ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

SOULA

Sur les points singuliers d'une fonction définie par une série de Taylor et sur certaines propriétés des fonctions analytiques au voisinage d'un point singulier

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 44 (1927), p. 97-151
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__97_0>

SUR

LES POINTS SINGULIERS D'UNE FONCTION DÉFINIE

PAR UNE SÉRIE DE TAYLOR

ET

SUR CERTAINES PROPRIÉTÉS DES FONCTIONS ANALYTIQUES

AU VOISINAGE D'UN POINT SINGULIER

Par M. SOULA

On trouvera dans ce travail une série de propositions relatives à des relations entre les coefficients a_n d'une série de Taylor $f(z) = \Sigma a_n z^n$ et les points singuliers de la fonction analytique que cette série détermine.

Je traite, en particulier, le cas où il existe des suites de coefficients nuls et le cas où certains coefficients sont bornés alors que les autres ne le sont pas; je rencontre des théorèmes bien connus de MM. Hadamard et Fabry (¹). Une seule méthode est employée ici : c'est celle qui a donné à M. Carlson (²) des résultats intéressants; elle consiste dans l'emploi d'une fonction analytique $G(v)$ telle que $G(n) = a_n$.

Je n'étudie la fonction $G(v)$ que dans un angle ayant pour bissectrice l'axe réel et dont l'ouverture est inférieure à π; les propositions qui en résultent ne peuvent concerner que le cercle de convergence de $f(z)$.

Dans le Chapitre I, je compare les façons de croître d'une fonction

---

(¹) Hadamard, *Essai sur les fonctions données par le développement de Taylor* (*Journal de Mathématiques*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892); *La série de Taylor* (*Collection Scientia*). — Fabry, *Sur les points singuliers d'une fonction* (*Annales de l'École Normale*, 3ᵉ série, t. XIII, 1896).

(²) Carlson, *Thèse*, Upsal, 1914; *Ueber potenzreihen* (*Mathematische Annalen*, Band **79**, 1919).

holomorphe dans un angle de sommet O sur les divers rayons issus de O, et cela pour des fonctions qui croissent moins vite que $e^{a|v|}$.

Le Chapitre II contient l'étude des racines réelles de ces fonctions $G(v)$; les Chapitres III et IV l'application des propriétés obtenues aux séries de Taylor.

Voici des notations que je conserverai constamment :

J'étudierai simultanément une fonction $G(v)$ de la variable $v = te^{i\theta}$ et la fonction $g(u) = G\left(\frac{1}{u}\right)$ de la variable $u = \frac{1}{v}\cdot$ Le module de u sera désigné par r et celui de v par t. Le champ de variation de u sera un secteur circulaire de sommet O, il sera désigné par AOB ou par S_α

$$(S_\alpha) \qquad -\alpha < \text{argument}\, u < +\alpha; \qquad r < r_0;$$

α sera, en général, compris entre o et $\frac{\pi}{2}$, r_0 est un nombre positif.

Le champ de variation de v sera

$$(\Sigma_\alpha) \qquad -\alpha < \text{argument}\, v < +\alpha; \qquad t = |v| > \frac{1}{r_0}\cdot$$

CHAPITRE I

1. J'aurai besoin du théorème suivant dû à MM. Nevanlinna et que j'énonce dans un cas particulier ([1]) : « Soit une fonction $g(u)$ de la variable $u = x + iy$, holomorphe à l'intérieur d'un domaine G simplement connexe et dont le contour comprend deux arcs OEP, OFP. On suppose qu'au voisinage d'un point u_0 quelconque du contour on a

$$\begin{aligned} |g(u)| &< m + \varepsilon \qquad \text{si } u_0 \text{ est sur OEP,} \\ |g(u)| &< M + \varepsilon \qquad \text{si } u_0 \text{ est sur OFP,} \\ |g(u)| &< A \qquad \text{si } u_0 \text{ est O ou P,} \end{aligned}$$

ε étant arbitrairement petit; A, m, M sont des constantes; on a $m < M$. Soit λ un nombre compris entre o et 1, soit $\Delta_1(u)$ la fonction har-

([1]) F. et R. Nevanlinna, *Acta societatis fennicæ*, t. 50, n° 5, § 2.

monique des deux variables réelles x et y qui est nulle sur OFP et égale à 1 sur OEP. On sait que la courbe C, définie par $\Delta_1(u) = \lambda$ joint les points O et P et partage G en deux régions. Dans la région comprise entre OEP et C_λ on a

$$|g(u)| < m^\lambda M^{1-\lambda},$$

et cette inégalité est valable sur C_λ où elle peut toutefois être remplacée par une égalité dans un cas particulier. »

Je prends pour OEP un segment de droite, pour OFP un arc de cercle; l'angle de l'arc et de la droite sera désigné par α. On a alors

$$\Delta_1(u) = \frac{\text{angle ODP} - (\pi - \alpha)}{\alpha},$$

D étant le point d'affixe $u = x + iy$. Je poserai $\beta = \pi - \widehat{\text{ODP}}$; donc

$$(1) \qquad |g(u)| \leq m^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} M^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

Soit un deuxième point D' d'affixe u' intérieur au triangle ODP; on a

$$(1') \qquad |g(u')| < m^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} M^{\frac{\beta}{\alpha}}.$$

2. Soit une fonction $g(u)$ holomorphe et de module borné dans le secteur circulaire AOB dont l'angle d'ouverture AOB a pour mesure α. La fonction est aussi supposée holomorphe en tout point du contour de ce secteur autre que le sommet O [1]. On sait que si $g(u)$ tend vers zéro avec $r = |u|$ sur le rayon OA, la fonction tend vers zéro sur tout rayon OC intérieur au secteur. Ce théorème est dû à M. Montel; il a été généralisé de diverses façons.

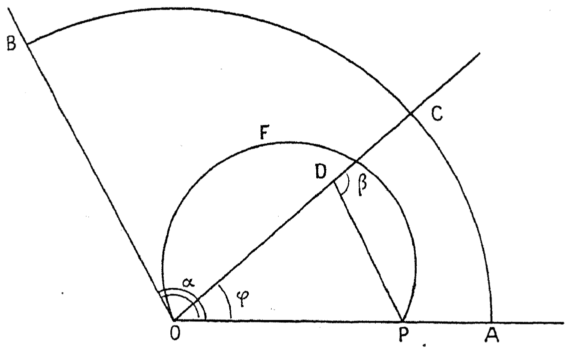
Je dois m'attacher ici à comparer la décroissance de $|g(u)|$ sur les divers rayons intérieurs au secteur. Dans ce but, je me donnerai une fonction réelle $V(r)$ telle que l'on ait

$$|g(u)| \leq V(r)$$

---

[1] On pourrait supposer que $g(u)$ est continue mais non holomorphe en tout point de OA et OB autre que O.

sur le rayon OA. On supposera que $V(r)$ est une fonction positive non décroissante, et qu'elle tend vers zéro avec r. Je me propose de chercher une inégalité analogue valable sur le rayon OC qui fait l'angle φ avec OA. Je traite la question en supposant d'abord $\alpha < \pi$.



Je choisis un point P sur OA et je trace l'arc de cercle OFP qui admet OB pour tangente. Soit D un point situé sur la droite OC et intérieur au domaine G limité par le segment OP et l'arc de cercle. Je puis laisser OC fixe et faire varier P et D de telle façon que le triangle OPD reste toujours semblable à lui-même. Pour préciser cette correspondance, je choisis l'angle $OPD = \pi - \beta$ et je prends β compris entre φ et α. u étant toujours l'affixe de D, je pose

$$OD = |u| = r; \qquad a = \frac{\sin\beta}{\sin(\beta - \varphi)}. \qquad \text{J'ai } OP = ar.$$

Je désigne par M la borne donnée de $|g(u)|$. D'après (1), j'ai

$$|g(u)| \leq [V(ar)]^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}} M^{\frac{\beta}{\alpha}} \tag{2}$$

dès que r est assez petit pour que l'arc OFP soit intérieur au secteur AOB. C'est là l'inégalité annoncée; on peut supposer β arbitrairement voisin de φ et supérieur à φ. Si, par exemple, on a $\varphi < \frac{\alpha}{2}$, $g(u)$ décroît comme $[V(ar)]^{\frac{1}{2}}$.

On peut montrer que $g(u)$ tend vers zéro d'une manière uniforme dans le secteur

$$0 < \text{argument } u < \varphi_0 < \alpha;$$

il suffit de remarquer que M ne dépend pas de φ, de choisir β supérieur à φ_0 et d'écrire l'inégalité

$$(2') \qquad |g(u)| \leqq \left\{ V\left(\frac{\sin\beta}{\sin(\beta-\varphi_0)}\, r\right)\right\}^{\frac{\alpha-\beta}{\beta}} M^{\frac{\beta}{\alpha}}$$

qui est valable dans ce secteur.

Il nous reste à étendre ces inégalités au cas où l'angle α est supérieur à π. Je suppose que OA soit l'axe réel et que le domaine où $g(u)$ nous est donné s'obtienne en faisant tourner un rayon dans le sens positif de OA vers OB d'un angle α. Je pose $z = u^{\frac{\alpha}{2\pi}}$, les arguments de z et de u étant nuls simultanément sur OA. Je pose encore

$$G(z) = g\left(z^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right), \qquad |z| = \rho, \qquad |u| = r. \qquad \text{J'ai } \rho = r^{\frac{\pi}{2\alpha}}.$$

Sur OA on a par hypothèse

$$|g(z)| \leqq V\left(\rho^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right).$$

Comme le domaine où $G(z)$ est défini est un secteur d'ouverture $\frac{\pi}{2}$, on a sur un rayon d'argument φ' $\left(\varphi' < \frac{\pi}{2}\right)$

$$\left|g\left(z^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)\right| = |G(z)| \leqq M^{\frac{\beta'}{\alpha}}\left[V\left(a^{\frac{2\alpha}{\pi}}\rho^{\frac{2\alpha}{\pi}}\right)\right]^{\frac{\frac{\pi}{2}-\beta'}{\frac{\pi}{2}}};$$

β' est un angle compris entre φ' et $\frac{\pi}{2}$ et a représente $\frac{\sin\beta'}{\sin(\beta'-\varphi')}$. On peut encore écrire

$$|g(u)| \leqq M^{\frac{\beta'}{\alpha}}\left[V\left(a^{\frac{2\alpha}{\pi}} r\right)\right]^{\frac{\frac{\pi}{2}-\beta'}{\frac{\pi}{2}}}.$$

L'argument de u est $\varphi = \frac{2\alpha}{\pi}\varphi'$; soit $\beta = \frac{2\alpha}{\pi}\beta'$. On a

$$(3) \qquad |g(u)| \leqq M^{\frac{\pi}{2\alpha^2}\beta}\left[V\left(a^{\frac{2\alpha}{\pi}} r\right)\right]^{\frac{\alpha-\beta}{\alpha}}$$

dès que r est assez petit; β est un argument quelconque compris entre l'argument φ de u et α; a représente $\dfrac{\sin\dfrac{\pi\beta}{2\alpha}}{\sin\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{\beta-\varphi}{2}\right)}$.

On généraliserait de même la formule (2') dans le cas $\alpha > \pi$. Il en résulte que $g(u)$ tend uniformément vers zéro dans tout secteur intérieur au secteur donné AOB.

3. Soit une fonction $f(u)$ holomorphe dans le secteur AOB et sur OA et OB.

Nous admettrons que lorsque u tend vers zéro sur un rayon intérieur au secteur, $|f(u)|$ croisse constamment et indéfiniment, et cela d'une façon uniforme. L'inégalité (2) appliquée à $\frac{1}{f(u)}$ nous donne une propriété de cette fonction : si deux rayons OC et OD sont intérieurs au secteur et ont pour argument θ_1 et θ_2, on a

$$\left|\frac{1}{f(re^{i\theta_1})}\right| < \left|\frac{1}{f(bre^{i\theta_2})}\right|^n,$$

b et n étant des nombres positifs et ne dépendant que de la figure formée par les droites OA, OB, OC, OD. Nous admettrons, de plus, qu'à tout nombre a compris entre 0 et 1 on peut faire correspondre A tel que

$$|f(au)| \geqq |f(u)|^{A}.$$

Servons-nous de $f(u)$ pour étudier une autre fonction $g(u)$ holomorphe dans le secteur et dont le module n'est pas borné. Admettons qu'il existe des nombres réels b et b' tels que $|g(u)||f(u)|^{-b}$ est borné dans tout le secteur et que $|g(u)||f(u)|^{-b'}$ n'est pas borné sur un rayon déterminé OD d'argument θ_2. Je dis qu'à tout rayon OC d'argument θ_1, intérieur au secteur, on peut faire correspondre un nombre λ tel que $|g(u)||f(u)|^{\lambda}$ ne soit pas borné sur OC.

S'il en était autrement, $|g(u)||f(u)|^{m}$ serait borné sur OC pour si grand que soit le nombre positif m. Considérons la fonction

$$g_1(u) = [g(u)][f(u)]^{-b},$$

dont le module est borné. En désignant par K une constante, on aurait

$$|g_1(u)| < \mathrm{K}\,|f(u)|^{-b-m} \qquad \text{sur OC.}$$

Appliquons l'inégalité (2) à $g_1(u)$ et au secteur COA (en supposant, par exemple, OD entre OC et OA) et en prenant

$$\mathrm{V}(r) = \mathrm{K}\,|f(re^{i\theta_1})|^{-b-m}.$$

On a

$$|g_1(re^{i\theta_2})| < \mathrm{M}\,|f(are^{i\theta_1})|^{-(b+m)\mu},$$

μ, a, M étant des constantes positives, μ et a ne dépendant que de la figure formée par OA, OB, OC, OD.

En utilisant les propriétés indiquées de $f(u)$, on a des inégalités telles que

$$|g_1(re^{i\theta_2})| < \mathrm{M}\,|f(abre^{i\theta_2})|^{-(b+m)\mu n} < \mathrm{M}\,|f(re^{i\theta_2})|^{-(b+m)\mu n \mathrm{A}'}.$$

On en déduit que l'on a sur OD

$$|g_1(u)| < \mathrm{M}\,|f(u)|^{-(m+b)\mu n \mathrm{A}'},$$
$$|g(u)| < \mathrm{M}\,|f(u)|^{-m\mu n \mathrm{A}'}.$$

Les quantités μ, A', n ne dépendent que de la forme du secteur de la position de OC et OD ou de la fonction $f(u)$; elles ne dépendent pas de $g(u)$. Si m peut être choisi arbitrairement grand, $|g(u)|$ sera inférieur à n'importe quelle puissance négative de $|f(u)|$ sur OD, ce qui est contraire à notre hypothèse.

Cela posé, on démontrera aisément qu'à chaque rayon OD du secteur correspond un nombre μ positif, négatif ou nul tel que $|g(u)[f(u)]^{\mu-\varepsilon}|$ soit borné et que $|g(u)[f(u)]^{\mu+\varepsilon}|$ ne le soit pas.

4. Il est facile d'adapter le théorème précédent à la fonction

$$\mathrm{G}(v) = g\left(\frac{1}{v}\right)$$

définie par le domaine Σ_α, $\left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right)$. Je fais intervenir $\mathrm{F}(v) = f\left(\frac{1}{v}\right)$ qui est holomorphe dans Σ_α et dont le module supérieur ou égal à l'unité croît sur chaque rayon de Σ_α avec le module t de v et croît indéfiniment; soit, d'autre part, $\mathrm{G}(v)$ holomorphe dans Σ_α. S'il existe deux nombres réels b et b' tels que $|G(v)[F(v)]^b|$ soit borné dans Σ_α et que $|G(v)[F(v)]^{b'}|$ ne soit pas borné sur un rayon déterminé, à chaque rayon de Σ_α on peut faire correspondre un nombre μ tel que

$$|G(v)[F(v)]^{-\mu-\varepsilon}|$$

soit borné et que

$$|G(v)[F(v)]^{-\mu+\varepsilon}|$$

ne le soit pas.

A l'aide du principe de Phragmen et de Lindelöf, on peut démontrer quelque chose de plus sur ce nombre μ : s'il est au plus égal à μ_0 sur deux rayons OC et OC′, il est au plus égal à μ_0 sur tout rayon de l'angle COC′. La démonstration est une conséquence immédiate du principe (¹) (p. 382).

Nous aurons à nous occuper du cas où

$$F(v) = v$$

et du cas où

$$F(v) = e^v.$$

Si $F(v) = v$, je dirai que $G(v)$ est de *degré fini* dans Σ_α; $|G(v)|$ est comparable à $t^{\mu+\varepsilon}$ (t désigne le module v); je dirai que μ est le degré de $G(v)$ sur le rayon considéré. Il résulte de l'inégalité (2) que l'on a

$$\mu(\theta) > \mu(\theta_1) + \frac{(\theta-\theta_1)[\mu(\theta_2)-\mu(\theta_1)]}{\theta_2-\theta_1}$$

pour $\theta_1 \leqq \theta \leqq \theta_2$. On peut déduire de là que $\mu(\theta)$ est une fonction continue, résultat dû à Phragmen et Lindelöf (¹) (p. 404).

