Theta[u(\mathrm{X})] = \Sigma_\alpha \varpi_\alpha(\mathrm{X})\,\Theta_\alpha[u(\mathrm{X})], \tag{20}$$

$$\mathrm{Z}[v(\mathrm{X})] = \Sigma_\alpha \varpi_\alpha(\mathrm{X})\,\mathrm{Z}_\alpha[v(\mathrm{X})]. \tag{21}$$

Nous conviendrons encore que, si on les applique à une fonction de deux points telle que $\mathrm{G}(\mathrm{X}, \Xi)$, les opérations $\mathcal{F}$, Θ_α, Θ se rapportent au premier point et les opérations $\mathcal{G}$, Z_α, Z au second point.

La formule de Green s'écrit alors

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} [v\,\mathcal{F}(u) - u\,\mathcal{G}(v)]\,d\mathrm{V} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} [v\,\Theta(u) - u\,\mathrm{Z}(v)]\,d\mathrm{S}, \tag{22}$$

$\varpi_1, \varpi_2, \ldots, \varpi_m$ étant les cosinus directeurs de la normale extérieure.

On a aussi

$$\int_{\mathcal{D}}^{(m)} u\,\mathcal{F}(u)\,d\mathrm{V} = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} u\,\Theta(u)\,d\mathrm{S} - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} \mathrm{P}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) d\mathrm{V}, \tag{23}$$

en posant

$$\begin{aligned}\mathrm{P}\left(u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u}{\partial x_m}\right) &= \Sigma_{\alpha.\beta}\, a_{\alpha.\beta}\frac{\partial u}{\partial x_\alpha}\frac{\partial u}{\partial x_\beta} \\ &\quad + \Sigma_\alpha\left(\Sigma_\gamma \frac{\partial a_{\alpha.\gamma}}{\partial x_\gamma} - 2\,\theta_\alpha - b_\alpha\right) u\,\frac{\partial u}{\partial x_\alpha} \\ &\quad - \left(c + \Sigma_\gamma \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) u^2,\end{aligned} \tag{24}$$

et

$$(25)\quad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} v\mathcal{G}(v)\,dV = \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} v\,Z(v)\,dS - \int_{\mathcal{D}}^{(m)} P\left(v, \frac{\partial v}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v}{\partial x_m}\right) dV,$$

avec la même fonction P.

P est une forme quadratique en $u, \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_m}$, et l'on voit que m des carrés dans lesquels elle peut se décomposer ont le signe commun des $a_{\alpha,\alpha}$ que nous supposerons positifs. Pour que cette forme soit définie, nécessairement positive, il faut et il suffit que son discriminant soit positif, ce qui donne

$$(26)\quad 4\left(c + \Sigma_\gamma \frac{\partial \theta_\gamma}{\partial x_\gamma}\right) + \Sigma_{\alpha,\beta} A_{\alpha,\beta}\left(2\theta_\alpha + b_\alpha - \Sigma_\gamma \frac{\partial a_{\alpha,\gamma}}{\partial x_\gamma}\right)\left(2\theta_\beta + b_\beta - \Sigma_\gamma \frac{\partial a_{\beta,\gamma}}{\partial x_\gamma}\right) < 0,$$

le premier membre étant le produit du discriminant de P par $-4D^{-1}$.

Nous n'avons pas voulu introduire de notations nouvelles, mais les relations (22) à (25) sont vraies pourvu que u, v et leurs dérivées, les θ_α et leurs dérivées, les coefficients de $\mathcal{F}$ et celles de leurs dérivées qui figurent dans $\mathcal{G}$, soient continus dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$, et que les dérivées secondes de u et de v soient continues en tout point de $\mathcal{D}$. Si les $a_{\alpha,\beta}$ sont les coefficients d'une forme définie positive, la condition (26) entraîne que P est une forme définie positive.

Revenons aux hypothèses de l'énoncé. Nous allons prolonger les coefficients de $\mathcal{F}$ hors de $\mathcal{D}$. Pour cela nous reprendrons les fonctions c_α de la section III, proportionnelles sur $\mathcal{S}$ à des polynomes en $x_1, \dots, x_m$, telles que $\Sigma_\alpha c_\alpha^2 = 1$ et que $\Sigma_\alpha \varpi_\alpha c_\alpha$ ne soit jamais nul; nous définirons un changement de variables par les relations

$$x_\alpha = \varphi_\alpha(s_1, \dots, s_{m-1}) + s_m c_\alpha(s_1, \dots, s_{m-1}),$$

où $x_\alpha = \varphi_\alpha$ est une représentation paramétrique de $\mathcal{S}$. Si $|s_m|$ est assez petit, il y a correspondance biunivoque entre $(x_1, x_2, \dots, x_m)$ et $(s_1, s_2, \dots, s_m)$. Supposons que cela ait lieu pour

$$-s'_m < s_m < s'_m$$

dans toute l'étendue de $\mathcal{S}$.

Soit $\varphi(x_1, \ldots, x_m)$ une fonction définie dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et ayant, sur $\mathcal{S}$, toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre $2p$ continues (L). Il s'agit de la prolonger hors de $\mathcal{D}$, en respectant la continuité (L) des dérivées jusqu'à l'ordre p, et de façon qu'en dehors de $\mathcal{D}$ et de la région $0 \leqq s_m < s'_m$ (en supposant $s_m > 0$ hors de $\mathcal{D}$), cette fonction se réduise à une constante donnée $\varphi(\infty)$. Nous remarquons que

$$\frac{\partial \varphi}{\partial s_m} = \Sigma_\alpha c_\alpha \frac{\partial \varphi}{\partial x_\alpha};$$

si donc les dérivées jusqu'à l'ordre $2p$ des fonctions φ_α sont continues (L), toutes les dérivées de $\frac{\partial \varphi}{\partial s_m}$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, jusqu'à l'ordre p, sont continues (L). Mais, puisque c_α ne dépend pas de s_m, on a, si $p \geqq 2$,

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_m^2} = \Sigma_{\alpha,\beta} c_\alpha c_\beta \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta};$$

donc les dérivées jusqu'à l'ordre p de $\frac{\partial^2 \varphi}{\partial s_m^2}$ par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ sont continues (L). Et ainsi de suite jusqu'à $\frac{\partial^p \varphi}{\partial s_m^p}$, dont toutes les dérivées jusqu'à l'ordre p par rapport à $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ sont aussi continues (L). Nous prendrons alors pour φ, dans la région $0 < s_m < s'_m$, un polynome en s_m dont les coefficients seront fonctions de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$. Ce polynome sera tel que, pour $s_m = 0$, ses dérivées jusqu'à l'ordre p par rapport à s_m coïncident avec celles de φ; pour $s_m = s'_m$, ce polynome devra prendre la valeur $\varphi(\infty)$ et toutes ses dérivées jusqu'à l'ordre p s'annuleront. Il y a un polynome de degré $2p+1$ et un seul répondant à ces conditions, et il est évident que sa valeur en un point X donné ne dépend pas des paramètres $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$ choisis. Toutes les dérivées d'ordre au plus égal à p de la fonction obtenue sont continues (L), comme nous le voulions.

Ici nous appliquons cela aux $a_{\alpha,\alpha}$ en prenant $p = 2$. Pour $s_m = s'_m$, les $a_{\alpha,\alpha}$ devront se réduire à *un*, les autres $a_{\alpha,\beta}$ à *zéro*. Si pour $0 < s_m < s'_m$ les polynomes du cinquième degré en s_m auxquels nous aboutissons sont partout les coefficients d'une forme quadratique définie, nécessairement positive, nous garderons définitivement ces expressions pour les $a_{\alpha,\beta}$. Sinon nous ajouterons à tous les $a_{\alpha,\alpha}$ la fonction $ts_m^3(s'_m - s_m)^3$ où t est une constante : cela n'altère pas la continuité (L) des dérivées secondes. Le discriminant des nouveaux coefficients $a_{\alpha,\beta}$ admet des racines t toutes réelles : nous donnerons à t une valeur égale au maximum de la plus grande racine augmenté de *un*; alors les $a_{\alpha,\beta}$ sont les coefficients d'une forme quadratique définie positive.

Le prolongement des b_α se fera en prenant $p = 1$, la valeur constante sur $s_m = s'_m$ étant nulle. Dans la région $0 < s_m < s'_m$, les b_α seront donc, par rapport à s_m, des polynomes du troisième degré.

Ensuite nous choisissons des fonctions θ_α définies hors de $\mathcal{D}$ et continues ainsi que leurs dérivées, même sur $\mathcal{S}$. Sur $\mathcal{S}$, on devra avoir

$$2\theta_\alpha = - b_\alpha + \Sigma_\gamma \frac{\partial a_{\alpha,\gamma}}{\partial x_\gamma}.$$

Sur $\mathcal{S}$, $\Sigma_\gamma \dfrac{\partial \theta_\gamma}{\partial x_\gamma}$ se réduira donc à une fonction connue augmentée de $\Sigma_\gamma \dfrac{\partial \theta_\gamma}{\partial s_m} \dfrac{\partial s_m}{\partial x_\gamma}$. Si, en prenant les $\dfrac{\partial \theta_\gamma}{\partial s_m}$ nuls sur $\mathcal{S}$, l'expression (26) est négative sur $\mathcal{S}$, nous les prendrons nuls. Dans le cas contraire, nous prendrons sur $\mathcal{S}$

$$\frac{\partial \theta_\gamma}{\partial s_m} = - t \frac{\partial s_m}{\partial x_\gamma};$$

la constante t s'obtiendra en ajoutant *un* à la plus petite valeur telle que l'expression (26) ne soit nulle part positive sur $\mathcal{S}$. Les valeurs des θ_γ et de leurs dérivées par rapport à s_m étant ainsi fixées sur $\mathcal{S}$, nous prenons dans la région $0 < s_m < s'_m$ les θ_γ identiques à des polynomes du troisième degré en s_m, à coefficients dépendant de $s_1, s_2, \ldots, s_{m-1}$, de manière à les annuler ainsi que leurs dérivées pour $s_m = s'_m$; au delà, les θ_γ seront tous nuls.

Il nous reste à prolonger c en respectant sa continuité (L). Pour cela nous employons la méthode générale en faisant $p = 0$, la valeur constante sur $s_m = s'_m$ étant désignée par $-g^2$. Si en prenant $g = 1$, le premier membre de (26) est négatif dans tout l'extérieur de $\mathcal{D}$, nous prenons $g = 1$. Sinon nous obtenons g en ajoutant *un* à la plus petite valeur positive telle que le premier membre de (26) ne soit nulle part positif.

De la sorte tous les coefficients de $\mathcal{F}$ sont prolongés de manière à satisfaire aux conditions du théorème 2 et de son corollaire, sauf peut-être à la condition $c < 0$. De plus, nous avons des fonctions θ_α continues hors de $\mathcal{D}$ ainsi que leurs dérivées, et telles que la condition (26) ait lieu hors de $\mathcal{D}$; ces fonctions sont nulles à l'extérieur d'une certaine hypersphère.

Nous introdnisons maintenant une fonction $\chi(X)$, continue (L) dans tout l'espace, et nulle hors de $\mathcal{D}$ et de la région $0 \leq s_m < s'_m$. Si c et le coefficient correspondant $c^\star$ de l'adjointe sont partout négatifs, $\chi(X)$ sera nul partout. Sinon $\chi(X)$ sera constant dans $\mathcal{D}$ et fonction linéaire de s_m dans la région $0 < s_m < s'_m$, la valeur constante dans $\mathcal{D}$ s'obtenant en ajoutant *un* à la plus petite valeur telle que ni $c - \chi$ ni $c^\star - \chi$ ne soient nulle part positifs (ni dans $\mathcal{D}$ ni hors de $\mathcal{D}$); sur $s_m = s'_m$ et au delà, on prend $\chi = 0$.

