ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

BERTRAND GAMBIER

Surfaces ayant un ds^2 de Liouville et leurs géodésiques fermées. Antipodes géodésiques. Points géodésiquement symétriques

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 44 (1927), p. 213-288
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__213_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM
Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

SURFACES

AYANT UN ds^2 DE LIOUVILLE ET LEURS GÉODÉSIQUES FERMÉES.

ANTIPODES GÉODÉSIQUES.

POINTS GÉODÉSIQUEMENT SYMÉTRIQUES.

PAR M. BERTRAND GAMBIER
Professeur à la Faculté des Sciences de Lille

INTRODUCTION.

1. Darboux a donné le principe de la recherche *des surfaces de révolution à géodésiques fermées* et j'ai développé cette méthode au *Bulletin des Sciences mathématiques* (2e série, t. 49, 1925); la détermination des *surfaces à lignes anguleuses* s'impose, même pour obtenir les surfaces dépourvues d'une telle singularité : c'est ainsi que l'on arrive, sans artifice, à trouver la *surface en poire de J. Tannery*. En dehors des surfaces de révolution, l'exemple le plus simple de surfaces à géodésiques fermées doit être cherché parmi les surfaces *dont le ds^2 est réductible à la forme de Liouville*, puisque les géodésiques (fermées ou non) de telles surfaces s'obtiennent par des *quadratures*. L'Allemand Stäckel a amorcé la question, sans résultat bien précis (1); son compatriote, M. Blaschke, a imprimé une vigoureuse impulsion à la théorie, en étudiant les surfaces à *antipodes géodésiques*. J'introduis ici la classification : *points congruents géodésiquement*, *points géodésiquement symétriques*, *antipodes géodésiques*; les trois espèces sont analogues, *grosso-modo*, soit à un couple de surfaces différant par simple translation, soit à un couple de surfaces symétriques par rapport à un plan, soit à un couple symétrique relativement à un point [nous ver-

(1) Il faut retenir ce point que, sur *toute* surface de révolution ou sur *toute* surface de Liouville, il y a ∞^1 géodésiques fermées, formant un ensemble dénombrable, dense partout.

rons qu'il y a un moyen plus subtil de différentier des points symétriquement géodésiques et des points antipodes; il y a un cas, en effet, où les couples de points symétriquement géodésiques peuvent se correspondre dans une symétrie relative à un point, où les couples de points antipodes peuvent se correspondre dans une symétrie plane [1]; le caractère est fourni d'abord par l'étude de l'intersection avec les coniques géodésiques puis par l'étude des points conjugués géodésiques successifs séparant les couples en jeu]. Pour ces trois espèces de points, il s'agit de surfaces telles que les géodésiques issues d'un point A *arbitraire* ne repassent en A qu'après s'être toutes recoupées au préalable en A_1 (et peut-être aussi en A_2, A_3, ... A_{p-1}), tandis que, pour les surfaces les plus générales possédant ∞^2 géodésiques fermées, les ∞^1 géodésiques issues d'un point A arbitraire ont le seul point A comme point commun à toutes : pour les surfaces de révolution, par exemple, on peut avoir des surfaces à points congruents géodésiquement, il n'y en a aucune admettant des points géodésiquement symétriques, il n'y a que la sphère qui admette des antipodes. Quand les points A, A_1 de l'une de ces trois espèces se trouvent réalisés sur la surface, la correspondance (A, A_1) est *involutive* et réalise une auto-isométrie de la surface et la distance géodésique AA_1 est constante. M. Blaschke *présume que la sphère est la seule surface fermée, sans singularité, à antipodes géodésiques :* la question reste en suspens et je signale ici un ds^2 particulier qui définit *peut-être, in abstracto,* une surface fermée à antipodes géodésiques, n'ayant d'autre singularité que des points isolés où deux nappes se touchent; ce ds^2 est

$$(1)\quad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](dx^2 + dy^2), \\ x = \xi + m[p(\omega + i\xi) - e_2]^k, \qquad y = \eta + n[p(\omega' + \eta) - e_2]^k; \end{cases}$$

où $p(u|\omega, \omega')$ est la fonction p de Weierstrass définie par

$$(2)\qquad p'^2 = 4(p - e_1)(p - e_2)(p - e_3),$$

e_1, e_2, e_3 étant réels, $e_1 > e_2 > e_3$, $e_1 + e_2 + e_3 = 0$, 2ω est la période réelle, $2\omega'$ la période imaginaire pure; m, n sont deux constantes

---

[1] *Voir* Chapitre III, fin du paragraphe 5.

arbitraires, k un entier supérieur ou égal à 3. Le ds^2 (1) est défini sur toute la sphère Σ auxiliaire, de rayon 1, de $d\sigma^2$

$$(3) \qquad d\sigma^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](d\xi^2 + d\eta^2).$$

La surface (1) devrait, si m et n tendent vers zéro, tendre vers la sphère Σ *recouverte deux fois;* la courbure du ds^2 (1) est, pour chaque valeur (ξ, η), finie, positive, non nulle. Les variables ξ, η doivent rester réelles et la valeur $\xi = \frac{\omega'}{i}$, $\eta = \omega$ fournit le contact annoncé de deux nappes. Les résultats de M. H. Weyl auraient besoin d'être soigneusement repris pour les étendre à ce nouveau ds^2 (*Vierteljahrsschrift der Naturforschenden Gesellschaft in Zürich*, t. 61, 1916, p. 40-72).

M. Carathéodory a écrit un beau Mémoire de 16 pages sur les surfaces à antipodes géodésiques, sans signaler la classification précédente; tout en rendant hommage à l'ingéniosité du géomètre grec (professeur à Münich), et à l'importance ou à l'élégance de ses résultats, je me permettrai quelques critiques. M. Carathéodory signale la différence entre l'isométrie qui conserve ou renverse la sens des angles, sans signaler que la première correspond aux points congruents géodésiquement; toute surface ordinaire à géodésiques fermées peut être convertie en une surface de même ds^2 à points congruents et *réciproquement*. M. Carathéodory signale ensuite cette belle propriété que toute surface à antipodes (du type de Liouville ou non) peut être mise en correspondance conforme sur la sphère de sorte que tout couple d'antipodes corresponde à un couple de points diamétralement opposés, mais M. Carathéodory admet implicitement que cette correspondance conforme est *unique :* en réalité, on a, *au moins*, les ∞^4 correspondances résultant des diverses coniques homofocales de la sphère (un paramètre pour l'écartement focal et trois pour le déplacement de la sphère autour de son centre); dans la pensée de l'auteur n'interviennent que les correspondances conformes *biunivoques*, mais on doit faire intervenir *toutes* les correspondances conformes, biunivoques ou multiformes, échangeant deux antipodes avec les extrémités d'un diamètre. C'est pour cela que M. Carathéodory a cru démontrer que la sphère est la seule surface de Liouville à antipodes; mais cette pseudo-démonstration pèche par la base et doit être considérée comme nulle

et non avenue et il resterait à élucider si la surface (1) est fermée.

Au premier Chapitre j'indique comment la méthode d'Abel pour les mouvements tautochrones donne les surfaces de Liouville à géodésiques fermées, puis celles qui possèdent des antipodes ou des points géodésiquement symétriques; la base de la discussion est le beau Mémoire de M. G. Kœnigs sur les surfaces de Liouville. Le second Chapitre est consacré à l'étude topologique des trois catégories spéciales séparées plus haut et des représentations conformes sur la sphère, sans distinguer si le ds^2 de la surface est ou non réductible à la forme de Liouville. Le troisième Chapitre donne divers exemples; j'y indique des procédés généraux pour déduire d'un premier exemple connu, tel que les surfaces de révolution, une infinité d'autres. C'est dans ce chapitre que j'établis les propriétés du ds^2 (1) donné plus haut. J'y suggère aussi quelques idées sur la configuration des surfaces à géodésiques fermées, ayant un ds^2 de Liouville, et elles-mêmes *fermées*. La plupart doivent être équivalentes topologiquement à une sphère recouverte de deux feuillets, elles ont pour courbure totale 8π et non 4π; certaines correspondraient au contraire à la sphère recouverte une fois et auraient pour courbure totale 4π; toutes seraient représentables d'une façon conforme biunivoque sur un rectangle plan divisé par trois géodésiques fondamentales en seize rectangles ou huit suivant l'espèce. J'ai enfin signalé ce fait important qu'une surface fermée peut fort bien admettre ∞^2 géodésiques fermées, ∞^2 géodésiques ouvertes; ou bien qu'une surface fermée à géodésiques *toutes* fermées peut fort bien admettre une région à antipodes et une région sans antipodes; je donne un exemple *précis* de cette dernière particularité produit par une sphère convenablement mutilée.

2. *Index bibliographique*. — La fin du tome 2 et le début du tome 3 de la *Théorie des surfaces de Darboux* forment un traité d'ensemble des géodésiques. Voici maintenant les Mémoires se rapportant plus ou moins à l'étude des géodésiques fermées. D'abord à l'étranger.

STÄCKEL, *Développables à géodésiques algébriques* (*Mathematiche Annalen*, t. 43, 1893, p. 171-184); *Géodésiques des polyèdres* (*Rendiconti di Palermo*, t. 22, 1906, p. 141-156); *Surfaces de Liouville à géodésiques fermées* (*Journal de Crelle*, t. 130, 1905, p. 89-112); *Contribution à l'étude des géodésiques* (*Jahresberichte der Deutschen Mathematiker Vereinigung*, t. 11, 1901, p. 121-129).

RODENBERG, *Géodésiques des polyèdres* (*Rendiconti di Palermo*, t. 23, 1907, p. 107-125).

ZOLL, *Surfaces possédant un faisceau de géodésiques fermées* (*Mathematische Annalen*, t. 57, 1903, p. 108-133).

FUNK, *Surfaces à géodésiques fermées* (*Mathematische Annalen*, t. 74, 1913, p. 278-301); *Surfaces possédant un faisceau de géodésiques égales fermées* (*Mathematische Annalen*, t. 75, 1914, p. 425-427); *Sur les surfaces ayant des points conjugués de distance géodésique constante* (*Mathematische Zeitschrift*, t. 16, 1923, p. 159-162).

HAZZIDAKIS, *Surfaces possédant un faisceau de géodésiques égales* (*Journal de Crelle*, t. 95, 1883, p. 120-139).

AMALIA RUSSITANO LANZA, *Développables à géodésiques algébriques* (*Rendiconti di Palermo*, t. 47, 1923, p. 270-272).

REIDEMEISTER, *Sur une propriété caractéristique de la sphère* (*Journal de Crelle*, t. 154, 1924, p. 8-14 et 260).

BLASCHKE, *Traité de Géométrie différentielle*, t. 1, 2e édition, p. 156-159 et 227-233).

C. CARATHÉODORY, *Instruments d'optique et calcul des variations* (*München Sitzungsberichte*, 1926; *Ueber Flächen mit lauter geschlossenen godätischen Linien und konjugierten Gegenpunkten* (*Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar der Universität Hamburg*, t. 4, 1926, p. 297-312).

Puis en France :

DARBOUX, Note XV du tome 2 de la *Mécanique de Despeyrous*, reproduite avec quelques suppressions au tome 3 de la *Théorie des surfaces*, p. 4-9.

G. KOENIGS, *Mémoire sur les lignes géodésiques* (*Savants étrangers*, t. 31, n° 6, 1894, p. 1-318).

HADAMARD, *Sur le billard non euclidien* (*Procès-verbaux de la Société des Sciences physiques et naturelles de Bordeaux*, 1898; *Sur certaines propriétés des trajectoires en Dynamique* (*Journal de Liouville*, t. 3, 1897, p. 331-387); *Les surfaces à courbures opposées et leurs lignes géodésiques* (*Journal de Liouville*, t. 4, 1898, p. 27-71).

J. TANNERY, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 1892, p. 190-192.

B. GAMBIER, *Bulletin des Sciences mathématiques*, 2e série, t. 49, 1925.

CHAPITRE I.

SURFACES AYANT UN ds^2 DE LIOUVILLE ET LEURS GÉODÉSIQUES FERMÉES.

1. *Généralités.* — Soit un ds^2 *quelconque*, $E\,du^2 + 2F\,du\,dv + G\,dv^2$ et une région R du plan (u, v) où ce ds^2 est défini, positif; dans R, je trace une courbe γ fermée; sur une surface S, représentative du ds^2, *donnée ou inconnue*, la courbe C, qui a pour image γ, a une longueur

d'arc et une courbure géodésiques *connues* grâce à la forme ds^2; soit L la longueur $\int_\gamma ds$; choisissons C fermée, de longueur L, telle de plus que la courbure de C surpasse constamment la courbure géodésique; nous pouvons alors construire *deux* surfaces S, S_1, représentatives du ds^2, contenant C, cette courbe C correspondant à γ; chaque surface S ou S_1 représente le ds^2 dans une région annulaire s'étendant, dans le plan (u, v), de part et d'autre de γ; la surface S ou S_1 comprend donc un anneau contenant C à son intérieur : il se peut qu'on puisse prolonger S en dehors de l'anneau, soit pour en déduire une surface fermée, soit une surface à bord, soit un tube indéfini; nous n'entrerons pas ici dans cette discussion. Si C a pour longueur pL, on peut faire correspondre C à γ parcourue p fois et l'anneau S correspond p fois à l'anneau entourant γ; si cet anneau plan est fendu transversalement de façon à le rendre simplement connexe, S se trouve décomposé en p morceaux applicables les uns sur les autres, cette application ayant, *grosso-modo*, une certaine analogie avec une translation.