5. Dans le cas où $F(v) = e^v$ je dirai que $G(v)$ est d'*ordre* 1 et de *type moyen* dans Σ_α. Sur un rayon d'argument θ, $|G(v)e^{-(\lambda+\varepsilon)t}|$ est borné et $|G(v)e^{-(\lambda-\varepsilon)t}|$ ne l'est pas; *je dirai que ce nombre λ est le type de* $G(v)$; comme $|G(v)|$ peut être borné, je modifie un peu le sens habituel de ces façons de parler. Le type λ est une fonction continue de θ; ses propriétés ont été données par Phragmen et Lindelöf. Nous utiliserons tout particulièrement la propriété suivante : soient λ_1 et λ_2

(¹) PHRAGMEN et LINDELÖF, *Sur une extension d'un principe classique* (*Acta mathematica*, t. 31).

des nombres égaux ou supérieurs à λ sur deux rayons d'argument θ_1 et θ_2 ; soient deux nombres a et b tels que

$$\lambda_1 = a \sin \theta_1 + b \cos \theta_1,$$
$$\lambda_2 = a \sin \theta_2 + b \cos \theta_2 ;$$

pour θ compris entre θ_1 et θ_2 on a

$$\lambda \leqq a \sin \theta + b \cos \theta,$$

sous la condition, que nous avons acceptée plus haut, que α soit inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Pour la démonstration, je considère $G(v)e^{-(b+\varepsilon-ia)v}$ qui est encore une fonction d'ordre 1 et de type moyen, ε étant un nombre positif quelconque.

On reconnaît que cette fonction a son module borné pour $\theta = \theta_1$ et $\theta = \theta_2$; l'angle formé par ces deux rayons est inférieur à π ; un théorème souvent utilisé montre qu'elle est de module borné dans cet angle, ce qui établit la proposition.

On a, de plus, uniformément,

$$|G(v)| < e^{(a \sin \theta + b \cos \theta + \varepsilon)r}$$

pour

$$\theta_1 < \theta < \theta_2.$$

CHAPITRE II

6. Je m'occupe d'une fonction $G(v)$ holomorphe dans le domaine Σ_α $\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$ et je cherche des conditions que vérifie $G(v)$ dans ce secteur quand elle admet certaines racines réelles. Pour montrer la méthode, je traite le cas où ces racines sont les entiers positifs 1, 2, ..., n, ... Je suppose d'abord $|G(v)|$ borné et je pose

$$G_1(v) = \frac{G(v)}{\sin \pi v}.$$

On a

$$|G_1(v)| < \frac{2\,|G(v)|}{e^{\pi t|\sin\theta|} - 1},$$

ce qui montre que $|G_1(v)|$ est borné sur les rayons d'argument $\theta = \pm\alpha$. Sur la droite ; partie réelle $v = n + \frac{1}{2}$, $G_1(v)$ a une borne indépendante de n, car on a

$$\left|\sin\pi\left(n + \frac{1}{2} + iy\right)\right| > 1;$$

$|G_1(v)|$ est donc borné dans Σ_α; la fonction $G_1(v)$ tend vers zéro pour $\theta \neq 0$, donc aussi pour $\theta = 0$.

Si la fonction $G(v)$ est d'ordre 1 et du type moyen au sens du n° 5, on peut préciser sa décroissance : le type de $G_1(v)$ est au plus $-\pi\sin\alpha$ sur les rayons d'argument $+\alpha$ et $-\alpha$; il sera donc au plus

$$-\pi\,\text{tang}\,\alpha\cos\theta$$

d'après le théorème donné au n° 5. Le type de $G(v)$ sera donc au plus égal à $\pi|\sin\theta| - \pi\,\text{tang}\,\alpha\cos\theta$, c'est-à-dire $-\pi\dfrac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}$. Cette quantité est négative et $G(v)$ tend rapidement vers zéro dans Σ_α. Si $G(v)$ n'est pas d'ordre 1 et de type moyen, sa décroissance est encore plus rapide.

Je ne suppose plus $|G(v)|$ borné, mais j'admets que l'on a

$$|G(v)| < A e^{\Omega|\sin\theta| t}$$

dans Σ_α, A étant une constante. Je pose

$$G_2(v) = G(v)e^{-\Omega\,\text{tang}\,\alpha v}, \qquad \text{d'où} \qquad |G_2(v)| < A e^{\Omega(|\sin\theta| - \text{tang}\,\alpha\cos\theta)t};$$

$|G_2(v)|$ est donc borné dans Σ_α. Si $G(v)$ est d'ordre 1 et de type moyen, le type de $G_2(v)$ est inférieur à $-\pi\dfrac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}$.

Le type de $G(v)$ est donc au plus égal à

$$\Omega\,\text{tang}\,\alpha\cos\theta - \pi\frac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}.$$

Cette expression est préférable à celle qui nous est donnée : $\Omega|\sin\theta|$, si $\Omega < \pi$.

Dans ce cas, en effet, *on voit que le type est négatif pour* $\theta = 0$ *et pour* $|\theta|$ *suffisamment petit.*

7. Je me propose de généraliser ce qui précède en supposant toujours les zéros de $G(v)$ réels. Il me suffira d'adopter une distribution de ces zéros telle qu'il existe une fonction entière admettant ces zéros et possédant des propriétés analogues à $\sin \pi v$. J'étudie d'abord de telles fonctions.

Pour commencer, je me donne un nombre positif λ et une suite de nombres positifs $C_1, C_2, \ldots, C_n, \ldots$ tels que

$$n\lambda \leqq C_n < (n+1)\lambda$$

et j'étudie

$$\Phi(v) = v^4 \prod_1^\infty \left(1 - \frac{v^2}{C_n^2}\right).$$

Je vais démontrer les trois propriétés suivantes :

1° $|\Phi(x)x^{-4}|$ est borné par x réel et positif;

2° Soit x la partie réelle de v, si elle est positive et si l'on désigne par m l'entier tel que $C_m \leqq x < C_{m+1}$, le quotient

$$\left|\frac{(x - C_{m-1})(x - C_m)(x - C_{m+1})(x - C_{m+2})}{\Phi(v)}\right|$$

est borné;

3° Sur un rayon d'argument θ, $\left|\dfrac{e^{\frac{\pi|\sin\theta|t}{\lambda}}}{\Phi(v)}\right|$ admet une borne indépendante de t, $(\theta \neq 0)$.

1° Soit m tel que $C_m \leqq x < C_{m+1}$; nous supposons d'abord x différent de $\lambda(m+1)$.

Soient C le point d'affixe x^2, M un point variable sur l'axe réel positif; le rapport $\dfrac{MC}{MO}$ décroît si M se déplace vers la droite en restant entre O et C et il croît si M va de C à l'infini. Cela permet d'évaluer le module d'un facteur du produit $\Phi(x)$:

Si $n \leqq m$,

$$\left|1 - \frac{x^2}{C_n^2}\right| \leqq \left|1 - \frac{x^2}{\lambda^2 n^2}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots, m);$$

Si $n > m$,

$$\left|1-\frac{x^2}{C_n^2}\right| < \left|1-\frac{x^2}{\lambda^2(n+1)^2}\right| \qquad (n = m+1,\ m+2,\ \ldots).$$

Je multiplie ces inégalités membre à membre. On aperçoit le produit représentant $\dfrac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{\frac{\pi x}{\lambda}}$ auquel il manque un facteur. Donc

$$\left|\frac{\Phi(x)}{x^4}\right| < \left|\frac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{\frac{\pi x}{\lambda}}\right| \left|\frac{\lambda^2(m+1)^2}{\lambda^2(m+1)^2 - x^2}\right|.$$

On a d'abord

$$\frac{\lambda(m+1)}{\lambda(m+1)+x} < 1.$$

D'autre part, on peut écrire

$$\sin\frac{\pi x}{\lambda} = [x-(m+1)\lambda]\frac{\pi}{\lambda}\cos\frac{\pi}{\lambda}\{(m+1)\lambda + \theta[x-(m+1)\lambda]\},$$

θ étant compris entre o et 1. Donc

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{x-(m+1)\lambda}\right| < \frac{\pi}{\lambda}.$$

Finalement

$$|\Phi(x)x^{-4}| < \frac{\lambda(m+1)}{x}.$$

Or ce dernier rapport tend vers 1 lorsque x croît indéfiniment. La démonstration est faite en supposant que $\frac{x}{\lambda}$ n'est pas égal à un entier $m+1$. Mais si $|\Phi(x)x^{-4}|$ prenait une suite de valeurs croissant indéfiniment pour des valeurs de x de la forme λq_1, λq_2, ..., les q_i étant entiers, cette fonction croîtrait aussi indéfiniment pour des valeurs de x voisines des précédentes et qui ne seraient pas de même forme.

2° Soit x entier et positif; je cherche une borne inférieure de $|\Phi(x)|$.

Ce qui précède permet d'écrire, si $n < m - 1$,

$$\left|1 - \frac{x^2}{C_n^2}\right| > \left|1 - \frac{x^2}{\lambda^2(n+1)^2}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-2),$$

si $n > m + 2$,

$$\left|1 - \frac{x^2}{C_n^2}\right| > \left|1 - \frac{x^2}{\lambda^2 n^2}\right| \qquad (n = m+3, \ldots).$$

Je multiplie membre à membre en mettant en évidence $\sin\frac{\pi x}{\lambda}$ au deuxième membre :

$$|\Phi(x)| > x^4 \left|\frac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{\pi\frac{\lambda}{x}}\right| \left|\frac{C_{m-1}^2 - x^2}{C_{m-1}^2}\right| \left|\frac{C_m^2 - x^2}{C_m^2}\right| \left|\frac{C_{m+1}^2 - x^2}{C_{m+1}^2}\right| \left|\frac{C_{m+2}^2 - x^2}{C_{m+1}^2}\right|$$

$$\times \left|\frac{\lambda^2}{\lambda^2 - x^2}\right| \left|\frac{\lambda^2 m^2}{\lambda^2 m^2 - x^2}\right| \left|\frac{\lambda^2(m+1)^2}{\lambda^2(m+1)^2 - x^2}\right| \left|\frac{\lambda^2(m+2)^2}{\lambda^2(m+2)^2 - x^2}\right|,$$

$$\left|\frac{\Phi(x)}{(C_{m-1} - x)(C_m - x)(C_{m+1} - x)(C_{m+2} - x)}\right| >$$

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{(x - \lambda m)[x - \lambda(m+1)][x - \lambda(m+2)]}\right|$$

$$\times \left|\frac{(C_{m-1} + x)(C_m + x)(C_{m+1} + x)(C_{m+2} + x)\lambda^2 m^2 \lambda^2(m+1)^2 \lambda^2(m+2)^2 x^4 \lambda^3}{C_{m-1}^2 C_m^2 C_{m+1}^2 C_{m+2}^2 (\lambda m + x)[\lambda(m+1) + x][\lambda(m+2) + x](\lambda^2 - x^2)\pi x}\right|.$$

Il est facile de démontrer que le premier facteur

$$\left|\frac{\sin\frac{\pi x}{\lambda}}{(x - \lambda m)[x - \lambda(m+1)][x - \lambda(m+2)]}\right|$$

admet une borne inférieure pour x compris entre λm et $\lambda(m+2)$.

Pour évaluer le deuxième facteur, je remarque que λm, $\lambda(m+1)$, $\lambda(m+2)$, C_m, C_{m+1}, sont supérieurs à λm et inférieurs à $\lambda(m+3)$. Ce deuxième facteur est supérieur à

$$\frac{\lambda^3}{\pi}\,\frac{2^4}{2^3}\,\frac{(\lambda m)^{10} x^4}{[\lambda(m+3)]^{11} x\,|x^2 - \lambda^2|},$$

quantité qui tend vers $\frac{2\lambda^3}{\pi}$.

La démonstration est donc faite, en supposant x réel.

Je pose $v = x + iy$ et je dis que l'on a $|\Phi(v)| \geqq \Phi(x)$; il suffit de comparer les deux facteurs

$$\frac{|C_n - v||C_n + v|}{C_n^2} \quad \text{et} \quad \frac{|C_n - x||C_n + x|}{C_n^2}.$$

On a évidemment

$$|C_n - v| \geqq |C_n - x|, \qquad |C_n + v| \geqq |C_n + x|.$$

On a aussi $|v^4| > |x^4|$, d'où le résultat.

3° Soit $v = t e^{i\theta}$; je vais démontrer que $|\Phi(v)|$ croît indéfiniment avec t pour $\theta \neq 0$ et $|\theta| < \frac{\pi}{2}$; je considère θ comme fixe et je le suppose d'abord inférieur à $\frac{\pi}{4}$.

Soient C le point d'affixe v^2, A le point de l'axe réel et positif tel que OCA soit un angle droit $\left(\mathrm{OA} = \frac{t^2}{\sin 2\theta}\right)$; soit M un point variable de l'axe réel positif, le rapport $\frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{MO}} = \frac{\sin 2\theta}{\sin \mathrm{OCM}}$ décroît pour $\mathrm{OM} < \mathrm{OA}$ et croît pour $\mathrm{OM} > \mathrm{OA}$ lorsque OM croît.

Soit m le nombre entier tel que

$$C_m^2 \leqq \mathrm{OA} < C_{m+1}^2.$$

Si

$$n < m, \qquad n \neq m, \qquad \left|1 - \frac{v^2}{C_n^2}\right| > \left|1 - \frac{v^2}{\lambda^2 (n+1)^2}\right| \qquad (n = 1, 2, \ldots, m-1);$$

si

$$n > m+1, \qquad n \neq m+1, \qquad \left|1 - \frac{v^2}{C_n^2}\right| > \left|1 - \frac{v^2}{\lambda^2 n^2}\right| \qquad (n = m+2, \ldots).$$

On tire de là

$$\left|\frac{\Phi(v)}{v^4}\right| > \left|\frac{\sin \frac{\pi v}{\lambda}}{\frac{\pi v}{\lambda}}\right| \left| \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - v^2} \frac{\lambda^2 (m+1)^2}{\lambda^2 (m+1)^2 - v^2} \left(1 - \frac{v^2}{C_m^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{C_{m+1}^2}\right)\right|.$$

J'écrirai

$$|\Phi(v)| > \left| \frac{\lambda v^3}{\pi} \sin \frac{\pi v}{\lambda} \frac{\lambda^2}{\lambda^2 - v^2} \frac{\lambda^2 (m+1)^2}{\lambda^2 (m+1)^2 - v^2} \left(1 - \frac{v^2}{C_m^2}\right)\left(1 - \frac{v^2}{C_{m+1}^2}\right)\right|.$$

Dans le cas actuel

$$\left|\frac{v^2}{C_m^2}\right|, \quad \left|\frac{v^2}{C_{m+1}^2}\right|, \quad \left|\frac{v^2}{\lambda^2(m+1)^2}\right|$$

tendent vers $\cos 2\theta$, si $|v|$ croît indéfiniment. Il existe donc une constante A, dépendant de θ et telle que l'on ait

$$|\Phi(v)| > A\left|\sin\frac{\pi v}{\lambda}\right|,$$

dès que $|v|$ est assez grand. On voit donc que $\left|\frac{e^{\frac{\pi}{\lambda}|\sin\theta|r}}{\Phi(v)}\right|$ est borné sur le rayon d'argument θ, pour $|\theta| < \frac{\pi}{4}$. La borne croît si θ tend vers zéro.

Je suppose maintenant $|\theta| \geqq \frac{\pi}{4}$. Le point C d'affixe v^2 est à gauche de l'axe des imaginaires ou sur cet axe; le rapport $\frac{MC}{MO}$ décroît lorsque OM croît. On a

$$\left|1 - \frac{v^2}{C_n^2}\right| > \left|1 - \frac{v^2}{\lambda^2(n+1)^2}\right|,$$

et l'on obtient

$$|\Phi(v)| > \left|\frac{\lambda}{\pi} v^3 \sin\frac{\pi v}{\lambda}\,\frac{1}{1-\frac{v^2}{\lambda^2}}\right|.$$

On achève aisément.