χ étant ainsi déterminé, le théorème 2 nous enseigne que l'équation

$$\mathcal{F}(u) - \chi u = 0 \tag{27}$$

possède une solution élémentaire $G(X, \Xi)$ s'annulant à l'infini plus rapidement que toute puissance négative de $L(X, \Xi)$ et satisfaisant, relativement à Ξ, à l'équation adjointe

$$\mathcal{G}(u) - \chi u = 0. \tag{27 bis}$$

Nous poserons, en supposant $D(A) = 1$ [ce qui ne diminue pas la généralité [1]],

$$G^{(1)} = G, \qquad G^{(n)}(X, \Xi) = \int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\, G^{(n-1)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace; puis

$$G_p(X, \Xi) = \sum_{n=1}^{p} \lambda^{n-1} G^{(n)}(X, \Xi),$$

λ ayant toujours la valeur

$$2^{-2}\pi^{-\frac{m}{2}}\Gamma\left(\frac{m}{2} - 1\right).$$

---

(1) Il suffit pour cela, après avoir prolongé les $a_{\alpha,\beta}$ et avant de passer à la suite, de tout diviser par $\sqrt[m]{D(A)}$.

Pour résoudre le problème de Dirichlet pour l'équation (1) et le domaine $\mathcal{D}$, nous poserons, en nommant u_1 la fonction cherchée,

$$(28)\qquad u_1(X) = -\lambda \int^{(m)} \rho_1(A)\, G(X, A)\, dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A)\, Z[G_2(X, A)]\, dS_A,$$

l'intégrale d'ordre m devant être étendue à tout l'espace : il suffit, pour qu'elle ait un sens, que ρ_1 soit, par exemple, borné ; ρ_1 et σ_1 sont deux fonctions inconnues, ρ_1 d'un point de l'espace, σ_1 d'un point de $\mathcal{S}$. Nous désirons que l'équation (1) soit satisfaite partout, sauf sur $\mathcal{S}$. En remarquant que

$$\mathcal{F}[G_p(X, A)] = \lambda^{p-1} \chi(X)\, G^{(p)}(X, A)$$

et en supposant ρ_1 continu (L), cela donne

$$(29)\qquad \rho_1(X) - \lambda \int^{(m)} \rho_1(A)\, \chi(X)\, G(X, A)\, dV_A - 2\lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A)\, \chi(X)\, Z[G^{(2)}(X, A)]\, dS_A = 0;$$

tous nos calculs antérieurs peuvent en effet être reproduits, χG jouant le rôle de K. Nous devons aussi écrire que sur $\mathcal{S}$, $u_1 = f_1(Y)$, Y étant un point de $\mathcal{S}$ et f_1 une fonction donnée. Or l'étude générale des potentiels de double couche s'applique à l'intégrale portant sur σ_1 ; on remarquera en effet que

$$G^{(n)}(X, \Xi) = O[L^{2n-m}(X, \Xi)] \qquad (2n < m),$$

et que par suite la discontinuité de l'intégrale provient uniquement du premier terme G de G_2. On a donc

$$(30)\qquad \sigma_1(Y) - \lambda \int^{(m)} \rho_1(A)\, G(Y, A)\, dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A)\, Z[G_2(Y, A)]\, dS_A = f_1(Y).$$

Le système à résoudre est celui des équations (29) et (30), analogue à celui des équations (11) et (12) de la section III. Ici encore des itérations conduisent à un système analogue où le noyau est borné. L'intégrale étendue à tout l'espace peut faire douter que la théorie de Fredholm s'applique : on lève la difficulté en remarquant qu'étant donnée la façon dont G s'annule à l'infini et étant donné le fait que χ est nul dès que X est assez loin de O, une inversion nous ramène à un système où le champ est borné et le noyau, après itérations, continu. Dès lors il est plus simple de ne pas faire cette inversion, car dans un changement de variables les expressions qui interviennent dans la théorie de Fredholm se changent terme à terme les unes dans les autres.

Nous allons remplacer l'équation (30) par une autre : dans l'équation (29), remplaçons X par un point B de $\mathcal{S}$, multiplions par $\lambda G(Y, B)\,dV_B$, intégrons dans tout l'espace, et ajoutons le résultat au premier membre de (30); nous obtenons

$$\text{(30 bis)}\qquad \begin{aligned}\sigma_1(Y) - \lambda^2 \int^{(m)} \rho_1(A) G^{(2)}(Y, A)\,dV_A \\ - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A) Z[G_2(Y, A)]\,dS_A = f_1(Y).\end{aligned}$$

Le système des équations (29) et (30 *bis*) est évidemment équivalent à celui des équations (29) et (30).

Considérons d'autre part le problème de trouver, à l'extérieur de $\mathcal{D}$, une solution u_4 de l'équation (2), s'annulant à l'infini plus rapidement que toute puissance de $L(O, X)$, et telle que, sur $\mathcal{S}$, $Z(u) = f_4(Y)$, f_4 étant une fonction continue donnée; c'est ce que nous nommerons le problème de Neumann extérieur pour $\mathcal{G}$ (nous sous-entendrons même le plus souvent le mot *extérieur*).

Nous poserons

$$\text{(31)}\qquad \begin{aligned}u_4(X) = -2\lambda \int^{(m)} \rho_1(A) G(A, X) \chi(A)\,dV_A \\ - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A) G_2(A, X)\,dS_A.\end{aligned}$$

En calculant $\mathcal{G}(u_4)$, nous aurons une expression où $2\chi(X)$ sera en facteur; nous supprimons ce facteur, quoiqu'il soit nul quand $L(O, X)$

est assez grand ; nous trouvons ainsi l'équation suffisante

$$(32) \qquad \rho_4(X) - \lambda \int^{(m)} \rho_4(A) G(A, X) \chi(A) dV_A - \lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_4(A) G^{(2)}(A, X) dS_A = 0.$$

Pour traduire la condition sur $\mathcal{S}$, nous remarquons que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_4(A) \{Z[G_2(A, X)] + \Theta[G_2(A, X)]\} dS_A$$

est continu même sur $\mathcal{S}$ car d'une part

$$\frac{\partial G_2}{\partial x_\alpha} + \frac{\partial G_2}{\partial a_\alpha} = O[L^{2-m}(X, A)],$$

et d'autre part les fonctions $[\varpi_\alpha(X) - \varpi_\alpha(A)] \frac{\partial G_2}{\partial x_\alpha}$ et G_2 donnent lieu à des intégrales continues. La condition sur $\mathcal{S}$ devient donc

$$(33) \qquad \sigma_4(Y) - 2\lambda \int^{(m)} \rho_4(A) Z[G(A, Y)] \chi(A) dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_4(A) Z[G_2(A, Y)] dS_A = f_4(Y).$$

Dans (32), remplaçons X par un point B de $\mathcal{S}$, multiplions par

$$2\lambda Z[G(B, Y)] \chi(B) dV_B,$$

intégrons dans tout l'espace et ajoutons le résultat à (33) :

$$(33\ bis) \qquad \sigma_4(Y) - 2\lambda^2 \int^{(m)} \rho_4(A) Z[G^{(2)}(A, Y)] \chi(A) dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_4(A) Z[G_3(A, Y)] dS_A = f_4(Y);$$

cette équation remplace (33). Il suffit maintenant de comparer les systèmes (29) et (30 *bis*) d'une part, (32) et (33 *bis*) d'autre part : ce sont *deux systèmes associés*, c'est-à-dire que si, par la transformation connue, on les remplace chacun par une seule équation, l'un des noyaux se déduit de l'autre par échange des rôles des deux points.

Nous aurons encore besoin d'écrire ce qui correspond à l'échange des rôles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$. Pour le problème de Dirichlet relatif à $\mathcal{G}$, nous aurons

$$(34)\qquad u_2(X) = -\lambda\int^{(m)} \rho_2(A)\,G(A, X)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_2(A)\,\Theta[G_2(A, X)]\,dS_A,$$

$$(35)\qquad \rho_2(X) - \lambda\int^{(m)} \rho_2(A)\chi(X)\,G(A, X)\,dV_A - 2\lambda^2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_2(A)\chi(X)\,\Theta[G^{(2)}(A, X)]\,dS_A = 0.$$

$$(36)\qquad \sigma_2(Y) - \lambda^2\int^{(m)} \rho_2(A)\,G^{(2)}(A, Y)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_2(A)\,\Theta[G_3(A, Y)]\,dS_A = f_2(Y);$$

pour le problème de Neumann relatif à $\mathcal{F}$, nous aurons

$$(37)\qquad u_3(X) = -2\lambda\int^{(m)} \rho_3(A)\,G(X, A)\chi(A)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_3(A)\,G_2(X, A)\,dS_A,$$

$$(38)\qquad \rho_3(X) - \lambda\int^{(m)} \rho_3(A)\,G(X, A)\chi(A)\,dV_A - \lambda^2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_3(A)\,G^{(2)}(X, A)\,dS_A = 0,$$

$$(39)\qquad \sigma_3(Y) - 2\lambda^2\int^{(m)} \rho_3(A)\Theta[G^{(2)}(Y, A)]\chi(A)\,dV_A - 2\lambda\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_3(A)\,\Theta[G_3(Y, A)]\,dS_A = f_3(Y).$$

Je dis que dans notre hypothèse, c'est-à-dire si le problème de Dirichlet relatif à $\mathcal{F}$ où f_1 est nul n'a que la solution zéro, ces quatre systèmes de Fredholm ont chacun une solution et une seule. Il suffit de démontrer que les systèmes homogènes n'ont que la solution zéro.

Prenons d'abord le système des équations (38) et (39) avec $f_3 = 0$; soit ρ_3, σ_3 une solution. La fonction u_3 représentée par (37) satisfait partout, sauf sur $\mathcal{S}$, à l'équation (1); quand X tend vers $\mathcal{S}$ par points extérieurs à $\mathcal{D}$, $\Theta(u_3)$ s'annule. Appliquons alors la formule (23) à la région extérieure à $\mathcal{D}$ (on limite d'abord cette région à une hypersphère dont on fait ensuite tendre le rayon vers l'infini); on trouve

$$\int^{(m)} P\left(u_3, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \frac{\partial u_3}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial u_3}{\partial x_m}\right) dV = 0,$$

l'intégrale étant prise dans l'extérieur de $\mathcal{D}$; donc dans cette région $u_3 = 0$. Donc, dans l'intérieur de $\mathcal{D}$, u_3 est une solution de (1) nulle sur $\mathcal{S}$; u_3 est donc encore nul dans $\mathcal{D}$. Par suite $\Theta(u_3)$ a la même valeur *zéro* dans les deux cas; donc σ_3 est nul. σ_3 et u_3 étant nuls, il suffit de comparer (37) et (38) pour voir que $\rho_3 = 0$. Donc si $f_3 = 0$, le système des équations (38) et (39) n'a que la solution zéro.

Il en est donc de même pour le système associé [(35) et (36)]; par suite le problème de Dirichlet relatif à $\mathcal{G}$ a toujours une solution.

