JULES HAAG

Extension de la théorie de Saint-Venant aux fils élastiques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 46 (1929), p. 105-129
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1929_3_46__105_0>

EXTENSION

DE LA

THÉORIE DE SAINT-VENANT

AUX FILS ÉLASTIQUES

PAR M. J. HAAG

(à Besançon)

On sait que toute la théorie des ressorts repose sur la proportionnalité du couple de flexion à l'accroissement de courbure et sur la proportionnalité du couple de torsion à l'accroissement de torsion. Ces lois fondamentales sont ordinairement établies par les raisonnements approchés de la résistance des matériaux ou bien par simple extrapolation de la théorie de Saint-Venant sur la flexion et la torsion des prismes. Dans son Mémoire sur le spiral réglant, Phillips a démontré, pour le spiral plat, que la première de ces deux lois est une conséquence rigoureuse de la théorie mathématique de l'élasticité, à condition de supposer les dimensions de la section droite très petites vis-à-vis du rayon de courbure et de supposer en outre que le moment fléchissant est constant tout le long du ressort.

Dans ce qui va suivre, nous allons démontrer simultanément les deux lois sans autre hypothèse que la *petitesse de la section vis-à-vis du rayon de courbure et du rayon de torsion*. Nous verrons toutefois que, dans certains cas, *la formule de la flexion doit être légérement modifiée*.

Avant d'aborder le problème proprement dit, il nous sera utile d'établir, au moyen du calcul tensoriel, les équations générales de l'élasticité, dans un système quelconque de coordonnées curvilignes [1].

[1] *Cf.* GALBRUN, *Introduction à la théorie de la relativité. Calcul différentiel absolu et Géométrie* (Gauthier-Villars, 1923).

I. — Équations générales de l'élasticité, en coordonnées curvilignes quelconques.

1. *Calcul de la déformation pure.* — Soit un système quelconque de coordonnées curvilignes contrevariantes x^1, x^2, x^3 et soit

$$ds^2 = g_{ik}dx^i dx^k$$

le carré de l'élément linéaire correspondant.

Considérons maintenant un milieu élastique rapporté à ce système et donnons-lui une déformation infiniment petite. Nous supposerons que, sous l'action de cette déformation, les coordonnées x^i d'un point quelconque subissent les accroissements infiniment petits u^i. Nous supposerons, de plus, que le système de coordonnées est légèrement modifié, de telle sorte que les g_{ik} subissent les accroissements infiniment petits ε_{ik}.

Cela posé, nous allons calculer les coefficients de la déformation pure.

Soient, à l'état naturel, deux points voisins $M(x^i)$ et $P(x^i + \alpha^i)$, les α^i étant des variables indépendantes infiniment petites. Le carré de la distance de ces deux points est

$$ds^2 = g_{ik}\alpha^i\alpha^k. \tag{1}$$

Après la déformation, il a subi l'accroissement

$$\delta(ds^2) = \varepsilon_{ik}\alpha^i\alpha^k + g_{ik}(\alpha^i\delta\alpha^k + \alpha^k\delta\alpha^i) + \alpha^i\alpha^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}u^j.$$

Or,

$$\delta\alpha^k = d(\delta x^k) = \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\alpha^j.$$

D'où

$$\delta(ds^2) = \varepsilon_{ik}\alpha^i\alpha^k + g_{ik}\left(\frac{\partial u^k}{\partial x^j}\alpha^i\alpha^j + \frac{\partial u^i}{\partial u^j}\alpha^k\alpha^j\right) + \alpha^i\alpha^k\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}u^j, \tag{2}$$

ou

$$\delta(ds^2) = \varepsilon_{ik}\alpha^i\alpha^k + \frac{\partial u^k}{\partial x^j}\alpha_k\alpha^j + \frac{\partial u^i}{\partial x^j}\alpha_i\alpha^j + \alpha^i\alpha^k u^j\left(\begin{bmatrix} ij \\ k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} kj \\ i \end{bmatrix}\right),$$

ou

$$\delta(ds^2) = \varepsilon_{ik}\alpha^i\alpha^k + \frac{\partial u^k}{\partial x^i}\alpha_k\alpha^i + \frac{\partial u^i}{\partial x^k}\alpha_i\alpha^k + \alpha^i\alpha^k u^j\left(g_{km}\begin{Bmatrix} ij \\ m \end{Bmatrix} + g_{im}\begin{Bmatrix} kj \\ m \end{Bmatrix}\right).$$

Le dernier terme peut s'écrire

$$\alpha^i\alpha_m u^j \begin{Bmatrix} ij \\ m \end{Bmatrix} + \alpha^k\alpha_m u^j \begin{Bmatrix} kj \\ m \end{Bmatrix} = \alpha_k\alpha^i u^j \begin{Bmatrix} ij \\ k \end{Bmatrix} + \alpha_i\alpha^k u^j \begin{Bmatrix} kj \\ i \end{Bmatrix}.$$

En portant dans la formule précédente, il vient

$$\delta(ds^2) = \varepsilon_{ik}\alpha^i\alpha^k + \alpha_k\alpha^i \mathrm{D}_i u^k + \alpha_i\alpha^k \mathrm{D}_k u^i,$$

en représentant par D_i le symbole des dérivées covariantes. Ceci peut s'écrire enfin

$$\delta(ds^2) = 2 h_{ik}\alpha^i\alpha^k, \tag{3}$$

en posant

$$2 h_{ik} = \mathrm{D}_i u_k + \mathrm{D}_k u_i + \varepsilon_{ik}. \tag{4}$$

Tels sont les *coefficients de la déformation pure* (¹).

2. *Dilatation cubique*. — Un volume V quelconque, pris à l'état naturel, devient, après la déformation.

$$\mathrm{V}' = \iiint \sqrt{g'}\,\frac{\mathrm{D}(x'^i)}{\mathrm{D}(x^i)}\,dx^1\,dx^2\,dx^3.$$

On en déduit la dilatation cubique

$$\theta = \frac{\sqrt{g'}\left(1+\dfrac{\partial u^i}{\partial x^i}\right) - \sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{\partial u^i}{\partial x^i} + \frac{\sqrt{g'}-\sqrt{g}}{\sqrt{g}}$$

au second ordre près. Or,

$$\frac{\sqrt{g'}-\sqrt{g}}{\sqrt{g}} = \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(\sqrt{g})}{\partial x^i}\,u^i + \frac{1}{2}\,\frac{\delta g}{g},$$

en appelant δg l'accroissement de g dû aux ε_{ik}. Donc,

$$\theta = \frac{1}{2}\,\frac{\delta g}{g} + \frac{1}{\sqrt{g}}\,\frac{\partial(u^i\sqrt{g})}{\partial x^i}, \tag{5}$$

(¹) Pour $\varepsilon_{ik} = 0$, on retrouve une formule établie par M. Galbrun (*loc. cit.*).

ou encore, d'après des formules connues,

$$\theta = \frac{1}{2}(g^{ik}\varepsilon_{ik}) + D_i u^i = \frac{1}{2}\varepsilon_i^i + D_i u^i. \tag{6}$$

3. *Loi de Hooke.* — Soit un vecteur unitaire α^i. L'effort exercé sur l'unité de surface normale à ce vecteur a pour composantes covariantes

$$T_{ik}\alpha^k. \tag{7}$$

En coordonnées cartésiennes, on a

$$T_{ik} = \lambda\theta g_{ik} + 2\mu h_{ik}. \tag{8}$$

Comme cette relation est invariante, elle est générale. En se reportant à la formule (4), on a donc

$$T_{ik} = \lambda\theta g_{ik} + \mu(D_i u_k + D_k u_i + \varepsilon_{ik}). \tag{9}$$

Au lieu de remplacer h_{ik} par (4), on peut aussi lui garder la forme déduite de (2), ce qui donne

$$T_{ik} = \lambda\theta g_{ik} + \mu\left(g_{ij}\frac{\partial u^j}{\partial x^k} + g_{kj}\frac{\partial u^j}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}u^j + \varepsilon_{ik}\right). \tag{10}$$

Sous cette forme, le caractère d'invariance n'est pas évident. Mais la formule est d'une application pratique plus commode.