8. Je considère maintenant une suite de nombres positifs telle que le nombre de ceux qui sont compris entre $n\lambda$ et $(n+1)\lambda$ soit égal à μ, λ étant un nombre positif et μ un entier positif. Je puis désigner ces nombres par $C_n^1, C_n^2, \ldots, C_n^\mu$ de telle façon que l'on ait

$$n\lambda < C_n^1 < C_n^2 \ldots < C_n^\mu < (n+1)\lambda.$$

Je forme les fonctions entières

$$\Phi_i(v) = v^i \prod_{n=1}^{\infty}\left[1 - \frac{v^2}{(C_n^i)^2}\right] \qquad (i = 1, 2, \ldots, \mu),$$

et j'étudie

$$\Phi(v) = \Phi_1(v)\Phi_2(v)\ldots\Phi_\mu(v).$$

Par application de ce qui précède, on obtient immédiatement :

1° $|\Phi(x)x^{-4\mu}|$ est borné pour x positif;

2° Si x désigne la partie réelle de v, si elle est comprise entre $C^i_{n_i}$ et $C^i_{n_i+1}$,

$$\left|\frac{\prod_{i=1}^{i=\mu}(x - C^i_{n_i-1})(x - C^i_{n_i})(x - C^i_{n_i+1})(x - C^i_{n_i+2})}{\Phi(v)}\right|$$

admet une borne indépendante des entiers n_i et i;

3° Sur un rayon d'argument θ, $\left|\dfrac{e^{\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|t}}{\Phi(v)}\right|$ admet une borne indépendante de t.

9. Je dois généraliser encore. Je considère une série de nombres positifs b_1, b_2, b_p, ..., qui font partie de la suite C^i_n que je viens d'étudier au n° 8. Je désigne par e_1, e_2, ..., e_p, ... ceux des nombres de la suite des C^i_n qui ne font pas partie de la suite b_1, b_2, ..., b_p, ..., et je suppose que $\frac{e_p}{p}$ croisse indéfiniment avec p.

Je dirai que la suite des b_p a une densité égale à $\frac{\mu}{\lambda}$.

Je pose

$$\Psi(v) = v^{4\mu}\prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{v^2}{b_p^2}\right), \qquad Q(v) = \prod_1^{\infty}\left(1 - \frac{v^2}{e_p^2}\right).$$

J'ai

$$\Psi(v) = \frac{\Phi(v)}{Q(v)}.$$

Je vais démontrer les trois propriétés suivantes :

1° Pour x réel et positif, $|\Psi(x)e^{-\varepsilon x}|$ est borné pour si petit que soit ε, ($\varepsilon > 0$).

2° x étant la partie réelle de v supposée comprise entre $C^i_{n_i}$ et $C^i_{n_i+1}$,

$$\left|\frac{\prod_{i=1}^{\mu}(x - C^i_{n_i-1})(x - C^i_{n_i})(x - C^i_{n_i+1})(x - C^i_{n_i+2})}{e^{\varepsilon t}\Psi(v)}\right|$$

est borné pour si petit que soit ε.

3° Sur le rayon d'argument θ, le rapport

$$\left|\frac{e^{\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|t}}{e^{\varepsilon t}\Psi(v)}\right|$$

admet une borne indépendante de t pour si petit que soit ε.

1° Pour démontrer la première propriété, je désigne par $d_1, d_2, \ldots$ les zéros positifs de $\Phi(v)$, c'est-à-dire les nombres C_n^i rangés en ordre croissant.

Soient p le nombre des e_i inférieurs à d_n, q le nombre des b_i inférieurs à d_n. On a $p+q=n$. Comme $\frac{p}{e_p}$ tend vers zéro et comme $e_p \leqq d_n$, $\frac{p}{d_n}$ tend vers zéro. Or d_n est comparable à $\frac{n\lambda}{\mu}$, $\frac{p}{n}$ tend vers zéro et $\frac{q}{n}$ tend vers 1.

On a évidemment

$$d_q < b_q < d_n, \qquad \frac{b_q}{d_q} < \frac{d_n}{d_q}, \qquad \frac{b_q}{d_q} > 1;$$

$\frac{d_n}{d_q}$ tend vers 1 comme $\frac{n}{q}$; $\frac{b_q}{d_q}$ tend donc aussi vers 1. Nous poserons

$$b_q = d_q[1+\varepsilon(q)].$$

$\varepsilon(q)$ est une fonction positive qui tend vers zéro avec $\frac{1}{q}$ et cela nous permettra de comparer $\Psi(v)$ et $\Phi(v)$ en suivant une méthode employée par M. Carlson (1).

Soit

$$v = te^{i\theta}, \qquad |\theta| < \frac{\pi}{4}, \qquad \theta \neq 0.$$

On a

$$\frac{1-\dfrac{v^2}{b_n^2}}{1-\dfrac{v^2}{d_n^2}} = 1 + \frac{v^2(b_n^2-d_n^2)}{b_n^2(d_n^2-v^2)}.$$

Or,

$$|d_n^2 - v^2| > d_n^2 \sin 2\theta \qquad \text{et} \qquad \left|\frac{b_n^2-d_n^2}{b_n^2}\right| = 1 - \frac{1}{[1+\varepsilon(n)]^2} < 2\varepsilon(n).$$

(1) CARLSON, *Math. Annalen*, Band 79, 1919, p. 239.

On a donc

$$\left|\frac{1-\dfrac{v^2}{b_n^2}}{1-\dfrac{v^2}{d_n^2}}\right| < 1 + \frac{2\varepsilon(n)t^2}{d_n^2 \sin 2\theta} < 1 + \frac{2t^2\varepsilon(n)}{K^2 n^2 \sin 2\theta},$$

car d_n est supérieur à Kn, K étant un nombre positif convenablement choisi.

$\varepsilon(n)$ tendant vers zéro est inférieur à un nombre positif arbitrairement petit δ dès que $n \geqq n_0$.

Multiplions membre à membre les inégalités que l'on vient d'obtenir en donnant à n toutes les valeurs entières. Pour $n \geqq n_0$ nous mettrons δ à la place de $\varepsilon(n)$. On obtient

$$\left|\frac{\Psi(v)}{\Phi(v)}\right| < \prod_1^{n_0-1}\left(1 + \frac{2t^2\varepsilon(n)}{K^2 n^2 \sin 2\theta}\right)\prod_{n_0}^{\infty}\left(1 + \frac{2t^2\delta}{K^2 n^2 \sin 2\theta}\right).$$

Le deuxième membre est égal à

$$\prod_1^{\infty}\left(\frac{1 + \dfrac{2t^2\varepsilon(n)}{K^2 n^2 \sin 2\theta}}{1 + \dfrac{2t^2\delta}{K^2 n^2 \sin 2\theta}}\right)\prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{2t^2\delta}{K^2 n^2 \sin 2\theta}\right) = H(t)\,\frac{\sin\left(it\sqrt{\dfrac{2\delta}{K^2 \sin 2\theta}}\,\pi\right)}{\pi i t\sqrt{\dfrac{2\delta}{K^2\sin 2\theta}}},$$

$H(t)$ étant une fraction rationnelle. L'ordre de grandeur du deuxième membre est celui de $e^{\pi t\sqrt{\frac{2\delta}{K^2 \sin 2\theta}}}$.

Or $\Phi(v)$ et $\Psi(v)$ sont évidemment des fonctions entières d'ordre 1 et du type moyen puisque l'on a, par exemple,

$$|\Phi(v)| < \prod_1^{\infty}\left(1 + \frac{t^2}{K^2 n^2}\right) = \frac{\sin\dfrac{it}{K}}{\dfrac{it}{K}}.$$

Sur le rayon d'argument θ le type de $\Psi(v)$ ne dépasse pas celui de $\Phi(v)$ d'une quantité supérieure à $\pi\sqrt{\dfrac{2\delta}{K^2 \sin 2\theta}}$. Cette quantité est arbitrairement petite à cause de la présence de δ au numérateur : le type de $\Psi(v)$ ne dépasse pas celui de $\Phi(v)$ pour θ différent de zéro. Comme le type est une fonction continue de l'argument θ, comme celui de $\Phi(v)$ est nul pour $\theta = 0$, celui de $\Psi(v)$ est nul aussi pour $\theta = 0$.

2° et 3° J'évalue la croissance de $Q(v)$. On a

$$\left| 1 - \frac{v^2}{e_n^2} \right| < 1 + \frac{t^2}{e_n^2}$$

si n est assez grand, $e_n > n\mathrm{A}$, A étant un nombre positif arbitrairement grand.

On a, dans ces conditions,

$$\left| 1 - \frac{v^2}{e_n^2} \right| < 1 + \frac{t^2}{\mathrm{A}^2 n^2},$$

et l'on en déduira, par un calcul analogue au précédent,

$$|Q(v)| < \frac{1}{i} \sin \frac{it}{\mathrm{A}} \, |\mathrm{H}_1(t)|,$$

$\mathrm{H}_1(t)$ étant une certaine fraction rationnelle.

On aperçoit que $\left| Q(v) e^{-\frac{\pi t}{\mathrm{A}'}} \right|$ est borné si A′ est un nombre quelconque inférieur à A; comme A et A′ sont arbitrairement grands, on peut dire que $|Q(v) e^{-\varepsilon t}|$ est borné pour si petit que soit ε positif. Les propositions 2° et 3° résultent immédiatement de là et des propriétés analogues de $\Phi(v)$.

10. Nous pouvons maintenant généraliser la proposition du n° 6.

Soit une fonction $G(v)$ holomorphe dans Σ_α et admettant les racines $b_1, b_2, \ldots, b_n$ dont la densité est $\frac{\mu}{\lambda}$ au sens du n° 9; on forme une telle suite en prenant μ nombres positifs entre $p\lambda$ et $(p+1)\lambda$, puis en supprimant les nombres $e_1, e_2, \ldots, e_q, \ldots$ de cette suite, la suite e_q étant telle que $\frac{e_q}{q}$ croisse indéfiniment. Nous supposerons $G(v)$ d'ordre 1 et du type moyen.

Supposons d'abord $|G(v)|$ borné et soit $G_1(v) = \frac{G(v)}{e^{\varepsilon v}\Psi(v)}$, ε étant un nombre positif très petit.

$|G_1(v)|$ est borné dans Σ_α : il admet, en effet, une borne sur les rayons d'argument θ pour $\theta \neq 0$ et en particulier pour $\theta = \pm\alpha$ et il est borné sur une infinité de droites perpendiculaires à l'axe réel : on s'en rend compte immédiatement en utilisant les propriétés 3° et 2° de $\Psi(v)$. La propriété 3° de $\Psi(v)$ montre que $G_1(v)$ tend vers zéro sur le rayon d'argument θ et que cette décroissance est comparable à celle d'une fonction d'ordre 1 et de type $-\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|$ pour $\theta \neq 0$; en particulier pour $\theta = \pm\alpha$, le type est $-\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\alpha|$. Appliquons le théorème du n° 5 entre $\theta = \alpha$ et $\theta = -\alpha$: si $G_1(v)$ est d'ordre 1 et de type moyen, son type est $-\frac{\pi}{\lambda}\operatorname{tang}\alpha\cos\theta$ au plus; si $G_1(v)$ n'est pas d'ordre 1 et de type moyen, c'est que sa décroissance est plus rapide encore, et cela sur tous les rayons puisque $|G_1|$ est borné.

Il résulte de là que le type de $G(v)$ est au plus $-\frac{\pi}{\lambda}\operatorname{tang}\alpha$ pour $\theta = 0$; il est au plus zéro pour $\theta = \pm\alpha$. Le même théorème du n° 5 appliqué entre $\theta = 0$ et $\theta = -\alpha$, puis entre $\theta = 0$ et $\theta = +\alpha$, montre que le type de $G(v)$ est au plus $-\frac{\pi\mu}{\lambda}\frac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}$ pour $|\theta| \leqq \alpha$.

Supposons maintenant que $|G(v)|$ ne soit pas borné, mais que son type soit au plus égal à $\Omega|\sin\theta|$ pour une valeur positive de Ω. J'étudie $G_2(v) = G(v)e^{-\Omega_1 \operatorname{tang}\alpha v}$ en prenant $\Omega_1 > \Omega$.

$|G_2(v)|$ est borné, et par suite tend vers zéro sur tout rayon pour lequel $|\theta| < \alpha$, et cette décroissance est comparable à celle d'une fonction d'ordre 1 et de type $-\frac{\pi\mu}{\lambda}\frac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}$. Le type de $G(v)$ est donc au plus égal à $\Omega\operatorname{tang}\alpha\cos\theta - \frac{\pi\mu}{\lambda}\frac{\sin(\alpha - |\theta|)}{\cos\alpha}$ puisque Ω_1 est arbitrairement voisin de Ω.

Si $\Omega < \frac{\pi\mu}{\lambda}$, $G(v)$ *tend vers zéro pour* $\theta = 0$ *et pour* θ *voisin de zéro, et le type est négatif pour ces valeurs de* θ.

C'est là le résultat que nous utiliserons au troisième chapitre.

11. Je vais indiquer une méthode élémentaire qui donne des résultats analogues aux précédents. Je reviens aux notations du début et j'étudie une fonction $g(u)$ homolorphe dans S_α. Je supposerai, maintenant, le module de $g(u)$ borné dans S_α.

Soient x, x', r_1 des nombres réels positifs tels que

$$0 < x' < x < r_1 < r_0.$$

Je vais démontrer le lemme suivant : le produit

$$\frac{x'}{x - x'} \, | g(x) - g(x') |$$

admet une borne indépendante de x et de x'.

On peut, dans le cas actuel, appliquer la formule de Cauchy de la façon suivante, bien que la fonction $g(u)$ ne soit pas partout holomorphe sur le contour σ du secteur S_α,

$$g(x) - g(x') = \frac{1}{2i\pi}\int_\sigma g(z)\left[\frac{1}{z-x} - \frac{1}{z-x'}\right] dz,$$

$$\frac{x'}{x - x'}\,[g(x) - g(x')] = \frac{x'}{2i\pi}\int_\sigma g(z)\,\frac{dz}{(z-x)(z-x')}.$$

On peut décomposer cette dernière intégrale en trois parties; chaque partie est relative à l'un des trois côtés du contour; démontrons que chaque partie est de module borné. Le résultat est immédiat en ce qui concerne l'intégrale sur l'arc de cercle. L'intégrale sur le segment de droite d'argument α a son module inférieur à

$$\mathrm{I} = \frac{x'}{2\pi}\int_0^{r_0} \frac{\mathrm{A}\,dt}{|te^{i\alpha} - x|\,|te^{i\alpha} - x'|} \qquad [\mathrm{A} \text{ est la borne de } |g(z)|].$$

Utilisons l'inégalité $\frac{1}{ab} < \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$,

$$\mathrm{I} \leq \frac{\mathrm{A}x'}{2\pi}\left[\int_0^{r_0} \frac{dt}{t^2 + x^2 - 2tx\cos\alpha} + \int_0^{r_0} \frac{dt}{t^2 + x'^2 - 2tx'\cos\alpha}\right].$$

Pour évaluer la première intégrale, on peut poser $t = \lambda x'$; elle devient

$$\frac{1}{x}\int_0^{\frac{r_0}{x}} \frac{d\lambda}{1 + \lambda^2 - 2\lambda\cos\alpha},$$

elle est inférieure à la même intégrale prise entre les limites o et l'infini. On voit donc que l'on a

$$1 < Bx'\left[\frac{1}{x}+\frac{1}{x'}\right] < 2B$$

(B est une constante positive).

Comme on aurait un résultat analogue pour la troisième intégrale à évaluer, le théorème est établi.

Cela posé, je garde toutes les hypothèses précédentes relatives à $g(u)$ et je suppose de plus que cette fonction s'annule pour les valeurs réelles de u $\frac{1}{C_1}, \frac{1}{C_2}, \ldots, \frac{1}{C_n}, \ldots$, les C_n croissant indéfiniment avec n de telle façon que $\frac{C_n}{C_{n-1}}$ tende vers 1.

Soit x un nombre positif inférieur à r_1. Il existe n tel que

$$\frac{1}{C_{n-1}} \geq x > \frac{1}{C_n}.$$

D'après le lemme, il existe un nombre positif A tel que

$$|g(x)| < A\,\frac{x-\frac{1}{C_n}}{\frac{1}{C_n}} < A\,\frac{\frac{1}{C_{n-1}}-\frac{1}{C_n}}{\frac{1}{C_n}} = A\left(\frac{C_n}{C_{n-1}}-1\right);$$

$g(x)$ tend donc vers zéro sur l'axe réel. D'après les théorèmes du Chapitre I, $g(u)$ tend uniformément vers zéro dans tout secteur intérieur à S_α.