Si γ est l'image d'une géodésique, il n'y a plus aucune condition à imposer à la courbure de C, puisque la courbure géodésique est nulle; les deux surfaces S et S_1 se raccordent le long de C, mais sont distinctes : par exemple, prenons pour courbe C une courbe plane; les deux surfaces S et S_1 sont symétriques l'une de l'autre par rapport au plan de la courbe C; par une légère déformation d'ensemble, S et S_1 resteront distinctes, avec raccord le long de la géodésique C qui aura cessé d'être plane. Ce raisonnement signale d'ailleurs certaines géodésiques exceptionnelles séparant une surface en deux portions isométriques; dans ce cas S et S_1 se confondent; si C devient plane, la surface S est à elle-même sa symétrique relativement au plan de C. Les méridiennes des surfaces de révolution et leurs transformées sur les surfaces déformées rentrent dans cette classe.

Supposons maintenant réalisé un ds^2, défini, positif, dans une région R du plan (u, v) et tel que les géodésiques aient pour image sur ce plan des courbes fermées contenues tout entières dans R et n'ayant aucun point commun avec la frontière de R; le raisonnement appliqué à une telle image γ nous donne une surface S (comprenant au moins un anneau) ayant ∞^2 géodésiques fermées, coupant toutes C; on sait,

d'après les travaux de M. Hadamard, que cet anneau ne peut avoir sa courbure totale *négative* constamment; il peut, par exemple, contenir une région à courbure négative; il peut avoir sa courbure positive partout. Si la surface S ne correspond qu'à une fraction de la région R, on sait, comme je l'ai montré au *Bulletin des Sciences mathématiques* en 1920 et 1921, que S a un bord ligne d'arrêt ou une arête de rebroussement; les courbes γ, images géodésiques, qui, dans R, viennent couper l'image du bord ou de l'arête, donnent sur S des géodésiques ouvertes formant un système ∞^2, d'ailleurs comme les géodésiques fermées; c'est pour cela que je n'aime guère la dénomination : Fläche mit *lauter* geschlossenen geodätischen Linien, employée par les auteurs allemands; le mot *lauter* est évidemment à supprimer.

Zoll a donné un exemple précis de surface de révolution fermée à géodésiques *toutes* fermées, possédant une zone à courbure négative. Cet exemple, avec des notations plus simples que celles de Zoll, de façon à bien mettre en évidence que la surface est d'un seul morceau analytique, est défini par la méridienne

$$(1) \qquad x = \cos\eta, \qquad z = \int_0^\eta \sqrt{\left(1 + \frac{3}{2}\cos^4\eta \sin\eta\right)^2 - \sin^2\eta}\, d\eta.$$

Le paramètre η variant de o à $\frac{\pi}{2}$ on a une portion de méridienne à concavité toujours tournée vers l'arc de révolution; mais, η variant de o à $\frac{-\pi}{2}$, on obtient deux points d'inflexion sur la méridienne. D'ailleurs on peut fabriquer à volonté une infinité d'exemples de cette espèce, puisque l'on peut se donner *arbitrairement* l'arc de méridienne partant de l'*équateur* et rejoignant l'axe, d'un côté de l'équateur; la seule restriction est que, sur cet arc, x aille constamment en décroissant et que le coefficient angulaire de la tangente à la méridienne soit majoré par une certaine fonction que j'ai indiquée. Sur l'exemple de Zoll, la surface n'a aucune singularité et les géodésiques font un seul tour sur la surface. Cette surface a d'ailleurs beaucoup plus la forme de poire que celle de J. Tannery.

Si la courbe C a une longueur L, sur l'anneau S les géodésiques font un seul tour et deux géodésiques fermées se coupent en un nombre *constant* de points, pair, bien entendu; si C a la longueur pL,

p entier > 1, un point α de γ à p correspondants A, $A_1, \ldots, A_{p-1}$ et toutes les géodésiques fermées issues de A vont se recouper aux points *congruents géodésiquement* à A, à savoir $A_1, \ldots, A_{p-1}$.

Si C a pour longueur $\frac{L}{p}$, p entier $\geqq 1$, il n'y a qu'une chose à signaler, c'est que l'anneau s'enroule p fois autour de C avant de se fermer et se compose en général de p nappes distinctes, à moins que le ds^2 n'ait des auto-applications convenables.

Si nous prenons comme exemple la surface de J. Tannery, définie par sa méridienne

$$(2) \qquad x = \cos\eta, \qquad z = 4\left(1 - \cos\frac{\eta}{2} + \sin\frac{\eta}{2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq \eta < \frac{\pi}{2},$$

nous savons que les géodésiques coupent chaque parallèle en deux points et font deux tours sur la surface avant de se fermer. Si donc nous considérons la surface de révolution applicable sur la précédente, obtenue en multipliant par 2 le rayon de chaque parallèle, à savoir

$$(3) \qquad X = 2\cos\eta, \qquad Z = \int\sqrt{(2+\sin\eta)^2 - 4\sin^2\eta\, d\eta},$$

il faudra faire varier η entre les limites $-\eta_0$ et $+\frac{\pi}{2}$, η_0 étant l'angle aigu positif dont le sinus vaut $\frac{2}{3}$; la zone définie par $-\eta_0 \leqq \eta \leqq +\eta_0$ contient ∞^2 géodésiques fermées qui ne font qu'un tour autour de cette zone; on peut dire que cette nouvelle surface se présente plus naturellement que celle de Tannery, introduite par le désir d'obtenir une surface fermée; sur la nouvelle surface, les géodésiques fermées ont perdu la propriété accidentelle d'avoir un point double. La longueur L est en effet 4π et pour la surface de J. Tannery on a pris un équateur de longueur 2π seulement.

2. *Surfaces déduites du Mémoire de M. G. Kœnigs.* — Il y a 35 ans, M. G. Kœnigs a écrit un beau Mémoire sur les surfaces dont le ds^2 admet 2 (et par suite une infinité) réductions au type de Liouville. Personne ne semble avoir aperçu que ce Mémoire donne sans effort

des surfaces à géodésiques fermées. Le ds^2

$$(1)\qquad ds^2 = \left[\frac{F(x)}{G(x)} - \frac{F(y)}{G(y)}\right]\left[\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{dy^2}{G(y)}\right],$$

où $F(x)$, $G(x)$ sont deux polynomes *quelconques* de degré 4 ou inférieur, a ses géodésiques définies par la célèbre équation d'Euler

$$(2)\qquad \frac{dx}{\sqrt{G(x) + aF(x)}} = \frac{\pm dy}{\sqrt{G(y) + aF(y)}},$$

où a est une constante arbitraire; la courbe intégrale (x, y) est algébrique, de degré 4, *donc fermée si elle n'a pas de branches infinies.* D'ailleurs, grâce à un ingénieux mode de représentation paramétrique que Darboux a imaginé, les ∞^2 intégrales de (2), où a varie, peuvent être échangées avec les ∞^2 *coniques d'un réseau tangentiel.*

Le cas des surfaces à courbure totale constante négative échoue puisque les images des géodésiques sont des cercles orthogonaux à un cercle fixe Γ délimitant précisément la région où le ds^2 est défini positif.

Prenons l'exemple bien simple

$$(3)\qquad ds^2 = (2 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2)$$

que Darboux donne dans la Note citée plus haut de la Mécanique de Despeyrous [1]. Ce ds^2 est de révolution, mais nous aurons des types voisins qui ne sont plus de révolution. C'est un ds^2 exceptionnel, à la fois de révolution, de Lie et de Liouville. Les images des géodésiques ont pour équation (a, b constantes, U paramètre variable)

$$(4)\qquad u = \sqrt{1-a}\,\sin U, \qquad v = \sqrt{1+a}\,\sin(U+b).$$

Ce sont des ellipses ayant pour cercle orthoptique le cercle $u^2 + v^2 = 2$ qui délimite la région où le ds^2 est défini positif; ces ellipses engen-

---

(1) Quand un mouvement plan est régi par une fonction de forces $U(x, y)$, les trajectoires relatives à la constante h des forces vives sont images des géodésiques des surfaces S d'élément $ds^2 = 2(U + h)(dx^2 + dy^2)$. Or l'attraction newtonienne et l'attraction proportionnelle à la distance donnent des trajectoires fermées puisque ce sont des ellipses. L'exemple du texte résulte du second cas; une homothétie nous permet de nous borner au ds^2 du texte.

drent bien un réseau tangentiel; elles n'ont aucun point commun avec la frontière. Chaque ellipse ayant son centre à l'origine, toutes celles qui sont issues du point (u_0, v_0) se recoupent au point $(-u_0, -v_0)$, mais il ne faut pas en conclure que sur une surface de révolution S représentative les géodésiques issues d'un point A vont se recouper en un autre point A_1; en effet, si S est représentée sur le plan u, v, il lui correspond une fraction de couronne circulaire de centre O, limitée par deux rayons faisant l'angle α; une rotation d'angle α, 2α, ... dans l'un ou l'autre sens autour de O donne des régions congruentes et il suffira que α soit égal à π pour que (u_0, v_0) et $(-u_0, -v_0)$ soient les images d'un même point de S. Écrivons donc

$$(5) \qquad u = \rho\cos\omega, \qquad v = \rho\sin\omega, \qquad ds^2 = (2-\rho^2)(d\rho^2 + \rho^2 d\omega^2).$$

La surface S est le lieu du point r, θ, z (λ constante)

$$(6) \qquad \begin{cases} r^2 = \lambda^2\rho^2(2-\rho^2), \qquad dr^2 + dz^2 = (2-\rho^2)\,d\rho^2, \qquad \theta = \dfrac{\omega}{\lambda}, \\ dz = d\rho\sqrt{\dfrac{(2-\rho^2)^2 - 4\lambda^2(1-\rho^2)^2}{2-\rho^2}}. \end{cases}$$

La valeur $\lambda = \frac{1}{2}$ donne manifestement le résultat demandé; z s'obtient d'ailleurs pour $\lambda = \frac{1}{2}$ par une intégrale elliptique et non plus hyperelliptique. Sur une géodésique de la surface on a

$$(7) \qquad s = U + \frac{1-a}{4}\sin 2U + \frac{1+a}{4}\sin 2(U+b),$$

de sorte que la longueur constante comprise entre le point U et le point $U+\pi$ est π; or l'équateur de S a pour longueur $2\pi\lambda$; la valeur $\lambda = \frac{1}{2}$ fournit, comme vérification, π. Il est bon de remarquer que, sur la surface, la circulation complète sur la géodésique fait partir avec les coordonnées (u, v) pour revenir avec $(-u, -v)$; il faut deux tours pour retrouver (u, v) [1].