4. *Équations indéfinies d'équilibre.* — Soient X_i les composantes covariantes de la force extérieure appliquée à l'unité de volume. Les trois équations

$$X_i + D_k T_i^k = 0$$

sont les équations indéfinies d'équilibre en coordonnées cartésiennes. Comme elles sont invariantes, elles sont générales. Le tenseur T_{ik} étant symétrique, on peut aussi écrire

$$X_i + \frac{1}{\sqrt{g}}\frac{\partial(T_i^k\sqrt{g})}{\partial x^k} - \frac{1}{2}T^{jk}\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} = 0. \tag{11}$$

Il serait facile d'expliciter ces équations en fonction des u^i, en utilisant les formules (10). Mais, cela ne nous est pas nécessaire pour la suite.

5. *Énergie de déformation.* — Elle est donnée par la formule invariante

$$V = \frac{1}{2}\iiint T^{ik} h_{ik} \sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3, \tag{12}$$

qui, dans le cas des coordonnées cartésiennes, se réduit à la formule de Clapeyron. D'après (8), elle peut aussi s'écrire

$$V = \frac{1}{2}\iiint (\lambda\theta h_i^i + 2\mu h_k^i h_i^k)\sqrt{g}\, dx^1\, dx^2\, dx^3. \tag{13}$$

On peut aussi l'exprimer en fonction des T_{ik}. En contractant (8), on a

$$T_i^i = 3\lambda\theta + 2\mu h_i^i.$$

D'autre part, en contractant (4) et en comparant à (6), on voit que

$$h_i^i = \theta.$$

Donc,

$$\theta = \frac{T_i^i}{3\lambda + 2\mu},$$

et, par suite,

$$h_{ik} = \frac{1}{2\mu}\left(T_{ik} - \frac{\lambda T_j^j}{3\lambda + 2\mu} g_{ik}\right).$$

En portant dans (12), il vient

$$V = \frac{1}{4\mu}\iiint \left[T_k^i T_i^k - \frac{\lambda}{3\lambda + 2\mu}(T_i^i)^2\right]\sqrt{g}\, dx^1\, dx^3\, dx^3. \tag{14}$$

Il est facile de vérifier qu'en coordonnées cartésiennes, les formules (13) et (14) redonnent bien les diverses formes connues de la formule de Clapeyron.

II. — Application au fil élastique.

6. *Définition des coordonnées.* — Nous considérerons notre fil comme limité par une surface canal, c'est-à-dire engendrée par une courbe plane Γ, dont le plan reste normal aux trajectoires de tous ses points. Nous appellerons *fibre neutre* (F) celle de ces trajectoires qui est décrite par le centre de gravité de la section droite (A) limitée par Γ.

Soit M un point quelconque du fil à l'état naturel. Nous définirons ses coordonnées de la manière suivante. Projetons-le en O sur la fibre neutre et soit s l'abscisse curviligne de O sur cette courbe. Menons le trièdre de Frenet $Oxyz$, Oz étant la tangente, Ox la normale principale et Oy la binormale. Soient (x, y, o) les coordonnées cartésiennes de M par rapport à ce trièdre. Nous prendrons les trois nombres x, y, s pour *coordonnées curvilignes de* M, soit

$$x^1 = x, \qquad x^2 = y, \qquad x^3 = s.$$

7. *Calcul du* ds^2. — Si l'on fait jouer à s le rôle du temps, on sait que les rotations du trièdre $Oxyz$ sont

$$p = 0, \qquad q = \frac{1}{R}, \qquad r = -\frac{1}{T},$$

en appelant R et T les rayons de courbure et de torsion.

Si les x^i augmentent de dx^i, le déplacement élémentaire de M a pour composantes cartésiennes par rapport à $Oxyz$

$$dx - ry\,ds, \quad dy + rx\,ds, \quad ds - qx\,ds,$$

ou

$$(15) \qquad dx^1 - rx^2\,dx^3, \quad dx^2 + rx^1\,dx^3, \quad dx^3(1 - qx^1).$$

On a donc

$$ds^2 = (dx^1 - rx^2\,dx^3)^2 + (dx^2 + rx^1\,dx^3)^2 + (1 - qx^1)^2(dx^3)^2.$$

D'où

$$(16) \qquad \begin{cases} g_{11} = 1, & g_{22} = 1, & g_{33} = (1 - qx)^2 + r^2(x^2 + y^2), \\ g_{23} = rx, & g_{13} = -ry, & g_{12} = 0. \end{cases}$$

Le discriminant g a pour valeur

$$(17) \qquad g = h^2, \qquad h = 1 - qx.$$

Les composantes contrevariantes du tenseur fondamental sont

$$(18) \qquad \begin{cases} g^{11} = 1 + \dfrac{r^2y^2}{g}, & g^{22} = 1 + \dfrac{r^2x^2}{g}, & g^{33} = \dfrac{1}{g}, \\ g^{23} = -\dfrac{rx}{g}, & g^{13} = \dfrac{ry}{g}, & g^{12} = -\dfrac{r^2xy}{g}. \end{cases}$$

8. *Déformation du fil.* — La *nouvelle forme de la fibre neutre* est entièrement déterminée si l'on se donne, pour chaque point O :

1° la dilatation linéaire e;
2° L'accroissement de courbure ρ;
3° L'accroissement de torsion $-\tau$.

La dilatation linéaire permet, en effet, de calculer le nouvel arc s' en fonction de s; puis, ρ et τ permettent de calculer la nouvelle courbure et la nouvelle torsion en fonction de s' et l'on sait que cela suffit pour déterminer la forme et la grandeur de la nouvelle fibre (F').

Considérons maintenant le point M du n° 6. Après déformation, il occupe la position M'. Au point M', nous faisons correspondre, au moyen de la courbe F' et par le procédé indiqué au n° 6, les nouvelles coordonnées x', y', s'. Nous poserons

$$u = x' - x, \qquad v = y' - y, \qquad w = s' - s,$$

de sorte que

$$u^1 = u, \qquad u^2 = v, \qquad u^3 = w.$$

Remarquons tout de suite que, pour $x = y = 0$, on a nécessairement $u = v = 0$. Quant à w, il devient une certaine fonction w_0 de s, qui mesure l'accroissement de longueur subi par l'arc s pendant la déformation de la fibre neutre. La dérivée de cette fonction n'est autre que la dilatation e. Nous poserons

$$w = w_0 + \mathrm{W},$$

de sorte que la fonction W devra s'annuler identiquement pour $x = y = 0$.