J'ajoute une hypothèse de plus : j'admets que $\frac{C_n}{C_{n-1}}$ tend vers 1 avec assez de rapidité pour qu'il existe des nombres positifs B et q tels que

$$\frac{C_n}{C_{n-1}} - 1 < \frac{B}{C_n^q}.$$

Je vais démontrer que, dans ces conditions, $g(u)$ tend vers zéro dans le secteur avec le degré infini (c'est-à-dire que $\left|\frac{g(u)}{u^m}\right|$ est borné quel que soit m positif).

x étant réel et compris entre $\frac{1}{C_{n-1}}$ et $\frac{1}{C_n}$, on a maintenant

$$|g(x)| < \frac{AB}{C_n^q} < ABx^q.$$

$g(u)$ est donc de degré q sur l'axe réel. Il résulte des propriétés du degré établies au nº 4 que l'on peut trouver un secteur $S_{\alpha'}\left(\alpha' < \frac{\alpha}{2}\right)$ où le degré est $\frac{q}{2}$. La fonction $g(u)u^{-\frac{q}{2}} = g_1(u)$ est de module borné dans ce secteur et elle a les mêmes racines que $g(u)$. En lui appliquant la proposition qui vient d'être obtenue, on voit que $|g_1(u)u^{-q}|$ est borné sur l'axe réel, d'où il résulte que $\left|g_1(u)u^{-\frac{q}{2}}\right|$ est borné dans un secteur $S_{\alpha''}\left(\alpha'' < \frac{\alpha'}{2}\right)$; il revient au même de dire que $\left|g(u)u^{-\frac{2q}{2}}\right|$ est borné dans $S_{\alpha''}$.

Je pose $g_2(u) = g(u)u^{-\frac{2q}{2}}$; cette fonction de module borné a les mêmes racines que $g(u)$; $|g_2(u)u^{-q}|$ est donc borné sur l'axe réel. On en conclut que $\left|g_2(u)u^{-\frac{q}{2}}\right| = \left|g(u)u^{-\frac{3q}{2}}\right|$ est borné dans un secteur $S_{\alpha'''}$, ... On peut continuer indéfiniment. Il existe donc un secteur S_{α_r} où $\left|g(u)u^{-\frac{rq}{2}}\right|$ est borné et cela quel que soit l'entier p. $g(u)$ est donc de degré infini sur l'axe réel, donc aussi sur tout rayon intérieur à S_α.

Nous avons donc l'énoncé suivant :

La fonction $g(u)$ étant holomorphe et de module borné dans S_α, si elle admet comme racine les nombres $\frac{1}{C_n}$, C_n positif croissant indéfiniment avec n.

1º Si $\frac{C_n}{C_{n-1}}$ *tend vers* 1, $g(u)$ *tend vers zéro sur chaque rayon intérieur au secteur.*

2º Si $C_n^q\left(\frac{C_n}{C_{n-1}} - 1\right)$ *reste borné pour une valeur positive de n, $g(u)$ est de degré infini.*

Ce théorème n'est pas plus général que celui du nº 10; on peut, au contraire, l'en déduire par des changements de variable. J'ai préféré, cependant, donner la méthode précédente qui permet de démontrer des propositions que j'utilise au Chapitre IV.

Je signale une conséquence directe du lemme : $|g(u)|$ étant borné dans S_α, $|ug'(u)|$ est borné sur l'axe réel.

En modifiant légèrement la démonstration du lemme, on démontrera sans difficulté que $|ug'(u)|$ est borné dans tout secteur de sommet O et intérieur à S_α.

CHAPITRE III

---

12. Soit

$$f(z) = \sum_0^\infty a_n z^n$$

une fonction de la variable $z = \rho e^{i\omega}$ dont le rayon de convergence est l'unité. Nous désignerons dans ce qui suit par C un contour simple entourant l'origine telle qu'une demi-droite issue de l'origine ne le coupe qu'en un seul point. Si $f(z)$ est holomorphe sur ce contour et à l'intérieur,

$$a_n = \int_C \frac{f(z)\,dz}{z^{n+1}}.$$

Posons avec M. Carlson

$$G(v) = \frac{1}{2i\pi}\int_C f(z)\,z^{-(v+1)}\,dz. \tag{4}$$

La fonction $G(v)$ dépend de la détermination choisie pour $z^{(-v+1)}$ et aussi du contour C. Pour la déterminer, je supposerai toujours l'argument ω de z compris entre $-\frac{\pi}{2}$ et $+\frac{\pi}{2}$ et je prendrai les notations suivantes :

$$z = \rho e^{i\omega}, \qquad v = te^{i\theta}, \qquad z^{-(v+1)} = z^{-1}e^{-(\log\rho + i\omega)(\cos\theta + i\sin\theta)t}.$$

On reconnaîtra que $G(v)$ dépend du point où C coupe l'axe réel du côté négatif et que, ce point restant fixe, une modification de C ne change pas $G(v)$. Il a été démontré, de plus, par divers procédés, que $G(v)$ est fonction analytique de v; c'est même une fonction entière.

Si $f(z)$ n'est pas holomorphe sur C, mais l'est à l'intérieur et tend vers une fonction limite continue lorsque z tend vers un point de C, ce qui précède s'applique sans changement.

Il est facile de voir que $G(v)$ est d'ordre 1 et du type moyen dans tout domaine Σ_α et même dans tout le plan. On a, en effet, sur C

$$|z^{-v}| = e^{t(-\log\rho\cos\theta+\omega\sin\theta)} < e^{kt},$$

k étant la borne supérieure de $|\log\rho|+|\omega|$ quand z parcourt C. D'autre part, la plus grande des limites de $\sqrt[n]{|G(n)|}$ est égale à 1; il en résulte que $G(v)e^{\varepsilon t}$ n'est pas borné sur l'axe réel pour si petit que soit ε, et les deux conditions pour qu'une fonction soit d'ordre 1 et de type moyen sont bien remplies.

Nous supposerons que le point $z = -1$ n'est pas point singulier de $f(z)$. Il est dès lors possible d'admettre que le contour C coupe l'axe réel, du côté négatif, en un point extérieur au cercle $|z|<1$. Dans tout ce qui suit, il est sous-entendu que C est choisi de cette façon.

Je dis que, dans ces conditions, le type de $G(v)$ est nul pour v réel positif.

Soit $-\rho_0$, $(\rho_0>1)$, l'affixe du point où C coupe l'axe réel du côté négatif; on peut, en laissant ce point fixe, tracer le contour C extérieur au cercle de rayon $e^{-\varepsilon}$ et de centre O, ε étant un nombre positif qu'on fera tendre vers zéro. Sur C, on a, pour v réel,

$$|z^{-v}| = e^{-v\log\rho} < e^{\varepsilon v}.$$

On en déduit aisément une inégalité telle que

$$G(v) < A e^{\varepsilon v},$$

et comme ε est arbitrairement petit le type de $G(v)$ ne peut être supérieur à zéro. Comme $\sqrt[n]{|a_n|}$ a pour plus grande des limites 1, ce type ne peut être inférieur à zéro; il est donc nul.

13. Je vais établir le théorème suivant :

Pour que la série $f(z) = \Sigma a_n z^n$ dont le rayon de convergence est 1 représente une fonction holomorphe sur l'arc AB du cercle de convergence défini par

$$AB, \qquad \Omega \leqq |\omega| \leqq \pi, \qquad \rho = 1,$$

il faut [1] *et suffit qu'il existe une fonction $H(v)$ holomorphe, d'ordre 1*

[1] Ce théorème est dû à M. CARLSON, *loc. cit.*

et de type moyen dans un domaine Σ_α pour une valeur de α comprise entre zéro et $\frac{\pi}{2}$, telle que $H(n) = a_n$ et dont le type $\tau(\theta)$ sur le rayon d'argument θ vérifie

$$\tau(\theta) = 0, \qquad \tau(\alpha) < \Omega \sin\alpha, \qquad \tau(-\alpha) < \Omega \sin\alpha.$$

Je remarque d'abord que ces trois conditions imposées du type sont entièrement équivalentes à l'inégalité

$$\tau(\theta) < \Omega\,|\sin\theta| \qquad \text{pour} \qquad |\theta| \leqq \alpha;$$

il n'y a, pour s'en convaincre, qu'à appliquer le théorème du n° 5 aux intervalles $(0, \alpha)$ et $(-\alpha, 0)$.

Je vais d'abord démontrer que la condition est nécessaire; la fonction $H(v)$ de l'énoncé sera la fonction $G(v)$ du n° 12 qui correspond à un contour C convenablement construit. Pour obtenir ce contour C, je commence par marquer deux points A_1 et B_1 dont les affixes sont $e^{\pm i\Omega_1}$ tels que $\Omega_1 < \Omega$ et que $f(z)$ soit holomorphe sur l'arc A_1B_1, ce qui est possible. Je considère ensuite l'angle A_1OB_1 défini par $|\omega| > \Omega_1$ et un arc de courbe A_1PB_1 intérieur à cet angle et extérieur au cercle de convergence de $f(z)$; je supposerai que cet arc est assez voisin du cercle de convergence pour que $f(z)$ soit holomorphe sur l'arc et dans la région comprise entre le cercle de convergence et de l'arc. On peut démontrer sans difficulté (et je n'insiste pas sur les démonstrations) que l'arc A_1PB_1 peut être choisi de façon à posséder les propriétés suivantes : cet arc est symétrique par rapport à l'axe réel; un rayon issu de O et intérieur à l'angle A_1OB_1 ne le rencontre qu'en un point; le rayon vecteur est une fonction continue de l'argument du rayon. L'arc A_1PB_1 a donc une équation de la forme

$$\rho = \Phi(\omega), \qquad (\Omega_1 \leqq \omega < \pi, \quad -\pi \leqq \omega < -\Omega_1),$$

$\Phi(\omega)$ étant une fonction continue; comme dernière propriété de l'arc, cette fonction peut être supposée croissante lorsque ω varie de Ω à π.

Je considérerai d'abord le contour Γ formé de l'arc A_1PB_1 situé à gauche de la corde A_1B_1 et de l'arc de cercle A_1B_1 qui fait partie du cercle de convergence et qui est situé à droite de la corde A_1B_1. Le contour tout entier aura une équation que je représenterai encore par $\rho = \Phi(\omega)$; j'étends ainsi l'intervalle de définition de $\Phi(\omega)$ en adoptant la convention que $\Phi(\omega)$ est égal à 1 pour $-\Omega_1 < \omega < \Omega_1$. Le contour Γ étant ainsi choisi, le contour C sera un contour intérieur à Γ et représenté par les équations

$$C \left\{ \begin{array}{lll} \rho = e^{-a} e^{\omega \operatorname{tang} \alpha} & \text{pour} & 0 \leqq \omega \leqq \pi, \\ \rho = e^{-a} e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha} & \text{pour} & -\pi \leqq \omega \leqq 0; \end{array} \right.$$

a et α sont deux nombres positifs que nous allons choisir; α sera inférieur à $\frac{\pi}{2}$.

Pour que C soit intérieur à Γ, il suffira que l'on ait

$$(5) \qquad -a + \omega \operatorname{tang} \alpha < \log \Phi(\omega) \qquad \text{pour} \qquad 0 \leqq \omega \leqq \pi.$$

Il est clair que cette inégalité est vérifiée pour $0 < \omega \leqq \Omega$ si l'on a

$$a = \Omega \operatorname{tang} \alpha:$$

elle sera vérifiée pour $\pi > \omega \geqq \Omega$, si α est donné par

$$\operatorname{tang} \alpha = \frac{\log \Phi(\Omega)}{\pi - \Omega_1},$$

puisque $\Phi(\omega)$ est une fonction croissante et que le premier membre de l'inégalité (5) devient

$$\frac{\omega - \Omega}{\pi - \Omega_1} \log \Phi(\Omega) < \log \Phi(\Omega).$$

Les deux équations obtenues déterminent a et α et par la suite le contour C intérieur à Γ.

Le contour étant ainsi choisi, on a

$$(6) \qquad |z^{-v}| = e^{a \cos \theta t} e^{-\omega \frac{\sin(\alpha - \theta)}{\cos \alpha} t} \qquad \text{pour} \qquad 0 < \omega < \pi,$$

donc

$$|z^{-v}| \leqq e^{a \cos \theta t} \qquad \text{si} \qquad -\alpha \leqq \theta < \alpha.$$

On a un résultat analogue pour $-\pi < \omega < 0$ et l'expression (4) de $G(v)$ montre que le type de $G(v)$ est au plus $a \cos \theta$, c'est-à-dire $\Omega \operatorname{tang} \alpha \cos \theta$; en particulier, pour $\theta = \pm \alpha$, le type est $\Omega \sin \alpha$ comme l'indique l'énoncé. On a déjà vu que le type de $G(v)$ est nul pour $\theta = 0$, de sorte que la première partie de la démonstration est achevée. Notons que, puisque Ω peut être remplacé par un nombre légèrement supérieur, on a $|G(v)| < e^{\Omega|\sin\theta|t}$ pour t assez grand (¹).

Passons à la réciproque et commençons par admettre que la fonction de v qui nous est donnée soit de module borné dans Σ_α; un théorème dû à M. Fabry (²) résout alors la question. Je l'ai démontré sous la forme suivante (³) :

Si $H_1(v)$ est une fonction holomorphe et de module borné dans Σ_α, la fonction $\Sigma H_1(n)z^n$ est holomorphe à l'intérieur du domaine Δ_α intérieur au contour C_α défini par

$$C_\alpha \left\{ \begin{array}{lll} \rho = e^{\omega \operatorname{tang}\alpha} & \text{si} & 0 \leq \omega \leq \pi, \\ \rho = e^{-\omega \operatorname{tang}\alpha} & \text{si} & -\pi \leq \omega \leq 0 \end{array} \right. \qquad \left(\alpha < \frac{\pi}{2}\right).$$

Je reviens à la fonction $H(v)$ définie dans l'énoncé et je pose

$$H_1(v) = H(v)e^{-v(\Omega \operatorname{tang}\alpha + \varepsilon)}.$$

J'ai

$$|H_1(v)| < e^{\Omega(|\sin\theta| - \operatorname{tang}\alpha\cos\theta)t},$$

$|H_1(v)|$ est borné sur les rayons d'argument $+\alpha$ et $-\alpha$; comme la fonction est d'ordre 1 et de type moyen dans Σ_α, comme α est inférieur à $\frac{\pi}{2}$, le principe de Phragmen et de Lindelöf montre que $|H_1(v)|$ est borné dans Σ_α, d'après le théorème précédent $\Sigma H(n)e^{-n(\Omega \operatorname{tang}\alpha + \varepsilon)}z^n$ est donc holomorphe dans Δ_α. On en déduit que $\Sigma H(n)z^n$ est holomorphe dans le domaine déduit de Δ_α en multipliant l'affixe de chaque point par $e^{-(\Omega \operatorname{tang}\alpha + \varepsilon)}$; ε étant arbitrairement petit, $\Sigma H(n)z^n$ est holo-

---

(¹) Si l'on tient compte de la remarque placée à la fin du n° 5, on verra, de plus, que cette inégalité est vérifiée d'une façon uniforme quel que soit θ sous la condition $0 < \theta_0 < |\theta| < \alpha$. Si l'on veut une inégalité valable dans Σ_α, il faut écrire

$$|G(v)| < e^{\Omega|\sin\theta|t + \varepsilon t} \qquad (\varepsilon \text{ positif, } t \text{ assez grand}).$$

(²) Fabry, *Sur les points singuliers d'une série de Taylor* (*Journal de Math.*, 5ᵉ série, t. IV, 1898).

(³) Soula, *Sur la recherche des points singuliers de certaines fonctions* (*Journal de Math.*, 8ᵉ série, t. IV, 1921).

morphe dans le domaine limité par la courbe

$$\rho = e^{-\Omega \operatorname{tang} \alpha} e^{\omega \operatorname{tang} \alpha} \qquad (0 \leqq \omega \leqq \pi),$$
$$\rho = e^{-\Omega \operatorname{tang} \alpha} e^{\omega \operatorname{tang} \alpha} \qquad (-\pi \leqq \omega \leqq 0).$$

Cette courbe comprend à son intérieur l'arc du cercle de rayon 1 pour lequel on a $|\omega| > \Omega$.

Comme j'ai accepté, dans l'énoncé, les inégalités $\tau(\pm\alpha) < \Omega \sin\alpha$ (les égalités étant exclues), je puis remplacer Ω par une quantité un peu inférieure, ce qui montre que $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega$ (extrémités comprises).

14. Voici un nouveau théorème un peu plus particulier que le précédent :

Soit $f(z) = \Sigma a_n z^n$ holomorphe dans le cercle de rayon 1. Supposons que cette fonction soit holomorphe sur l'arc (extrémités A et B non comprises) du cercle de convergence défini par $|\omega| < \Omega$. Supposons de plus que $f(z)$ soit holomorphe et de module borné à l'intérieur du domaine Δ_α^Ω défini par

$$\Delta_\alpha^\Omega \begin{cases} \rho < e^{-\Omega \operatorname{tang} \alpha} e^{\omega \operatorname{tang} \alpha} & (0 < \omega < \pi), \\ \rho < e^{-\Omega \operatorname{tang} \alpha} e^{-\omega \operatorname{tang} \alpha} & (-\pi < \omega < 0). \end{cases}$$

Il existe une fonction $G(v)$ holomorphe dans Σ_α dont l'ordre de croissance est 1 et de type moyen et dont le type $\tau(\theta)$ vérifie

$$\tau(0) = \theta, \qquad \tau(\alpha) < \Omega \sin\alpha, \qquad \tau(-\alpha) < \Omega \sin\alpha.$$

Réciproquement, si $G(v)$ possède ces propriétés, $\Sigma G(n) z^n$ est holomorphe à l'intérieur de Δ_α^Ω.