Nous pouvons même affirmer que si l'on met des fonctions quelconques dans les seconds membres des équations (35) et (36), le système est soluble. Nous allons en profiter pour former une fonction de Green. Soit p un entier quelconque dont le double soit supérieur à m; la fonction $G_p(X, \Xi) - u(X, \Xi)$ sera une fonction de Green si elle s'annule quand Ξ vient sur $\mathcal{S}$ et si

$$\mathcal{G}[u(X, \Xi)] = \lambda^{p-1}\chi(\Xi) G^{(p)}(X, \Xi).$$

On doit donc poser

$$(40) \qquad u(X, \Xi) = -\lambda \int^{(m)} \rho(X, A) G(A, \Xi) dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B) \Theta[G_2 B, \Xi)] dS_B,$$

$$(41) \qquad \rho(X, \Xi) - \lambda \int^{(m)} \rho(X, A) G(A, \Xi) \chi(\Xi) dV_A - 2\lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B) \chi(\Xi) \Theta[G^{(2)}(B, \Xi)] dS_B = \lambda^{p-1} \chi(\Xi) G^{(p)}(X, \Xi),$$

$$(42) \qquad \sigma(X, Y) - \lambda \int^{(m)} \rho(X, A) G(A, Y) dV_A - 2\lambda \int^{(m-1)} \sigma(X, B) \Theta[G_2(B, Y)] dS_B = G_p(X, Y).$$

Vérifions que, par rapport à X, notre fonction de Green satisfait à l'équation (1). Si l'on applique l'opération $\mathcal{F}$ aux deux membres des équations (41) et (42), on a des équations analogues où ρ et σ sont remplacés par $\mathcal{F}(\rho)$ et $\mathcal{F}(\sigma)$, et où les seconds membres deviennent

$$\lambda^{p-2}\chi(X)\chi(\Xi)[-G^{(p-1)}(X, \Xi)+\lambda G^{(p)}(X, \Xi)]$$

et

$$\lambda^{p-1}\chi(X)G^{(p)}(X, Y),$$

c'est-à-dire ce que donneraient les fonctions $-\lambda^{p-2}\chi(X)\chi(\Xi)G^{(p-1)}(X,\Xi)$ et *zéro* mises à la place de $\rho(X, \Xi)$ et de $\sigma(X, Y)$ dans les premiers membres des équations (41) et (42); donc

$$\mathcal{F}[\rho(X, \Xi)] = -\lambda^{p-2}\chi(X)\chi(\Xi)G^{(p-1)}(X, \Xi),$$
$$\mathcal{F}[\sigma(X, Y)] = 0,$$

et par suite

$$\mathcal{F}[u(X, \Xi)] = \lambda^{p-1}\chi(X)G^{(p)}(X, \Xi), \tag{43}$$

c'est-à-dire que notre fonction de Green satisfait aussi à l'équation (1).

Montrons maintenant que si X vient sur $\mathcal{S}$, la fonction de Green s'annule ou que

$$u(X, \Xi) = G_p(X, \Xi).$$

Soit, pour X quelconque,

$$u(X, \Xi) = G_p(X, \Xi) - G(X, \Xi) + u'(X, \Xi).$$

On remarque que

$$G_p(X, \Xi) - G(X, \Xi) = \lambda\int^{(m)} G_{p-1}(X, A)\chi(A)G(A, \Xi)\,dV_A,$$

de sorte qu'en posant

$$\rho'(X, \Xi) = G_p(X, \Xi) + \lambda\int^{(m)} \rho(X, A)G(A, \Xi)\,dV_A$$
$$+ 2\lambda^2\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G^{(2)}(B, \Xi)]\,dS_B,$$

ce qui entraîne, d'après (41),

$$\rho(X, \Xi) = \chi(\Xi)[\rho'(X, \Xi) - G_{p-1}(X, \Xi)],$$

les équations (40) à (42) deviennent

$$(44)\qquad u'(X, \Xi) = -\lambda \int^{(m)} \rho'(X, A)\chi(A)G(A, \Xi)\,dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G_2(B, \Xi)]\,dS_B.$$

$$(45)\qquad \rho'(X, \Xi) - \lambda \int^{(m)} \rho'(X, A)\chi(A)G(A, \Xi)\,dV_A - 2\lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G^{(2)}(B, \Xi)]\,dS_B = G(X, \Xi),$$

$$(46)\qquad \sigma(X, Y) - \rho'(X, Y) - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G(B, Y)]\,dS_B = 0.$$

L'équation (44) s'écrit aussi

$$(47)\qquad u'(X, \Xi) = G(X, \Xi) - \rho'(X, \Xi) - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\,\Theta[G(B, \Xi)]\,dS_B.$$

On veut que, si X est sur $\mathcal{S}$ et Ξ dans $\mathcal{D}$, on ait

$$u'(X, \Xi) = G(X, \Xi),$$

et par suite

$$(48)\qquad \rho'(X, \Xi) = -2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G(B, \Xi)]\,dS_B;$$

si Ξ vient sur $\mathcal{S}$, cela donne l'équation (46), quel que soit σ. Il reste donc seulement à vérifier qu'il existe une fonction σ telle qu'en la joignant à la valeur (48) de ρ', on ait une solution de l'équation (45), qui se réduit alors à

$$(49)\qquad -2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G(B, \Xi)]\,dS_B = G(X, \Xi);$$

si Ξ vient sur $\mathcal{S}$, cela donne l'équation

$$\sigma(X, \Xi) - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma(X, B)\Theta[G(B, \Xi)]\,dS_B = G(X, \Xi).$$

Cette équation admet une solution et une seule; en effet on peut appliquer ce qui a été fait jusqu'ici, en mettant les équations (27) et (27 *bis*) à la place de (1) et (2), puisque l'équation (27) n'a que *zéro* comme solution nulle sur $\mathcal{S}$; or le système des équations (35) et (36) se réduit alors à

$$\rho_2(X) = 0, \qquad \sigma_2(Y) - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_2(A)\Theta[G(A, Y)]\, dS_A = f_2(Y),$$

ce qui prouve notre assertion. Cette fonction $\sigma(X, \Xi)$ satisfait à l'équation (49), car la différence des deux membres de celle-ci est une solution de (27 *bis*) nulle quand Ξ vient sur $\mathcal{S}$ et par suite identiquement nulle puisque $c^\star - \chi < 0$.

A la vérité, quand Ξ tend vers le point X de $\mathcal{S}$, on sait seulement que la différence des deux membres de (49) est $O[L^{3-m}(X, \Xi)]\ (m > 3)$, ou de l'ordre d'un logarithme si $m = 3$. En effet si nous nous bornons, pour la commodité du langage, au cas $m > 3$, on a

$$\sigma(X, \Xi) = G(X, \Xi) + O[L^{3-m}(X, \Xi)];$$

d'autre part, d'après la formule de Green, en tenant compte de ce que Ξ est dans $\mathcal{D}$ et X sur $\mathcal{S}$, on a

$$G(X, \Xi) + 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(X, B)\Theta[G(B, \Xi)]\, dS_B = 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(B, \Xi) Z[G(X, B)]\, dS_B;$$

or le second membre est visiblement $O[L^{3-m}(X, \Xi)]$. Enfin on peut vérifier que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} O[L^{3-m}(X, B)]\Theta[G(B, \Xi)]\, dS_B = O[L^{3-m}(X, B)].$$

En effet un changement de paramètres déjà employé ramène l'intégrale à

$$x_m \int^{(m-1)} L^{-m}(X, A) L^{3-m}(O, A)\, d(a_1, \ldots, a_{m-1})$$

(O remplace X et X remplace Ξ) étendue à une partie de $a_m = 0$; il faut prouver que ce résultat vaut $O[L^{3-m}(O, X)]$. Or l'intégrale étendue à $L(X, A) < 2^{-1} L(O, X)$ est évidemment $O[L^{3-m}(O, X)]$ comme produit de deux facteurs dont l'un est borné (*voir* § IV, démonstration du théorème 1) et l'autre est de ce type. Dans la région

$$L(O, A) < 2^{-1} L(O, X),$$

nous avons à intégrer le produit de deux facteurs, dont l'un

$$x_m L^{-m}(X, A) = O[L^{1-m}(O, X)];$$

l'intégrale de l'autre est $O[L^2(O,X)]$, d'où $O[L^{3-m}(O, X)]$ comme limitation de l'intégrale donnée. Dans la région

$$2^{-1}L(O, X) < L(O, A) < 2L(O, X), \qquad L(X, A) > 2^{-1}L(O, X),$$

même calcul et même résultat que dans la précédente. Enfin dans la région $L(O, A) > 2L(O, X)$, un changement de variables montre que l'intégrale est moindre que

$$x_m L^{2-m}(O, X)\int^{(m-1)} L^{-m}(X', A)L^{3-m}(O, A)\,d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

où X' est tel que $L(O, X') = 1$, et où l'intégrale est étendue à la région $L(O, A) > 2$; cette expression est moindre que

$$2^m x_m L^{2-m}(O, X)\int^{(m-1)} L^{3-2m}(O, A)\,d(a_1, \ldots, a_{m-1}),$$

l'intégrale étant étendue à la région $L(O, A) > 2$ et étant par suite constante; ce résultat est encore $O[L^{3-m}(O, X)]$. Ainsi la différence des deux membres de (49) est bien $O[L^{3-m}(X, \Xi)]$ $(m > 3)$.

Or un théorème de M. Zaremba (¹) peut s'adapter au cas actuel : si u est une solution de (27 *bis*) nulle sur $\mathcal{S}$ sauf peut-être en un point P où $u = o[L^{2-m}(P, X)]$, u est identiquement nul dans $\mathcal{D}$. En effet sur l'hypersphère $L(P, X) = \rho$, où ρ est suffisamment petit,

$$|u| < \eta G(P, X),$$

η étant un nombre positif quelconque donné; donc $\eta G(P, X) + u$ et $\eta G(P, X) - u$ sont positifs sur la frontière de la partie de $\mathcal{D}$ limitée par ces hypersphères, donc positifs dans toute cette partie de $\mathcal{D}$; donc $|u| < \eta G(P, X)$ quels que soient X et η; donc $u = 0$.

Il est donc bien démontré qu'il existe une fonction de Green, $G_p(X, \Xi) - u(X, \Xi)$, solution de (1) relativement à X, de (2) relative-

---

(¹) Indiqué par M. Goursat, *Cours d'Analyse*, t. III, 2ᵉ édition, p. 205 : il est visible que la démonstration peut être étendue plus qu'il n'est fait dans le texte.

ment à Ξ, et s'annulant quand un des points vient sur S. Nous pourrions en déduire immédiatement que les problèmes de Dirichlet pour $\mathcal{F}$ et pour $\mathcal{G}$ sont tous deux possibles et que la solution est unique. Mais pour ne pas abandonner nos systèmes de Fredholm, nous pouvons nous borner à remarquer que toute solution de (2) nulle sur $\mathcal{S}$ et ayant ses dérivées secondes continues dans $\mathcal{D}$ est nulle dans $\mathcal{D}$, d'après la formule de Green. Cela permet de poursuivre le raisonnement en échangeant les rôles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$: nos quatre systèmes de Fredholm sont donc bien toujours solubles, ainsi que les problèmes correspondants de Neumann et de Dirichlet, dont les solutions sont uniques.

Le théorème est démontré, ainsi que l'existence de la fonction de Green $F(X, \Xi)$. Cette existence étant prouvée, on peut reprendre les calculs en prenant $\chi > c$, sans s'occuper de c^* : dès qu'on aura formé la solution élémentaire $F(X, \Xi)$ de (2) qui s'annule quand Ξ vient sur $\mathcal{S}$, on pourra affirmer que c'est la fonction de Green, sans avoir à vérifier ses autres propriétés.