Observons maintenant que la valeur de w_0 dépend essentiellement du choix de l'origine des arcs sur F. Nous supposerons que cette origine coïncide avec le point O correspondant au point M pour lequel sont écrites les équations d'équilibre. Ceci ne veut pas dire évidemment que la fonction w_0 sera identiquement nulle. En particulier, *sa dérivée continuera à être égale à e*. De sorte que nous remplacerons w par W, mais en faisant la convention de *remplacer* $\dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial s}$ *par* $e + \dfrac{\partial \mathrm{W}}{\partial s}$.

9. *Calcul des* ε_{ik}. — Ils résultent des formules (16), si l'on connaît

les accroissements δq et δr. Or, δq, par exemple, représente l'accroissement subi par la rotation q quand on passe du point O de (F) au point O′ de (F′) qui a même abscisse curviligne. D'autre part, nous avons appelé ρ l'accroissement de q entre le point O et le point O″ de (F′) où vient se placer O après la déformation. Comme l'arc O′O″ est égal à w_0, on a, en se rappelant la convention faite à la fin du numéro précédent,

$$\delta q = \rho, \qquad \frac{d(\delta q)}{ds} = \frac{d\rho}{ds} - e\frac{dq}{ds}.$$

De même pour δr.

En différentiant (16), on en déduit

$$(19) \qquad \begin{cases} \varepsilon_{11} = \varepsilon_{22} = \varepsilon_{12} = 0, & \varepsilon_{23} = \tau x, \qquad \varepsilon_{13} = -\tau y, \\ \varepsilon_{33} = -2h\rho x + 2(x^2 + y^2)r\tau, \end{cases}$$

avec la convention de remplacer, s'il y a lieu, $\frac{d\rho}{ds}$ et $\frac{d\tau}{ds}$ par $\frac{d\rho}{ds} - e\frac{dq}{ds}$ et $\frac{d\tau}{ds} - e\frac{dr}{ds}$.

10. *Calcul de la dilatation cubique.* — Elle est donnée par la formule (5) :

$$(20) \qquad \theta = -\frac{x\left(\rho + W\frac{dq}{ds}\right) + uq}{h} + \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + e + \frac{\partial W}{\partial s}.$$

Il est à remarquer qu'on peut y dériver ρ et W par rapport à s sans faire les deux corrections indiquées précédemment, car ces deux corrections se détruisent.

11. *Conditions aux limites.* — Nous supposons qu'aucune force n'est appliquée sur la surface latérale du fil. L'une des extrémités A est encastrée dans un appui fixe. L'autre extrémité B est soumise à une force F et à un couple C. Nous conviendrons que le sens positif sur (F) est le sens de A vers B.

Considérons maintenant les efforts exercés sur la section droite (A) par la portion du fil située du côté des s croissants. Ils constituent un système équivalent au système des forces extérieures appliquées entre (A) et l'extrémité B. Nous appellerons X, Y, Z, L, M, N les coordonnées cartésiennes de ce système par rapport au trièdre de Frenet $Oxyz$.

Voyons comment vont s'écrire les conditions aux limites résultant de ces hypothèses.

Il faut, au préalable, calculer les *composantes cartésiennes* T_x, T_y, T_z *de l'effort exercé sur l'élément dont la normale a pour cosinus directeurs* α, β, γ.

D'après les formules (15), on a, en appelant α^i les composantes contrevariantes du vecteur cartésien (α, β, γ) :

$$\alpha = \alpha^1 - ry\alpha^3, \qquad \beta = \alpha^2 + rx\alpha^3, \qquad \gamma = \alpha^3(1 - qx);$$

$$(21)\quad T_x = T_k^1\alpha^k - ryT_k^3\alpha^k, \qquad T_y = T_k^2\alpha^k + rxT_k^3\alpha^k, \qquad T_z = (1 - qx)T_k^3\alpha^k.$$

En éliminant les α^i entre ces formules, on aura T_x, T_y, T_z en fonction linéaire de α, β, γ.

Pour la surface latérale, on a $\gamma = 0$; donc $\alpha^3 = 0$, $\alpha^1 = \alpha$, $\alpha^2 = \beta$. En portant dans (21) et annulant T_x, T_y, T_z, on obtient trois conditions qui doivent être vérifiées le long de Γ.

Sur la section droite, on a $\alpha = \beta = 0$, $\gamma = +1$; donc

$$(22)\qquad \alpha^1 = \frac{ry}{h}, \qquad \alpha^2 = -\frac{rx}{h}, \qquad \alpha^3 = \frac{1}{h}.$$

En portant dans (21), on obtient T_x, T_y, T_z et l'on doit avoir

$$(23)\quad \begin{cases} X = \displaystyle\iint T_x\,dx\,dy, \qquad Y = \iint T_y\,dx\,dy, \qquad T = \iint T_z\,dx\,dy, \\ L = \displaystyle\iint yT_z\,dx\,dy, \qquad M = -\iint xT_z\,dx\,dy, \\ N = \displaystyle\iint (xT_y - yT_x)\,dx\,dy. \end{cases}$$

12. *Hypothèses sur les dimensions transversales du fil.* — Nous allons supposer maintenant que *les dimensions de la section droite sont très petites vis-à-vis des rayons de courbure et de torsion* R *et* T et nous allons chercher une solution approchée du problème.

D'une manière plus précise, imaginons que le contour Γ se déduise d'une courbe fixe Γ' du plan xOy, par une homothétie de centre O et de rapport t. Supposons t infiniment petit et cherchons *la partie principale de la solution*.

13. *Forme de la solution asymptotique.* — Comme on le fait habituel-

lement dans les problèmes d'équilibre élastique, nons allons nous donner *a priori* la forme de la solution et nous *vérifierons* que cette solution satisfait aux équations indéfinies d'équilibre et aux conditions aux limites. Mais, bien entendu, cette vérification ne devra avoir lieu qu'asymptotiquement, pour t infiniment petit.

La forme de la solution nous est tout naturellement suggérée par le problème de Saint-Venant.

Posons, en premier lieu,

$$\left\{\begin{aligned} u &= mx - ny + a(x^2 - y^2) + 2bxy, \\ v &= my + nx + 2axy + b(y^2 - x^2), \end{aligned}\right. \tag{24}$$

m, n, a et b désignant des fonctions de s.

Posons ensuite

$$W = k(x^2 + y^2) + c\varphi, \tag{25}$$

où k et c désignent deux nouvelles fonctions de s et φ une fonction de x et de y, déterminée par la condition de vérifier l'équation

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 \tag{26}$$

à l'intérieur de Γ et l'équation

$$\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x} + \beta\frac{\partial\varphi}{\partial y} = \alpha y - \beta x \tag{27}$$

tout du long de Γ, α et β désignant les cosinus directeurs de la normale extérieure.