La démonstration est presque identique à celle du théorème du n° 13.

15. Les théorèmes des n^{os} 13 et 14 ramènent l'étude du prolongement analytique des séries de Taylor sur leur cercle de convergence à celle des variations du type des fonctions $G(v)$ d'ordre 1 et de type moyen.

Soit la fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 et pour laquelle le point -1 est un point régulier. Nous lui ferons toujours correspondre une fonction $G(v)$ qui correspond elle-même à un contour C qui coupe l'axe réel du côté négatif en un point extérieur au cercle de convergence; le type est inférieur à $\Omega|\sin\theta|$ pour $|\theta| < \alpha$, Ω et α étant positifs et Ω inférieur à π. Deux telles fonctions $G(v)$ ont leur différence nulle pour v entier positif; d'après le théorème du n° 6, cette différence tend rapidement vers zéro; elle décroît comme $e^{-a|v|}$ (a positif) pour $|\theta|$ assez petit. Cette différence est négligeable pour notre étude; la fonction $G(v)$ choisie comme je viens de l'indiquer pourra donc être regardée comme bien déterminée.

Commençons par retrouver les théorèmes sur les lacunes. Supposons que certains coefficients a_n soient nuls et que leur densité soit égale à $\frac{\mu}{\lambda}$ (au sens du n° 10); désignons par Ω un nombre positif tel que $f(z)$ soit holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega$ du cercle de convergence. On a vu que le type de $G(v)$ sur l'axe réel est $\left(\Omega - \frac{\pi\mu}{\lambda}\right)\tang\alpha$; ce type ne peut être négatif puisque $\sqrt[n]{|G(n)|}$ a pour plus grandes des limites 1; on a donc $\Omega > \frac{\pi\mu}{\lambda}$.

Comme tout point du cercle de convergence peut être amené au point -1 par le changement de z en $ze^{i\varphi}$, on peut énoncer.

Si la « densité » des coefficients nuls de la série $f(z) = \Sigma a_n z^n$ devient, pour n assez grand, égale à $\frac{\mu}{\lambda}$, la fonction $f(z)$ ne peut être holomorphe sur un arc du cercle de convergence supérieur à $2\pi\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)$ en parties au rayon.

Supposons que $\frac{\mu}{\lambda}$ soit égal à 1; le cercle de convergence est coupure. Ce cas est celui où les coefficients non nuls forment une suite dont les indices sont $e_1, e_2, \ldots, e_n, \ldots$, tels que $\frac{e_n}{n}$ croisse indéfiniment. C'est là le théorème des lacunes de M. Fabry ou plutôt le cas particulier le plus connu de ce théorème.

16. On peut obtenir aussi des théorèmes sur le signe de la partie réelle de a_n. Soit $a_n = \alpha_n + i\beta_n$; si $\Sigma a_n z^n$ est holomorphe en un point, $\Sigma \alpha_n z^n$ l'est aussi; je n'insiste pas sur la démonstration très simple de

ce fait [1]. Portons notre attention sur les changements de signe de la suite $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots$, et sur la fonction $G_1(v)$ qui correspond à $\Sigma\alpha_n z^n$. A un changement de signe entre α_n et α_{n+1} correspond un zéro de $G_1(v)$ compris entre les deux nombres positifs α_n et α_{n+1} [$G_1(v)$ est réel pour v réel]. *Supposons que les coefficients α_n qui sont suivis d'un coefficient de signe contraire, présentent une distribution de « densité » $\frac{\mu}{\lambda}$; supposons $\Sigma a_n z^n$ et $\Sigma\alpha_n z^n$ holomorphes sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega$ du cercle de convergence; on aura encore $\Omega \geqq \frac{\pi\mu}{\lambda}$.*

En particulier, si $\frac{\mu}{\lambda}$ est égal à 1, le point -1 est un point singulier pour $f(z)$; c'est encore là un théorème bien connu, mais énoncé pour le point -1, alors que l'énoncé habituel est relatif à $+1$.

17. Étudions maintenant une fonction $f(z)$ ayant une infinité de coefficients égaux à a, une infinité d'autres égaux à b ou à c (a, b, c sont trois nombres donnés quelconques). Nous supposons que la densité de l'ensemble de ces coefficients égaux à a, à b, ou à c soit égale à $\frac{\mu}{\lambda}$. Supposons $f(z)$ holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega$ du cercle de convergence de rayon 1, le type de $G(v)$ est au plus égal à $\Omega|\sin\theta|$ pour $|\theta| < \alpha$; le type de

$$H(v) = [G(v) - a][G(v) - b][G(v) - c]$$

est au plus égal à $3\Omega|\sin\theta|$.

Soient $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$ les coefficients de la série $f(z)$ qui ne sont égaux ni à a, ni à b, ni à c. Je commence par montrer que l'on peut supposer sans inconvénient que la plus grande des limites de $\sqrt[n_p]{|H(n_p)|}$ est égale à 1. S'il en était autrement, cette plus grande limite serait inférieure à 1 et $H(n_p)$ tendrait vers zéro, $G(n_p)$ ne pourrait avoir de valeur limite autre que a, b ou c. Je désigne par u_{n_p} celui des trois nombres $a - G(n_p)$, $b - G(n_p)$, $c - G(n_p)$ qui a le plus petit module, $H(n_p)$ serait égal à u_{n_p} multiplié par un nombre voisin

---

[1] Szász, *Ueber Singularitäten von Potenzreihen und Dirichletschen Reihen* (*Math. Annalen*, Band 85, 1922).

de a, de b ou de c, la série $\Sigma u_{n_p} z^{n_p}$; tout comme $\Sigma H(n_p) z^{n_p}$ représenterait donc une fonction dont le rayon de convergence serait supérieur à 1. On peut ajouter $\Sigma u_{n_p} z^{n_p}$ à $f(z)$ sans changer les points singuliers du cercle de convergence et tous les coefficients deviennent égaux à a, à b ou à c.

Cette transformation effectuée, distinguons deux cas :

Supposons d'abord que la suite $a_{n_1}, a_{n_2}, \ldots, a_{n_p}, \ldots$ comprenne une infinité de termes; la série $\Sigma H(n) z^n$ a un rayon de convergence égal à 1, elle a une infinité de coefficients nuls ayant la densité $\frac{\mu}{\lambda}$; le type de $H(v)$ est au plus $3\Omega|\sin\theta|$ et pour $\theta = 0$ ce type n'est pas inférieur à 0. Le théorème du n° 10 montre que le type est au plus égal à $\left(3\Omega - \frac{\pi\mu}{\lambda}\right)\operatorname{tang}\alpha$ pour $\theta = 0$, et comme cette expression ne doit pas être négative, on a

$$\Omega \geqq \frac{\pi\mu}{3\lambda}.$$

Supposons, en deuxième lieu, que tous les coefficients soient égaux à a, à b ou à c; $H(v)$ est nul pour toute valeur entière positive de v. Si $3\Omega < \pi$, le théorème du n° 6 montre que $H(v)$ tend vers zéro pour v réel comme e^{-mv} $(m > 0)$. L'équation

$$(G - a)(G - b)(G - c) - H(v) = 0$$

admet trois racines en G qui sont trois fonctions de v voisines de a, de b et de c, respectivement dès que v a son module assez grand. Chacune de ces racines est une fonction holomorphe de v pour v dans Σ_α et pour $|v|$ assez grand.

$G(v)$ doit donc être une de ces racines; il ne peut donc prendre que l'une des trois valeurs a, b, c pour v entier, la valeur a par exemple, et l'on a $f(z) = \frac{a}{1-z}$.

Ainsi, $f(z)$ possède au moins un point singulier sur l'arc $|\omega| > \frac{3\mu}{\lambda}$ du cercle de convergence, sauf dans le cas où $a = b = c$ et où l'on a

$$f(z) = \frac{a}{1-z} + f_1(z),$$

$f_1(z)$ étant holomorphe à l'intérieur du cercle de convergence et sur ce cercle lui-même.

Ce théorème a été donné par M. Carlson dans le cas où $\frac{\mu}{\lambda} = 1$ [1]. Il peut être généralisé d'une autre façon.

Donnons-nous trois fonctions $a(v)$, $b(v)$, $c(v)$ holomorphes dans le domaine Σ_α et supposons que si v parcourt Σ_α, les points dont les affixes sont a, b, c se trouvent respectivement dans les régions A, B, C. Nous admettrons que ces régions sont à distance finie, qu'elles sont d'un seul tenant, qu'elles n'ont pas de point commun deux à deux, enfin que la distance d'un point de l'une à un point de l'autre reste au-dessus d'un certain minimum. Si l'ensemble des coefficients a_n égaux à $a(n)$ ou à $b(n)$ ou à $c(n)$ a la densité $\frac{\mu}{\lambda}$, on obtient le même résultat : $f(z)$ possède au moins un point singulier sur l'arc $|\omega| > \frac{\pi\mu}{3\lambda}$ du cercle de convergence, sauf dans le cas où a_n est constamment égal à $a(n)$, à $b(n)$ ou à $c(n)$. [Dans ce cas, $f(z)$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence.]

18. Voici une propriété analogue aux précédentes : soit $f(z) = \Sigma a_n z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 et qui est régulière sur l'arc $(|\omega| \leqq \Omega, \rho = 1)$. Formons la fonction $\varphi(z) = \Sigma a_{n_p} z^{n_p}$ dont les termes sont des termes de la série $f(z)$.

Supposons que le rayon de convergence de $\varphi(z)$ soit encore égal à 1 et que cette fonction soit holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \Omega_1$ du cercle de convergence. Soient $G(v)$ et $G_1(v)$ les deux fonctions qui correspondent à $f(z)$ et à $\varphi(z)$; il est clair que

$$P(v) = G_1(v)[G(v) - G_1(v)]$$

est nul pour n entier positif. $P(v)$ est une fonction d'ordre 1 et du type moyen ou une fonction qui tend vers zéro plus rapidement que e^{-at}.

Elle est, en tout cas, comparable à une fonction dont le type serait

[1] Carlson, *loc. cit.*

le plus grand des deux nombres

$$2\Omega_1|\sin\theta| \quad \text{et} \quad (\Omega+\Omega_1)|\sin\theta|, \qquad \text{pour } |\theta| \text{ assez petit.}$$

Supposons $\Omega+\Omega_1$ et $2\Omega_1$ inférieurs à π tous les deux. D'après le théorème du n° 6, le type de $P(v)$ est négatif pour $|\theta|$ assez petit [à moins que $P(v)$ ne décroisse d'une manière plus rapide encore]. Or, on a

$$G_1 = \frac{G \pm \sqrt{G^2-4P}}{2}$$

et il apparaît, dans ces conditions, que le type de G_1 ne peut dépasser celui de G.

On a donc l'une des inégalités suivantes :

$$\Omega+\Omega_1 \geqq \pi, \qquad \Omega_1 \geqq \frac{\pi}{2}, \qquad \Omega_1 \leqq \Omega.$$

Si, par exemple, $\Omega=0$, on a $\Omega_1 \geqq \frac{\pi}{2}$ ou $\Omega=0$, et il est possible de donner des exemples des deux cas. Si $f(z)=\Sigma a_n z^n$ et $\varphi(z)=\Sigma a_{kn} z^{kn}$, on a $\Omega_1 = \frac{k-1}{k}\pi$ si k est impair et $\Omega_1=\pi$ si k est pair, d'après le théorème de M. Hadamard sur la multiplication des singularités.

D'autre part, M. Faber a démontré que des séries telles que

$$f(z) = \frac{z^2+z}{2} + \left(\frac{z^2+z}{2}\right)^3 + \ldots + \left(\frac{z^2+z}{2}\right)^{2^p-1} + \ldots,$$

$$\varphi(z) = \frac{z^2+z}{2} + \left(\frac{z^2+z}{2}\right)^5 + \ldots + \left(\frac{z^2+z}{2}\right)^{2^{2q+1}-1} + \ldots$$

n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence [1].

On a, dans ce cas,

$$\Omega = \Omega_1 = 0.$$

19. Pour obtenir d'autres propriétés, je dois d'abord établir un lemme relatif à la convergence des séries de la forme

$$Q(v) = \sum_1^\infty \frac{\alpha_n}{v-d_n},$$

---

(1) Faber, *Sitzungberichte mathem. phys. Klasse bayerische Akademie*, Band 36, 1906

dans laquelle les d_n sont certains nombres entiers positifs rangés en ordre croissant et tels que $d_{n+1} - d_n$ soit borné.

Si la somme $A_n = \alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n$ a son module borné, la série $Q(v)$ est uniformément et absolument convergente dans tout domaine qui ne contient aucun des d_n. Si θ est l'argument de v, $|\sin^2\theta Q(v)|$ est borné; si x est la partie réelle de v et si elle est comprise entre d_m et d_{m+1}, $|Q(v)(x-d_m)(x-d_{m+1})|$ est borné.

Je pose $\beta_q = \frac{1}{v-d_q}$. La transformation d'Abel me donne

$$\begin{aligned}\alpha_q\beta_q + \alpha_{q+1}\beta_{q+1} + \ldots + \alpha_{q+n}\beta_{q+n} \\ = (A_q - A_{q-1})(\beta_q - \beta_{q+1}) + (A_{q+1} - A_{q-1})(\beta_{q+1} - \beta_{q+2}) + \ldots \\ + (A_{q+n-1} - A_{q-1})(\beta_{q+n-1} - \beta_{q+n}) + (A_{q+n} - A_{q-1})\beta_{n+q};\end{aligned}$$

or

$$|\beta_{q+p} - \beta_{q+p+1}| = \left|\frac{d_{q+p+1} - d_{q+p}}{(v-d_{q+p})(v-d_{q+p+1})}\right|.$$

La somme des termes de la série $Q(v)$ dont le rang va de q à $q+n$ est donc inférieure à l'expression

$$2A\left[\frac{d_{q+1}-d_q}{|v-d_q||v-d_{q+1}|} + \ldots + \frac{d_{q+n}-d_{q+n-1}}{|v-d_{q+n-1}||v-d_{q+n}|}\right] + \frac{2A}{|v-d_{q+n}|},$$

où A est la borne des $|A_n|$.

La série dont le terme général est $2A\frac{d_{q+1}-d_q}{|v-d_q||v-d_{q+1}|}$ est convergente; cette quantité est inférieure à un nombre positif donné dès que q est assez grand, et cela quel que que soit n.

La série $Q(v)$ est donc convergente; elle l'est uniformément dans tout domaine qui ne contient pas de pôle d_q.

Pour évaluer sa somme, cherchons une borne de la somme des premiers termes, en faisant dans ce qui précède $q = 1$. La somme des n premiers termes a son module inférieur à

$$2A\left[\frac{d_2-d_1}{|v-d_1||v-d_2|} + \ldots + \frac{d_n-d_{n-1}}{|v-d_{n-1}||v-d_n|}\right] + \frac{2A}{|v-d_n|},$$

or $|v-d_p| > d_p \sin\theta$. On a donc

$$|Q(v)| \leqq \frac{2A}{\sin^2\theta}\sum^{\infty}\frac{d_n-d_{n-1}}{d_{n-1}d_n} = \frac{2A}{\sin^2\theta\, d_1}.$$

Pour établir la dernière partie de l'énoncé, remarquons que

$$|v - d_p| \geqq |x - d_p|.$$

Il résulte de là une nouvelle évaluation de $Q(v)$:

$$|Q(v)| < 2A \sum_{1}^{\infty} \frac{d_{p+1} - d_p}{|x - d_p||x - d_{p+1}|}.$$

Le terme général de cette série peut s'écrire

$$2A\left(-\frac{1}{x - d_p} + \frac{1}{x - d_{p+1}}\right)$$

pourvu que p soit différent de m. On obtient donc

$$|Q(v)| < 2A\left[-\frac{1}{x - d_1} + \frac{1}{x - d_m} + \frac{1}{d_{m+1} - x} + \frac{d_{m+1} - d_m}{(x - d_m)(d_{m+1} - x)}\right],$$

$$|Q(v)| < 4A\,\frac{d_{m+1} - d_m}{(x - d_m)(d_{m+1} - x)},$$

ce qui achève la démonstration.