---

[1] La surface S obtenue pour $\lambda = \frac{1}{2}$ a pour image sur le plan (u, v) un demi-cercle décrit de O pour centre avec un rayon égal à $\sqrt{\frac{3}{2}}$. La transformation $U = u^2 - v^2$,

Donnons maintenant à ce ds^2 la forme type (1). J'écris

$$(8)\qquad x = u + iv, \qquad y = u - iv, \qquad ds^2 = (2 - xy)\,dx\,dy.$$

On a cette fois la *forme de Lie :* écrivons ensuite

$$(9)\qquad x = \cos 2X, \qquad y = \cos 2Y, \qquad X - Y = \xi, \qquad X + Y = \eta.$$

On a la nouvelle forme de Liouville :

$$(9)\qquad \left\{\begin{aligned} ds^2 = \Big[& \left\{4\cos(2X - 2Y) - \frac{1}{2}\cos(4X - 4Y)\right\} \\ & - \left\{4\cos(2X + 2Y) - \frac{1}{2}\cos(4X + 4Y)\right\}\Big]\,dX\,dY, \end{aligned}\right.$$

$$(10')\qquad ds^2 = \left[\left(\frac{1}{8}\cos 4\xi - \cos 2\xi\right) - \left(\frac{1}{8}\cos 4\eta - \cos 2\eta\right)\right](d\xi^2 - d\eta^2).$$

Enfin en posant

$$(11)\qquad \cos 2\xi = t, \qquad \cos 2\eta = \theta,$$

on a le type annoncé

$$(12)\qquad ds^2 = \left[\frac{t^2}{16} - \frac{t}{4} - \left(\frac{\theta^2}{16} - \frac{\theta}{4}\right)\right]\left[\frac{dt^2}{1 - t^2} - \frac{d\theta^2}{1 - \theta^2}\right],$$

$$(13)\qquad F(t) \equiv \left(\frac{t^2}{16} - \frac{t}{4}\right)(1 - t^2), \qquad G(t) \equiv (1 - t^2).$$

$V = 2uv$, d'ailleurs citée par M. Carathéodory, revient à la transformation $Z = z^2$ du plan de la variable complexe et fournit une autre représentation conforme biunivoque de la surface sur le plan (U, V); mais la forme de Liouville est perdue : on la retrouve par un changement de coordonnées $U = R\cos\Omega$, $V = R\sin\Omega$, qui redonne la forme caractéristique de révolution. Les deux couples (u, v) et $(-u, -v)$ fournissent un seul système (U, V) et la surface correspond cette fois à l'intérieur complet du cercle de centre O et rayon $\frac{3}{2}$ dans le plan (U, V). Les diverses coniques géodésiques mises en jeu sont : avec les paramètres u, v les courbes d'images $u = \text{const.}$, $v = \text{const}$; avec les paramètres ξ, η ou t et θ les courbes d'images $t = \text{const.}$ ou $\theta = \text{const.}$; dans le plan (u, v) les courbes $t = \text{const.}$ sont les ellipses homofocales, dont les foyers sont $v = 0$, $u = \pm 1$; les courbes $\theta = \text{const.}$ sont dans le plan (u, v) les hyperboles homofocales aux ellipses qui précèdent. Avec les coordonnées polaires on trouve comme coniques géodésiques les courbes qui ont pour image les cercles concentriques du plan (u, v) et leurs rayons. On reconnaît aisément qu'une géodésique fermée rencontre *tous* les rayons issus de l'origine du plan (u, v), qu'elle peut rencontrer *toutes* les hyperboles homofocales, ou simplement une partie, et qu'elle ne peut rencontrer qu'une partie des ellipses homofocales.

Les variables t et θ sont réelles, $t > 1$, $|\theta| < 1$; on a

$$(14)\qquad \begin{cases} u = \dfrac{x+y}{2} = \cos\eta\cos\xi = \pm\dfrac{\sqrt{(1+t)(1+\theta)}}{2}, \\ v = \dfrac{x-y}{2i} = i\sin\eta\sin\xi = \pm\dfrac{\sqrt{t-1}\sqrt{1-\theta}}{2}, \\ t = u^2+v^2+\sqrt{(1-u^2-v^2)^2+4v^2}, \\ \theta = u^2+v^2-\sqrt{(1-u^2-v^2)^2+4v^2}. \end{cases}$$

La région intérieure au cercle $u^2+v^2=2$ se transforme en la région du plan $\omega t\theta$ intérieur au trapèze limité par les droites $\theta = \pm 1$, $t=1$, $t+\theta=4$; aux points (u, v) et $(-u, -v)$ correspond un seul système (t, θ). En gardant $F(t)$, mais remplaçant $G(t)$ par $1-t^2+\varepsilon t^4$, ou encore $1+\varepsilon_0+\varepsilon_1 t+(\varepsilon_2-1)t^2+\varepsilon_3 t^3+\varepsilon_4 t^4$, où les ε sont suffisamment petits, nous faisons perdre à $F(t)$ la propriété d'avoir deux racines communes avec $G(t)$, de sorte que le ds^2 ne sera plus de révolution; le nouveau domaine

$$(15)\qquad G(t)G(\theta) < 0, \qquad [F(t)G(\theta)-F(\theta)G(t)]G(t) < 0);$$

où le ds^2 est défini, positif, se trouve limité par des courbes dépendant des ε sous forme algébrique, entière, rationnelle; donc, pour les ε suffisamment petits, le nouveau domaine est voisin du premier et les nouvelles images des géodésiques, voisines des premières, n'ont pas de point commun avec la frontière. Notre but est atteint.

Il serait sans doute intéressant de dénombrer tous les ds^2 (1) jouissant des mêmes propriétés que ceux que nous venons de former; cette discussion a été évitée grâce à un premier exemple simple; elle devrait utiliser ce fait que la substitution

$$\left(x, y; \frac{ax+b}{cx+d}, \frac{ay+b}{cy+d}\right)$$

est possible et permet de donner à trois racines de G des valeurs arbitraires; on peut aussi remplacer F et G par $\lambda F+\mu G$ et μG, où λ et μ sont des constantes arbitraires. Ces transformations ne changent pas le ds^2, mais d'après le théorème de Dini, on sait qu'à tout ds^2 de Liouville,

$$(U-V)(du^2-dv^2)$$

correspondent ∞^2 nouveaux d^2 de Liouville

$$\left(\frac{\alpha' U + \beta'}{\alpha U + \beta} - \frac{\alpha' V + \beta'}{\alpha V + \beta}\right)\left(\frac{du^2}{\alpha U + \beta} - \frac{dv^2}{\alpha V + \beta}\right)$$

ayant dans le plan (u, v) mêmes images de leurs géodésiques; α, β, α', β' sont des constantes arbitraires qui n'interviennent, en réalité, que par $\frac{\beta}{\alpha}$, paramètre de forme et $\frac{\alpha'\beta - \alpha\beta'}{\alpha^2}$, paramètre d'homothétie. Appliqué ici, le procédé revient à remplacer F et G respectivement par $\alpha' F + \beta' G$ et $\alpha F + \beta G$; il y a une discussion complémentaire à faire pour les régions.

Un artifice complémentaire réussit encore : si le type (1) réussit pour un choix particulier de F et G, le nouveau type

$$(1') \qquad ds^2 = \left[\frac{F(x)}{G(x)} - \frac{F(y)}{G(y)}\right]\left[\frac{dx^2}{G(x)} - \frac{m^2 dy^2}{G(y)}\right],$$

où m est un nombre commensurable arbitraire (positif), réussit encore, car les régions où le ds^2 est défini positif sont les mêmes, et la nouvelle équation des géodésiques

$$(2') \qquad \frac{dx}{\sqrt{G(x) + aF(x)}} \pm \frac{m\,dy}{\sqrt{G(y) + aF(y)}} = 0$$

s'intègre encore *algébriquement*, avec intégrales fermées; mais le nouveau ds^2 (1') n'admet plus qu'une forme de Liouville.

3. *Géodésiques fermées, coniques géodésiques.* — Nous étudions donc les ds^2 de Liouville,

$$(1) \qquad ds^2 = [\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2),$$

où $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ sont des fonctions définies et continues dans un intervalle déterminé relatif à x ou y; la dérivée $\alpha'(x)$ ou $\beta'(y)$ peut admettre des points de discontinuité, où il y a une dérivée à gauche et une dérivée à droite. Nous prenons les équations des géodésiques sous la forme

$$(2) \qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - h}} = \frac{dy}{\sqrt{h + \beta(y)}},$$

où t est une variable auxiliaire; on en déduit

$$(3) \qquad ds = [\alpha(x) + \beta(y)]\,dt = \sqrt{\alpha(x) - h}\,dx + \sqrt{\beta(y) + h}\,dy.$$

La première question importante à résoudre est de savoir ce que deviennent les coordonnées (x, y) suivies par continuité sur une géodésique *fermée*, la surface étant supposée admettre ∞^2 géodésiques fermées; si (x', y') sont les nouvelles coordonnées du point de départ (x, y), *la substitution* $(x, y; x', y')$ *transforme la forme de Liouville* (1) *en elle-même;* or, M. G. Kœnigs, dans le Mémoire déjà cité, détermine toutes les substitutions qui font passer d'une forme donnée de Liouville à une autre, *distincte ou non de la première;* bien que l'auteur ait eu surtout en vue le cas où les formes *diffèrent*, nous recueillerons le fruit de sa savante discussion; ici, on a nécessairement [1] l'une des formes (a, b, c constantes) :

$$\text{(I)} \begin{cases} x' = ax + b, \\ y' = ay + c; \end{cases} \qquad \text{(II)} \begin{cases} x' = ax + b, \\ y' = -ay + c; \end{cases}$$

$$\text{(III)} \begin{cases} x' = -ay + b, \\ y' = ay + c; \end{cases} \qquad \text{(IV)} \begin{cases} x' = ay + b, \\ y' = ax + c. \end{cases}$$

---

[1] Dans le cas où le ds^2 étudié admet *plusieurs* formes de Liouville distinctes, on peut obtenir une substitution non comprise dans les formes I, II, III ou IV; par exemple, le ds^2 déjà étudié $(2 - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2)$ admet la substitution

$$x' = x\cos\omega - y\sin\omega, \quad y' = x\sin\omega + y\cos\omega$$

qui le reproduit, mais chaque géodésique est remplacée par une autre, au lieu de se substituer à elle-même; de même, sur la sphère, si nous prenons un système de coniques homofocales déterminé, puis, que nous faisions un déplacement de la sphère autour de son centre, un point M et son transformé M′ ont, par rapport au système homofocal primitif des coordonnées respectives $(x, y; x', y')$ ne se déduisant pas les unes des autres par les substitutions du texte; mais les géodésiques se sont échangées entre elles. En tout cas, si le ds^2 n'a *qu'une* forme de Liouville, écrite sous la forme $[\varphi(u+v) - \psi(u-v)]\,du\,dv$ avec les notations de M. G. Kœnigs, il n'y a que la substitution

$$u' = au + b, \qquad v' = \varepsilon a v + c \qquad \text{ou} \qquad u' = av + b, \qquad v' = \varepsilon a u + c$$

qui garde la forme de Liouville; le résultat du texte en découle. Ceci prouve encore qu'il y aurait lieu d'étudier spécialement les types de M. G. Kœnigs, comme je l'ai dit au paragraphe 2; mais la méthode suivie au paragraphe 3 ne peut les laisser échapper, grâce à ce fait que chaque géodésique doit se substituer à elle-même.

Remplacer x par $x+\lambda$ et y par $y+\mu$, où λ et μ sont des constantes, permet de supposer $b=c=0$ quand a est différent de ± 1; or $a \neq \pm 1$ ne peut répondre à notre but (auto-isométrie de la surface, échange de chaque géodésique avec elle-même). En effet (I), pour l'auto-isométrie, entraîne

$$(4) \qquad \alpha(ax) = \frac{\alpha(x)}{a^2} + f(a), \qquad \beta(ay) = \frac{\beta(y)}{a^2} - f(a),$$

où $f(a)$ est une certaine fonction de a; l'équation (2) en x et y est remplacée par

$$(2') \qquad \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - ha^2 + a^2 f(a)}} = \frac{dy}{\sqrt{\beta(y) + ha^2 - a^2 f(a)}}.$$

Pour avoir la *même* équation, il faut supposer $a^2 = 1$, $f(a) = 0$. Cela justifie notre assertion; (II), (III), (IV) se traitent de façon semblable [on peut, d'ailleurs, par *deux* tours réduire (II) et (IV) à un cas particulier de (I), $(x, y; a^2x, a^2y)$ et (III) par *quatre tours* à $(x, y; a^4x; a^4y)$]. Nous devons donc supposer $a = +1$ ou -1, et grâce au remplacement de x en $x+\lambda$ et y en $y+\mu$, nous n'aurons à envisager que les cas suivants, où a, b sont des constantes *non nulles;* pour (I),

$$(A_1) \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y; \end{cases} \qquad (A_2) \begin{cases} x' = x, \\ y' = y; \end{cases}$$

$$(A_3) \begin{cases} x' = -x, \\ y' = -y; \end{cases} \qquad (A_4) \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = y + b. \end{cases}$$

Le cas $x' = x$, $y' = y + a$ ne diffère de (A_1) que par un changement de notations. Pour (II), nous avons

$$(B_1) \begin{cases} x' = x + a, \\ y' = -y; \end{cases} \qquad (B_2) \begin{cases} x' = x, \\ y' = -y. \end{cases}$$

Le type (III) donne seulement

$$(C) \begin{cases} x' = -y, \\ y' = x. \end{cases}$$

Le type (IV) donne

$$(D_1) \begin{cases} x' = \varepsilon y + a, \\ y' = \varepsilon x; \end{cases} \qquad (D_2) \begin{cases} x' = \varepsilon y, \\ y' = \varepsilon x. \end{cases}$$

Montrons de suite que (A_4), (C), (D_1), (D_2) ne peuvent exister. Pour (A_4), il faut d'abord, avec une constante c,

$$\alpha(x+a) \equiv \alpha(x) + c, \qquad \beta(y+b) \equiv \beta(y) - c,$$

et comme chaque géodésique doit se substituer à elle-même, la constante c est nulle; α a donc la période a et β la période b; les équations

$$(5) \qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - h}} = \frac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{\beta(y) + h}}$$

montrent que $\alpha(x) - h$ et $\beta(y) + h$ ne peuvent s'annuler, sinon x et y oscilleraient entre deux limites fixes et ne pourraient, au bout d'un tour, s'accroître des quantités fixes a et b; un tour complet accroît t de la quantité $\tau(h)$, indépendante du point de départ, en raison de la périodicité de $\alpha(x)$ et $\beta(y)$; supposons $dx > 0$, on aura $a > 0$, $\varepsilon dy > 0$; b aura le signe de ε. On a donc $(\varepsilon = \pm 1)$:

$$(6) \qquad \tau(h) = \int_0^a \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - h}} = \int_0^b \frac{\varepsilon\, dy}{\sqrt{\beta(y) + h}}.$$

En calculant $\tau'(h)$, on a une contradiction, car on égale une quantité essentiellement positive à une quantité essentiellement négative,

$$(7) \qquad 2\tau'(h) = \int_0^a \frac{dx}{[\alpha(x) - h]^{\frac{3}{2}}} = -\int_0^b \frac{\varepsilon\, dy}{[\beta(y) + h]^{\frac{3}{2}}},$$

(A_4) n'existe pas; par suite, (D_1) non plus, car deux tours donnent pour (D_1)

$$(8) \qquad x'' = \varepsilon y' + a = x + a, \qquad y'' = \varepsilon x' = y + a\varepsilon.$$

Les cas (A_2), (A_3) sont possibles, comme l'a montré le ds^2 étudié déjà

$$(2 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2),$$

(A_1) est réalisé pour une surface de révolution, ou encore pour les ds^2 de Liouville de la sphère

$$[p(\omega + ix) - p(\omega' + y)](dx^2 + dy^2);$$

nous verrons que (B_1) et (B_2) sont possibles : ils rentrent d'ailleurs

comme cas particuliers dans (A_1) et (A_2) respectivement par deux tours; mais comme ils inversent le *sens* des angles, ils ne peuvent correspondre qu'aux antipodes et aux points géodésiquement symétriques; au contraire, (A_1), (A_2), (A_3) conservent le sens des angles. En vertu des équations (2), (A_1) exige que la fonction $\alpha(x)$ ait la période a.