Première application. — *Si $c < 0$ dans $\mathcal{D}$, le problème de Dirichlet généralisé est soluble d'une façon unique pour $\mathcal{F}$ et pour son adjointe.*

En effet on sait qu'alors le problème à donnée nulle concernant $\mathcal{F}$ n'a que la solution zéro.

Deuxième application. — *Si $c \leqq 0$ dans $\mathcal{D}$, le problème de Dirichlet généralisé est soluble d'une façon unique pour $\mathcal{F}$ et pour son adjointe.*

En effet soit a un nombre inférieur au minimum de x_1 dans $\mathcal{D}$ et soit M un nombre supérieur au maximum de $|b_1|a_{1,1}^{-1}$. La fonction $e^{-Ma} - e^{-Mx_1}$ est positive dans $\mathcal{D}$ et si on la substitue à la place de u dans $\mathcal{F}$, le résultat est négatif. Donc si l'on pose

$$u = (e^{-Ma} - e^{-Mx_1})v,$$

l'équation en v est du type de la première application (1).

Troisième application. — *Si les coefficients de $\mathcal{F}$ et le contour $\mathcal{S}$ satisfont aux conditions requises de régularité, il suffit pour que le problème*

(1) Démonstration inspirée du cours professé par M. Picard en 1910, ainsi que la démonstration relative à la troisième application.

de Dirichlet pour $\mathcal{F}$ et pour $\mathcal{G}$ soit soluble d'une façon unique, que la mesure de $\mathcal{D}$ soit inférieure à une certaine limite dépendant des limites supérieures des valeurs absolues des coefficients de $\mathcal{F}$ et des coefficients de continuité (L) *des $a_{\alpha,\beta}$, ainsi que d'une limite inférieure positive des racines s du discriminant de*

$$\Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta}\, p_\alpha p_\beta - s\Sigma_\alpha p_\alpha^2,$$

et d'une limite supérieure de $L(X, \Xi)$ *quand* X *et* Ξ *varient dans* $\mathcal{D}$.

En effet, si l'on définit $H(X, \Xi)$ comme dans la section III, on connaît des nombres positifs k et k' tels que

$$kL^2(X, \Xi) < H(X, \Xi) < k'L^2(X, \Xi);$$

si l'on pose

$$K(X, A) = \mathcal{F}\left[H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\right] - cH^{\frac{2-m}{2}}(X, A),$$

et si h est l'exposant des conditions de continuité (L) données pour les $a_{\alpha,\beta}$, on en déduit un nombre k'' tel que

$$|K(X, A)| < k''L^{h-m}(X, A).$$

Si

$$K^{(1)} = K, \qquad K^{(n)}(X, \Xi) = \int^{(m)} K(X, A)\, D^{-\frac{1}{2}}(A)\, K^{(n-1)}(A, \Xi)\, dV_A,$$

l'intégrale étant prise dans un domaine débordant $\mathcal{D}$ aussi peu qu'on veut, on en déduit que la série

$$H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi) + \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^n \int^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, A)\, D^{-\frac{1}{2}}(A)\, K^{(n)}(A, \Xi)\, dV_A$$

converge et représente une fonction positive continue pour $X \neq \Xi$ dès que la mesure ω de $\mathcal{D}$ est inférieure à une certaine limite dépendant des quantités indiquées; si $F(X, \Xi)$ est cette série on a en outre

$$F(X, \Xi) < lL^{2-m}(X, \Xi),$$

l étant une constante connue. Soit alors M une constante supérieure au maximum de $|c|$. Considérons les fonctions v_n telles que

$$v_0 = 1, \qquad v_{n+1}(X) = \lambda M \int^{(m)} F(X, \Xi) D^{-\frac{1}{2}}(\Xi) v_n(\Xi) \, dV_\Xi.$$

On voit que tous les v_n sont positifs et que

$$v_1(X) < l' \omega^{\frac{2}{m}}, \ldots, v_n(X) < \left(l' \omega^{\frac{2}{m}}\right)^n,$$

l' étant une constante connue. Cette série converge donc uniformément si $\omega < l'^{-\frac{m}{2}}$, et si l'on pose

$$v = 1 + v_1 + \ldots + v_n + \ldots,$$

on a

$$-1 + v(X) = \lambda M \int^{(m)} F(X, \Xi) D^{-\frac{1}{2}}(\Xi) v(\Xi) \, dV_\Xi, \qquad v > 0.$$

D'autre part v_{n+1} satisfait à une condition de Lipschitz généralisée avec un coefficient proportionnel à une borne supérieure de $|v_n|$; donc v est continu (L); donc v possède des dérivées secondes continues (L) et

$$\mathcal{F}(v) - cv = -Mv.$$

De là résulte $\mathcal{F}(v) < 0$. Donc si l'on pose $u = vw$, l'équation en w satisfait aux conditions de la première application.

Théorème 4. — *Si les coefficients de $\mathcal{F}$ et le contour $\mathcal{S}$ satisfont aux hypothèses du théorème 3, mais si le problème de Dirichlet à donnée nulle pour $\mathcal{F}$ admet une solution non nulle,*

1° *il en est de même pour $\mathcal{G}$;*

2° *chacune de ces équations admet le même nombre fini p de solutions nulles sur $\mathcal{S}$ linéairement indépendantes;*

3° *si $v_1, v_2, \ldots, v_p$ sont un système de telles solutions linéairement indépendantes pour $\mathcal{G}$, et si l'on se donne une suite continue u de valeurs sur $\mathcal{S}$, il n'existe de solution de (1) prenant ces valeurs sur $\mathcal{S}$ que si*

$$(50) \qquad \int^{(m-1)} u \, Z(v_n) \, dS = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p),$$

et ces conditions sont suffisantes.

La première partie de l'énoncé est une conséquence immédiate du théorème précédent.

Pour la deuxième partie, remarquons d'abord que, si l'on considère les quatre systèmes de Fredholm du théorème précédent, les systèmes homogènes ont tous quatre des solutions non nulles.

En effet soit u une solution non nulle du problème de Dirichlet à donnée nulle relatif à $\mathcal{F}$. Les dérivées de u sont continues même sur $\mathcal{S}$ (§ IV, théor. 3). Appliquons la formule de Green à $u(\mathrm{A})$ et à $\mathrm{G}_2(\mathrm{X}, \mathrm{A})$ dans la partie de ϖ extérieure à une hypersphère de centre X et de rayon infiniment petit; il vient

$$(51)\qquad \begin{aligned} u(\mathrm{X}) = \lambda^2 \int_{\varpi}^{(m)} & \mathrm{G}^{(2)}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\, u(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}} \\ & + \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \mathrm{G}_2(\mathrm{X}, \mathrm{A})\, \Theta[u(\mathrm{A})]\, d\mathrm{S}_{\mathrm{A}}, \end{aligned}$$

pourvu que X appartienne à ϖ; si X est extérieur à $\varpi + \mathcal{S}$, il faut *zéro* dans le premier membre. Cela nous prouve que les fonctions

$$\begin{aligned} \rho_3(\mathrm{X}) &= -2^{-1}\lambda \int_{\varpi}^{(m)} \mathrm{G}(\mathrm{X}, \mathrm{A})\chi(\mathrm{A})\, u(\mathrm{A})\, d\mathrm{V}_{\mathrm{A}}, \\ \sigma_3(\mathrm{X}) &= -2^{-1}\Theta[u(\mathrm{X})], \end{aligned}$$

introduites dans l'expression (37), représentent *zéro* hors de ϖ et par suite satisfont aux équations (38) et (39) avec $f_3 = 0$. Remarquons d'ailleurs que ρ_3 et σ_3 ne sont pas à la fois identiquement nuls, sans quoi $u(\mathrm{X})$ serait, d'après (51), identiquement nul, contre l'hypothèse. Le système [(38), (39)] homogène admet donc bien une solution non nulle.

Le même raisonnement prouve qu'il en est de même du système [(32), (33)] et par suite des deux systèmes associés, c'est-à-dire que les quatre systèmes de Fredholm homogènes ont des solutions non nulles.

Soit p le nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(38), (39)] homogène; d'après ce que nous venons de voir, l'équation (1) n'a pas plus de p solutions linéairement indépendantes nulles sur $\mathcal{S}$ et à dérivées secondes continues en tout point de ϖ. Montrons qu'il y en a exactement p. Il suffit pour cela de faire voir qu'à toute solution non nulle du système [(38), (39)] homogène correspond par la formule (37) une solution non nulle du problème de Dirichlet à donnée nulle pour $\mathcal{F}$. Je dis d'abord que la fonction u_3 représentée par (37) est identiquement nulle hors de ϖ; en effet u_3 et ses dérivées s'annulent à l'infini plus rapidement que toute puissance de $L(O, X)$, et d'autre part si X vient sur $\mathcal{S}$ par points extérieurs à ϖ, $\Theta(u_3) = 0$. D'après (23), cela entraîne

$$\int^{(m)} P\left(u_3, \frac{\partial u_3}{\partial x_1}, \ldots, \frac{\partial u_3}{\partial x_m}\right) = 0,$$

l'intégrale étant étendue à l'extérieur de ϖ; donc $u_3 = 0$ dans toute cette région. Or u_3 est continu même sur $\mathcal{S}$; c'est donc dans ϖ, pour $\mathcal{F}$, une solution du problème de Dirichlet à donnée nulle. Cette solution n'est pas nulle, sans quoi $\Theta(u_3)$ aurait la même valeur que X vienne sur $\mathcal{S}$ par points de ϖ ou par points extérieurs à ϖ, et par suite σ_3 serait nul; et alors, en comparant (37), où $u_3 = 0$, et (38), on voit que ρ_3 serait nul aussi, ce qui contredit l'hypothèse.

Ainsi le problème de Dirichlet à donnée nulle pour $\mathcal{F}$ a exactement p solutions linéairement indépendantes. Si q est le nombre des solutions linéairement indépendantes du même problème pour $\mathcal{G}$, q est aussi le nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(32), (33)] homogène. Nous allons maintenant démontrer que $p = q$.