Soit $\omega(x, y)$ la fonction harmonique à l'intérieur de Γ' et qui satisfait, sur Γ', à l'équation

$$\alpha\frac{\partial\omega}{\partial x} + \beta\frac{\partial\omega}{\partial y} = \alpha y - \beta x. \tag{28}$$

Je dis que l'on a

$$\varphi = t^2\omega\left(\frac{x}{t}, \frac{y}{t}\right). \tag{29}$$

En effet, l'équation (26) est évidemment vérifiée par cette fonction. On a maintenant

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = t\frac{\partial\omega}{\partial x'}, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y} = t\frac{\partial\omega}{\partial y'}, \tag{30}$$

en posant

$$x' = \frac{x}{t}, \qquad y' = \frac{y}{t}.$$

L'équation (27) s'écrit donc

$$t\left(\alpha \frac{\partial \omega}{\partial x'} + \beta \frac{\partial \omega}{\partial y'}\right) = t(\alpha y' - \beta x').$$

Comme les valeurs de α et β sont les mêmes au point $M'(x', y')$ de Γ' et au point $M(x, y)$ de Γ, l'équation ci-dessus ne diffère pas de (28) et se trouve vérifiée par hypothèse.

Lorsque M décrit l'aire (A), M' décrit l'aire homologue (A') et ω garde une valeur finie, ainsi que ses dérivées partielles premières et secondes. Dès lors, les formules (29) et (30) nous montrent que φ est un infiniment petit du second ordre; ses dérivées premières sont des infiniment petits du premier ordre et ses dérivées secondes sont des quantités finies.

14. *Vérification des équations indéfinies.* — Cherchons la limite du premier membre de (11), lorsque t tend vers zéro.

Remarquons d'abord que, d'après (17), $\frac{\partial h}{\partial x^k}$ tend vers zéro, sauf pour $k = 1$, qui donne $\frac{\partial h}{\partial x^1} = -q$. D'après (16), on voit de même que les $\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i}$ tendent tous vers zéro, sauf les suivants :

$$(31) \qquad \frac{\partial g_{33}}{\partial x^1} = -2q, \qquad \frac{\partial g_{23}}{\partial x^1} = r, \qquad \frac{\partial g_{13}}{\partial x^2} = -r.$$

Dès lors, les équations (11) se réduisent à

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} & X_1 + \frac{\partial T_1^k}{\partial x^k} - q T_1^1 + q T^{33} - r T^{23} = 0, \\ & X_2 + \frac{\partial T_2^k}{\partial x^k} - q T_2^1 + r T^{13} = 0, \\ & X_3 + \frac{\partial T_3^k}{\partial x^k} - q T_3^1 = 0. \end{aligned} \right.$$

On a maintenant

$$T_i^k = g^{kj} T_{ij}.$$

D'où

$$\frac{\partial T_i^j}{\partial x^k} = g^{kj}\frac{\partial T_{ij}}{\partial x^k} + T_{ij}\frac{\partial g^{kj}}{\partial x^k}.$$

Or, dans les formules (31), l'indice inférieur n'est jamais égal à l'un des indices supérieurs. On en conclut que le second terme de la formule ci-dessus tend vers zéro avec t. Comme les g^{kj} tendent vers *un* ou zéro, suivant que k est égal à j ou en diffère, on voit qu'on peut, dans les équations (32), remplacer toutes les composantes mixtes ou contrevariantes par les composantes covariantes; de sorte que les équations indéfinies s'écrivent, à la limite,

$$(33)\quad \begin{cases} X_1 + \dfrac{\partial T_{1k}}{\partial x^k} + q(T_{33} - T_{11}) - rT_{23} = 0, \\ X_2 + \dfrac{\partial T_{2k}}{\partial x^k} - qT_{12} + rT_{13} = 0, \\ X_3 + \dfrac{\partial T_{3k}}{\partial x^k} - qT_{13} = 0. \end{cases}$$

Reportons-nous maintenant aux formules (10) et négligeons-y les termes du second ordre en t.

Calculons d'abord θ, d'après (20). Comme W est du second ordre et n'intervient pas par ses dérivées par rapport à x ou à y, nous pouvons l'annuler. Il nous reste alors, en utilisant (24),

$$(34)\qquad \theta = e + 2m + x(4a - \rho - qm) + y(4b + qn).$$

Remarquons maintenant que tous les u^j étant au moins du premier ordre, nous pouvons, dans (10), remplacer les $\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j}$ par les valeurs (31). On trouve finalement

$$(35)\quad \begin{cases} T_{11} = T_{22} = \lambda e + 2m(\lambda + \mu) + x[4a(\lambda + \mu) - \lambda(\rho + qm)] \\ \qquad\qquad + y[4b(\lambda + \mu) + \lambda qn], \\ T_{33} = (\lambda + 2\mu)e + 2\lambda m + x[4a\lambda - (\lambda + 2\mu)(\rho + qm + 2qe) - 4\lambda qm] \\ \qquad\qquad + y[4\lambda b + (\lambda + 2\mu)qn], \\ T_{12} = 0, \\ T_{13} = \mu c\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} + \mu\left(\dfrac{dm}{ds} + 2k\right)x - y\left[\mu\left(\dfrac{dn}{ds} + \tau\right) + (\lambda + \mu)r(e + 2m)\right], \\ T_{23} = \mu c\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + \mu\left(\dfrac{dm}{ds} + 2k\right)y + x\left[\mu\left(\dfrac{\partial n}{\partial s} + \tau\right) + (\lambda + \mu)r(e + 2m)\right]. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans (33). Nous ne commettons que des erreurs infiniment petites sur les dérivées $\frac{\partial T_{ik}}{\partial x^k}$, puisque l'erreur sur T_{ik} est du second ordre et devient au plus du premier ordre par la dérivation. En passant à la limite, il vient

$$(36)\quad \begin{cases} X_1 + 4a(\lambda+\mu) - \lambda p + 2\mu q e - (\lambda+2\mu) q m = 0, \\ X_2 + 4b(\lambda+\mu) + \lambda q n = 0, \\ X_3 + (\lambda+2\mu)\dfrac{de}{ds} + 2(\lambda+\mu)\dfrac{dm}{ds} + 4\mu k = 0. \end{cases}$$

15. *Vérification des conditions sur la surface latérale.* — Nous allons vérifier ces conditions *au second ordre près* par rapport à t.