Remarquons que (A_3), pour l'auto-isométrie, puis pour la substitution de la géodésique à elle-même, entraîne

$$\alpha(-x) \equiv \alpha(x), \qquad \beta(-y) \equiv \beta(y). \tag{9}$$

Or, deux tours, pour (C), donnent

$$x'' = -y' = -x, \qquad y'' = x' = -y, \tag{10}$$

de sorte que (C) entraîne les conditions (9); (C) entraîne de plus

$$\begin{cases} \alpha(x') \equiv \alpha(-y) \equiv \alpha(y) \equiv \beta(y) + a, \\ \beta(y') \equiv \beta(\quad x) \equiv \alpha(x) - a. \end{cases} \tag{11}$$

Le ds^2 de la surface aurait donc la forme

$$[\alpha(x) + \alpha(y) - a](dx^2 + dy^2), \tag{12}$$

et si l'on prend une géodésique

$$\frac{dx^2}{\alpha(x) - h} = \frac{dy^2}{h + \alpha(y) - a}, \tag{13}$$

le changement de x en y', de y en $-x'$ ne peut reproduire l'équation (13) que si $h = \frac{a}{2}$: donc (C) ne peut exister; une discussion analogue prouve que (D_2) n'existe pas.

Finalement il nous reste, pour les surfaces à géodésiques fermées, à réaliser (A_1) et (A_2) [(A_3) sera un cas particulier de (A_2)]. Puis, si nous voulons les antipodes géodésiques, ou (B_1), il faudra essayer de particulariser (A_1); de même pour les symétriques géodésiques, ou (B_2), il faudra particulariser (A_2).

Le cas (A_1) (*et celui des antipodes*) *est caractérisé par ce fait que la géodésique coupe toutes les coniques géodésiques* $x =$ const. *et ne ren-*

contre qu'une partie des coniques $y = \text{const.}$, *la fonction* $\alpha(x)$ *est périodique. Le cas* (A_2) *(et celui des symétriques géodésiques) est caractérisé par ce fait que la géodésique ne coupe qu'une partie des coniques* x *aussi bien que des coniques* y. *Ce critérium sépare nettement le cas des antipodes ou des symétriques géodésiques.*

Les propriétés analytiques et géométriques se trouvent ainsi étroitement liées et j'espère avoir évité complètement la confusion entre les notions de *condition nécessaire* ou de *condition simplement suffisante*. Un scrupule est à élucider; on a supposé α fonction univoque de x et β fonction univoque de y. Or, si le point de la surface se déplace d'une façon continue et revient au point de départ, les coordonnées (x, y) peuvent reprendre le même système de valeurs ou un nouveau (x', y'); dans le premier cas, α et β reprennent les mêmes déterminations : la démonstration est basée sur le travail de M. G. Kœnigs, car si (α, β) reprenaient des valeurs différentielles $(\bar{\alpha}, \bar{\beta})$, on aurait deux formes de Liouville $(\alpha + \beta)(dx^2 + dy^2)$, $(\bar{\alpha} + \bar{\beta})(dx^2 + dy^2)$ équivalentes, ce qui exigerait, en vertu de la conservation de x ou y, que l'on ait $\bar{\alpha} \equiv \alpha + k$, $\bar{\beta} \equiv \beta - k$, où k est une constante, mais alors la géodésique (h) serait remplacée par la géodésique $h - k$; donc, le couple (α, β) reprend bien sa valeur si le couple (x, y) reprend la sienne. Dans le cas où (x, y) est remplacé par un autre couple (x', y'), notre discussion donne le résultat relatif à la substitution $(x, y; x', y')$ qui est du type (A_1), (A_2), (A_3); nous n'avons donc rien oublié [sauf le type exceptionnel $(2 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2)$, qui a été signalé à part]. Dans certains cas, il y aura avantage à exprimer α et x au moyen d'un même paramètre auxiliaire; nous trouverons plus bas un exemple

$$\alpha = 2 + \cos\varphi, \qquad x = \varphi + 8\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi.$$

4. *Cas où les géodésiques rencontrent la totalité des coniques* x. — La fonction $\alpha(x)$ a la période a; une homothétie préalable sur le plan image (x, y) permet de supposer que cette période est 2π. Les équations

$$(1) \qquad dt = \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - h}} = \frac{dy}{\sqrt{h + \beta(y)}}$$

montrent que $\alpha(x) - h$ reste constamment positif, tandis que $h + \beta(y)$ admet deux racines entre lesquelles y oscille; si h est *quelconque*, ces racines sont simples; elles comprennent entre elles un *maximum* (absolu) de $\beta(y)$; on peut, sans particulariser, supposer ce maximum nul et atteint pour $y = 0$; on a

$$\beta'(-0) \geqq 0 \qquad \text{et} \qquad \beta'(+0) \leqq 0.$$

Somme toute, on doit définir pour y *positif* les deux fonctions $\beta(y)$ et $\beta(-y)$; puisque nous avons à considérer les valeurs *égales* de $\beta(y)$ et $\beta(-y_1)$, il est naturel de poser

$$(2)\quad \begin{cases} \beta_1(y) \equiv \beta(-y), & \beta(y) = \beta_1(y_1) = -z, \\ dy = \psi(z)\,dz, & dy_1 = \psi_1(z)\,dz. \end{cases}$$

La variable z reste positive; à chaque valeur de z correspond une valeur de y et une valeur de y_1; déterminer $\beta(y)$ ou $\beta_1(y_1)$ revient à calculer y ou y_1 en fonction de z, ou encore à calculer $\psi(z)$ et $\psi_1(z)$. Je trace sur la figure 1 les axes Oy, Oy_1 coïncidant, $O\beta$ et $O\beta_1$ aussi,

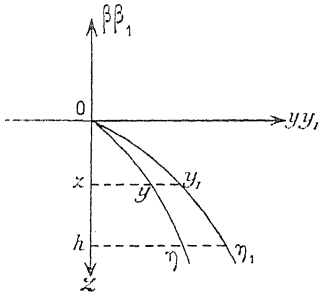

Fig. 1.

Oz étant dirigé en sens inverse de $O\beta$. La constante h est positive et doit rester inférieure à la limite inférieure (positive ou, à la rigueur, nulle) de $\alpha(x)$; z variant de 0 à h, y varie de 0 à η et y_1 de 0 à η_1. Si l'on représente maintenant la courbe $y(t)$ (*fig.* 2), je trace encore les deux axes Oy et Oy_1 directement opposés; la courbe a la forme d'une sinusoïde [1], la partie ABCB'A' se reproduisant par translation et

[1] Si $\psi(z)$ change de signe, la sinusoïde présente un retour sur elle-même, ce qui produit une boucle avec point double.

chaque droite Aa, Cc, A′a' étant axe de symétrie. En B, il y a inflexion *analytique* si $\beta'(0)=0$, le rayon de courbure étant infini, et inflexion *graphique* si $\beta'(+0)$ et $\beta'(-0)$ ne sont pas nulles toutes deux [si $\beta'(+0)>0$, sans égalité, le rayon de courbure de la branche BC en B est fini; si $\beta'(+0)=0$, il est infini; mêmes résultats pour la

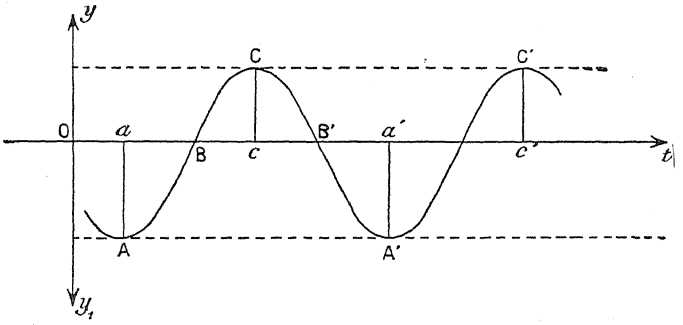

Fig. 2.

branche BA et $\beta'(-0)$]. Quand t croît de la quantité aa', que nous appellerons $2\tau(h)$, l'ordonnée et la pente de la tangente reprennent toutes deux la même valeur. Il est utile, pour la suite, de remarquer que si $\beta(y)\equiv\beta_1(y)$, autrement dit si $\beta(y)$ est paire, B, B′ ... sont centres de symétrie, de sorte que, t croissant de ac ou $\tau(h)$, l'ordonnée et la pente de la tangente changent de signe [nous entendons ici la parité au sens large; ainsi, si $\beta(y)=|y|$, la fonction $\beta(y)$ est considérée comme paire].

Donc, pour que x et y reprennent simultanément, le premier la valeur $x+2\pi$, l'autre la valeur y, il suffit que $aa'=2\tau(h)$ soit égale à l'accroissement de t quand x croît de 2π. Nous aurons donc

$$(3)\qquad \tau(h)\equiv\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}}=\int_0^{\eta}\frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}}+\int_0^{\eta_1}\frac{dy_1}{\sqrt{h+\beta_1(y_1)}},$$

ce qui, tenant compte des définitions (2), donne

$$(4)\qquad \int_0^h\frac{[\psi(z)+\psi_1(z)]\,dz}{\sqrt{h-z}}=\tau(h)=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}}.$$

La donnée de la fonction périodique $\alpha(x)$ donne $\tau(h)$; l'équation fonctionnelle trouvée ainsi pour la somme $\psi(z)+\psi_1(z)$ n'est autre

que l'équation obtenue par Abel pour les mouvements tautochrones. Si l'on se reporte au *Traité d'Analyse* de M. Goursat (2e édition, t. 1, p. 344), on obtient

$$(5)\qquad \psi(z)+\psi_1(z)=\frac{1}{\pi}\left[\int_0^z \frac{\tau'(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}+\frac{\tau(0)}{\sqrt{z}}\right],$$

$$(6)\qquad y+y_1=\int_0^z(\psi+\psi_1)\,dz=\frac{1}{\pi}\int_0^z\frac{\tau(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}.$$

Mais il y a lieu ici de tenir compte de la forme particulière de la fonction $\tau(h)$ de façon à simplifier ces formules; prenons la dernière : on a à calculer une intégrale *double* et l'inversion de l'ordre des intégrations donnera

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi}\int_0^z\frac{dh}{\sqrt{z-h}}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{\alpha-h}}&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx\int_0^z\frac{dh}{\sqrt{(z-h)(\alpha-h)}}\\&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx.\mathrm{L}\left[\frac{\sqrt{\alpha(x)}+\sqrt{z}}{\sqrt{\alpha(x)}-\sqrt{z}}\right].\end{aligned}$$

On a donc $y+y_1$ par cette intégrale et $\psi+\psi_1$ par une dérivation sous le signe $\int$. Nous écrivons donc, au lieu de (5) et (6),

$$(7)\qquad \left\{\begin{aligned} y+y_1&=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}dx.\mathrm{L}\left[\frac{\sqrt{\alpha(x)}+\sqrt{z}}{\sqrt{\alpha(x)}-\sqrt{z}}\right],\\ \psi(z)+\psi_1(z)&=\frac{1}{2\pi\sqrt{z}}\int_0^{2\pi}\frac{\sqrt{\alpha(x)}\,dx}{\alpha(x)-z}.\end{aligned}\right.$$