Il suffit de montrer que $p \geqq q$, car en échangeant les rôles de $\mathcal{F}$ et de $\mathcal{G}$, on aura aussi $q \geqq p$, donc $p = q$. Or q est aussi le nombre des solutions linéairement indépendantes du système [(29), (30)] homogène. Si nous prouvons qu'à une solution non nulle de ce système correspond, par la formule (28), une fonction $u_1(X)$ non identiquement nulle dans ϖ, il en résultera bien que $p \geqq q$. Il revient au même de prouver que si u_1 est nul dans ϖ, ρ_1 et σ_1 sont identiquement nuls. Posons

$$\rho(X) = \lambda \int^{(m)} \rho_1(A)\, G(X, A)\, dV_A + 2\lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_1(A)\, Z[G^2(X, A)]\, dS_A,$$

d'où résulte

$$\rho_1(X) = \chi(X)\, \rho(X);$$

en supprimant les indices de σ_1 et de u_1, nous aurons

$$
(52) \qquad u(X) = -\lambda \int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\rho(A)\, dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G_2(X, B)]\sigma(B)\, dS_B.
$$

$$
(53) \qquad \rho(X) - \lambda \int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\rho(A)\, dV_A - 2\lambda^2 \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G^{(2)}(X, B)]\sigma(B)\, dS_B = 0,
$$

$$
(54) \qquad \sigma(Y) - \lambda \int^{(m)} G(Y, A)\chi(A)\rho(A)\, dV_A - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G_2(Y, B)]\sigma(B)\, dS_B = 0.
$$

La comparaison de (52) et (53) donne, $u(X)$ étant nul dans $\mathcal{D}$,

$$
\rho(X) = -2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G(X, B)]\sigma(B)\, dS_B,
$$

pourvu que X appartienne à $\mathcal{D}$; reportons cette valeur dans (52), il vient

$$
\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G(X, B)]\sigma(B)\, dS_B = 0,
$$

si X est dans $\mathcal{D}$. Si X vient en un point Y de $\mathcal{S}$, cela donne

$$
\sigma(Y) - 2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} Z[G(Y, B)]\sigma(B)\, dS_B = 0.
$$

Or le système qui correspond à [(53), (54)] pour $\mathcal{F}(u) = \chi u$ se réduit à l'équation ci-dessus en σ jointe à $\rho = 0$. D'après le théorème 3, on a donc

$$
\sigma = 0.
$$

D'après (53), on a dans tout l'espace

$$
\rho(X) - \lambda \int^{(m)} G(X, A)\chi(A)\rho(A)\, dV_A = 0.
$$

u satisfait donc dans tout l'espace à l'équation $\mathcal{F}(u) = 0$; comme u, nul dans $\mathcal{D}$, s'annule à l'infini, ainsi que ses dérivées, de façon exponentielle, u est nul dans tout l'espace d'après (23) et (26); par conséquent, dans tout l'espace,

$$\rho(X) = 0.$$

Il est donc bien démontré que si ρ_1 et σ_1 ne sont pas tous deux identiquement nuls, u_1 n'est pas identiquement nul. Donc $p = q$.

La deuxième partie du théorème étant démontrée, passons à la troisième. Soit $\mathcal{S}'$ une multiplicité située dans $\mathcal{D}$ et se réduisant à $\mathcal{S}$ quand un certain paramètre dont dépend $\mathcal{S}'$ tend vers zéro; par exemple $\mathcal{S}'$ est le lieu des points de $\mathcal{D}$ situés à la distance δ de $\mathcal{S}$. Si u est une solution de (1) dans $\mathcal{D}$, prenant sur $\mathcal{S}$ une suite continue de valeurs, on a

$$\int_{\mathcal{S}'}^{(m-1)} [u\,Z(v_n) - v_n \Theta(u)]\, dS = 0.$$

Faisons tendre δ vers zéro. On a $v_n = O(\delta)$, car v_n est nul sur $\mathcal{S}$ et a des dérivées continues même sur $\mathcal{S}$ (§ IV, théor. 3). D'autre part $\Theta(u) = o(\delta^{-1})$ (§ IV, théor. 1). A la limite, on a donc les conditions nécessaires (50).

Je dis que ces conditions sont suffisantes. En effet pour que le système [(29), (30)], où f_1 est une fonction continue quelconque, soit soluble, il faut et il suffit que

$$\int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} f_1(Y)\, \sigma_4(Y)\, dS_Y = 0,$$

(ρ_4, σ_4) étant un système quelconque de fonctions satisfaisant au système [(32), (33)] homogène. Mais on a vu il y a un instant que σ_4 n'est autre, à un facteur constant près, que $Z(u_4)$. L'ensemble des conditions (50) est donc suffisant pour que u existe. L'expression (28), où (ρ_1, σ_1) est une solution quelconque de [(29), (30)], nous donne toutes les solutions d'après la seconde partie du théorème.

Le théorème est démontré. Sa démonstration et celle du précédent nous prouvent que la résolution du problème de Dirichlet pour $\mathcal{F}$ est entièrement équivalente à celle du système [(29), (30)].

Les conditions (50) s'écrivent

$$\int^{(m-1)} u(X)\,\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial v_n}{\partial x_\beta} \varpi_\alpha\, dS = 0;$$

on les a donc immédiatement dès que l'on connaît $v_1, v_2, \ldots, v_p$.

Remarque. — Si l'on cherche une solution de

$$\mathcal{F}(u) = f(X)$$

ayant ses dérivées secondes continues en tout point de $\mathcal{D}$, et se réduisant à $f_1(Y)$ sur $\mathcal{S}$, la formule de Green nous donne les conditions nécessaires

$$(55)\qquad \int_{\mathcal{D}}^{(m)} f(X)\, v_n(X)\, dV_X + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} f_1(Y)\, Z[v_n(Y)]\, dS_Y = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots, p).$$

Ces p conditions sont aussi suffisantes. En effet il faut donner comme second membre à l'équation (29) $f(X)$, et à l'équation (30 *bis*)

$$f_1(Y) + \lambda \int^{(m)} f(B)\, G(Y, B)\, dV_B,$$

l'intégrale étant étendue à tout l'espace; $f(B)$ est prolongé hors de $\mathcal{D}$ de façon arbitraire. Si l'on introduit une solution (ρ_4, σ_4) du système homogène [(32), (33 *bis*)] et la fonction u_4 donnée par (31), fonction qui est nulle hors de $\mathcal{D}$ et qui coïncide dans $\mathcal{D}$ avec l'un quelconque des v_n, les conditions nécessaires et suffisantes de solubilité sont, d'après la théorie de Fredholm,

$$(56)\qquad \int^{(m)} f(X)\rho_4(X)\, dV_X + \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \left[f_1(Y) + \lambda \int^{(m)} G(Y, B) f(B)\, dV_B\right] \sigma_4(Y)\, dS_Y = 0.$$

Or $\sigma_4(Y) = -2^{-1} Z[u_4(Y)]$, les dérivées correspondant aux valeurs intérieures à $\mathcal{D}$; d'autre part

$$u_4(X) + 2\rho_4(X) = -2\lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} \sigma_4(A)\, G(A, X)\, dS_A$$
$$= \lambda \int_{\mathcal{S}}^{(m-1)} G(A, X)\, Z[u_4(A)]\, dS_A.$$

Si X est extérieur à $\mathcal{D}$, u_4 et le second membre sont nuls; donc $\rho_4 = 0$. Si X fait partie de $\mathcal{D}$, on trouve $\rho_4(X) = -u_4(X)$. On voit ainsi, en remplaçant u_4 par v_n et en intervertissant deux intégrations, que les conditions (56) sont identiques aux conditions (55).

VI.

Soit $F(p_{1,1}, p_{1,2}, \ldots, p_{m,m}; p_1, p_2, \ldots, p_m; u; x_1, x_2, \ldots, x_m)$ ou plus simplement $F(p_{\alpha,\beta}; p_\alpha; u; x_\alpha)$ une fonction de $\frac{m(m+1)}{2} + 2m + 1$ variables ($p_{\alpha,\beta} = p_{\beta,\alpha}$). On posera

$$(1)\qquad a_{\alpha,\alpha} = \frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\alpha}}, \qquad a_{\alpha,\beta} = \frac{1}{2}\frac{\partial F}{\partial p_{\alpha,\beta}} \quad (\alpha \neq \beta), \qquad b_\alpha = \frac{\partial F}{\partial p_\alpha}, \qquad c = \frac{\partial F}{\partial u}.$$

Supposons qu'une fonction u soit solution de

$$(2)\qquad \mathcal{F}(u) = F\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}; \frac{\partial u}{\partial x_\alpha}; u; x_\alpha\right) = 0;$$

la fonction u est supposée continue, ainsi que ses dérivées jusqu'au second ordre, en tout point d'un domaine ouvert $\mathcal{D}$, et l'on suppose que F, les $a_{\alpha,\beta}$, les b_α et c sont fonctions continues des $2^{-1}(m^2 + 5m + 2)$ arguments dans un champ $\mathcal{C}$ comprenant à son intérieur l'ensemble des systèmes de valeurs de $x_1, \ldots, x_m$, u et des dérivées premières et secondes de u quand $(x_1, \ldots, x_m)$ varie dans $\mathcal{D}$. On dira que l'équation (2) est de type elliptique relativement à u dans le domaine $\mathcal{D}$ si en tout point de ce domaine la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z_\alpha z_\beta$ est définie. Nous supposerons une fois pour toutes qu'elle est définie positive, ce qui ne diminue pas la généralité.

Théorème I. — *On suppose que dans $\mathcal{C}$ les dérivées partielles de* F *jusqu'à l'ordre q par rapport aux $2^{-1}(m^2 + 5m + 2)$ arguments sont continues* (L); *si $q = 1$, nous admettons en outre que les dérivées partielles des $a_{\alpha,\beta}$ par rapport aux mêmes arguments sont continues* (L). *Nous supposons enfin que les dérivées secondes de u, ainsi que celles de ses dérivées troisièmes qui sont des dérivées de dérivées secondes figurant dans les $a_{\alpha,\beta}$, sont continues* (L) *dans $\mathcal{D}$. Alors toutes les dérivées partielles jusqu'à* *l'ordre $q+2$ de u par rapport à $x_1, x_2, \ldots, x_m$ sont continues* (L) *dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$.*

En effet soit $\varphi(X)$ une quelconque des dérivées premières de u. Dans le cas où les dérivées troisièmes existent et sont continues, on peut écrire

$$\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} = f(X), \tag{3}$$

$f(X)$ et les $a_{\alpha,\beta}$ étant des fonctions de X connues si l'on connaît seulement u et ses dérivées premières et secondes; $f(X)$ et les dérivées des $a_{\alpha,\beta}$ sont continus (L).

Soit $\mathcal{D}_1$ un domaine ouvert situé dans $\mathcal{D}$, ainsi que sa frontière $\mathcal{S}_1$; $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{S}_1$ satisfont aux hypothèses de la section III; ce sont par exemple l'intérieur et le contour d'une hypersphère de rayon assez petit. En reprenant les notations de la section III, appliquées à l'équation (3) en φ, on aura, si les dérivées troisièmes de u sont continues,

$$\varphi(X) = -\lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(X, \Xi) \frac{\rho(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} dV_\Xi - 2\lambda \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\sigma(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} Z[H(X, \Xi; p)]\, dS_\Xi, \tag{4}$$

$\mathcal{D}_2$ étant un domaine débordant quelque peu $\mathcal{D}_1$; l'opération Z est définie comme dans la section V (théorème 3), en prenant

$$\theta_\alpha(X) = \Sigma_\beta \frac{\partial a_{\alpha,\beta}}{\partial x_\beta} - b_\alpha.$$

En désignant par $f_1(Y)$ les valeurs de φ sur $\mathcal{S}_1$,

$$\rho(X) - \lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} K(X, \Xi) \frac{\rho(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} dV_\Xi - 2\lambda^{p+1} \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\sigma(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} Z[K^{(p+1)}(X, \Xi; p)]\, dS_\Xi = f(X), \tag{5}$$

$$\sigma(Y) - \lambda \int_{\mathcal{D}_2}^{(m)} H^{\frac{2-m}{2}}(Y, \Xi) \frac{\rho(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} dV_\Xi - 2\lambda \int_{\mathcal{S}_1}^{(m-1)} \frac{\sigma(\Xi)}{\sqrt{D(\Xi)}} Z[H(Y, \Xi; p)]\, dS_\Xi = f_1(Y). \tag{6}$$

Or si l'on considère, dans les équations (4) à (6), φ, ρ et σ comme les inconnues, les données ne font intervenir que les dérivées de u qui figurent dans l'énoncé, pourvu que celles-ci soient continues (L). Même sans savoir si toutes les dérivées troisièmes de u existent, on est certain que le système est soluble si ϖ_1 est assez petit; je dis que $\varphi(X)$ représente encore dans ce cas la dérivée première considérée.