Il faut, au préalable, calculer T_x, T_y, T_z par les formules (21), ce qui nécessite l'évaluation des composantes mixtes T_i^k par la formule

$$T_i^k = g^{kj} T_{ij}.$$

Pour $j \neq i$, T_{ij} est au moins du premier ordre; donc g^{kj} peut être remplacé par *un* ou zéro, suivant que j égale k ou en diffère. D'autre part, si l'on néglige le second ordre, les formules (18) se réduisent à

$$(37)\quad g^{11} = g^{22} = 1, \qquad g^{33} = 1 + 2qx, \qquad g^{23} = -rx, \qquad g^{13} = ry, \qquad g^{12} = 0.$$

On a, dès lors, avec l'approximation convenue,

$$(38)\quad \begin{cases} T_1^1 = T_{11}, \qquad T_1^2 = T_{12}, \qquad T_1^3 = T_{13} + ryT_{11}, \\ T_2^1 = T_{21}, \qquad T_2^2 = T_{22}, \qquad T_2^3 = T_{23} - rxT_{22}, \\ T_3^1 = T_{31} + ryT_{33}, \qquad T_3^2 = T_{32} - rxT_{33}, \qquad T_3^3 = (1+2qx)T_{33}. \end{cases}$$

En remplaçant, dans (21), α^1 par α, α^2 par β, α^3 par zéro et les T_i^k par les valeurs ci-dessus, on obtient les conditions relatives à la surface latérale sous la forme suivante :

$$\alpha T_{11} + \beta T_{12} = 0, \qquad \alpha T_{12} + \beta T_{22} = 0,$$
$$\alpha(T_{13} + ryT_{11}) + \beta(T_{23} - rxT_{22}) = 0.$$

ou, puisque T_{12} est nul,

$$(39)\qquad T_{11} = T_{22} = 0,$$
$$(40)\qquad \alpha T_{13} + \beta T_{23} = 0.$$

La condition (39) doit être vérifiée quels que soient x et y, car le contour Γ ne peut être une droite. On a donc

$$(41)\qquad m = -\frac{\lambda e}{2(\lambda+\mu)}, \qquad a = \frac{\lambda}{4(\lambda+\mu)}(\rho + qm), \qquad b = -\frac{\lambda q n}{4(\lambda+\mu)}.$$

La condition (40) s'écrit ensuite, en tenant compte de (27),

$$(\alpha y - \beta x)\left[\mu c - \mu\frac{dn}{ds} - \mu\tau - (\lambda+\mu)r(e+2m)\right] + \mu\left(\frac{dm}{ds} + 2k\right)(\alpha x + \beta y) = 0.$$

En l'intégrant le long de Γ, le premier terme disparaît et le deuxième devient $2\mu\left(\frac{dm}{ds} + 2k\right)S$, en appelant S l'aire de la section droite. Comme cette aire n'est pas nulle, on en conclut

$$(42)\qquad \frac{dm}{ds} + 2k = 0$$

et

$$(43)\qquad c = \frac{dn}{ds} + \tau + \left(1 + \frac{\lambda}{\mu}\right)r(e+2m).$$

En portant (42) et (41) dans (36), on obtient

$$(44)\qquad X_1 + \mathrm{E}eq = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 + \mathrm{E}\frac{de}{ds} = 0,$$

en désignant par E le *module de Young* :

$$\mathrm{E} = \frac{\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda+\mu}.$$

De même, les équations (35) se réduisent aux suivantes

$$(45)\qquad \begin{cases} T_{11} = T_{22} = T_{12} = 0, \qquad T_{33} = \mathrm{E}[e + qny - x(\rho + qm + 2qe)], \\ T_{13} = \mu\left[c\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - (\Theta + re)y\right], \qquad T_{23} = \mu\left[c\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + (\Theta + re)x\right], \end{cases}$$

en posant

$$(46)\qquad \Theta = \tau + \frac{dn}{ds}.$$

16. *Vérification des conditions sur la section droite.* — En portant (22) dans (21), tenant compte de (45) et négligeant le second ordre en t,

on a

$$T_x = T_{13}, \qquad T_y = T_{23}, \qquad T_z = T_{33} + 2qx\,\mathrm{E}e,$$

ou

$$(47)\qquad \begin{cases} T_x = \mu\left[c\dfrac{\partial\varphi}{\partial x} - (\Theta + re)y\right], \\ T_y = \mu\left[c\dfrac{\partial\varphi}{\partial y} + (\Theta + re)x\right], \\ T_z = \mathrm{E}[e + qny - (\rho + qm)x]. \end{cases}$$

Portons ces valeurs dans (23). Nous avons à évaluer les deux intégrales doubles $\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial x}\,dx\,dy$ et $\int\int \frac{\partial\varphi}{\partial y}\,dx\,dy$. Soit ψ la fonction conjuguée de φ. La première intégrale, par exemple, s'écrit

$$\int\int \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dx\,dy = \int_\Gamma \beta\psi\,ds.$$

D'autre part, d'après (27), on a, le long de Γ,

$$\frac{\partial\psi}{\partial x}\,dx + \frac{\partial\psi}{\partial y}\,dy = x\,dx + y\,dy;$$

d'où

$$\psi = \frac{x^2 + y^2}{2} + \text{const}.$$

Donc,

$$\int_\Gamma \beta\psi\,ds = \int_\Gamma \frac{x^2 + y^2}{2}\beta\,ds = \int\int y\,dx\,dy = 0.$$

On verrait de même que l'autre intégrale est nulle.

Dès lors, on a

$$(48)\qquad X = Y = 0, \qquad Z = \mathrm{E}e\mathrm{S}.$$

Puis

$$(49)\qquad \begin{cases} L = \mathrm{E}(\mathrm{A}qn - \mathrm{C}\rho) + \dfrac{\mathrm{E}\lambda}{2(\lambda + \mu)}\mathrm{C}qe, \\ M = \mathrm{E}(\mathrm{B}\rho - \mathrm{C}qn) - \dfrac{\mathrm{E}\lambda}{2(\lambda + \mu)}\mathrm{B}qe, \\ N = \mu(\mathrm{P} + \mathrm{I})\Theta + \mu\mathrm{I}re, \end{cases}$$

en appelant A, B, I les moments d'inertie de la section droite par rapport à Ox, Oy, O; C son produit d'inertie et P l'intégrale double,

$$(50)\qquad \mathrm{P} = \frac{c}{\Theta}\int\int\left(x\frac{\partial y}{\partial\varphi} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy.$$

Observons que les formules (47) étant exactes au second ordre près, les formules (48) et (49) le sont respectivement *au quatrième et au cinquième ordre près*.

En éliminant e entre (44) et (48), on a, *au troisième ordre près*,

$$X_1 S + qZ = 0, \qquad X_2 = 0, \qquad X_3 S + \frac{dZ}{ds} = 0. \tag{51}$$

On voit qu'*à ce degré d'approximation, l'équilibre n'est possible que si les forces extérieures satisfont aux deux premières équations* (48) *et aux trois équations* (51). Si ces conditions sont remplies, la troisième équation (48) permet de calculer e; les deux premières équations (49) donnent ρ et n, et enfin la troisième donne Θ, donc τ, d'après (46). *Les constantes de la déformation peuvent donc être calculées de manière à satisfaire à toutes les conditions aux limites* [1] *et le problème est résolu.*

17. *Le fil parfait.* — Supposons notre fil en équilibre sous l'action de certaines forces extérieures; puis, réduisons homothétiquement la section droite du fil dans le rapport t et faisons en même temps varier les forces proportionnellement à t^3.