On peut donc se donner *arbitrairement :* la fonction $\alpha(x)$ positive, de période 2π, puis la fonction $\psi(z)$ définie pour $z>0$ [ou mieux, la fonction $y(z)$ primitive de $\psi(z)$]. On a spécifié que $\alpha(x)+\beta(y)$ ou $\alpha(x)-z$ reste positif; cela oblige z à rester inférieur à la limite inférieure de $\alpha(x)$; d'autre part, il est nécessaire que y et y_1 soient définies en fonction de z, et *positives;* la dérivée $\psi(z)$ peut s'annuler et changer de signe. On doit donc avoir

$$(8)\qquad 0\leqq y\leqq\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}dx.\mathrm{L}\left[\frac{\sqrt{\alpha(x)}+\sqrt{z}}{\sqrt{\alpha(x)}-\sqrt{z}}\right].$$

Il est bon de remarquer qu'il a été commode pour nous d'écrire

$$ds^2 = [\alpha(x) + \beta(y)][dx^2 + dy^2];$$

mais il peut devenir nécessaire d'exprimer x en fonction de $\alpha(x)$, ou encore d'exprimer x et α au moyen d'un nouveau paramètre X; de même, on pourra avoir besoin d'exprimer y et β au moyen d'un paramètre Y. Cette remarque est nécessaire pour bien comprendre que la fonction $\tau(h)$ peut fort bien être *nulle* pour $h = 0$. Ainsi, prenons

$$\alpha = 2 + \cos\varphi, \qquad x = \varphi + 8\sin\varphi + \frac{3}{2}\sin 2\varphi,$$

$$\tau(h) = \int_0^{2\pi} \frac{8\cos\varphi + 6\cos^2\varphi - 2}{\sqrt{2 + \cos\varphi - h}}\, d\varphi.$$

Pour $h = 0$, la quantité sous le signe $\int$ est la différentielle de

$$4\sin\varphi\sqrt{2 + \cos\varphi},$$

de sorte que $\tau(0) = 0$. Si la fonction $\tau(h)$ est choisie de sorte que $\tau(0) \neq 0$, la somme $\psi(z) + \psi_1(z)$ est, pour z infiniment petit, un infiniment grand ayant pour partie principale, d'après (7),

$$\frac{1}{2\pi\sqrt{z}}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)}} \quad \text{ou} \quad \frac{\tau(0)}{\pi\sqrt{z}},$$

résultat d'accord avec (5); mais alors puisque $\psi(z)$ est égal à $\frac{-1}{\beta'(y)}$ et $\psi_1(z)$ à $\frac{-1}{\beta'_1(y_1)}$, cela entraîne que l'une au moins des valeurs $\beta'(+0)$, $\beta'(-0)$ soit nulle; si $\beta'(+0)$ et $\beta'(-0)$ sont nulles toutes deux, la ligne $y = 0$ est géodésique sur les deux nappes de surface qu'elle sépare, car, en réalité, notre analyse conduit à deux ds^2 *distincts*

$$(9) \qquad [\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2) \quad \text{et} \quad [\alpha(x) + \beta(-y)](dx^2 + dy^2)$$

définis séparément pour $y > 0$; ces deux ds^2 ne coïncident *analytiquement* que si $\beta(y)$ et $\beta(-y)$ sont les deux branches d'une même fonction analytique étudiée d'abord pour $y > 0$, puis pour $y < 0$; si $\tau(0) = 0$, on pourra avoir $\beta'(+0) < 0$ et $\beta'(-0) > 0$, égalité exclue, de sorte que $y = 0$ n'est géodésique pour aucune des deux

nappes qu'elle borde. Pour construire l'anneau qui a été annoncé au n° 1 de ce Chapitre, puisque $\beta(0) = \beta_1(0) = 0$, nous calculons l'intégrale

$$L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha(x)}\, dx, \tag{10}$$

et nous construisons une courbe C quelconque, de longueur L et fermée; si $\beta'(0) = \beta'_1(0) = 0$, on construit un anneau de surface représentant $[\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2)$, C ayant la courbe $y = 0$ pour image, et l'on garde de cet anneau la portion S annulaire aussi, correspondant à $y > 0$; on opère de même pour $[\alpha(x) + \beta(-y)](dx^2 + dy^2)$ et $S + S_1$ est l'anneau demandé; si $\beta'(0) = 0$, $\beta'_1(0) \neq 0$, on a S par la même construction; l'anneau S_1 n'est réel que si la courbure de C surpasse la courbure géodésique de la courbe $y = 0$ sur le ds^2, $[\alpha(x) + \beta_1(y)](dx^2 + dy^2)$; si $\beta'(0) \neq 0$, $\beta'_1(0) \neq 0$, remarque analogue.

On pourrait fermer la géodésique autrement : avec les hypothèses qui précèdent, la géodésique rencontre une fois seulement chaque conique de la série x et deux fois toutes les coniques de la série y comprises entre $y = -\eta_1$ et $y = +\eta$; remarquons que si la courbe C a exactement la longueur L, la géodésique ne fait qu'un tour sur l'anneau avant de se fermer; mais si $\alpha(x)$ a la période $\frac{2\pi}{p}$ et si C a exactement la longueur $\frac{L}{p}$, l'anneau obtenu se compose en réalité de p feuillets superposés; si l'on ne le regarde que comme surface simple, la géodésique fait p tours sur cette surface annulaire avant de se fermer et se recoupe elle-même $p - 1$ fois (nous l'avons constaté pour la surface en poire de J. Tannery à la fin du n° 1); si l'on prend une autre courbe C′ de longueur L et non plus $\frac{L}{p}$, cette circonstance disparaît; il n'y a plus qu'un tour, la géodésique se ferme sans point double.

Supposons qu'au lieu d'égaler aa' à $2\tau(h)$, on égale aa' à $\frac{2p}{q}\tau(h)$, où p et q sont entiers et premiers entre eux; x, y reviendront respectivement aux valeurs $x + 2p\pi$ et y. quand la géodésique aura rencontré p fois chaque conique x et $2q$ fois chaque conique y telle

que $-\eta_1 = \leqq y \leqq \eta$: si C a pour longueur L, la géodésique se ferme après avoir fait p tours sur la surface; il suffirait ici, comme immédiatement avant, de donner à C la longueur pL pour avoir une nouvelle surface annulaire où la géodésique ne ferait qu'un tour avant de se fermer, rencontrant chaque conique y en $2q$ points. L'introduction de cette fraction $\frac{p}{q}$ revient donc à écrire, au lieu de (7),

$$(7') \qquad \begin{cases} y + y_1 = \dfrac{1}{2\pi}\dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^{2\pi} dx . \mathrm{L}\left[\dfrac{\sqrt{\alpha(x)}+\sqrt{z}}{\sqrt{\alpha(x)}-\sqrt{z}}\right], \\ \psi + \psi_1 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{z}}\dfrac{p}{q}\displaystyle\int_0^{2\pi} \dfrac{\sqrt{\alpha(x)}\,dx}{\alpha(x)-z}. \end{cases}$$

Le procédé que nous venons d'employer peut encore être ainsi expliqué : si

$$(11) \qquad [\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2)$$

donne une surface à géodésiques fermées, le nouveau ds^2

$$(12) \qquad [\alpha(x) + \beta(y)]\left(dx^2 + \frac{q^2}{p^2}dy^2\right),$$

où α et β sont restés les mêmes, est celui qui s'obtient par (7'), si le premier s'obtient par (7) et (8), car les équations des géodésiques du nouveau ds^2 sont

$$(13) \qquad \frac{p}{q}\frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} = \frac{dy}{\sqrt{\beta(y)+h}} = d\theta.$$

Nous avons ainsi le moyen d'obtenir de nombreuses surfaces *résiduelles* et *corésiduelles*, comme je l'ai expliqué pour les surfaces de révolution, dans mon Mémoire du *Bulletin des Sciences mathématiques*.

Vérifions [en nous bornant aux formules (7) et (8) pour simplifier] que toutes les géodésiques fermées ont bien L pour longueur; le résultat, presque évident ici, nous montrera, dans le cas A_2 qui est plus difficile, la méthode à suivre. Nous avons dit que, sur la géodésique h, on a

$$(14) \quad ds = [\{\alpha(x) - h\} + \{\beta(y) + h\}]\,dt = \sqrt{\alpha(x)-h}\,dx + \sqrt{\beta(y)+h}\,dy.$$

La longueur L de la géodésique est

$$(15)\qquad \begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha(x) - h}\, dx + 2\int_0^{\eta} \sqrt{\beta(y) + h}\, dy + 2\int_0^{\eta_1} \sqrt{\beta_1(y_1) + h}\, dy_1 \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha(x) - h}\, dx + 2\int_0^{h} \sqrt{h - z}\,[\psi(z) + \psi_1(z)]\, dz. \end{aligned}$$

Si l'on a l'idée de calculer de deux façons différentes l'intégrale

$$(16)\qquad \int_0^h \tau(u)\, du,$$

en utilisant l'une ou l'autre définition

$$(17)\qquad \tau(u) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - u}} = \int_0^u \frac{\psi(z) + \psi_1(z)}{\sqrt{u - z}}\, dz,$$

on aura une intégrale double à calculer dans les deux cas et l'inversion des limites donne

$$(18)\qquad \begin{aligned} \frac{1}{2}\int_0^h du \int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x) - u}} &= \int_0^{2\pi} dx \int_0^h \frac{du}{2\sqrt{\alpha(x) - u}} \\ &= -\int_0^{2\pi} dx \sqrt{\alpha(x) - h} + \int_0^{2\pi} dx \sqrt{\alpha(x)}; \end{aligned}$$

$$(19)\qquad \begin{aligned} \int_0^h du \int_0^u \frac{(\psi + \psi_1)\, dz}{\sqrt{u - z}} &= \int_0^h dz \int_z^h \frac{(\psi + \psi_1)\, du}{\sqrt{u - z}} \\ &= 2\int_0^h (\psi + \psi_1)\sqrt{h - z}\, dz. \end{aligned}$$

La comparaison des derniers membres de (18) et (19) fournit la relation annoncée

$$(20)\qquad L = \int_0^{2\pi} \sqrt{\alpha(x)}\, dx.$$

Il reste maintenant à montrer comment le cas des *antipodes géodésiques*, B_1, va pouvoir se déduire de l'étude complète de A_1. Si M, (x, y) a pour antipode M_1, $\left(x + \frac{a}{2}, -y\right)$, la circulation complète MM_1M ramène en M avec les coordonnées $(x + a, y)$; ici, on a supposé $a = 2\pi$. Nous avons déjà remarqué plus haut que si $\beta_1(y) \equiv \beta(y)$, autrement

dit si la fonction $\beta(y)$ est paire, on a $y \equiv y_1$, $\psi \equiv \psi_1$, et quand t croît de la quantité ac de la figure 2 ou $\tau(h)$, l'ordonnée et la pente de la courbe changent de signe; il suffira donc, pour obtenir B_1, *que* $\alpha(x)$ *ait non seulement la période* 2π, *mais encore la période* π; *la condition, réunie à la parité de* β, *est évidemment nécessaire et suffisante*. On a, en effet, dans ce cas,

$$\int_0^{2\pi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} = 2\int_0^{\pi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} = 2\tau(h).$$

On appliquera donc les formules (7) ou (7') en y faisant $\psi = \psi_1$, $y = y_1$ et supposant α de périodicité π.