La dernière propriété sera utilisée sous la forme suivante : soit une infinité de droites $D_1, D_2, \ldots, D_n, \ldots$ perpendiculaires à l'axe réel et s'éloignant indéfiniment vers la droite. Supposons que la distance de l'un quelconque des points d'affixes d_p à l'une quelconque des droites D_n soit supérieure à un nombre fixe a ; $Q(v)$ est borné sur l'ensemble de ces droites.

20. Reprenons la fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ holomorphe pour $\rho < 1$ et pour $\rho = 1$, $|\omega| \geqq \Omega$; nous considérons aussi la fonction $G(v)$ qui correspond à $f(z)$ et la fonction $\Phi(v)$ construite au n° 8 et qui admet pour zéro les entiers $d_1, d_2, \ldots, d_n, \ldots$; ces entiers sont choisis de façon qu'il y en ait *exactement* μ entre $n\lambda$ et $(n+1)\lambda$; le rapport $\frac{\mu}{\lambda}$ sera pris supérieur ou égal à $\frac{\Omega}{\pi}$.

Nous allons voir qu'on peut étudier les coefficients a_n quand on connaît la suite partielle $a_{d_1}, a_{d_2}, \ldots, a_{d_p}, \ldots$.

Le quotient $\frac{G(v)}{\Phi(v)}$ est une fonction méromorphe dans le domaine Σ_α ;

le pôle d_n a pour résidu $\frac{a_{d_n}}{\Phi'(d_n)}$. Les quantités $\left|\frac{1}{\Phi'(d_n)}\right|$ admettent une borne indépendante de n; la propriété 2° de $\Phi(v)$ montre, en effet [1], que pour x réel et compris entre d_n et d_{n+1} on a

$$\left|\frac{\Phi(x)-\Phi(d_n)}{x-d_n}\right| = \left|\frac{\Phi(x)}{x-d_n}\right| > \mathrm{B}\,(d_{n+1}-x) > \mathrm{B}' \qquad (\mathrm{B} \text{ et } \mathrm{B}' \text{ constants}).$$

Supposons d'abord que la somme $\sum \frac{a_{d_p}}{\Phi'(d_p)}$ soit bornée, ce qui aura certainement lieu si $\Sigma\,|a_{d_p}|$ est borné. Nous pouvons former une fonction méromorphe ayant même pôle et mêmes résidus que $\frac{\mathrm{G}(v)}{\Phi(v)}$; c'est la série

$$\mathrm{Q}(v) = \sum_1^{\infty} \frac{a_{d_n}}{(v-d_n)\Phi'(d_n)}$$

qui converge d'après le lemme du n° 19 pourvu que v ne soit pas égal à l'un des pôles. La fonction

$$\mathrm{H}(v) = \frac{\mathrm{G}(v)}{\Phi(v)} - \mathrm{Q}(v$$

est holomorphe dans Σ_α; je vais démontrer que son module est borné dans ce domaine.

Sur le rayon d'argument θ (θ différent de zéro), $|\mathrm{G}(v)|$ est inférieur à $\mathrm{A}e^{\Omega|\sin\theta|t}$, A étant une constante, $\frac{1}{\Phi(v)}$ est inférieur à $\mathrm{B}e^{-\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|t}$ et $\left|\frac{\mathrm{G}}{\Phi}\right|$ est borné sur le rayon; on a vu que $|\mathrm{Q}(v)|$ était borné; $|\mathrm{H}(v)|$ l'est donc aussi.

Cherchons maintenant ce qui se passe sur les droites D_1, D_2, ..., D_n, ..., perpendiculaires à l'axe réel et coupant cet axe aux points dont les affixes sont $x_n = d_n + \frac{1}{2}$. D'après la propriété 2° de $\Phi(v)$, $\left|\frac{1}{\Phi(v)}\right|$ est borné sur ces droites. On peut donc écrire

$$\left|\frac{\mathrm{G}(v)}{\Phi(v)}\right| < \mathrm{C}'|\mathrm{G}(v)| < \mathrm{C}e^{\Omega|\sin\theta|t+\varepsilon t} \qquad (\mathrm{C}' \text{ et } \mathrm{C} \text{ constants}) \quad [2].$$

---

[1] On n'oubliera pas, pour utiliser cette propriété, que $|d_n - d_{n'}|$ est au moins égal à 1, dans le cas actuel, si $n \neq n'$.

[2] *Voir* note 1, page 124.

D'autre part, $|Q(v)|$ est borné sur ces droites et, par suite, sur l'ensemble de ces droites, on a

$$|H(v)| < D\,e^{\Omega|\sin\theta|t+\varepsilon t} \qquad (\text{D constant}).$$

Considérons le trapèze compris entre les droites D_n et D_{n+1} et les deux rayons d'argument α et $-\alpha$. Le module de $H(v)$, qui est holomorphe dans ce domaine, atteint son maximum sur le contour; sa plus grande valeur possible est $D\,e^{\frac{\Omega\sin\alpha\left(d_n+\frac{3}{2}\right)+\varepsilon\left(d_n+\frac{3}{2}\right)}{\sin\alpha}}$.

Si v est un point intérieur au trapèze, on a

$$t = |v| \geqq d_n + \frac{1}{2}, \qquad \frac{d_n+\frac{3}{2}}{t} < \frac{d_n+\frac{3}{2}}{d_n+\frac{1}{2}} < a \qquad (a \text{ constant}).$$

On a donc

$$|G(v)| < D\,e^{a\Omega t+\frac{a\varepsilon t}{\sin\alpha}}$$

dans tout le domaine Σ_α, D et a étant des constantes. Comme $|G(v)|$ est borné sur les rayons d'argument $\pm\alpha$, il est aussi borné dans tout le secteur Σ_α d'après le principe de Phragmen et Lindelöf.

Écrivons maintenant

$$(6') \qquad G(v) = \Phi(v)Q(v) + \Phi(v)H(v)$$

et remplaçons v par un entier n non égal à l'un des d_n. D'après le lemme du n° 19, $|Q(n)|$ est borné; on vient de voir que $H(n)$ admet une borne; la propriété 1° de $\Phi(v)$ montre que $n^{-4\mu}\Phi(n)$ est borné. On pourra donner l'énoncé suivant :

Soit $f(z) = \Sigma a_n z^n$ qui admet le rayon de convergence 1 et qui est holomorphe sur un arc du cercle de convergence dont la longueur en partie de rayon est supérieure à $2\pi\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)$.

Supposons que l'on puisse détacher de la suite des coefficients a_n une suite $a_{d_1}, a_{d_2}, \ldots, a_{d_n}, \ldots$, telle que $\Sigma|a_{d_n}|$ soit convergente et telle qu'il y ait au moins μ des nombres d_n compris entre $p\lambda$ et $(p+1)\lambda$ dès que p est assez grand. Dans ces conditions $|n^{-4\mu}a_n|$ est borné.

21. On peut généraliser et comparer diverses suites de coefficients non bornés en module. Il suffit de faire intervenir une fonction $P(v)$ holomorphe pour $|\theta| < \frac{\pi}{2}$, telle que $|P(v)e^{-\varepsilon v}|$ et $\left|\frac{1}{P(v)}\right|$ soient bornés pour si petit que soit ε, telle enfin que $|P(v)|$ croisse et croisse indéfiniment avec v pour v réel. M. Polyà a montré que l'on pouvait déterminer $P(v)$ de telle façon que $\left|\frac{a_n}{P(n)}\right|$ soit borné, et cela pour toute fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ dont le rayon de convergence est égal à 1 (1). $f(z)$ a les mêmes points singuliers que $\sum \frac{a_n}{P(n)} z^n$.

Si, dans l'énoncé précédent, on remplace la supposition que $\Sigma |a_{d_p}|$ *est convergente par* $|a_{d_p}| < P(d_p)$ *pour p assez grand, on obtiendra l'inégalité* $|a_n| < n^{3\mu+\varepsilon} |P(n)|$. $\left(\text{Il suffit de considérer } \sum \frac{a_n}{n^{1+\varepsilon} P(n)} z^n\right)$.

On peut, d'ailleurs, prendre des fonctions $P(v)$ autres que celles de M. Polyà; on peut choisir $P(v) = v^q$, $P(v) = e^{\sqrt{v}}$, ...

Indiquons un cas particulier.

Divisons la suite des coefficients a_n en deux suites; l'une comprend les nombres $a_{e_1}, a_{e_2}, \ldots, a_{e_n}, \ldots$ tels que $e_{n+1} - e_n$ croisse indéfiniment. Si $|a_n [P(n)]^{-1}|$ est borné pour n différent de l'un des e_p et si $|n^{-\gamma} [P(n)]^{-1} a_n|$ n'est pas borné pour $n = e_p$ pour si grand que soit γ, le cercle de convergence de rayon 1 est coupure pour $f(z)$.

Dans le cas actuel, on peut, en effet, se donner λ arbitrairement grand et entier; μ peut être pris égal à $\lambda - 1$.

22. On obtiendra une autre généralisation du théorème du n° 20, en choisissant les a_n de la même façon qu'au n° 20 et en supposant que $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| > \pi\left(1 - \frac{\mu}{\lambda}\right)$ du cercle de rayon 1, mais pas aux extrémités de cet arc; il faudra, de plus, que $|f(z)|$ reste borné dans l'un des domaines désignés par Δ_α^Ω pour une valeur convenable de α. Dans ce cas encore, si $\Sigma |a_{d_p}|$ converge, $|n^{-4\mu} a_n|$ est

(1) Polya, *Sur les séries de Taylor qui ont leur cercle de convergence comme coupure* (*Acta mathematica*, t. 41, 1918).

borné. Je n'insiste pas sur la démonstration analogue à la précédente et basée sur le théorème du n° 14.

23. Il est intéressant de remarquer que *l'on peut construire une fonction $f(z)$ holomorphe dans Δ_α^Ω et ayant ses coefficients d'indices d_p égaux à des nombres arbitrairement choisis, le rayon de convergence restant égal à* 1 *et le nombre Ω étant choisi égal à* $\frac{\pi\mu}{\lambda}$ (μ et λ sont toujours les nombres qui caractérisent la distribution des entiers d_p).

Je me donne les coefficients a_{d_p} tels que $\Sigma|a_{d_p}|$ converge et tels que $\sqrt[d_p]{|a_{d_p}|}$ ait pour plus grande des limites l'unité.

Je choisis, d'autre part, une fonction $H(v)$ holomorphe et module borné dans Σ_α. Je pose

$$G(v) = \Phi(v)\left[\sum_1^\infty \frac{a_{d_p}}{\Phi(d_p)(v-d_p)} + H(v)\right].$$

Le lemme du n° 19 montre que $G(v)$ est analytique dans Σ_α. On démontrera que $G(v)$ est d'ordre 1 et du type moyen en se servant du même lemme et des propriétés de $\Phi(v)$; il est clair que le type de $G(v)$ ne peut dépasser celui de $\Phi(v)$. Je n'ai pas encore donné ce type de $\Phi(v)$; j'ai seulement démontré qu'il était nul pour $\theta = 0$. Pour aller plus loin, je suppose $\mu = 1$; il n'y a qu'un zéro d_n entre $n\lambda$ et $(n+1)\lambda$. Pour $v^2 = \pm it^2$ $\left(|\theta| = \frac{\pi}{4}\right)$, on a

$$\Phi(v) = v^4 \prod_1^\infty \left(1 \pm \frac{it^2}{d_n^2}\right), \qquad |\Phi(v)| < t^4 \prod_1^\infty \left(1 + \frac{t^2}{n^2\lambda^2}\right)$$

et le deuxième membre est comparable à $\left|t^3 \sin\frac{\pi v}{\lambda}\right|$. Le type est donc $\frac{\pi}{\lambda}|\sin\theta|$ pour $\theta = \pm\frac{\pi}{4}$, il est nul pour $\theta = 0$, il est donc $\frac{\pi}{\lambda}|\sin\theta|$ pour $|\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$ d'après le théorème du n° 5. On en déduit aisément que le type est $\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|$ dans le cas où μ est différent de 1 et pour $|\theta| \leqq \frac{\pi}{4}$; ce résultat, qu'il serait facile de généraliser, nous suffira, car il n'y a aucun inconvénient à supposer $\alpha \leqq \frac{\pi}{4}$.

Cela posé, le théorème du n° 14 nous montre que $\Sigma G(n)z^n$ est une fonction holomorphe dans le domaine Δ_α^Ω; il est évident que $G(d_p) = a_{d_p}$; nous avons ainsi formé une série de Taylor dont le rayon de convergence est 1, qui est holomorphe sur l'arc $|\omega| < \Omega$ du cercle de convergence avec $\Omega = \frac{\pi\mu}{\lambda}$ et dont les coefficients d'indice d_p sont les nombres a_{d_p} choisis arbitrairement.

Ces nombres étaient cependant tels que $\Sigma|a_{d_p}|$ soit une série convergente; c'est là une restriction qui peut être levée.

Donnons-nous des nombres a_{d_p} quelconques, à cela près que la plus grande des limites de $\sqrt[d_p]{|a_{d_p}|}$ soit égale à 1. Il existe une fonction $P(v)$ de M. Polyà telle que $\left|\frac{a_{d_p}}{P(d_p)}\right|$ soit inférieur à $\frac{1}{d_p^2}$; cette fonction est de type nul dans Σ_α.

Nous prendrons

$$G(v) = P(v)\Phi(v)\left[\sum \frac{a_{d_p}}{\Phi'(d_p)\,P(d_p)(v-d_p)} + H(v)\right],$$

$|H(v)|$ étant borné dans Σ_α. Le raisonnement précédent appliqué à $\frac{G}{P}$ montre que $G(v)$ est une fonction holomorphe dans Σ_α; son type est au plus $\frac{\pi\mu}{\lambda}|\sin\theta|$; on a $G(d_p) = a_{d_p}$ et $\Sigma G(n)\,z^n$ est holomorphe dans Δ_α^Ω. Notre affirmation est complètement justifiée.

Il résulte de là une série d'énoncés négatifs du genre suivant : Si $f(z)$ est holomorphe sur l'arc $|\omega| < \Omega$ du cercle de convergence de rayon 1, on ne peut rien affirmer sur les diverses valeurs limites de $\frac{a_{n+1}}{a_n}$, de $\sqrt[n]{|a_n|}$, de a_n. On peut se donner arbitrairement plusieurs de ces valeurs limites formant des ensembles arbitraires. De même, certains coefficients peuvent croître rapidement (comme $e^{\sqrt{n}}$, par exemple), alors que d'autres peuvent tendre vers zéro.

24. On obtient des résultats un peu plus précis en supposant que la suite des entiers d_p est très régulière; je traite seulement le cas où elle est formée des nombres pairs, $\Phi(v)$ sera remplacé par $\sin\frac{\pi v}{2}$.

Soit donc $f(z) = \Sigma a_n z_n$ holomorphe sur l'arc $|\omega| \geqq \frac{\pi}{2}$ du cercle de convergence de rayon 1; je suppose que les coefficients d'indices pairs a_{2p} ont leur module borné.

Je m'occupe de la série $\Sigma(-1)^p a_{2p}$. Il suffit d'étudier la série $\varphi(z) = \Sigma(-1)^p a_{2p} z^{2p}$; elle se déduit de $f(z)$ et de $\frac{1}{1+z^2}$ en multipliant les coefficients de même rang. Le théorème de la multiplication des singularités de M. Hadamard [1] montre que les points singuliers de $\varphi(z)$ se déduisent de ceux de $f(z)$ par des rotations de $+\frac{\pi}{2}$ ou $-\frac{\pi}{2}$ autour de l'origine. Le point -1 est donc régulier pour $\varphi(z)$; les coefficients a_{2p} ont leur module borné; un théorème de M. Fatou [2] nous apprend que la série $\varphi(z)$ est, dans ces conditions, indéterminée pour $z = -1$, c'est-à-dire que $\left|\sum_{p=1}^{p=n}(-1)^p a_{2p}\right|$ est borné. Cela suffit, d'après le lemme du n° 19, pour affirmer que la série

$$Q(v) = \frac{2}{\pi}\sum \frac{a_{2p}}{(-1)^p(v-2p)}$$

converge et représente une fonction analytique méromorphe.

Soit $G(v)$ la fonction qui correspond à $f(z)$; $\dfrac{G(v)}{\sin\frac{\pi}{2}v} - Q(v) = H(v)$ est fonction analytique dans Σ_α; on verra encore que son module est borné. L'équation

$$G(v) = \sin\frac{\pi v}{2}[Q(v) + H(v)]$$

montre que $|G(v)|$ est borné pour v entier impair.

Si $f(z)$ est holomorphe sur un arc du cercle de convergence supérieur à une demi-circonférence, si le rayon de convergence est égal à 1, si les coefficients de rang pair ont leur module borné, il en est de même des coefficients de rang impair.