Pour le montrer, nous considérons u comme limite d'une suite de polynomes uniformément convergente ainsi que les suites de toutes les dérivées jusqu'au second ordre et que les suites de celles des dérivées troisièmes dont parle l'énoncé, ces dérivées troisièmes et toutes les dérivées secondes satisfaisant à une même condition de Lipschitz généralisée, de même exposant que la condition à laquelle satisfont les dérivées correspondantes de u. Si l'on désigne par v un de ces polynomes, la fonction v pourra être obtenue par un système tel que celui des équations (4) à (6), car elle a des dérivées de tout ordre; $H(X, \Xi)$, $K(X, \Xi)$, $H(X, \Xi; p)$, $f(X)$, $f_1(Y)$ sont formés à l'aide de v au lieu de u. Quand v tend vers u, la solution $[\varphi(X), \rho(X), \sigma(Y)$ du système tend uniformément vers une limite; en effet $f(X)$ et $f_1(Y)$ tendent uniformément vers des limites, et l'on peut démontrer [1] qu'il en est de même pour ρ, σ et φ : pour cela, on établit que

$$L^{m-1+\varepsilon}(X, \Xi) K(X, \Xi) \qquad (\varepsilon > 0)$$

tend uniformément vers une limite, ainsi que

$$L^{m-p+\varepsilon}(X, \Xi) K^{(p)}(X, \Xi) \qquad (0 < p \leqq m)$$

et que les $K^{(p)}(X, \Xi)$ si $p > m$, et que les $L^{m-2+\varepsilon}(X, \Xi) H(X, \Xi; p)$; puis on passe au noyau résolvant, multiplié par $L^{m-2+\varepsilon}(X, \Xi)$, pour lequel il y a encore convergence uniforme. Ainsi $\varphi(X)$ tend uniformément vers une limite qui dès lors ne peut être que la dérivée considérée de u, et l'on voit que le système (4) à (6) est encore valide à la limite. Mais alors (*voir* § III) les dérivées secondes de φ existent et sont continues (L) dans tout domaine fermé intérieur à ϖ_1. Donc les dérivées troisièmes de u existent et sont continues (L) dans tout

---

(1) Comme dans D., p. 83 à 86 et p. 111.

domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}_1$, donc dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$.

Si $q \geqq 2$, il faut continuer le raisonnement. Supposons que les dérivées d'ordre $n (3 \leqq n < q + 2)$ soient continues (L) dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$. Je dis qu'il en est de même de celles d'ordre $n + 1$. Pour cela nous remarquons que, dans l'hypothèse où les dérivées d'ordre $n + 1$ existent, on peut, en dérivant $n - 1$ fois l'équation (2), obtenir une équation telle que (3), où φ désigne maintenant une dérivée d'ordre $n - 1$, et où $f(X)$, qui ne dépend que des dérivées de u jusqu'à l'ordre n, est continu (L). On peut de nouveau écrire les équations (4) à (6) et l'on démontre comme ci-dessus qu'elles sont valides indépendamment de l'existence des dérivées d'ordre $n + 1$; mais alors on conclut de ces équations que les dérivées d'ordre $n + 1$ existent et sont continues (L) dans tout domaine fermé intérieur à $\mathcal{D}$.

Théorème 2. — *Soit $\mathcal{S}$ la frontière du domaine borné ouvert $\mathcal{D}$, les coordonnées des points de $\mathcal{S}$ pouvant s'exprimer par des fonctions de $m - 1$ paramètres dont les déterminants fonctionnels ne peuvent s'annuler ensemble et dont les dérivées jusqu'à l'ordre $q + 2 (q \geqq 6)$ existent et sont continues* (L). *On admet que les hypothèses du théorème* 1 *sont remplies pour cette valeur de q, et que, si $q = 6$, les dérivées sixièmes des $a_{\alpha,\beta}$ par rapport aux $p_{\alpha,\beta}$, p_α, u, x_α sont continues* (L); *enfin on suppose que u et ses dérivées jusqu'au huitième ordre sont continus même sur $\mathcal{S}$ et que les dérivées d'ordre $q + 2$ des valeurs de u sur $\mathcal{S}$ par rapport aux $m - 1$ paramètres des points de $\mathcal{S}$ existent et sont continues* (L). *Alors les dérivées de u jusqu'à l'ordre $q + 2$ sont continues* (L) *dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$.*

Il suffit de démontrer le théorème pour une partie de $\mathcal{S}$ ayant à son intérieur un point arbitraire. Nous ferons un changement de variables remplaçant cette partie de $\mathcal{S}$ par $x_m = 0$ et amenant le point considéré à l'origine, les fonctions qui définissent le changement ayant leurs dérivées d'ordre $q + 2$ continues (L). Ensuite nous remplacerons $\mathcal{D}$ par le même domaine qu'au début de la section IV, de façon à pouvoir appliquer la méthode de la section III.

Il résulte de l'énoncé que les $a_{\alpha,\beta}$, considérés comme fonctions composées de $x_1, x_2, \ldots, x_m$, ont leurs dérivées sixièmes continues même sur $\mathfrak{S}$. En procédant comme au théorème 3 de la section V, on peut prolonger hors de $\mathcal{D}$ ces fonctions $a_{\alpha.\beta}$ de $x_1, \ldots, x_m$, de façon à respecter la continuité de leurs dérivées jusqu'au troisième ordre. Le prolongement se fera à l'aide de polynomes en x_m du troisième degré au plus, à coefficients fonctions de $x_1, \ldots, x_{m-1}$; on arrêtera le prolongement à une surface assez voisine de $\mathfrak{S}$ pour que les $a_{\alpha.\beta}$ soient toujours les coefficients d'une forme quadratique définie positive; il n'est pas nécessaire ici que les $a_{\alpha.\beta}$ prennent des valeurs données sur la surface limite.

Remarquons qu'il suffit de démontrer l'existence et la continuité (L) de celles des dérivées de u qui résultent d'au plus une dérivation par rapport à x_m et d'un nombre quelconque de dérivations par rapport aux autres variables : car l'équation (2) elle-même permet d'étendre la propriété à toutes les dérivées, jusqu'à l'ordre $q+2$ bien entendu.

Montrons d'abord que les dérivées du huitième ordre de u sont continues (L). Pour cela, nous dérivons sept fois l'équation (2), aucune des dérivations n'étant faite par rapport à x_m. Nous pourrons écrire les équations (4) à (6), $\mathcal{D}_2$ débordant quelque peu $\mathcal{D}$ et $\mathfrak{S}_1$ coïncidant avec $\mathfrak{S}$; $\varphi(X)$ sera une dérivée septième de u, aucune dérivation n'étant faite par rapport à x_m; $f(X)$ dépend des dérivées de u jusqu'au huitième ordre et est donc continu (on le prolonge dans $\mathcal{D}_2$ en respectant la continuité); $f_1(Y)$ est la valeur de φ sur $\mathfrak{S}$, c'est-à-dire, sur la partie $x_m=0$ de cette multiplicité, une dérivée septième de la suite des valeurs données de u; $f_1(Y)$ a donc des dérivées continues (L). Donc (§ IV, théorème 3) toutes les dérivées de φ sont continues (L). Donc toutes les dérivées huitièmes de u sont continues (L).

Nous sommes maintenant certains que les fonctions $a_{\alpha.\beta}$ de $x_1, \ldots, x_m$, prolongées dans $\mathcal{D}_2$ de la façon indiquée, ont leurs dérivées troisièmes continues (L). Cela va permettre d'appliquer le théorème 4 de la section IV.

Supposons établi que les dérivées d'ordre n de u sont continues (L) ($8 \leq n < q+2$). Montrons que les dérivées d'ordre $n+1$ sont continues (L). Pour cela nous dérivons $n-1$ fois l'équation (2), aucune dérivation n'étant faite par rapport à x_m. Cela permet de récrire les équations (4) à (6), φ étant maintenant une dérivée d'ordre $n-1$ de u; $f(X)$ dépend des dérivées jusqu'à l'ordre n et est par suite continu (L) dans $\mathcal{D}$: on le prolonge dans $\mathcal{D}_2$ de façon à respecter cette continuité (L); $f_1(Y)$ désigne une dérivée d'ordre n des valeurs prises par u sur $\mathcal{S}$, et a par suite des dérivées secondes continues (L). Les dérivées secondes de φ sont donc continues (L) (§ IV, théorème 4) et par suite toutes les dérivées d'ordre $n+1$ de u sont continues (L). Si $n+1 < q+2$, il convient d'ajouter que $f(X)$ a des dérivées continues et $f_1(Y)$ des dérivées troisièmes continues; on a donc pour l'exposant de continuité (L) des dérivées d'ordre $n+1$ un nombre aussi peu inférieur à *un* qu'on veut. Si $n+1=q+2$, on sait seulement que $f_1(Y)$ a des dérivées secondes continues (L); on constatera que l'exposant de continuité (L) des dérivées d'ordre $q+2$ de u est le même que l'exposant correspondant pour la suite des valeurs données sur $\mathcal{S}$, pourvu que ce dernier soit au plus égal à celui des dérivées d'ordre $q+2$ des coordonnées des points de $\mathcal{S}$ et inférieur à *un*.

Théorème 3. — *Supposons que la frontière $\mathcal{S}$ du domaine $\mathcal{D}$ satisfasse aux mêmes hypothèses que dans le théorème 2, avec $q=6$. Nous considérons l'équation de type elliptique, dépendant d'un paramètre t,*

$$(7)\qquad \mathcal{F}(u) = \mathrm{F}(p_{\alpha,\beta};\, p_\alpha;\, u;\, x_\alpha;\, t) = 0.$$

Pour $0 \leqq t \leqq t'$, F et ses dérivées jusqu'au huitième ordre par rapport aux $p_{\alpha,\beta}$, p_α, u, x_α sont supposées continues (L) dans $\mathcal{C}$ par rapport à ces variables, et continues par rapport à l'ensemble de ces variables et de t. Pour $t=0$ on suppose connue une solution $u=u_0$ de l'équation (7) dont les dérivées huitièmes sont continues dans $\mathcal{D}+\mathcal{S}$. On se donne une fonction $\varphi(t;\, t_1, t_2, \ldots, t_{m-1})$ de t et des paramètres des points de $\mathcal{S}$ dont les dérivées jusqu'au huitième ordre par rapport à $t_1, t_2, \ldots, t_{m-1}$ sont, ainsi que φ, continues (L) par rapport à ces variables et continues par rapport à l'ensemble de ces variables et de t; on suppose que $\varphi(0;\, t_1, \ldots, t_{m-1})$ représente les valeurs de u_0 sur $\mathcal{S}$. On suppose enfin que l'équation

$$(8)\qquad \Sigma_{\alpha,\beta}\, a_{\alpha,\beta} \frac{\partial^2 v}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_\alpha \frac{\partial v}{\partial x_\alpha} + c v = 0,$$

où les $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c sont calculés par les formules (1) pour $u=u_0$, $t=0$, n'a pas, dans $\mathcal{D}$, d'autre solution nulle sur $\mathcal{S}$ que la solution zéro. Alors, *dès que t est assez petit, il existe une solution $u(x_1, \ldots, x_m; t)$ de l'équation (7), continue par rapport à l'ensemble des variables, se réduisant à u_0 pour $t = 0$ et prenant sur $\mathcal{S}$ les valeurs $\varphi(t; t_1, \ldots, t_{m-1})$; cette solution u est unique.*

Pour le démontrer, nous formerons par approximations successives $u_0, u_1, \ldots, u_n, \ldots$ la solution annoncée. Soient $a_{\alpha,\beta,n}$, $b_{\alpha,n}$, c_n, ce que deviennent $a_{\alpha,\beta}$, b_α, c quand on y remplace u et ses dérivées par u_n et ses dérivées; ce sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_m, t$.