5. *Cas où les géodésiques ne rencontrent qu'une fraction des coniques* x *ou* y. — Comme plus haut, $\beta(y)$ a un maximum que nous supposons encore nul, atteint pour une valeur de y que nous supposons encore nulle; de même, $\alpha(x)$ a un maximum A, nécessairement positif, atteint pour une valeur de x que nous supposons nulle aussi. J'écris donc encore

$$(1)\qquad \begin{cases} \beta_1(y) \equiv \beta(-y), & \beta(y) = \beta_1(y_1) = -z, \\ dy = \psi(z)\,dz, & dy_1 = \psi_1(z)\,dz, \end{cases}$$

puis, pour des motifs analogues,

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_1(x) \equiv \alpha(-x), & A - \alpha(x) = A - \alpha_1(x) = \zeta, \\ dx = \varphi(\zeta)\,d\zeta, & dx_1 = \varphi_1(\zeta)\,d\zeta. \end{cases}$$

Les plus petites racines positives de $\beta(y) + h = 0$ et $\beta_1(y_1) + h = 0$ sont encore appelées η et η_1; les plus petites racines positives de $\alpha(x) - h = 0$ et $\alpha_1(x_1) - h = 0$ seront appelées ξ et ξ_1; pour que la géodésique se ferme, en rencontrant deux fois chaque conique qui la coupe, il faut évidemment que l'on ait

$$(3)\qquad \begin{cases} \tau(h) = \displaystyle\int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dy_1}{\sqrt{h+\beta_1(y_1)}} \\ \qquad = \displaystyle\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} + \int_0^{\xi_1} \frac{dx_1}{\sqrt{\alpha_1(x_1)-h}}. \end{cases}$$

Si l'on définit le nombre l, associé à h, par la relation

$$h + l = A, \tag{4'}$$

les équations (3) peuvent s'écrire

$$\tau(h) = \int_0^h \frac{(\psi + \psi_1)\,dz}{\sqrt{h - z}} = \int_0^l \frac{(\varphi + \varphi_1)\,d\zeta}{\sqrt{l - \zeta}}. \tag{3'}$$

Donnons-nous *arbitrairement* une fonction $\tau(h)$ positive, définie, continue, pour h compris entre o et A, où A est une constante positive *arbitsaire*, mais choisie une fois pour toutes. Les équations (3') sont des équations fonctionnelles du type d'Abel et donnent $\varphi + \varphi_1$, $\psi + \psi_1$; il est commode d'écrire

$$\theta(l) \equiv \tau(h) \equiv \tau(A - l), \qquad \theta'(l) = \frac{d\theta}{dl} = -\tau'(A - l). \tag{5}$$

Nous avons donc, comme plus haut,

$$\left\{\begin{aligned} \psi(z) + \psi_1(z) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\tau(0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{\tau'(h)\,dh}{\sqrt{z - h}}\right], \\ y + y_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{\tau(h)\,dh}{\sqrt{z - h}}; \end{aligned}\right. \tag{6}$$

$$\left\{\begin{aligned} \varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{\pi}\left[\frac{\tau(A)}{\sqrt{\zeta}} - \int_0^\zeta \frac{\tau'(A - l)\,dl}{\sqrt{\zeta - l}}\right], \\ x + x_1 &= \frac{1}{\pi}\int_0^\zeta \frac{\tau(A - l)\,dl}{\sqrt{\zeta - l}}. \end{aligned}\right. \tag{7}$$

On peut donc se donner arbitrairement $\tau(h)$, y et x; comme on a spécifié que x_1 et y_1 sont des fonctions positives, on doit avoir les inégalités restrictives

$$\left\{\begin{aligned} 0 \leqq x &\leqq \frac{1}{\pi}\int_0^\zeta \frac{\tau(A - l)\,dl}{\sqrt{\zeta - l}}, \\ 0 \leqq y &\leqq \frac{1}{\pi}\int_0^z \frac{\tau(h)\,dh}{\sqrt{z - h}}. \end{aligned}\right. \tag{8}$$

Il n'est pas nécessaire que les fonctions ψ et ψ_1 soient toujours positives, non plus que $\varphi(\zeta)$ ou $\varphi_1(\zeta)$; c'est ce que montre l'exemple par-

ticulier relatif à $\tau(h) \equiv \pi h$:

$$(\mathrm{E})\left\{\begin{array}{l}(1-\xi^2-\eta^2)[(1-2\xi^2)^2 d\xi^2+4\eta^4 d\eta^2], \qquad A=1, \qquad \zeta=\xi^2, \qquad z=\eta^2,\\ \qquad x=\xi-\frac{2}{3}\xi^3, \qquad y=\frac{2\eta^3}{3}, \qquad x_1=x, \qquad z_1=y.\end{array}\right.$$

En général, nous aurons *quatre* ds^2 distincts, conduisant à une surface formée de quatre morceaux relatifs aux quatre quadrants du plan image xOy, car $\alpha(x)$ et $\alpha(-x)$ ne seront pas en général les deux branches d'une même fonction analytique, non plus que $\beta(y)$ et $\beta(-y)$; dans l'exemple (E), on a un seul ds^2; le lecteur évitera aisément les confusions que peuvent produire l'emploi des symboles x_1, y_1, $\beta_1(y_1)$ ou $\alpha_1(x_1)$ nécessaires pour l'emploi des formules d'Abel. La valeur numérique $\tau(0)$ peut être nulle, de même que $\tau(A)$: de la sorte, si $\tau(0)=0$ et si $\tau'(0)=\infty$, les deux fonctions ψ et ψ_1 peuvent être toutes deux finies, non nulles, pour $z=0$; dans ce cas, on a une surface admettant $y=0$ pour ligne anguleuse, qui n'est géodésique sur aucune des deux nappes qu'elle borde. Je donne l'exemple relatif à $\tau(h) \equiv \sqrt{h}$, $A=1$. Je prendrai, dans ce cas,

$$(\mathrm{E}_1) \qquad y=y_1=\frac{z}{4}, \qquad x=x_1=\frac{1}{2\pi}\left[\sqrt{\zeta}+\frac{1-\zeta}{2}\,\mathrm{L}\,\frac{1+\sqrt{\zeta}}{1-\sqrt{\zeta}}\right]$$

qui conduit à deux ds^2 distincts.

Enfin, on construit un anneau de surface, comme plus haut, en s'adressant à la ligne $y=0$, par exemple.

On remarquera encore que, si $\psi(z)=\psi_1(z)$, on a $y=y_1$ et l'accroissement $\tau(h)$ infligé à t change y de signe; si, de même, $\varphi(\zeta)=\varphi_1(\zeta)$, on a $x=x_1$ et le même accroissement change x de signe; on réalise donc ainsi le cas A_3 dont nous avions déjà un exemple par le ds^2,

$$(2-u^2-v^2)(du^2+dv^2);$$

il suffit de faire $\psi=\psi_1$, $y=y_1$ et $x=x_1$, $\varphi=\varphi_1$ dans les formules (6) et (7).

Le cas (B_2) des symétriques géodésiques rentre dans (A_2), car $M(x, y)$ a pour symétrique $(x, -y)$ ou M_1 et la circulation MM_1M ramène en M avec (x, y); il suffit ici que $\beta(y) \equiv \beta_1(y)$, d'où $y=y_1$, $\psi \equiv \psi_1$ et que l'accroissement $\tau(h)$ qui fait changer y de signe fasse

reprendre à x la même valeur. On écrit donc, au lieu de (3),

$$(9)\qquad \frac{\tau(h)}{2} = \int_0^\eta \frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} = \int_0^\xi \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} + \int_0^{\xi_1} \frac{dx_1}{\sqrt{\alpha_1(x_1)-h}},$$

d'où l'on déduit, au lieu de (6) et (7),

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} \psi(z) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\tau(0)}{\sqrt{z}} + \int_0^z \frac{\tau'(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}\right],\\ y &= \frac{1}{2\pi}\int_0^z \frac{\tau(h)\,dh}{\sqrt{z-h}};\end{aligned}\right.$$

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} \varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta) &= \frac{1}{2\pi}\left[\frac{\tau(A)}{\sqrt{\zeta}} - \int_0^\zeta \frac{\tau'(A-l)\,dl}{\sqrt{\zeta-l}}\right],\\ x+x_1 &= \frac{1}{2\pi}\int_0^\zeta \frac{\tau(A-l)\,dl}{\sqrt{\zeta-l}},\end{aligned}\right.$$

et l'on constate bien que l'accroissement $2\tau(h)$ infligé à t reproduit x et y.

Nous allons calculer, en partant des formules (6) et (7), relatives au cas (A_2), la longueur L des géodésiques fermées. On a, comme au paragraphe précédent,

$$(12)\qquad \begin{aligned} L = {} & 2\int_0^\xi \sqrt{\alpha(x)-h}\,dx + 2\int_0^{\xi_1} \sqrt{\alpha_1(x_1)-h}\,dx_1\\ & + 2\int_0^\eta \sqrt{\beta(y)+h}\,dy + 2\int_0^{\eta_1} \sqrt{\beta_1(y_1)+h}\,dy_1\\ = {} & 2\int_0^l \sqrt{l-\zeta}\,[\varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta)]\,d\zeta + 2\int_0^h \sqrt{h-z}\,[\psi(z)+\psi_1(z)]\,dz.\end{aligned}$$

Les formules (6) et (7) permettent de calculer directement L par des intégrales doubles, par un calcul sans artifice, mais long et inélégant.

La forme du résultat suggère l'artifice qui consiste à calculer

$$\int_0^h \tau(u)\,du \quad \text{et} \quad \int_0^l \theta(v)\,dv.$$

On a, en effet, par définition de $\tau(u)$,

$$(13)\qquad \tau(u) = \int_0^u \frac{\psi(z)+\psi_1(z)}{\sqrt{u-z}}\,dz$$

et, par le calcul qui a déjà été fait au paragraphe précédent,

$$(14)\quad \int_0^h \tau(u)\,du = \int_0^h du \int_0^u \frac{(\psi+\psi_1)\,dz}{\sqrt{u-z}}$$
$$= \int_0^h dz \int_z^h \frac{(\psi+\psi_1)\,du}{\sqrt{u-z}} = 2\int_0^h (\psi+\psi_1)\sqrt{h-z}\,dz.$$

On a, de même,

$$(13')\qquad \theta(v) = \int_0^v \frac{\varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta)}{\sqrt{v-\zeta}}\,d\zeta,$$

$$(14')\qquad \int_0^l \theta(v)\,dv = 2\int_0^l [\varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta)]\sqrt{l-\zeta}\,d\zeta.$$

Or, on a écrit

$$(15)\quad \begin{cases} \theta(v) = \tau(A-v), \qquad h+l=A, \qquad u+v=A, \\ \displaystyle\int_0^l \theta(v)\,dv = \int_h^A \tau(u)\,du. \end{cases}$$

On a donc le résultat élégant

$$(16)\qquad L = \int_0^A \tau(u)\,du.$$

Comme précédemment, il peut arriver que la géodésique se ferme après avoir rencontré $2q$ fois chaque conique y qui la coupe, $2p$ fois chaque conique x qui la coupe. On aura alors avec une fonction $\tau(h)$ auxiliaire

$$(17)\qquad \tau(h) = q\left[\int_0^{\eta} \frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} + \int_0^{\eta_1} \frac{dy_1}{\sqrt{h+\beta_1(y_1)}}\right]$$
$$= p\left[\int_0^{\xi} \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} + \int_0^{\xi_1} \frac{dx_1}{\sqrt{\alpha_1(x_1-h)}}\right];$$

$$(18)\quad \begin{cases} \psi(z)+\psi_1(z) = \dfrac{1}{q\pi}\left[\dfrac{\tau(0)}{\sqrt{z}} + \displaystyle\int_0^z \frac{\tau'(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}\right], \\ y+y_1 \quad = \dfrac{1}{q\pi}\displaystyle\int_0^z \frac{\tau(h)\,dh}{\sqrt{z-h}}; \end{cases}$$

$$(19)\quad \begin{cases} \varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta) = \dfrac{1}{p\pi}\left[\dfrac{\tau(A)}{\sqrt{\zeta}} - \displaystyle\int_0^\zeta \frac{\tau'(A-l)\,dl}{\sqrt{\zeta-l}}\right], \\ x+x_1 \quad = \dfrac{1}{p\pi}\displaystyle\int_0^\zeta \frac{\tau(A-l)\,dl}{\sqrt{\zeta-l}}. \end{cases}$$

On a ici, pour longueur de la géodésique fermée,

$$(20)\quad \left\{\begin{aligned} L &= 2p\int_0^{\xi}\sqrt{\alpha(x)-h}\,dx + 2p\int_0^{\xi_1}\sqrt{\alpha_1(x_1)-h}\,dx_1 \\ &\quad + 2q\int_0^{\eta}\sqrt{\beta(y)+h}\,dy + 2q\int_0^{\eta_1}\sqrt{\beta_1(y_1)+h}\,dy_1 \\ &= 2p\int_0^{l}\sqrt{l-\zeta}\,[\varphi(\zeta)+\varphi_1(\zeta)]\,d\zeta \\ &\quad + 2q\int_0^{h}\sqrt{h-z}\,[\psi(z)+\psi_1(z)]\,dz. \end{aligned}\right.$$

On constate immédiatement que l'expression actuelle $p[\varphi+\varphi_1]$ ou $q[\psi+\psi_1]$ ayant, au moyen de $\tau(h)$, la même forme analytique que $\varphi+\varphi_1$ ou $\psi+\psi_1$ des formules (6) et (7), le résultat de l'intégration donne encore la formule $L=\int_0^A \tau(u)\,du$ trouvée précédemment. Nous pouvons remarquer que si les formules (6) et (7) ont donné le résultat

$$(21)\qquad [\alpha(x)+\beta(y)](dx^2+dy^2),$$

on aura, sans calcul nouveau, *en conservant les mêmes fonctions* $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ un ds^2,

$$(21')\qquad [\alpha(x)+\beta(y)][p^2\,dx^2+q^2\,dy^2],$$

qui rentre dans les formules (17); car il suffit de comparer les équations géodésiques respectives

$$(22)\qquad \frac{dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} = \frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} = dt,$$

$$(22')\qquad \frac{p\,dx}{\sqrt{\alpha(x)-h}} = \frac{q\,dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} = dt$$

relatives aux ds^2, (21) et (21'). Les formules (17) montrent bien que l'on doit supposer p et q premiers entre eux; on obtient, comme plus haut, la particularisation (A_3) ou (B_2).