D'après (48), e varie proportionnellement à t; et, d'après (49), n, ρ, τ sont de la forme $\frac{a}{t} + bt$, a et b étant des constantes. Il s'ensuit, d'après (45), que les efforts T_{33}, T_{13}, T_{23} tendent vers des limites finies et non nulles, lorsque t tend vers zéro. Supposons que ces limites soient en deçà de la limite d'élasticité. Nous voyons que l'on peut, *sans atteindre la déformation permanente*, prendre t assez petit pour que n, ρ, τ *deviennent arbitrairement grands*. Bien entendu, toute notre théorie cesse, à ce moment, d'être applicable, puisqu'elle suppose essentiellement que n, ρ, τ sont très petits. Mais notre raisonnement n'en prouve pas moins que la déformation de la fibre neutre ne peut plus être infiniment petite. Un tel fil, soumis à de telles forces, peut

[1] Bien entendu, nous ne sommes pas certains qu'à l'extrémité du fil les forces extérieures sont réparties sur la section droite, suivant les formules (47). Seule, l'équivalence de ce système de forces avec celui des efforts (47) est assurée. La déformation ci-dessus calculée peut donc être inexacte vers les extrémités du fil, mais, nous admettons, comme on le fait pour le problème de Saint-Venant, qu'elle le devient pratiquement à une certaine distance.

donc *prendre une forme totalement différente de sa forme naturelle, tout en restant, en chacun de ses points, dans les limites de la déformation élastique*. Nous aboutissons ainsi à la notion de *fil parfait* ou *infiniment flexible*.

18. On peut la présenter aussi de la manière suivante.

Supposons que, la dilatation linéaire e de la fibre neutre restant constante, t tende vers zéro. Les formules (48) et (49) nous montrent que X, Y, L, M, N sont des infiniment petits du quatrième ordre, tandis que Z est du second ordre. A la limite, *les efforts sur la section droite admettent donc une résultante tangente à la fibre neutre*. On sait que cette propriété caractérise précisément le *fil parfait* et l'on reconnaît, dans les équations (51), *les équations indéfinies d'équilibre d'un tel fil*.

A vrai dire, ces équations n'ont été justifiées que pour la forme naturelle du fil; mais, on sait qu'elles sont une conséquence nécessaire de la nullité des moments L, M, N. On peut d'ailleurs observer que, dans le cas du fil parfait, la forme naturelle est indéterminée et peut toujours être identifiée avec la forme d'équilibre.

19. D'après ce qui a été dit au nº 17, on voit que *la notion de parfaite flexibilité est essentiellement relative*. Elle dépend à la fois des dimensions de la section droite et de la grandeur des forces extérieures.

Pour qu'il y ait déformation finie, il faut que les valeurs de n, $\frac{\rho}{q}$ et $\frac{\Theta}{r}$ déduites de (49) soient, par exemple, de l'ordre de l'unité. Or, supposons, pour fixer les idées, que la section du fil soit un cercle de rayon ε. L'ordre de grandeur des quantités ci-dessus est comparable à celui de $\frac{LR}{E\varepsilon^4}$. Il s'ensuit que le moment au point O doit être de l'ordre de $\frac{E\varepsilon^k}{R}$.

Il faut maintenant que Ee et $Eqn\varepsilon$, par exemple, ne dépassent pas la charge limite d'élasticité. Si P désigne cette dernière, on voit que la somme géométrique et le moment résultant des efforts doivent être, en gros, respectivement inférieurs à $P\varepsilon^2$ et $P\varepsilon^3$. Si nous prenons le moment égal à $\frac{E\varepsilon^4}{R}$, nous devons avoir

$$\frac{E\varepsilon^4}{R} < P\varepsilon^3$$

ou

$$\frac{\varepsilon}{R} < \frac{P}{E}. \tag{52}$$

Ceci montre bien que *les dimensions de la section droite doivent être assez petites comparativement à celles du rayon de courbure de la fibre neutre.*

Mais, en outre, il faut que le moment soit assez grand.

Pour fixer les idées, prenons un exemple concret. Supposons que l'on ait affaire à un fil de fer d'un millimètre de diamètre. On a, dans ce cas, en prenant le kilogramme-poids pour unité de force et le millimètre pour unité de longueur,

$$P = 14, \qquad E = 20000, \qquad \varepsilon = \frac{1}{2}.$$

L'inégalité (52) devient

$$R > \frac{10000}{14} = 700, \quad \text{soit 70 centimètres.}$$

Quant au moment, il doit être de l'ordre de $\frac{20000}{16R}$. Si R a sa valeur minimum, ceci vaut $\frac{7}{4}$ kg $\times$ mm, soit environ 200 gr $\times$ cm.

Supposons que le fil soit demi-circulaire à l'état naturel; suspendons-le librement par ses deux extrémités et cherchons la condition pour qu'il soit flexible sous l'action de pesanteur dans sa moitié inférieure.

Le moment minimum est approximativement $2R^2$ mg $\times$ mm. On doit donc avoir

$$2R^2 > \frac{7}{4} \times 10^6, \quad \text{soit } R > 1000.$$

Donc, le rayon minimum du fil doit être de l'ordre de un mètre.

Bien entendu, il ne faut attacher aucune valeur précise à ces calculs. Ils ne peuvent donner qu'une vague indication sur les conditions dans lesquelles on peut s'attendre à voir le fil se comporter approximativement comme un fil parfait. Seules, une théorie rigoureuse ou bien l'expérience pourraient trancher la question. Mais, il est bien évident néanmoins que le fil précédent se rapprochera beaucoup plus de la chaînette qu'un fil de même section qui n'aurait qu'un rayon de 10^{cm} et beaucoup moins qu'un fil qui aurait un rayon de 10^{m}.

20. *Fil élastique.* — Supposons maintenant que les quantités n, $\frac{\rho}{q}$, $\frac{\Theta}{r}$ déduites de (49) soient très petites. Notre fil se comporte alors comme un *fil élastique* et c'est à cette hypothèse que nous allons désormais nous tenir.

Dans la pratique, X, Y, Z sont au plus de l'ordre du quotient du moment par le rayon de courbure R, sauf au voisinage de l'extrémité du fil et lorsque aucun couple ne s'y trouve appliqué. Ceci résulte du fait que le bras de levier est comparable à R, si l'on écarte l'exception mentionnée. Dès lors, on voit d'abord que les deux premières équations (48) sont vérifiées, comme il doit, au quatrième ordre près en t. La troisième de ces équations nous apprend ensuite que Ee et, par conséquent, μe sont de l'ordre de $\frac{Lq}{S}$, $\frac{Mq}{S}$, $\frac{Nq}{S}$. Le deuxième terme de chacune des équations (49) est, par rapport au premier, au plus de l'ordre de $\frac{Iq^2}{S}$, soit $\left(\frac{\varepsilon}{R}\right)^2$, en appelant ε le rayon de gyration de la section droite par rapport à son centre de gravité. Donc, ce deuxième terme est négligeable. Il en est de même, dans (43), pour le troisième terme, de sorte que $c = \Theta$. Finalement, les formules (49) nous donnent

$$\rho = \frac{MA + LC}{E(AB - C^2)}, \tag{53}$$

$$n = R\frac{LB + MC}{E(AB - C^2)}, \tag{54}$$

$$\Theta = \frac{N}{\mu(P + I)}, \tag{55}$$

avec

$$P = \int\int\left(x\frac{\partial\varphi}{\partial y} - y\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)dx\,dy. \tag{56}$$

Quant aux équations indéfinies (44), elles sont vérifiées au premier ordre près. En effet, les X_i sont au plus de l'ordre de $\frac{1}{S}\frac{dX}{ds}$, c'est-à-dire du second ordre en t et il en est de même de Eeq et de E$\frac{de}{ds}$.