Soit $P(v)$ une fonction définie au n° 21 dont le module croît cons-

---

(1) HADAMARD, *Théorème sur les séries entières* (*Acta mathematica*, t. 22, 1898).

(2) FATOU, *Séries trigonométriques et séries de Taylor* (*Acta mathematica*, t. 30, 1906, p. 391).

tamment et uniformément avec t dans Σ_α et qui est d'ordre 1 et de type non nul dans ce secteur.

Si les coefficients de rang pair vérifient $|a_{2p}| < \mathrm{P}(2p)$, *tous les coefficients vérifient* $|a_n| < \mathrm{P}(n)$.

On démontrerait de même que si les coefficients a_{kp} sont de module borné quel que soit p, k étant un entier constant, si $f(z)$ est holomorphe sur un arc du cercle de convergence de rayon 1 supérieur à la fraction $\frac{k-1}{k}$ de la circonférence, tous les coefficients ont leur module borné.

25. Les théorèmes obtenus jusqu'ici imposent des conditions qui doivent être vérifiées par certains coefficients dont le rang est compris entre $p\lambda$ et $(p+1)\lambda$ et cela pour toute valeur entière de p. Les théorèmes bien connus de MM. Hadamard et Fabry supposent seulement que les coefficients dont le rang est compris $n(1-h)$ et $n(1+h)$ possèdent certaines propriétés, et cela pour une suite de valeurs de n qui peut croître d'une manière arbitrairement rapide. Il est facile de compléter les démonstrations données ici et de retrouver les énoncés de MM. Hadamard et Fabry avec toute leur précision. Il suffira de construire une série $\varphi(z) = \Sigma\beta_n z^n$ qui possède les propriétés suivantes :

1° Le rayon de convergence est égal à 1; $\varphi(z)$ n'a que le point singulier 1 sur le cercle de convergence;

2° Je me donne une suite illimitée d'entiers quelconques m_1, m_2, ..., m_p, ...; je détache de cette suite une suite partielle illimitée $n_1 n_2 \ldots n_p \ldots$ vérifiant

$$n_p > n_{p-1}\frac{1+h}{1-h} + 2.$$

Les coefficients β_n dont le rang n vérifie des inégalités telles que

$$n_p(1-h) \leqq n \leqq n_p(1+h)$$

pour une valeur convenable de p peuvent seuls ne pas être nuls; les autres le sont;

3° Les coefficients dont le rang est compris entre $n_p(1-h)$

et $n_p(1+h)$ ont pour argument un même nombre ω_p attaché au nombre p ; ω_p peut être choisi arbitrairement ;

4° $\sqrt[n_p]{|\beta_{n_p}|}$ a pour plus grande des limites l'unité.

Je prends d'abord $h=\frac{1}{3}$, je choisis la suite n_p vérifiant $n_{p+1}>2n_p+2$.

Je désigne par q_p le plus grand entier contenu dans $\frac{2}{3}n_p$ et je prends

$$\varphi_0(z)=\sum_1^\infty\left(\frac{z+z^2}{2}\right)^{q_p}e^{i\omega_p},$$

fonction considérée par M. Faber [1].

On reconnait aisément que la série $\Sigma e^{i\omega_p}t^{q_p}$ converge uniformément pour $|t|<1$ et qu'elle a son cercle de convergence comme coupure. $\varphi_0(z)$ est donc holomorphe dans le domaine $|z(z+1)|<2$ qui est une courbe fermée contenant le cercle $|z|=1$ et tangente à ce cercle au point 1 ; cela suffit à établir les propriétés 1°.

J'étudie les limites de $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ et, pour cela, je considère le terme de rang $n=q_p+r_p$ et je fais correspondre r_p au nombre p de façon que $\frac{r_p}{q_p}$ ait une limite λ qui sera comprise entre 0 et 1.

On a

$$\beta_n=\frac{e^{i\omega_p}}{2^q}\,\frac{q!}{r!(q-r)!}$$

(j'ai remplacé q_p et r_p par q et r), $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ est comparable à

$$\left(\frac{1}{2^q}\,\frac{q^q}{r^r(q-r)^{q-r}}\right)^{\frac{1}{q+r}}\left(\frac{r(q-r)}{q}\right)^{\frac{1}{2(q+r)}}e^{\frac{-q+r+(q-r)}{q+r}}.$$

Si λ est différent de 0 ou de 1, $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ a une limite unique quand $n=q_p+r_p$ et cette limite est

$$w(\lambda)=\frac{1}{2^{\frac{1}{1+\lambda}}\lambda^{\frac{\lambda}{1+\lambda}}(1-\lambda)^{\frac{1-\lambda}{1+\lambda}}}.$$

---

[1] *Loc. cit.*

Elle est égale à 1 pour $\lambda = \frac{1}{2}$: c'est la propriété 4°. La propriété 2° résulte de ce que les termes non nuls ont un rang n qui vérifie

$$\frac{2}{3} n_p - 1 < n \leqq \frac{4}{3} n_p.$$

Je supprime les termes de rang q_p, ce qui ne change pas les points singuliers de $\varphi_0(z)$ sur le cercle de convergence, car $\sqrt[q_p]{|\beta_{q_p}|}$ tend vers $\frac{1}{2}$. Tous les termes restants vérifient

$$\frac{2}{3} n_p \leqq n \leqq \frac{4}{3} n_p.$$

La propriété 3° est évidemment vérifiée.

La fonction $\varphi_0(z)$ amputée des termes $\beta_{q_p} z^{q_p}$ vérifie donc les conditions énoncées plus haut en prenant $h \geqq \frac{1}{3}$.

Pour former $\varphi(z)$ dans le cas où $h < \frac{1}{3}$, je supprimerai encore certains termes de $\varphi_0(z)$. Pour justifier cette méthode, je dois commencer par étudier de plus près la limite $\varpi(\lambda)$ qui vient d'être obtenue.

$\varpi(\lambda)$ est une fonction continue pour $0 < \lambda < 1$; on a $\varpi(0) = \frac{1}{2}$, $\varpi(1) = \frac{1}{\sqrt{2}}$.

Pour que $\varpi(\lambda)$ soit égal ou supérieur à 1, il faut

$$\lambda^\lambda (1 - \lambda)^{1-\lambda} \leqq \frac{1}{2}.$$

Or la fonction $\lambda^\lambda (1 - \lambda)^{1-\lambda}$ passe par un minimum absolu égal à $\frac{1}{2}$ pour $\lambda = \frac{1}{2}$ et pour cette valeur seulement. Comme $\varpi(\lambda)$ est une fonction analytique dans l'intervalle considéré, il est certain que l'on a une inégalité telle que $\varpi(\lambda) < k < 1$ si $\left|\lambda - \frac{1}{2}\right| \geqq b > 0$. Je supprime dans $\varphi_0(z)$ les termes dont le rang n vérifie une inégalité telle que

$$n_p(1 - h) < n \leqq n_p(1 + h) \qquad \left(h < \frac{1}{3}\right).$$

La quantité $\frac{r_p}{q_p}$ est, pour ces termes supprimés, comprise entre o et $\frac{(1-h)n_p - q_p}{q_p}$ ou entre $\frac{(1+h)n_p - q_p}{q_p}$ et 1. Dans le premier cas, sa limite λ est comprise entre o et $\frac{1-3h}{2}$ qui est inférieur à $\frac{1}{2}$; dans le deuxième cas, λ reste supérieur à $\frac{1+3h}{2}$ qui est supérieur à $\frac{1}{2}$.

Il résulte de là que, pour les termes supprimés, $\sqrt[n]{|\beta_n|}$ reste inférieur à un nombre fixe inférieur à 1. La fonction qui résulte de $\varphi(z)$ ainsi amputée possède donc la propriété 1°; il est clair qu'elle possède les trois autres propriétés.

L'existence de $\varphi(z)$ étant ainsi établie, il est facile de compléter le théorème des nos 15 et 16; par exemple, supposons que $f(z)$ ait une infinité de coefficients nuls, la densité de ces coefficients nuls étant $\frac{\mu}{\lambda}$ en ce qui concerne seulement les coefficients dont le rang est compris entre $m_p(1-h)$ et $m_p(1+h)$ la suite m_p étant formée d'entiers quelconques, toutefois $\sqrt[m_p]{|a^{m_p}|}$ a pour plus grande des limites 1. Formons la fonction $\varphi(z) = \Sigma\beta_n z^n$ et considérons la fonction $\Sigma a_n \beta_n z^n$; ses points singuliers du cercle de convergence sont des points singuliers de $f(z)$, d'après le théorème sur la multiplication des singularités; d'autre part, la densité des coefficients $a_n\beta_n$ nuls est au moins $\frac{\mu}{\lambda}$; $f(z)$ ne peut donc pas être régulière sur un arc du cercle de rayon 1 dont la mesure soit supérieure à $2\pi\left(1-\frac{\mu}{\lambda}\right)$ en parties du rayon.

Les théorèmes des nos 20, 21, 22, 24 peuvent être généralisés par le même procédé. Prenons, par exemple, le théorème du no 24. La fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ a pour rayon de convergence l'unité; nous admettons encore qu'elle est régulière sur un arc du cercle de convergence supérieur à une demi-circonférence. Soient, d'autre part, des entiers $m_1, m_2, \ldots, m_p, \ldots$.

Je suppose que le coefficient a_{2n} de rang pair soit de module borné si

$$m_p(1-h) < 2n < m_p(1+h) \qquad (0 < h < 1),$$

et que $\sqrt[m_p]{|a_{m_p}|}$ ait pour plus grande des limites l'unité. Formons la fonction $\varphi(z)$ correspondant à ces données. La fonction $\Sigma a_n \beta_n z^n$ a les mêmes points singuliers que $f(z)$ sur le cercle de convergence, tous ses coefficients de rang pair ont leur module borné, il en est de même de ses coefficients de rang impair. On voit que $|a_n \beta_n|$ est borné, ce qui précise l'ordre de grandeur de a_n pour n impair; *ainsi* a_{m_p} *est de l'ordre* $\sqrt{m_p}$ *au plus.*

Pour terminer je formule d'une manière imprécise la généralisation du théorème du n° 21.

Si $f(z)$ est holomorphe sur un arc de convergence de rayon 1 supérieur à $2\pi\left(1-\frac{\lambda}{\mu}\right)$, si certains termes n_p sont entourés de termes dont le module est borné et dont la densité est supérieure à $\frac{\mu}{\lambda}$; les termes $|a_{m_p}|$ ne peuvent avoir une croissance arbitraire; ils sont comparables à $n_p^{5\mu+\frac{1}{2}+\varepsilon}$.

CHAPITRE IV

26. Je considère des fonctions $f(z)$ qui n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence, qui sont holomorphes dans un secteur T_β défini par

$$(T_\beta) \qquad \frac{\pi}{2}-\beta < \text{argument}(z-1) < \frac{3\pi}{2}+\beta; \qquad |z-1| < a$$

$\left(\beta \text{ et } a \text{ vérifiant } 0 < \beta < \frac{2}{\pi},\ 0 < a < 1\right)$ et qui sont de « degré fini » dans ce secteur. Le degré fini, positif ou négatif, a été défini au n° 4 : il existe deux nombres réels m et M tels que $|(z-1)^{-m} f(z)|$ soit borné dans T_β et que $|(z-1)^{M} f(z)|$ ne le soit pas. Je voudrais m'occuper, dans ce Chapitre, de ces fonctions et de leurs coefficients a_n.

Il sera nécessaire de modifier quelque peu le problème ainsi posé : si $f(z)$ est de degré fini, $f(z)+P(z)$ ne l'est pas toujours quand $P(z)$ est un polynome ou une fonction holomorphe sur le cercle de rayon 1 ; il importe d'exclure des fonctions de cette sorte. Je ne m'occuperai que des fonctions que j'appellerai fonctions de la classe A et qui vérifient les conditions suivantes : elles n'ont que le point singulier 1 sur le cercle de convergence de rayon 1, elles sont holomorphes dans un secteur T_β, $|(z-1)^{-m}[f(z)+P(z)]|$ est borné, $|(z-1)^{-M}[f(z)+(z)]|$ ne l'est pas, et cela quel que soit le polynome $P(z)$, m et M étant des nombres réels constants, indépendants de $P(z)$.

Je traduis le théorème du n° 13 dans le cas où $f(z)$ n'a que le point singulier 1 en faisant usage de la fonction $g(u)$ holomorphe dans S_α, égale à $G(v)$ quand on fait $v=\frac{1}{u}$: la fonction $g(u)$ est telle que $|g(u)|e^{-r}$ soit borné et que $g\left(\frac{1}{n}\right)$ soit égal à a_n. *Je vais démontrer que, pour que $f(z)$ soit de la classe* A, *il est nécessaire et suffisant que $g(u)$ soit de degré fini dans un certain secteur* S_α.

27. Pour parvenir à la démonstration, je dois d'abord étudier la question suivante : Sachant que $f(z)$ est holomorphe pour $|z|<1$, qu'elle n'a que le point singulier 1 sur le cercle de rayon 1, sachant que $|(z-1)^{-m}f(z)|$ est borné dans T_β, que peut-on dire de la fonction

$$f_p(z)=\sum\frac{a_n z^n}{n^p}\,?$$

Je supposerai p entier, ce qui sera suffisant pour la suite; je supposerai m non entier, ce qui est toujours possible ([1]); le signe de m et celui de p peuvent être quelconques.

On sait que $f_p(z)$ est régulière aux mêmes points que $f(z)$.

Premier cas : $p=-1$. — Posons $\varphi(z)=(z-1)^{-m}f(z)$; $|\varphi(z)|$ est borné dans T_β, $|(z-1)\varphi'(z)|$ l'est aussi (n° 11); or, cette fonction est

$$|-m(z-1)^{-m}f(z)+(z-1)^{-m+1}f'(z)|$$

et l'on voit que $|(z-1)^{-m+1}f'(z)|$ est borné; il en est de même de

$$|z(z-1)^{-m+1}f'(z)|=|(z-1)^{-m+1}f_{-1}(z)|.$$

Deuxième cas : p entier négatif. — $(z-1)^{-m+1}f_{-1}(z)$ est de module borné; en traitant $f_{-1}(z)$ comme on vient de traiter $f(z)$, on voit

[1] Tout ce qui suit peut être étendu au cas où p est un nombre réel quelconque.

que $(z-1)^{-m+2}f_{-2}(z)$ est de module borné. On peut continuer ainsi et $|(z-1)^{-m+p}f_{-p}(z)|$ est borné si p est entier négatif.

Troisième cas : $p=1$, $m<-1$. — J'ai $f_1(z)=\int_0^z \frac{f(x)-a_0}{x}\,dx$. Soit $z=1+t_0e^{i\psi}$ et $z_1=1-ae^{i\psi}$ avec $0<t_0<a$ et $|\psi|>\frac{\pi}{2}-\beta$, de sorte que z est dans T_β. On a

$$f_1(z)=f_1(z_1)+\int_{z_0}^{z}\frac{f(x)-a_0}{x}=f_1(z_1)+\int_a^t\frac{f(1+te^{i\psi})-a_0}{1+te^{i\psi}}e^{i\psi}\,dt,$$

$$|f_1(z)-f_1(z_1)|<\int_{t_0}^{a}\frac{A\,t^m\,dt}{1-a}=\frac{-A}{(1-a)(1+m)}(t_0^{m+1}-a^{m+1})<B\,t_0^{m+1},$$

A et B sont deux constantes positives.

$|[f_1(z)-f_1(z_1)](z-1)^{-m-1}|$ est borné, $f_1(z_1)$ ne dépend pas de t_0, mais de ψ et cette quantité est bornée si ψ varie. On en conclut que $|f_1(z)(z-1)^{-m-1}|$ est borné dans T_β.

Quatrième cas : p entier positif inférieur à $-m$. — En appliquant p fois le résultat précédent, on trouve que $|f_p(z)(z-1)^{-m-p}|$ est borné.

Cinquième cas : $p=1$, $m>-1$. — Examinons d'abord le cas où $a_0=f(0)=0$. Je pose $F(z)=\int_1^z\frac{f(x)\,dx}{x}$, l'intégrale étant prise sur chemin rectiligne; elle existe, dans le cas actuel, même si $0>m>1$; elle diffère d'une constante C de $f_1(z)$. Soit $z=1+t_0e^{i\psi}$ un point de la région T_β. On a

$$F(z)=\int_0^{t_0}\frac{f(1+te^{i\psi})}{1+te^{i\psi}}e^{i\psi}\,dt,$$

$$|F(z)|<A\int_0^{t_0}t^m\,dt=\frac{A}{m+1}|z-1|^{m+1}\qquad\text{(A constant).}$$

Il existe donc une constante C telle que $|f_1(z)+C||z-1|^{-(m+1)}$ est borné dans T_β.