D'après le théorème 2, les dérivées huitièmes de u_0 sont continues (L). Donc les dérivées sixièmes des $a_{\alpha,\beta,0}$, $b_{\alpha,0}$, c_0 par rapport à $x_1, \ldots, x_m$ sont fonctions continues (L) de ces variables, et fonctions continues de l'ensemble de ces variables et de t. Nous pouvons les prolonger hors de $\mathcal{D}$ en respectant la continuité (L) des dérivées jusqu'au troisième ordre, qui devront en outre être continues par rapport à $x_1, \ldots, x_m, t$. Pour cela nous introduirons, comme précédemment, le paramètre t_m nul sur $\mathcal{S}$, et nous emploierons des polynomes du troisième degré en t_m à coefficients dépendant de $t, t_1, \ldots, t_{m-1}$. Nous limiterons le domaine $\mathcal{D}_1$ débordant $\mathcal{D}$, dont nous nous servirons, à une multiplicité $t_m = t'_m$ telle que, dans $\mathcal{D}_1$, la forme quadratique $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta,0} z_\alpha z_\beta$ soit définie positive quel que soit t. Tant que $u - u_0$ et ses dérivées jusqu'au huitième ordre resteront suffisamment petits en valeur absolue, $\Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta} z_\alpha z_\beta$ sera, dans $\mathcal{D}_1$, une forme définie positive, les $a_{\alpha,\beta}$ étant prolongés comme les $a_{\alpha,\beta,0}$.

On calculera alors une fonction h_0, se réduisant sur $\mathcal{S}$ à

$$\varphi(t; t_1, \ldots, t_{m-1}) - \varphi(0; t_1, \ldots, t_{m-1}),$$

et telle que

$$(9) \qquad \Sigma_{\alpha,\beta,0} \frac{\partial^2 h_0}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_{\alpha,0} \frac{\partial h_0}{\partial x_\alpha} + c_0 h_0 = -F\left(\frac{\partial^2 u_0}{\partial x_\alpha \, \partial x_\beta}; \frac{\partial u_0}{\partial x_\alpha}; u_0; x_\alpha; t \right).$$

Cette fonction h_0 existe certainement si t est assez petit, car quand t tend vers zéro, les coefficients et leurs dérivées jusqu'au sixième ordre par rapport à $x_1, \ldots, x_m$ tendent uniformément vers les fonctions correspondantes relatives à l'équation (8). Si l'on prolonge ces coefficients comme au théorème 3 de la section V et qu'on détermine en même temps les fonctions $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_m$ et χ comme il a été expliqué, la fonction $G(X, \Xi)$ et ses dérivées dépendront continûment de t, et par suite il en sera de même de la fonction déterminante du système [(29), (30)] (§ V) après un nombre d'itérations suffisant pour rendre le noyau continu. Or, cette fonction déterminante, pour un nombre d'itérations convenablement choisi, n'est pas nulle pour l'équation (8) (§ V, théorème 3); elle n'est donc pas nulle non plus pour l'équation (9). On posera alors

$$u_1 = u_0 + h_0.$$

Ensuite, d'une façon générale, ayant $u_n (n \geqq 1)$, on déterminera par l'équation

$$(10) \quad \Sigma_{\alpha,\beta} a_{\alpha,\beta,n} \frac{\partial^2 h_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta} + \Sigma_\alpha b_{\alpha,n} \frac{\partial h_n}{\partial x_\alpha} + c_n h_n = -F\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_\alpha \partial x_\beta}; \frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha}; u_n; x_\alpha; t\right)$$

une fonction h_n nulle sur $\mathcal{S}$, ayant ses dérivées secondes continues dans $\mathcal{D}$. Cette fonction existera et sera complètement déterminée si $u_0 - u_n$ et ses dérivées jusqu'au huitième ordre sont assez voisines de zéro. On posera enfin

$$(11) \qquad u_{n+1} = u_n + h_n.$$

Il s'agit de prouver que si t est assez petit, ces calculs peuvent être poursuivis indéfiniment et que u_n a une limite u satisfaisant aux conditions voulues.

Soit M_n une limite supérieure des valeurs absolues de h_n et de ses dérivées des huit premiers ordres; M_n est en outre au moins égal au coefficient de continuité (L) des dérivées huitièmes, l'exposant correspondant étant q_n; M_n est une fonction de t. Je dis que les valeurs absolues du second membre de (10) et de ses dérivées jusqu'au sixième ordre, ainsi que le coefficient de continuité (L) des dérivées sixièmes, sont inférieurs au produit de M_{n-1}^2 par une constante.

D'une façon générale, soit $\Phi(u, v, w)$ une fonction d'un nombre quelconque de variables, continue ainsi que ses dérivées partielles jusqu'à l'ordre $p \geqq 2$; les dérivées d'ordre p sont continues (L) d'exposant μ. On y remplace u, v, w par des fonctions d'un nombre quelconque de variables admettant des dérivées d'ordre $p - 2$ continues (L) d'exposant q. Enfin on détermine d'autres fonctions δu, δv, δw, dont les dérivées d'ordre $p - 2$ sont continues (L) d'exposant q, et qui sont telles que

$$G'_u(u, v, w)\,\delta u + G'_v(u, v, w)\,\delta v + G'_w(u, v, w)\,\delta w = -G(u, v, w),$$

ou avec la notation différentielle

$$\delta G(u, v, w) = -G(u, v, w).$$

Si M est une limite supérieure des valeurs absolues δu, δv, δw et de leurs dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$, ainsi que du coefficient de continuité (L) de ces dernières, la formule de Taylor

$$\begin{aligned} &G(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w) \\ &\quad = G(u, v, w) + \delta G(u, v, w) \\ &\qquad + \frac{1}{2}\delta^2 G(u+\theta\,du, v+\theta\,\delta v, w+\theta\,\delta w) \qquad (0<\theta<1) \end{aligned}$$

prouve que

$$|G(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w)| < kM^2,$$

k dépendant des limites supérieures des valeurs absolues des dérivées secondes de G, mais non de M si M est assez petit. Si $p=2$, je dis qu'en outre $G(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w)$ est continu (L). En effet, donnons aux variables indépendantes dont dépendent u, v, w deux systèmes de valeurs; soit r la distance des points correspondants; désignons par le symbole Δ l'accroissement d'une fonction quelconque quand on passe du premier système de valeurs au second. Nous appliquons la formule de Taylor à la fonction $\Delta G(u, v, w)$ des variables u, v, w, $u+\Delta u$, $v+\Delta v$, $w+\Delta w$, qui reçoivent les accroissements δu, δv, ..., $\delta(w+\Delta w)$:

$$\begin{aligned} &\Delta G(u+\delta u, v+\delta v, w+\delta w) \\ &\quad = \frac{1}{2}\Delta\delta^2 G(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v, w+\theta\,\delta w) \qquad (0<\theta<1), \end{aligned}$$

le nombre θ n'étant pas le même que plus haut. Or le second membre peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2}\delta u^2 \Delta G''_{u^2}(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v, w+\theta\,\delta w) \\ &+ \delta u\,\delta v\,\Delta G''_{uv}(u+\theta\,\delta u, v+\theta\,\delta v, w+\theta\,\delta w) + \ldots + \frac{1}{2}[(\delta u+\delta\Delta u)^2 - \delta u^2] \\ &\times G''_{u^2}[u+\Delta u+\theta\,\delta(u+\Delta u), \ldots, w+\Delta w+\theta\,\delta(w+\Delta w)] + \ldots. \end{aligned}$$

Or $u+\theta\delta u$ reçoit l'accroissement $\Delta(u+\theta\delta u)$, moindre en valeur absolue que kr^q, k étant supérieur à la somme de M et du coefficient de continuité (L) de u : c'est donc une constante si M est assez petit. La première ligne est donc moindre en valeur absolue que $k\mathrm{M}^2 r^{\mu q}$, en continuant à nommer k n'importe quelle constante indépendante de M et de r. Dans la seconde ligne, on écrit

$$(\delta u+\delta\Delta u)^2-\delta u^2=\delta\Delta u\,\delta(u+\Delta u)+\delta u\,\delta\Delta u,$$
$$(\delta u+\delta\Delta u)(\delta v+\delta\Delta v)-\delta u\,\delta v=\delta\Delta u\,\delta(v+\Delta v)+\delta u\,\delta\Delta v;$$

remarquons que $|\delta u|$, $|\delta(u+\Delta u)|$, $|\delta(v+\Delta v)|$ sont inférieurs à M, et que $|\delta\Delta u|$ et $|\delta\Delta v|$ sont inférieurs à $\mathrm{M}r^q$: nous voyons que cette seconde ligne a une limitation $k\mathrm{M}^2 r^q$, qu'on peut remplacer par $k\mathrm{M}^2 r^{\mu q}$ puisque $\mu \leqq 1$.

On a donc

$$|\Delta\mathrm{G}(u+\delta u,\ v+\delta v,\ w+\delta w)|<k\mathrm{M}^2 r^{\mu q},$$

comme nous l'avions annoncé.

Si maintenant $p>2$, on remarque que, x étant une des variables dont dépendent u, v, w,

$$\begin{aligned}
&\mathrm{G}'_u(u,v,w)\,\delta\frac{\partial u}{\partial x}+\ldots+\mathrm{G}'_w(u,v,w)\,\delta\frac{\partial w}{\partial x}+\mathrm{G}''_{u^2}(u,v,w)\frac{\partial u}{\partial x}\delta u\\
&+\mathrm{G}''_{uv}(u,v,w)\left(\frac{\partial u}{\partial x}\delta v+\frac{\partial v}{\partial x}\delta u\right)+\ldots+\mathrm{G}''_{w^2}(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial x}\delta w\\
&=-\mathrm{G}'_u(u,v,w)\frac{\partial u}{\partial x}-\mathrm{G}'_v(u,v,w)\frac{\partial v}{\partial x}-\mathrm{G}'_w(u,v,w)\frac{\partial w}{\partial x}.
\end{aligned}$$

Les fonctions δu, δv, δw, $\delta\frac{\partial u}{\partial x}$, $\delta\frac{\partial v}{\partial x}$, $\delta\frac{\partial w}{\partial x}$ jouent donc pour le second membre le même rôle que δu, δv, δw pour $-\mathrm{G}(u,v,w)$. Tout ce que nous venons de dire s'applique donc, et l'on voit qu'on peut répéter le raisonnement jusqu'aux dérivées d'ordre $p-2$; celles-ci sont donc continues (L) d'exposant $\mu.q$, et leur coefficient de continuité (L) ainsi que les valeurs absolues de $\mathrm{G}(u+\delta u,\ v+\delta v,\ w+\delta w)$ et de ses dérivées jusqu'à l'ordre $p-2$ sont moindres que $k\mathrm{M}^2$.