21. *Interprétation des résultats.* — La formule (55) est identique à la *formule classique de la torsion des cylindres*. Pour s'en rendre compte, il suffit de remarquer que la quantité $\Theta = \tau + \frac{dn}{ds}$ n'est autre

que la *torsion physique* (cf. Bouasse, *Résistance des matériaux*, p. 294). En effet, si l'on suppose fixe le trièdre $Oxyz$, la section droite d'abscisse ds tourne, pendant la déformation, de l'angle $\tau ds + dn = \Theta\, ds$.

Quant au terme P, qui est une constante entièrement déterminée par la connaissance du contour Γ, on ne l'introduit généralement pas dans la pratique, parce qu'on suppose qu'on a affaire à une section circulaire ou de forme voisine. Mais, il faut en tenir compte pour les sections de forme allongée (cf. Bouasse, *loc. cit.*, p. 274 à 285). Il figure d'ailleurs dans la théorie de Saint-Venant.

22. La formule (53) nous donne la variation de la courbure. Elle se réduit à la formule bien connue

$$\rho = \frac{M}{EB}, \tag{57}$$

dans le seul cas où C est nul. Donc, *la formule classique de la flexion est applicable à un fil élastique de forme quelconque, pourvu que sa section droite admette pour axes principaux d'inertie la normale principale et la binormale de la fibre neutre.*

Si cette condition n'est pas remplie, on voit que la variation de courbure dépend non seulement du couple de flexion, mais encore du *moment par rapport à la normale principale*. On en conclut que, si un ressort est exposé à être soumis à de tels moments, il faut bien prendre garde à la condition ci-dessus énoncée, si l'on veut avoir le droit d'appliquer la formule ordinaire de la flexion.

Ceci présente un certain intérêt pratique pour le *spiral cylindrique des chronomètres*. On sait, en effet, que, si le spiral n'est pas parfaitement centré, la réaction du balancier n'est pas nulle. Elle introduit dès lors un moment perturbateur L, dont l'effet s'ajoute à celui du moment fléchissant M, suivant la formule (53). Cet effet ne disparaît que si $C = 0$. Cette condition est, fort heureusement, toujours remplie dans la pratique, puisque la section droite du spiral cylindrique est un rectangle, dont les axes sont respectivement tangent et normal au cylindre rectifiant de la fibre neutre.

23. La formule (54) nous donne *l'angle n dont on a tourné la section droite par rapport à la normale principale*. On voit qu'il est proportionnel au rayon de courbure. Il est indépendant du moment fléchissant dans

le seul cas où C est nul. Il se réduit alors à

$$n = R\frac{L}{EA}. \tag{58}$$

Cette formule, qui ressemble à (57), nous montre que l'angle n est inversement proportionnel à A. Dans le cas du spiral cylindrique, A est le moment d'inertie de la section droite par rapport à son petit axe. Il est beaucoup plus grand que B. Comme, d'autre part, L est toujours très petit, on voit que la rotation est insignifiante et l'on peut dire que *les parois du spiral restent pratiquement cylindriques*, comme le confirme l'expérience.

La portion physique globale Θ est donnée par la formule (55). La formule (54), donnant l'angle n en chaque point, permet de calculer la dérivée $\frac{dn}{ds}$ et, par suite, $\tau = \Theta - \frac{dn}{ds}$. Nous connaissons donc, en définitive, la courbure et la torsion de la nouvelle fibre neutre en fonction de son arc et nous pouvons en déterminer la forme et la grandeur.

Dans la *théorie du ressort à boudin*, on admet comme un fait expérimental que la torsion physique est entièrement d'origine géométrique, de manière à pouvoir calculer le nouveau rayon et le nouveau pas. La justification théorique de cette hypothèse résulte de la formule (54), si l'on suppose que C et L sont nuls, comme il arrive dans les habituelles conditions d'emploi dudit ressort.

24. *Énergie de déformation.* — Appliquons la formule (14) dans le seul cas du fil élastique. Si l'on se rappelle que T_{11}, T_{22}, T_{12} sont nuls et que T_{13}, T_{23}, T_{33} sont du premier ordre, on a, *au troisième ordre près*,

$$2V = \int\int\int\left[E(-px + qny)^2 + \mu\Theta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x} - y\right)^2 + \mu\Theta^2\left(\frac{\partial\varphi}{\partial y} + x\right)^2\right]dx\,dy\,ds.$$

La *densité linéaire d'énergie* est donnée par la formule

$$2\frac{dV}{ds} = E(p^2B + q^2n^2A - 2pqnC) + \mu\Theta^2\left\{I + 2P + \int\int\left[\left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy\right\}.$$

L'intégrale double peut s'écrire, puisque φ est harmonique,

$$\iint\left[\frac{\partial}{\partial x}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)\right]dx\,dy=\int_{\mathrm{P}}\varphi\left(\alpha\frac{\partial\varphi}{\partial x}+\beta\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)ds$$

ou, d'après (27),

$$\int_{\mathrm{P}}\varphi(\alpha y-\beta x)\,ds=\iint\left(y\frac{\partial\varphi}{\partial x}-x\frac{\partial\varphi}{\partial y}\right)dx\,dy=-\mathrm{P}.$$

Donc,

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds}=\frac{\mathrm{E}}{2}(\rho^2\mathrm{B}+q^2n^2\mathrm{A}-2\rho q n\mathrm{C})+\frac{1}{2}\mu(\mathrm{I}+\mathrm{P})\Theta^2. \tag{59}$$

En tenant compte de (53), (54) et (55), on peut aussi écrire

$$\frac{d\mathrm{V}}{ds}=\frac{\mathrm{AM}^2+\mathrm{BL}^2+2\mathrm{CML}}{2\mathrm{E}(\mathrm{AB}-\mathrm{C}^2)}+\frac{\mathrm{N}^2}{2\mu(\mathrm{I}+\mathrm{P})}. \tag{60}$$

25. La formule habituellement admise est ce que devient (59) pour $n=0$. On l'établit par un raisonnement élémentaire, qui suppose implicitement que cette dernière condition est remplie. Pour contrôler l'exactitude de notre théorie, il est indispensable de voir ce que donne ce raisonnement quand on tient compte de la rotation n.

L'énergie de déformation du fil est opposée au travail total accompli par les forces intérieures de ce fil entre l'état naturel (E_0) et l'état déformé (E_1). Ce travail doit d'ailleurs être *indépendant des états intermédiaires*, puisqu'il y a potentiel. C'est ce nous allons vérifier en le calculant.

Il nous suffit de faire le calcul pour un élément $\mathrm{OO}'=ds$. Il n'y aura plus ensuite qu'à intégrer le long du fil.

Pour évaluer le travail T des forces intérieures de cet élément, nous pouvons *choisir arbitrairement le trièdre de différence*. Prenons, dès lors, le trièdre de Frenet relatif au point O et évaluons le travail élémentaire $\delta\mathrm{T}$ correspondant au passage de l'état intermédiaire (E) à l'état infiniment voisin ($\mathrm{E}+\delta\mathrm{E}$). Ce travail est opposé au travail des couples extérieurs appliqués en O et en O'.