CHAPITRE II.

ÉTUDE SOMMAIRE DES SURFACES, DONT LE ds^2 EST OU NON DE LIOUVILLE, A GÉODÉSIQUES FERMÉES. POINTS CONJUGUÉS. POINTS GÉODÉSIQUEMENT CONGRUENTS. ANTIPODES GÉODÉSIQUES. SYMÉTRIQUES GÉODÉSIQUES. REPRÉSENTATION CONFORME SUR UNE SPHÈRE.

1. *Points conjugués géodésiques.* — Nous considérons une surface à géodésiques fermées, sans nous préoccuper spécialement du cas où le ds^2 a la forme de Liouville; les portions de surface étudiées n'ont d'autre singularité que des points coniques ou des lignes anguleuses; dans le cas de point conique, on ne considère qu'une des deux nappes qui se termine au point conique, tel un demi-cône de révolution; dans le cas de ligne anguleuse, chaque nappe arrivant à la ligne anguleuse s'y trouve arrêtée, telle une lentille sphérique convexe.

Sur une portion de surface admettant ∞^2 géodésiques fermées, deux de ces courbes se coupent, en un nombre pair de points et ce nombre de points communs est fixe, indépendant du choix particulier des deux géodésiques, car nous pouvons passer par continuité d'une géodésique à une autre et le nombre en jeu ne pourrait changer que si deux géodésiques venaient à être tangentes et distinctes, ce qui est une contradiction. Ce nombre constant est aussi celui où se coupent deux géodésiques *infiniment voisines;* mais alors, soit une géodésique G fermée *quelconque* et un point *arbitraire* M sur G : M a $2k$ conjugués géodésiques successifs, $M_1, M_2, \ldots, M_{2k-1}, M_{2k}$, *celui de rang* $2k$, M_{2k}, *coïncidant précisément avec* M, *se trouvant indépendant de l'orientation au départ de la géodésique issue de* M; ce serait évidemment une façon, assez difficile, de chercher les surfaces à géodésiques fermées. Quand le point μ décrit l'arc MM_1 de G, les conjugués successifs de μ décrivent les arcs $M_1M_2, \ldots, M_{2k-1}M$. Si les géodésiques en jeu ne font qu'un tour autour de la surface, elles n'ont pas de point double et le nombre $2k$ est le nombre constant de points d'intersection de deux géodésiques fermées. Si les géodésiques font p tours autour de la surface, elles ont chacune $p-1$ points doubles (p entier supérieur ou égal à 1), et au voisinage de chaque point double de G, la géodésique G′ infiniment voisine coupe G en deux points : en effet, soient g et g_1 les deux

branches issues du point double ω; à g correspond une branche g' de G', infiniment voisine de g, coupant g en deux points conjugués successifs encadrant ω (l'un pouvant coïncider avec ω), et coupant g_1, sous un angle non infiniment petit, en un point voisin de ω sur cette branche g_1; donc, deux géodésiques quelconques auront cette fois $2(k+p-1)$ points communs. On peut, d'ailleurs, transformer très simplement la surface S en une autre Σ applicable sur elle, telle que les géodésiques n'aient plus de point double; en effet, on tracera une courbe plane ou gauche Γ, fermée, de même longueur que G, mais sans point double; la surface Σ, telle que Γ corresponde à G, et applicable sur S, répond à la question. J'ai indiqué le procédé équivalent, au paragraphe 1 du Chapitre I, pour les surfaces de révolution, en supposant que G est l'équateur; sur Σ, il ne restera donc que $2k$ points communs à deux géodésiques fermées, mais Σ admettra des auto-applications, car elle correspond à S recouverte p fois.

Le cas des antipodes géodésiques ou des symétriques géodésiques correspond au cas où, avec les notations qui précèdent, le $k^{\text{ième}}$ conjugué M_k de M est fixe, indépendant de l'orientation au départ de la géodésique issue de M; si la surface S est fermée (et à géodésiques ouvertes ou fermées), sur chaque géodésique issue de M, prenons le $k^{\text{ième}}$ conjugué de M; ce point décrit une courbe fermée; il serait peut-être intéressant d'étudier les ∞^2 courbes ainsi tracées sur S; chacune se réduit à un point, dans le cas de surfaces à antipodes ou à symétriques géodésiques, ou encore, dans le cas où k est pair et où la surface est à géodésiques fermées, pour une valeur convenable de ce nombre pair, car on retrouve le point de départ même.

Appliquons ces notions aux surfaces du type de Liouville à géodésiques fermées; pour le type A_1 et les formules précises (7) du paragraphe 4 du Chapitre I, chaque géodésique, obtenue en fixant h, donc dépendant d'une seule constante arbitraire, admet pour enveloppe la conique géodésique $y=\eta_1$ et la conique $y=\eta_{11}$ qu'elle touche chacune en un point; autrement dit, deux géodésiques de cette espèce se coupent seulement en *deux* points (pourvu qu'elles n'aient pas de point double, ce que l'on peut réaliser) : chaque point M de la surface donne donc lieu à deux conjugués successifs M_1 et $M_2=M$; le premier M_1 varie avec l'orientation du départ, le second coïncide toujours

avec M. Si le type A_1 dégénère en B_1, cas des antipodes géodésiques, le point M_1 lui-même sera fixe et toujours *premier* conjugué de M; c'est ce que M. Carathéodory a démontré par le calcul. J'ai indiqué une généralisation, avec les formules (7') du paragraphe 4 déjà cité : la géodésique fait p tours autour de la surface, touche q fois chaque conique $y = \eta$ ou $y = -\eta_1$; il a donc cette fois $2q$ conjugués géodésiques, celui d'ordre $2q$ coïncidant avec M; deux géodésiques fermées se coupent en $2(p + q - 1)$ points; on peut ramener p à l'unité comme j'ai expliqué; le cas des antipodes conduit de même à un antipode qui est le $q^{\text{ième}}$ conjugué de M, indépendant de l'orientation du départ.

Le cas dénommé (A_2) conduit à des résultats analogues : avec les formules (6) et (7) du paragraphe 5 du Chapitre précédent, chaque géodésique fermée G a pour enveloppe, si h reste fixe, les quatre coniques $x = \xi$ ou $-\xi_1$, $y = \eta$ ou $-\eta_1$; deux géodésiques fermées quelconques se coupent en *quatre* points; le nombre k est donc égal à 2. Pour le cas (A_3), ce résultat subsiste, à condition de parcourir deux fois la géodésique; donc, pour (A_2), sur chaque géodésique on a les conjugués successifs $MM_1M_2M_3M$ qui font le cycle complet; pour (A_3), on a simplement MM_1M, de sorte que ce cas (A_3) est analogue à A_1; cela explique pourquoi le $ds^2 = (2 - u^2 - v^2)(du^2 + dv^2)$ rentre, suivant la forme de Liouville adoptée, dans le type (A_3) ou le type A_1, mais jamais dans (A_2). Dans le cas des symétriques géodésiques, on a un cycle $MM_1M_2M_3M$ où le point du milieu est lui-même indépendant de l'orientation de départ en M. L'introduction des entiers p et q, faite aux formules (18) et (19) de ce paragraphe 5 déjà cité, donne sur chaque géodésique fermée G correspondant à un h constant, p points de contact avec chaque conique $x = \xi$ ou $-\xi_1$, q points sur chaque conique $y = \eta$ ou $-\eta_1$; donc, le nombre k est égal à $p + q$; conclusions semblables à celles qui précèdent si l'on obtient comme dégénérescence (A_3) ou (B_2).

De toute façon, il n'y a que le cas des antipodes géodésiques, avec $p = q = 1$, qui donne une correspondance entre deux points conjugués *successifs*.

2. *Auto-isométries. Représentation conforme.* — Prenons une surface S, dont le ds^2 est ou non du type de Liouville, telle que les géodé-

siques issues d'un point *quelconque* M concourent toutes de nouveau en M_1; les résultats classiques sur les enveloppes de géodésiques prouvent que la distance MM_1 est constante, quelle que soit la position de M sur S, puisque la correspondance (M, M_1) est une auto-isométrie de la surface; je renvoie au *Traité de Géométrie différentielle* de M. Blaschke (t. I, 1re édition, p. 155-158).

M, M_1 sont donc, sur chaque géodésique qui les joint, deux points conjugués, peut-être non consécutifs; les géodésiques concourent en M_1; donc, M_1 étant un point *quelconque* au même titre que M, ces géodésiques doivent se recouper en M_2; supposons que M_2 soit en coïncidence avec M. De la sorte, un point M de la surface a, sur chaque géodésique fermée qui en part, $2k$ conjugués successifs, celui de rang $2k$ coïncidant avec M lui-même et celui de rang k étant *fixe*, c'est-à-dire indépendant de la direction de départ.

Que la surface S soit ou non fermée, découpons sur S un anneau de surface entourant une géodésique G fermée et soient L et L_1 les deux bords de cet anneau; nous supposons que S a deux côtés bien distincts, *au point de vue réel*. Il y a donc deux cas à distinguer, suivant que k est *pair* ou *impair*.

Soit le cas de k *pair*: je fais la figure (*fig.* 3), en supposant $k = 2$,

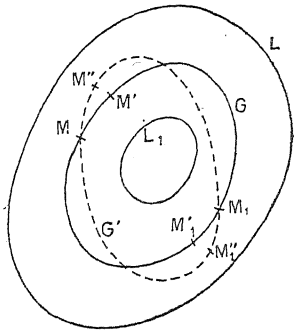

Fig. 3.

uniquement pour simplifier la figure, car la valeur précise de k ne joue aucun rôle; marquons les deux géodésiques G, G' et les couples homologues M, M_1; M', M'_1; M'', M''_1; la géodésique G partage l'anneau S

en deux régions; M'' et M''_1 sont dans la *même*, et cela a pour effet de *conserver le sens des angles;* nous pouvons supposer que, dans l'auto-isométrie de la surface, L soit à elle-même son homologue : en effet, on prendra un point β arbitraire et une tangente βt arbitraire aussi, puis les homologues β_1 et $\beta_1 t_1$; on trace un arc partant de β tangentiellement à βt et arrivant en β_1 tangentiellement à $\beta_1 t_1$; cet arc, réuni à son homologue, constituera L; L_1 se construira de même. L'anneau LL_1 peut ensuite être mis en correspondance, *biunivoque*, *conforme* avec un anneau plan $\lambda\lambda_1$ bordé par deux circonférences concentriques λ et λ_1, qui correspondent respectivement à L et L_1; le rapport des rayons λ et λ_1 est déterminé par une certaine équation transcendante que nous indiquerons plus loin; la correspondance conforme MM_1 de l'anneau S sur lui-même entraîne une correspondance conforme $\mu\mu_1$ de l'anneau $\lambda\lambda_1$ sur lui-même, conservant le sens des angles et chaque bord; la correspondance MM_1 est supposée *biunivoque involutive;* la correspondance $\mu\mu_1$ possède les mêmes propriétés, de sorte qu'elle se réduit à une rotation, d'amplitude π, autour du centre. Mais alors, la transformation de variable complexe $Z = z^2$ remplace les deux points μ, μ_1 par un seul (X, Y); le ds^2 de la surface S a donc pris la forme $f(X, Y)(dX^2 + dY^2)$, et la surface S représente deux fois ce ds^2; nous pouvons trouver une surface S_1 ne le représentant qu'une fois; cela revient à fendre transversalement l'anneau S par une première coupure et par la coupure homologue, de sorte que chaque géodésique fermée soit partagée en deux tronçons égaux et il suffit de construire une courbe C, plane ou gauche, fermée, de longueur égale à un de ces tronçons (puisque toutes les géodésiques ont la même longueur, il en est de même des tronçons) et correspondant à l'un d'eux; la surface S_1 s'en déduit. C'est le cas des *points géodésiquement congruents.* Rien d'essentiel n'est modifié si les géodésiques issues de M se recoupent en M_1, puis M_2, ... et finalement M_{p-1}, avant de revenir en M, pourvu que M_1 soit toujours conjugué d'ordre *pair* de M : l'anneau $\lambda\lambda_1$ sera soumis à la transformation $Z = z^p$ qui remplace M, M_1, ..., M_{p-1} par un seul point μ, et l'on construira de même une surface S_1 applicable sur S, un seul point de S_1 correspondant à M, M_1, ..., M_{p-1}. Cette circonstance a été prévue au paragraphe 1 du Chapitre I; c'est un accident banal.

3. *Antipodes.* — Le cas le plus intéressant est donc celui où k, rang de M_1 comme conjugué de M, est *impair*.