Ici en désignant par μ l'exposant de continuité (L) des dérivées huitièmes de F par rapport aux $p_{\alpha,\beta}$, p_α, u, x_α, on voit que

$$\mathrm{F}\left(\frac{\partial^2 u_n}{\partial x_\alpha\,\partial x_\beta};\ \frac{\partial u_n}{\partial x_\alpha};\ u_n;\ x_\alpha;\ t\right)$$

et ses dérivées complètes par rapport à $x_1, \ldots, x_m$, jusqu'au sixième ordre, sont en valeur absolue moindres que $k\mathrm{M}_{n-1}^2$; les dérivées sixièmes sont continues (L) d'exposant μq_{n-1} et de coefficient $k\mathrm{M}_{n-1}^2$; k désigne n'importe quelle quantité qu'on peut laisser constante tant que t, $u_0 - u_n$ et ses dérivées jusqu'au huitième ordre et le coefficient de continuité (L) de ces dernières restent assez voisins de zéro.

Dans ces conditions (§ V, théorème 3), h_n existe; sa valeur absolue est moindre que $k\mathrm{M}_{n-1}^2$. Puis (§ IV, théorèmes 2, 3, 4) les dérivées premières et secondes de h_n sont continues même sur $\mathfrak{S}$ et leurs valeurs absolues sont moindres que $k\mathrm{M}_{n-1}^2$; en dérivant jusqu'à cinq fois l'équation (10), on voit (§ IV, théorème 4) qu'il en est de même des dérivées de h_n jusqu'au septième ordre. A l'aide d'une sixième dérivation de l'équation (10), on constate (§ IV, théorème 4, application finale) que les dérivées huitièmes de h_n sont continues (L) d'exposant $\mu q_{n-1}(1+\mu q_{n-1})^{-1}$, pourvu que μq_{n-1} soit inférieur au coefficient de continuité (L) des dérivées huitièmes des coordonnées des points de $\mathfrak{S}$; les valeurs absolues des dérivées huitièmes de h_n sont moindres que $k\mathrm{M}_{n-1}^2(\mu q_{n-1})^{-1}$ et leur coefficient de continuité (L) moindre que $k\mathrm{M}_{n-1}^2(\mu q_{n-1})^{-2}$. D'ailleurs μ est indépendant de n, et l'on peut donc confondre $k\mu^{-1}$ et $k\mu^{-2}$ avec k; donc, dès que q_{n-1} est assez petit,

$$q_n = \mu q_{n-1}(1+\mu q_{n-1})^{-1}, \tag{12}$$

$$\mathrm{M}_n = k\mathrm{M}_{n-1}^2 q_{n-1}^{-2}. \tag{13}$$

On voit que $q_n < q_{n-1}$, de sorte que si q_0 est assez petit (on peut toujours le prendre aussi petit qu'on veut) la première formule peut toujours servir ensuite. Si $\mu < 1$, on en tire

$$q_n = \frac{\mu^n(1-\mu)q_0}{1-\mu+(1-\mu^{n+1})q_0} \qquad (\mu < 1);$$

et si $\mu = 1$,

$$q_n = \frac{q_0}{1+nq_0} \qquad (\mu = 1).$$

Dans (13) le coefficient de M_{n-1}^2 est donc $\mathrm{O}(\mu^{-2n})$ si $\mu < 1$, et $\mathrm{O}(n^2)$ si $\mu = 1$. Cela suffit pour prouver que si M_0 est assez petit, la série $\Sigma\mathrm{M}_n$ converge et a une somme aussi petite qu'on veut [cette conclusion aurait lieu même avec un coefficient $\mathrm{O}(a^{b^n})$ si $a > 1$,

$1 < b < 2$ |; or M_0 est infiniment petit avec t; donc $u_n - u_0$ restera, si t est assez petit, aussi voisin de zéro qu'on voudra, ainsi que ses dérivées jusqu'au huitième ordre et leur coefficient de continuité (L); nous pouvons donc faire croître n indéfiniment, la convergence a lieu, l'existence de u est démontrée.

On voit que les dérivées huitièmes de u sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$; il résulte du théorème 2 qu'elles sont continues (L). On pourra donc prendre u, au lieu de u_0, comme nouveau point de départ.

Cette solution u est unique. Soit en effet v une autre solution dépendant de t, dont les dérivées jusqu'au huitième ordre sont continues dans $\mathcal{D} + \mathcal{S}$ et tendent uniformément vers les dérivées de u_0 quand t tend vers zéro; dans les mêmes conditions, on suppose que v tend vers u_0. Dès que t est assez petit, v est identique à u. En effet on peut prendre u comme point de départ pour calculer v par approximations successives, si t est assez petit; or toutes ces approximations restent égales à u, donc $v = u$.

Le théorème est démontré.

Si l'on prend u au lieu de u_0 comme nouveau point de départ, on atteindra dans certains cas de nouvelles valeurs de t. En particulier *si l'on connaît* a priori *des limites supérieures des valeurs absolues de u et de ses dérivées jusqu'au huitième ordre, et que ces limites supérieures soient indépendantes de t* et telles que l'on ne sorte pas du champ où sont remplies les hypothèses sur F, et si l'on est dans l'un des cas où l'hypothèse relative à l'équation (8) est toujours satisfaite, la limite des valeurs admissibles de M_0 sera aussi indépendante de t; on sera certain de la convergence des approximations si l'accroissement de t est lui-même inférieur à un nombre fixe; par suite, *on est certain de pouvoir aller de proche en proche jusqu'à telle valeur de t qu'on veut.*

Dans certains cas, on peut retrouver les conclusions des théorèmes 2 et 3 avec moins d'hypothèses relatives à u. Si les $p_{\alpha,\beta}$ figurent linéairement dans F, les $a_{\alpha,\beta}$ en sont indépendants, et l'on peut, dans les énoncés, remplacer les dérivées huitièmes par les dérivées septièmes. Si en outre les $a_{\alpha,\beta}$ ne contiennent pas les p_α, on peut se borner aux dérivées cinquièmes. Dans ce dernier cas, il suffit d'être assuré de la continuité des dérivées secondes pour retrouver les conclusions du théorème 1.

VII.

Nous sommes restés jusqu'ici dans le domaine réel. Mais les calculs peuvent être repris dans le domaine complexe ([1]). Cela va nous servir à établir des propositions sur la nature analytique des solutions de l'équation (2) de la section précédente.

THÉORÈME 1. — *Supposons que* F [§ VI, (2)] *soit une fonction holomorphe de tous ses arguments, et que* u, *ainsi que ses dérivées jusqu'au troisième ordre, soit continu* (L) *dans* $\mathcal{D}$: *alors* u *est holomorphe dans* $\mathcal{D}$.

Mettons l'origine O des coordonnées en un point quelconque de $\mathcal{D}$, où nous voulons prouver que u est holomorphe. On sait déjà que u est indéfiniment dérivable (§ VI, théorème 1). Soit u_0 une solution de l'équation (2), holomorphe en O et dont les dérivées jusqu'au neuvième ordre coïncident en O avec celles de u : on peut former u_0 par le théorème de Cauchy-Kowalewski. Soient d'autre part $\mathcal{S}_1$ une hypersphère de centre O et de rayon assez petit, $\mathcal{D}_1$ son intérieur. Nous prenons u_0 comme point de départ d'une application de la méthode des approximations successives; les valeurs données sur $\mathcal{S}_1$ seront celles de u, et les approximations seront données par les formules (9) à (11) de la section VI. Elles convergeront si le rayon de $\mathcal{S}_1$ est assez petit. Il suffit pour le voir de prouver que le nombre M_0 de la section précédente tend vers zéro avec ce rayon. Or cela est évident, car d'une part le second membre de (9) est ici identiquement nul; d'autre part si X varie sur une hypersphère de centre O et de rayon *un*, et si μ est un paramètre, $u(\mu X) - u_0(\mu X)$ et les produits par μ^{-p} de ses dérivées d'ordre p tendent vers zéro avec μ si p ne dépasse pas *neuf*. On voit donc que les approximations couvergeront; elles tendront vers u car, le rayon de l'hypersphère étant assez petit, l'hypothèse sur l'équation (8) (§ VI) est toujours satisfaite.

Mais on peut former *les mêmes* approximations dans le domaine complexe. Si le nombre g qui intervient dans le calcul ([2]) est assez

---

([1]) D., p. 44 et suiv.

([2]) D., p. 45. Dans D., p. 118, l'énoncé doit être complété comme ci-dessus.

petit, il y aura encore convergence; les conditions de Lipschitz généralisées devront s'écrire ici

$$|\Phi(X) - \Phi(Y)| < k L^h(X', Y'),$$

où X et Y sont des points d'une même multiplicité complexe à m paramètres réels, de la sorte admise dans le calcul, et où X' et Y' sont les projections de X et de Y sur l'espace réel. Les approximations successives sont donc holomorphes à l'intérieur d'un certain domaine à $2m$ dimensions, à l'intérieur duquel est l'origine, et où elles convergent uniformément : donc u est holomorphe en O.

Théorème 2. — *Si la fonction u est holomorphe dans le domaine $\mathcal{D}$ de frontière $\mathcal{S}$, et si u et ses dérivées jusqu'au huitième ordre sont continus aux points d'une partie régulièrement analytique de $\mathcal{S}$, sur laquelle u prend des valeurs holomorphes, u est prolongeable analytiquement à travers cette partie de $\mathcal{S}$.*

Tout d'abord toutes les dérivées de u sont continues sur cette partie de $\mathcal{S}$ (§ VI, théorème 2). Par un changement de variables, nous ferons en sorte que cette partie de $\mathcal{S}$ devienne $x_m = 0$, un point arbitrairement choisi venant en O, et $\mathcal{D}$ étant du côté $x_m > 0$. Nous considérons d'autre part la surface

$$R^8 x_m = (R \pm \sqrt{2R^2 - x_1^2 - \ldots - x_{m-1}^2})^9,$$

dont la partie située dans la région $x_m \geqq 0$, jointe à la partie de $x_m = 0$ située dans la région

$$x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 < R^2$$

sera désignée par $\mathcal{S}_1$; l'intérieur de $\mathcal{S}_1$ sera $\mathcal{D}_1$. $\mathcal{S}_1$ est régulièrement analytique sauf sur la multiplicité $\mathcal{C}$

$$x_m = 0, \qquad x_1^2 + \ldots + x_{m-1}^2 = R^2;$$

mais, même sur $\mathcal{C}$ et dans son voisinage, la coordonnée x_m est fonction continue et à dérivées huitièmes continues (L) des autres coordonnées.

On désignera encore par u_0 une solution de (2) holomorphe en O et telle que $u - u_0$ et ses dérivées jusqu'au neuvième ordre soient nulles en O. Dès que R est assez petit, le même mécanisme d'approximations successives qu'au théorème 1 permet de reproduire u dans $\mathcal{D}_1$.

Mais ce mécanisme peut aussi s'appliquer à des multiplicités complexes à m paramètres réels dont la frontière coïncide avec $\mathcal{S}_1$ dans la région $x_m > 0$, et dont la frontière, sur $x_m = 0$, est une multiplicité *complexe* bornée à $\mathcal{C}$. Les approximations continuent à converger uniformément; cela prouve que, sur $x_m = 0$, $\frac{\partial u}{\partial x_m}$ est une fonction holomorphe de $x_1, \ldots, x_{m-1}$. Il en est de même sur $x_m = h$ $(h > 0)$; sur cette dernière multiplicité, u est holomorphe, ce qui permet d'appliquer le théorème de Cauchy-Kowalewski; dès que h est assez petit, on constate que le prolongement analytique passe à travers la multiplicité $x_m = 0$, ce qui démontre le théorème.