Le travail du couple $-\mathrm{N}$ appliqué en O est $-\mathrm{N}\delta n$.

Le couple appliqué en O' a pour composantes, par rapport au trièdre de Frenet $\mathrm{O}'x'y'z'$,

$$\mathrm{L}+d\mathrm{L},\quad \mathrm{M}+d\mathrm{M},\quad \mathrm{N}+d\mathrm{N}.$$

D'autre part, la rotation élémentaire subie par la section droite O′ a pour composantes suivant les même axes

$$o, \quad \delta\rho\, ds, \quad \delta\tau\, ds + \delta(n + dn).$$

On a donc

$$-\delta T = (M + dM)\,\delta\rho\, ds + (N + dN)(\delta\tau\, ds + \delta n + \delta dn) - N\,\delta n$$

ou, en négligeant le second ordre en ds,

$$-\delta T = M\,\delta\rho\, ds + N\, ds\,\delta\Theta + dN\,\delta n = ds\left(M\,\delta\rho + N\,\delta\Theta + \frac{dN}{ds}\,\delta n\right).$$

C'est le terme en δn de la parenthèse qui est généralement oublié.

Remarquons maintenant que l'on a

$$\frac{dN}{ds} = q\,L, \tag{61}$$

comme on le voit en exprimant que le système des efforts appliqués sur la section droite reste équivalent à lui-même, quand s varie infiniment peu. Portons cette valeur de $\frac{dN}{ds}$ dans la formule ci-dessus et appliquons en même temps (49); il vient

$$-\delta T = ds[E(B\rho - Cqn)\,\delta\rho + \mu(1 + P)\,\Theta\,\delta\Theta + q\,E(Aqn - C\rho)\,\delta n]$$

ou

$$-\delta T = ds[E(B\rho\,\delta\rho + Aq^2 n\,\delta n) - ECq\,\delta(n\rho) + \mu(1 + P)\,\Theta\,\delta\Theta].$$

Par rapport au symbole δ, le crochet est une *différentielle exacte. Il y a donc bien potentiel* et la densité linéaire d'énergie de déformation s'obtient en intégrant ledit crochet entre l'état (E_0) et l'état (E_1). On voit qu'on retrouve bien la formule (59).

26. Si l'on suppose $C = 0$, la formule (60) devient

$$\frac{dV}{ds} = \frac{1}{2E}\left(\frac{M^2}{B} + \frac{L^2}{A}\right) + \frac{N^2}{2\mu(1 + P)}. \tag{62}$$

Elle diffère de la formule habituellement admise par le terme en L^2. Autrement dit, *la formule classique qui donne l'énergie d'un fil déformé n'est exacte que si le couple appliqué en chaque point a son moment dans le plan rectifiant de la fibre neutre.*

Il serait intéressant d'établir la théorie exacte du spiral réglant cylindrique, à partir de la formule (62), suivant la méthode que nous avons adoptée, dans un précédent travail, pour le spiral plat. Ceci fera l'objet d'un autre Mémoire.

27. *Cas particulier du fil plan.* — On a alors $r = 0$ et l'on voit que les g_{ik} définis par les formules (16) ne contiennent plus y. Dès lors, les équations (33) continuent à s'appliquer même si y n'est pas infiniment petit. On est alors conduit à se demander à quelle condition les résultats précédents demeurent exacts quand on suppose seulement que les dimensions de la section droite sont petites dans la direction de la normale principale Ox, *les dimensions suivant la binormale* Oy *pouvant rester finies.* Il faut et il suffit pour cela que tous les termes en y disparaissent dans les diverses équations, ainsi que la fonction φ. Cette dernière doit être identiquement nulle, car le raisonnement fait au n° 13 ne lui est plus applicable, l'homothétie qui nous a servi de base ayant disparu.

En annulant les coefficients de y dans (34) et (35), on obtient

$$b = n = \tau = 0, \qquad k = -\frac{1}{2}\frac{dm}{ds}.$$

Les équations (39) et (41) subsistent; l'équation (40) étant vérifiée identiquement. Les conclusions du n° 15 sont toujours valables, ainsi que celles du n° 16; les formules (49) se réduisent simplement, si l'on néglige e, à

$$L = -EC\rho, \quad M = EB\rho, \quad N = 0. \tag{63}$$

D'autre part, l'équation (61) nous montre que L est nul. Donc, le moment en chaque point doit se réduire au moment de flexion. D'après la première équation (63), on voit ensuite que C est nécessairement nul et l'on aboutit à la conclusion suivante :

La théorie de Saint-Venant peut s'étendre à un fil élastique dont la fibre neutre est plane et dont la section droite a des dimensions finies perpendiculairement au plan de cette fibre, dans le seul cas de la flexion plane et à condition que l'un des axes centraux d'inertie soit perpendiculaire au plan de flexion.

Ces conditions sont précisément remplies pour le *spiral plat.* La formule fondamentale de la Chronométrie peut donc lui être appliquée en toute rigueur, *pourvu que l'épaisseur du spiral soit très petite vis-*

vis de son rayon de courbure, la largeur pouvant être aussi grande que l'on veut. C'est ce qui a été démontré pour la première fois par Phillips, dans le cas particulier où le moment fléchissant est constant.

28. *Hypothèse de Bernoulli.* — Elle consiste à admettre que *les sections droites restent planes* pendant la déformation. Cela revient à supposer $W = 0$.

La fonction $x^2 + y^2$ n'étant pas harmonique, on voit déjà que k est nul; donc, m et e sont constants, d'après (42) et (41). Il faut ensuite que $c\varphi$ soit nul. Cela donne deux solutions :

1° $\varphi = 0$. D'après (27), on doit avoir $x\,dx + y\,dy = 0$ sur Γ; la section droite est un cercle.

2° $c = 0$. D'après (43) et (41), ceci nous donne

$$\Theta + re = 0.$$

Or, on vérifie facilement que le premier membre est égal à la torsion physique, même si e n'est pas nul.

Finalement, *pour que l'hypothèse de Bernoulli soit exacte, il faut et il suffit :*

1° *Que la dilatation de la fibre neutre soit uniforme;*

2° *Que la section droite soit circulaire ou bien qu'il n'y ait pas de torsion.*

Lorsque la deuxième condition est seule réalisée, on a

$$W = -\frac{1}{2}\frac{dm}{ds}(x^2 + y^2)$$

ou, d'après (41) et (44),

$$W = \frac{\lambda}{4(\lambda + \mu)}\frac{de}{ds}(x^2 + y^2) = -\frac{\lambda}{4\mu(3\lambda + 2\mu)}X_3(x^2 + y^2).$$

Le plan de chaque section droite se transforme, par la déformation, en un paraboloïde de révolution, ayant pour axe la tangente à la fibre neutre et pour paramètre $-\dfrac{2\mu(3\lambda + 2\mu)}{\lambda X_3}$.

Par exemple, pour un fil pesant et homogène, suspendu par une de ses extrémités, tous les paraboloïdes sont égaux, car X_3 est le poids spécifique du fil. Ils tournent leur concavité vers le haut.