Soit en deuxième lieu $a_0\neq 0$. Je considère $h(z)=f(z)-a_0(1-z)^r$, r étant égal à zéro si $0>m>-1$ et égal à un entier supérieur à m si $m>0$. On a $h(0)=0$ et $|h(z)(z-1)^{-m}|$ est borné dans T_β. On vient de voir que $|h_1(z)+C||z-1|^{-m-1}$ est borné; on peut donc dire qu'il existe un polynome $P(z)$ tel que $|f_1(z)+P(z)||z-1|^{-m-1}$ est borné dans T_3.

Sixième cas : p est un entier positif supérieur à $-m$. — En appliquant plusieurs fois les règles précédentes, on obtient ce résultat que $|f_p(z)+P(z)||z-1|^{-m-p}$ est borné, $P(z)$ étant un polynome convenablement choisi.

28. Je vais maintenant démontrer que, si $f(z)$ est de la classe A, il en est de même de $f_1(z)$ et réciproquement.

Je suppose $f(z)$ de la classe A; il existe m tel que $|f(z)+P(z)||z-1|^{-m}$ est borné quel que soit le polynome P; on peut toujours supposer $m\neq-1$; si $m<-1$, on a déduit de là que $|f_1(z)+P_1(z)||z-1|^{-m-1}$ est borné, $P_1(z)$ étant un polynome déduit de $P(z)$ par la transformation générale qui fait passer de $f(z)$ à $f_1(z)$; $P(z)$ est donc arbitraire. Si $m>-1$, il existe un polynome Q déterminé, tel que

$$|f_1(z)+Q(z)||z-1|^{-m-1}$$

soit borné, donc $|f_1(z)+Q(z)|$ est borné, donc $|f_1(z)|$ est borné et $|f_1(z)+P(z)|$ l'est aussi quel que soit le polynome P.

Il reste à démontrer l'existence d'une constante M′ telle que

$$|f_1(z)+P(z)||z-1|^{-M'}$$

n'est jamais borné quel que soit $P(z)$. Si cette constante n'existait pas, on pourrait trouver un polynome $P_\mu(z)$ correspondant au nombre positif μ tel que $|f_1(z)+P_\mu(z)||z-1|^{-\mu}$ soit borné, et cela pour si grand que soit μ. En appliquant à f_1+P_μ le résultat du n° 27 (1^{er} cas), on verrait que $|f(z)+Q_\mu(z)||z-1|^{-\mu+1}$ serait borné, Q_μ étant un polynome convenablement choisi et, dans ces conditions, $f(z)$ ne serait pas de la classe A.

La réciproque se démontre d'une manière entièrement analogue.

On déduit de ce qui précède que, pour que $f(z)$ soit de la classe A, il faut et il suffit que $f_p(z)$ le soit et cela quel que soit p entier positif ou négatif.

29. Il me reste une proposition préliminaire à établir. Soit $f(z)$ qui n'a que le point singulier 1 tant que $|z| \leq 1$ et qui est holomorphe dans un secteur T_β. Je suppose que, dans T_β, $|f(z)(z-1)^{-\lambda}|$ soit borné pour une valeur positive de λ. Je dis que la fonction $g(u)$ qui correspond à $f(z)$ est de degré $\lambda+1$ au moins, dans un certain secteur $S_\alpha(\alpha < \beta)$ (c'est-à-dire que $|g(u)^{-\lambda-1}|$ est borné dans ce domaine).

Il existe un contour C_α (*voir* n° 13) sur lequel $f(z)$ est holomorphe; on peut déterminer $g(u)$ à l'aide de ce contour-là. Sur le premier arc de spirale ($\omega > 0$) on a

$$\frac{z-1}{\omega} = \frac{e^{\omega(\operatorname{tang}\alpha + i)} - 1}{\omega} = \text{fonction entière de } \omega.$$

Cette expression a donc son module borné pour $0 < \omega < \pi$. On voit donc que $|f(z).\omega^{-\lambda}|$ est borné. En utilisant cette remarque, en tenant compte de l'équation (6) du n° 13, en désignant par B une certaine constante, on a

$$|G(v)| = |g(u)| < \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi B\,\omega^\lambda e^{-\frac{\omega}{r}\frac{\sin(\alpha+\theta)}{\cos\alpha}}\,d\omega + \frac{1}{2\pi}\int_0^\pi B\,\omega^\lambda e^{+\frac{\omega}{r}\frac{\sin(\theta-\alpha)}{\cos\alpha}}\,d\omega.$$

Or si $b > 0$, on a

$$\int_0^\pi \omega^\lambda e^{-b\omega}\,d\omega = \int_0^{\pi b} \frac{\omega'^\lambda e^{-\omega'}\,d\omega'}{b^{\lambda+1}} < \int_0^\infty \frac{\omega'^\lambda e^{-\omega'}\,d\omega'}{b^{\lambda+1}} = \frac{C}{b^{\lambda+1}},$$

C ne dépendant pas de b.

Donc

$$|g(u)| < \frac{BC}{2\pi} r^{\lambda+1} \cos^{\lambda+1}\alpha\left[\left(\frac{1}{\sin(\alpha+\theta)}\right)^{\lambda+1} + \left(\frac{1}{\sin(\alpha-\theta)}\right)^{\lambda+1}\right],$$

$|g(u)u^{-\lambda-1}|$ est donc borné pour $|\theta| < \alpha' < \alpha$.

30. Ces lemmes établis, passons à la démonstration du théorème énoncé au n° 26.

Soit $g(u)$ de degré fini dans S_α; il existe un nombre q tel que

$$|g_1(u)| = |u^{-q} g(u)|$$

soit borné dans $S_{\alpha'}$ si $\alpha' < \alpha$. J'ai établi [1] que, dans ces conditions, la fonction $F(z) = \sum \frac{1}{n^2} g_1\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ est holomorphe dans le contour que j'ai appelé $\Delta_{\alpha'}$; il résulte immédiatement de la démonstration donnée que $|F(z)|$ est borné dans ce domaine.

Je dis que $F(z)$ est de la classe A dans le secteur $T_{\alpha'}$: il ne me reste plus qu'une proposition à démontrer, à savoir qu'on peut déterminer un nombre M tel que $|F(z) + P(z)||z - 1|^{-M}$ n'est pas borné quel que soit le polynome $P(z)$.

Je suppose, en effet, qu'à toute valeur positive de M, on puisse faire correspondre $P(z)$ de telle façon que cette expression soit bornée. Le lemme du n° 29 montre qu'il existe une fonction $g_2(u)$ telle que $g_2\left(\frac{1}{n}\right)$ est le coefficient général du développement de $F(z) + P(z)$ en série entière. Or $g_2(u)$ ne diffère de $u^2 g(u)$ que d'une fonction tenant vers zéro comme e^{-ar} à l'intérieur de $S_{\alpha'}$, et le même lemme montre que $|g_2(u) r^{-M-1}|$ est borné.

$|g_1(u) r^{-M+1}|$ est donc aussi borné dans $S_{\alpha'}$ et cela pour si grand que soit le nombre positif M, ce qui ne peut se produire puisque $g(u)$ et $g_1(u)$ sont de degré fini.

$F(z)$ est donc de la classe A et il en est de même de $\Sigma g\left(\frac{1}{n}\right) z^n$ d'après le n° 28.

Pour établir la réciproque, donnons-nous $f(z)$ de la classe A; elle est holomorphe à l'intérieur d'un contour C_α et il existe m tel que $|(z-1)^{-m} f(z)|$ soit borné sur ce contour et à l'intérieur. Si m est positif, $|f(z)|$ est borné sur C_α; si m est négatif, l'une des quantités $f_p(z)$ est bornée : on n'a qu'à prendre p supérieur à $-m$; il existe $P(z)$ tel que $|f_p(z) + P(z)||z - 1|^{-m-p}$ est borné;

$$|f_p(z) + P(z)|$$

est donc borné et $|f_p(z)|$ l'est aussi. Le lemme du n° 21 donne une fonction $g(u)$ correspondant à $f_p(z)$ telle que $|rg(u)|$ soit borné dans $S_{\alpha'} (\alpha' < \alpha)$.

Il nous reste à démontrer que $g(u)$ ainsi obtenue n'a pas un degré de décroissance infini dans $S_{\alpha'}$. S'il en était ainsi, $|u^{-\lambda} g(u)|$ serait

[1] *Journ. de Math. pures et appliquées*, 8e série, t. IV, 1921, p. 117 et suiv.

borné dans $S_{\alpha'}$ pour λ entier positif; le théorème rappelé plus haut montrerait que $\Sigma n^{\lambda-2} g\left(\frac{1}{n}\right) z^n = f_{2-\lambda}(z)$ serait de module borné dans $C_{\alpha'}$. Je pourrais dire (pour éviter les exposants entiers) que $|(z-1)^{\frac{1}{2}} f_{2-\lambda}(z)|$ est borné et j'appliquerais le résultat du n° 27 (6ᵉ cas) en prenant $p = \lambda - 2$. Il existerait un polynome $P(z)$ tel que $|f(z) + P(z)| |z-1|^{\frac{5}{2}-\lambda}$ soit borné. Comme λ peut être pris arbitrairement grand, $f(z)$ ne serait pas de la classe A.

Le théorème énoncé est donc complètement démontré [1].

31. Soit la fonction $f(z) = \Sigma a_n z^n$ de la classe A; la fonction $g(u)$ correspondante admet un degré bien défini sur l'axe réel : c'est le nombre q tel que $|g(u) u^{-q+\varepsilon}|$ soit borné et que $|g(u) u^{-q-\varepsilon}|$ ne le soit pas, pour ε arbitrairement petit. *Je dis que q coïncide avec le nombre λ tel que $|a_n n^{\lambda-\varepsilon}|$ est borné et que $|a_n n^{\lambda+\varepsilon}|$ ne l'est pas;* ce nombre λ est, comme on voit, en relation simple avec l'ordre de la série de Taylor sur son cercle de convergence, au sens de M. Hadamard [2].

Il est clair, tout d'abord, que l'on a $\lambda \geqq q$. Je suppose pour un instant que l'on ait $\lambda > q$. Soit x réel et dans S_α, soit n tel que

$$\frac{1}{n+1} < x < \frac{1}{n}.$$

J'applique le lemme du n° 11 à la fonction $g(u) u^{-q+\varepsilon}$ en choisissant ε inférieur à $\frac{\lambda - q}{3}$. Il existe une constante A telle que

$$\left| \frac{g(x)}{x^{q-\varepsilon}} - (n+1)^{q-\varepsilon} a_{n+1} \right| < A \frac{x - \frac{1}{n+1}}{\frac{1}{n+1}} < \frac{A}{n},$$

$$|g(x) x^{-q+\varepsilon}| < (n+1)^{q-\varepsilon} |a_{n+1}| + \frac{A}{n} < (n+1)^{q-\varepsilon} \frac{C}{n^{\lambda-\varepsilon'}} + \frac{A}{n},$$

$$|g(x) x^{-q-\varepsilon}| < (n+1)^{q+\varepsilon} \frac{C}{n^{\lambda-\varepsilon'}} + \frac{A(n+1)^{2\varepsilon}}{n};$$

ε' est pris inférieur à $\frac{\lambda - q}{3}$, C est constant.

---

[1] Il est possible d'obtenir des relations très précises entre les degrés de $f(z)$ et ceux des fonctions $g(u)$ sur les rayons qui partent respectivement des points 1 et 0.

[2] Hadamard, *Journ. de Math. pures et appliquées*, 4ᵉ série, t. VIII, 1892, p. 171.

Le deuxième membre est borné puisque $\lambda - \varepsilon' - q - \varepsilon > \frac{\lambda - q}{3}$; le degré de $g(u)$ sur l'axe réel ne pourrait être q si λ était supérieur à q. On a donc bien $\lambda = q$.

Je vais maintenant établir que $|a_{n+1} - a_n| n^{q+1-\varepsilon}$ est borné pour si petit que soit ε. En appliquant le théorème du n° 11 à $g_1(u) = u^{-q+\varepsilon} g(u)$ avec $x = \frac{1}{n}$, $x' = \frac{1}{n+1}$, on a

$$|a_{n+1}(n+1)^{q-\varepsilon} - a_n n^{q-\varepsilon}|\, n < \text{borne}.$$

Je pose

$$v_n = n\left[\left(\frac{n+1}{n}\right)^{q-\varepsilon} - 1\right].$$

La quantité

$$\left|a_{n+1}\left(1 - \frac{v_n}{n}\right) - a_n\right| n^{q+1-\varepsilon}$$

est bornée et par suite

$$|a_{n+1} - a_n|\, n^{q+1-\varepsilon} - |a_{n+1}|\, n^{q-\varepsilon} v_n$$

l'est aussi. Or v_n est borné, $|a_{n+1} n^{q-\varepsilon}|$ l'est aussi et la propositiou est démontrée.

On peut donner l'énoncé suivant : *Une des limites de* $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ *est égale à* 1 *lorsque* $f(z)$ *est de la classe* A. Il existe, en effet, une infinité de coefficients $a_{r_1}, a_{r_2}, \ldots, a_{r_p}, \ldots$ tels que $|a_{r_i}| > \frac{1}{r_i^{q-\varepsilon}}$, pour ces coefficients $\frac{a_{r_i+1}}{a_{r_i}}$ tend vers 1.

On peut encore dire que *les fonctions de la classe* A *sont des fonctions ayant un point singulier* $z_0 = 1$ *dont l'ordre au sens de M. Hadamard est fini et telles que cet ordre diminue d'une unité si l'on multiplie la fonction par* $z - z_0$. L'importance de ces fonctions avait été signalée par M. Hadamard (1).

32. *Si* $f(z)$ *est de la classe* A, *si* a_{n_p} *est nul, il est impossible que* $\frac{n_{p+1}}{n_p}$ *tende vers* 1 *d'une manière assez rapide pour que* $n_{p+1}^q\left(\frac{n_{p+1}}{n_p} - 1\right)$ *reste*

(1) HADAMARD, *loc. cit.*, p. 183-184.

borné et cela quel que soit q positif. C'est là une application immédiate du théorème du n° 11 ; si $q < 1$ cette proposition est plus précise que celle du n° 15.

On peut généraliser d'une autre façon : supposons que les coefficients a_{n_p} ne soient pas nuls, mais qu'il existe un nombre μ tel que $|a_{n_p} n_p^{\mu-\varepsilon}|$ soit borné, ce nombre μ étant supérieur au degré q de $g(u)$ sur l'axe réel. Soit x compris entre $\frac{1}{n_p}$ et $\frac{1}{n_{p+1}}$ je choisis ε tel que $q + \varepsilon < \mu$. J'ai, par application du lemme du n° 11,

$$\left|\frac{g(x)}{x^{q-\varepsilon}} - n_{p+1}^{q-\varepsilon} a_{n_{p+1}}\right| < A \frac{x - \frac{1}{n_{p+1}}}{\frac{1}{n_{p+1}}} < A\left(\frac{n_{p+1}}{n_p} - 1\right);$$

d'où

$$\left|\frac{g(x)}{x^{q-\varepsilon}}\right| < \frac{B}{n_{p+1}^{\mu-q+\varepsilon}} + A\left(\frac{n_{p+1}}{n_p} - 1\right),$$

A et B étant des constantes positives.

Je suppose encore que $\left(\frac{n_{p+1}}{n_p} - 1\right) n_{p+1}^{\lambda}$ soit borné pour une valeur positive de λ. J'ai

$$\left|\frac{g(x)}{x^{q-\varepsilon}}\right| < \frac{B}{n_{p+1}^{\mu-q+\varepsilon}} + \frac{AC}{n_{p+1}^{\lambda}} < B x^{\mu-q+\varepsilon} + AC x^{\lambda},$$

$$\left|\frac{g(x)}{x^{q+\varepsilon}}\right| < B x^{\mu-q-\varepsilon} + AC x^{\lambda-2\varepsilon}.$$

Je puis supposer $\varepsilon < \frac{\lambda}{2}$ et $\varepsilon < \mu - q$; on voit qu'il est impossible que le degré de $g(u)$ sur l'axe réel soit égal à q.

Je conclurai donc en énonçant une propriété des fonctions $f(z)$ de la classe A. *Je rappelle que q désigne le plus grand nombre tel que $|a_n n^{q-\varepsilon}|$ soit borné. S'il existe une infinité de coefficients a_{n_1}, a_{n_2}, ... tels que $|a_{n_p} n_p^{\mu}|$ soit borné, μ étant supérieur à q, la distribution de ces coefficients ne peut être quelconque : il est impossible que $\left(\frac{n_{p+1}}{n_p} - 1\right) n_{p+1}^{\lambda}$ soit borné pour une valeur positive de λ.*