Dans la figure (*fig.* 4) je suppose pour simplifier $k = 1$; nous sup-

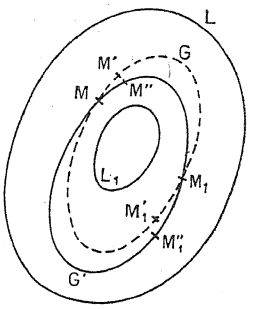

Fig. 4.

posons que les géodésiques n'ont pas de point double. Comme plus haut, nous voyons que *dans la correspondance* (MM_1) *les régions limitées par une géodésique s'échangent et que le sens des angles est renversé.* Nous traçons une ligne L entourant G sans la couper, puis la transformée L_1; l'anneau LL_1 peut, comme plus haut, être mis en *correspondance conforme biunivoque* sur un anneau circulaire plan $\lambda\lambda_1$. Il est essentiel de remarquer, comme au paragraphe précédent, que *le rapport* $\frac{R}{R'}$ *des rayons de* λ *et* λ_1 *est déterminé par une équation transcendante.*

Je fais ici une digression pour élucider ce point et je donne une démonstration directe de cette propriété, empruntée au cours oral de M. Picard à la Sorbonne. Supposons, pour simplifier, que l'anneau LL_1 soit déjà mis en correspondance conforme biunivoque sur une certaine aire (s) à connexion double située dans le plan $z = x + iy$ (*fig.* 5). Il s'agit de représenter (s) d'une façon *biunivoque* sur une couronne C de rayons R et R' du plan $Z = X + iY$. Cette représentation conforme s'effectue par la formule

$$Z = e^{P+Qi}, \tag{1}$$

où P et Q sont des fonctions harmoniques convenablement choisies de x et y dans l'aire (s); P est uniforme et Q augmente de 2π quand

on tourne autour du contour intérieur dans un sens convenable; si $G(x, y)$ est la fonction de Green relative à l'aire (s) et au point (x, y),

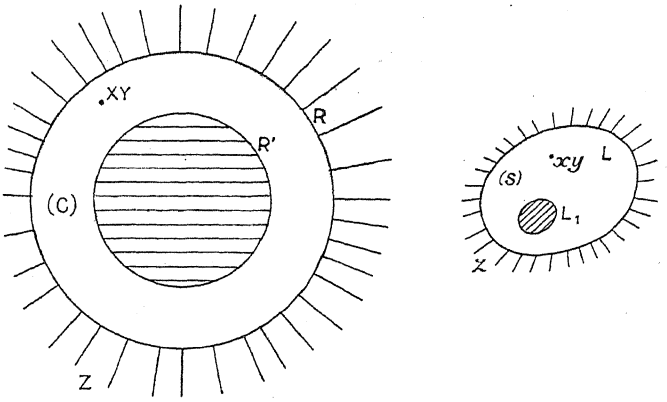

Fig. 5.

on a la formule fondamentale pour une fonction harmonique u *quelconque*, régulière dans (s)

$$(2) \qquad u(x, y) = \frac{1}{2\pi} \int_{L+L_1} u \frac{dG}{dn} ds,$$

l'intégrale curviligne étant étendue aux contours L et L_1 parcourus dans un sens convenable, $\frac{dG}{dn}$ étant la dérivée suivant la normale vers l'intérieur de (s); appliquons cette formule à $P(x, y)$ et 1 qui sont deux fonctions harmoniques régulières dans (s); la première prend la valeur constante $\log R$ sur L et $\log R'$ sur L_1. On a donc

$$(3) \qquad \begin{cases} P(x, y) = \frac{1}{2\pi} \log R \int_L \frac{dG}{dn} ds + \frac{1}{2\pi} \log R' \int_{L_1} \frac{dG}{dn} ds, \\ 1 = \frac{1}{2\pi} \int_L \frac{dG}{dn} ds + \frac{1}{2\pi} \int_{L_1} \frac{dG}{dn} ds, \end{cases}$$

d'où, par combinaison simple,

$$(4) \quad P(x, y) = \log R' + \frac{1}{2\pi} \log \frac{R}{R'} \int_L \frac{dG}{dn} ds = \log R' + \frac{1}{2\pi} \log \left(\frac{R}{R'}\right) p(x, y),$$

où $p(x, y)$ est une certaine fonction harmonique; soit $q(x, y)$ la

fonction harmonique conjuguée de $p(x, y)$; on a

$$(5) \qquad Q(x, y) = \frac{1}{2\pi}\left(\log \frac{R}{R'}\right) q(x, y).$$

La fonction q a une certaine période ω autour du contour intérieur de (s); Q aura donc la période $\frac{\omega}{2\pi} \log \frac{R}{R'}$, et en égalant cette période à 2π, on a la relation annoncée

$$(6) \qquad \frac{R'}{R} = e^{\frac{4\pi^2}{\omega}}.$$

La démonstration ainsi conduite donne une condition *nécessaire;* il est hors de notre but, dans ce Mémoire, de la poursuivre davantage. Remarquons que l'on ne peut trouver des correspondances conformes de (s) sur la couronne (C) sans que $\frac{R}{R'}$ ait la valeur ainsi calculée, mais alors la correspondance ne pourra être *biunivoque*.

D'autre part, si l'on veut éviter de faire une première correspondance conforme de l'anneau de surface S sur le plan, on prend pour P et Q des fonctions de lieu sur la surface S, satisfaisant à l'équation

$$\Delta_2 u = 0,$$

où Δ_2 est le second opérateur de Beltrami; de même, G est la fonction de Green satisfaisant à cette même équation, et si l'existence de cette fonction est établie, la démonstration s'achève comme plus haut.

Revenons à l'anneau S limité par L et L_1 et à la couronne $\lambda\lambda_1$; si μ et μ_1 sont les homologues de M et M_1, la correspondance (μ, μ_1) est une *correspondance conforme inverse, biunivoque et involutive*, de l'anneau avec lui-même; on obtient cette correspondance par une inversion ayant pour pôle le centre de la couronne et pour puissance RR' (une homothétie permet de supposer $RR' = 1$), suivie d'une rotation autour du centre; la réciprocité exige que cette rotation ait pour amplitude 0 ou π; comme il n'y a pas de point *invariant*, la rotation a pour amplitude π.

Si donc, nous désignons par e^y la distance $O\mu$ et par x l'angle compris entre une demi-droite fixe et $O\mu$, le ds^2 de la surface S, dans le

domaine annulaire LL_1, a pris la forme

$$(7)\qquad \begin{cases} ds^2 = f(x, y)(dx^2 dy^2), \\ f(x+\pi, -y) \equiv f(x, y). \end{cases}$$

L'introduction des variables (x, y) revient d'ailleurs à une nouvelle correspondance conforme

$$(8)\qquad -i(x+iy) = y - ix = \log(X + iY)$$

qui remplace la couronne du plan (X, Y) par un rectangle du plan (X, Y) par un rectangle du plan (x, y) [ce rectangle est disposé de façon que l'axe des x en soit axe de symétrie, et, par une translation indéfiniment répétée $(2\pi, 0)$ dans l'un ou l'autre sens, ce rectangle remplira une bande indéfinie dans le sens Ox ayant Ox pour axe de symétrie].

Remarquons maintenant que si l'on connaît une autre surface $\overline{S}$ à antipodes géodésiques, on peut découper sur $\overline{S}$ un anneau $\overline{L}\overline{L}_1$, le mettre en correspondance biunivoque sur une couronne circulaire $\overline{\lambda}\overline{\lambda}_1$ de centre O aussi, avec la relation $\overline{R}\overline{R}' = 1$ encore; supposons que l'on ait $R < \overline{R}$, d'où $R' > \overline{R}'$; la couronne $\lambda\lambda_1$ est tout entière contenue dans la couronne $\overline{\lambda}\overline{\lambda}_1$; bornons-nous, sur la surface $\overline{S}$ à l'anneau, intérieur à $\overline{L}\overline{L}_1$, qui est en correspondance sur la région $\lambda\lambda_1$: *nous avons délimité sur* S *et* $\overline{S}$ *deux portions annulaires, en correspondance conforme biunivoque l'une sur l'autre, de sorte qu'un couple d'antipodes* (MM_1) *ait pour homologue un couple d'antipodes* $\overline{M}\overline{M}_1$ [1]. Remarquons que cette correspondance comporte beaucoup d'arbitraires, car on a pu choisir *ad libitum* L et $\overline{L}$ sur S et $\overline{S}$; ce choix a fixé L_1, $\overline{L}_1$, puis $\frac{R}{R'}$, c'est-à-dire $\overline{R}^2$, puisque $RR' = 1$, et de même fixé $\overline{R}^2$; nous ne pouvons plus rien dire sur la correspondance conforme hors de

[1] Si $\overline{M}$ est considéré comme l'homologue de M, $\overline{M}_1$ sera celui de M_1; mais il est clair que faire correspondre $\overline{M}_1$ à M et $\overline{M}$ à M_1 donnerait une nouvelle correspondance conforme biunivoque de S sur $\overline{S}$ avec la même propriété. D'autre part, une rotation d'amplitude α quelconque de l'anneau plan $\lambda\lambda_1$ autour de son centre permet d'établir une correspondance conforme biunivoque de l'anneau LL_1 sur lui-même, remplaçant deux antipodes par deux antipodes.

l'anneau LL_1 (et de la région correspondante sur l'autre surface, en supposant $R < \bar{R}$); elle peut cesser d'exister, elle peut devenir multiforme, elle peut rester biunivoque. Si $\bar{S}$ est une sphère, on voit que *deux antipodes de* S *ont pour homologues deux points diamétralement opposés de la sphère*. Nous avons ainsi retrouvé des résultats de M. Carathéodory en leur donnant une forme plus générale et plus rigoureuse.

Passons maintenant au cas d'une surface S *fermée, de connexion simple, à antipodes géodésiques*. Le problème : *Mettre en correspondance conforme biunivoque sur toute leur étendue deux surfaces fermées* S, Σ *de connexion simple*, ne semble pas avoir été traité; ce problème, indépendant d'ailleurs de la forme éventuelle des géodésiques, fermées ou non, à antipodes ou non, mériterait d'être étudié d'une façon précise. Il suffit évidemment de savoir le traiter dans le cas où Σ est une sphère; ce cas permet de trouver immédiatement le nombre d'arbitraires du problème si l'on admet l'existence d'une première solution; une perspective stéréographique remplace, en effet, Σ par le plan P indéfini, *considéré au point de vue de la variable complexe;* et la transformation conforme biunivoque la plus générale de la sphère sur elle-même revient donc à la transformation homographique générale $Z = \frac{az+b}{cz+d}$ du plan P, dépendant de *six* constantes *réelles* arbitraires, permettant de remplacer trois points *donnés* de la sphère par trois points *arbitraires :* du moins, en supposant que l'on conserve le sens des angles; mais si le sens doit être inversé, le résultat subsiste, car on commencerait par remplacer Σ en elle-même par une symétrie autour de son centre.

Supposons maintenant S à antipodes, *dans toute l'étendue de* S [1];

---

[1] Il est facile de fabriquer une surface S, à géodésiques toutes fermées, elle-même fermée et sans singularité, ne donnant lieu à antipodes que sur une fraction de son étendue. En effet, détachons d'une sphère Σ deux calottes sphériques symétriques. Remplaçons l'une d'elles par une calotte empruntée à un ellipsoïde de révolution inscrit dans Σ le long du parallèle limite. D'après les résultats relatifs aux surfaces de révolution à géodésiques fermées, nous savons qu'on peut se donner *arbitrairement* le profil de la méridienne d'un côté de l'équateur, moyennant une simple inégalité sur la variation de la pente de la tangente; l'ellipsoïde étant *intérieur* à la sphère, la

les travaux antérieurs à ce Mémoire supposent implicitement cette condition remplie, bien que certaines surfaces ne la remplissent pas. La correspondance conforme (MM_1) sur S entraîne sur Σ une correspondance conforme $(\mu\mu_1)$ involutive, biunivoque. Or, on peut faire subir à Σ une transformation conforme d'ensemble telle qu'un couple *donné* $\alpha\alpha_1$ devienne un couple de deux points diamétralement opposés; supposant qu'il en soit ainsi, la transformation conforme *inverse* la plus générale échangeant α avec α_1 est une inversion dont le pôle est sur le diamètre $\alpha\alpha_1$, suivie d'une rotation autour du diamètre $\alpha\alpha_1$; si, de plus, la correspondance est *involutive*, le pôle d'inversion est sur $\alpha\alpha_1$ entre α et α_1 et la rotation nulle, *parce que nous supposons qu'il n'y a pas de point invariant* (bien entendu, on pourrait prendre le pôle d'inversion, extérieur au segment $\alpha\alpha_1$, conjugué harmonique du précédent relativement à $\alpha\alpha_1$ et supposer la rotation égale à π). Si BB_1 est un autre couple d'antipodes de S, la droite $\beta\beta_1$, joignant sur Σ leurs homologues, passe donc en un point fixe P intérieur au segment $\alpha\alpha_1$; prenons sur le diamètre $\alpha\alpha_1$ l'un ou l'autre des deux points fixes P′ que définit l'égalité

$$(8)\qquad \left(\frac{P'\alpha}{P'\alpha_1}\right)^2 = -\frac{\overrightarrow{P\alpha}}{\overrightarrow{P\alpha_1}}$$

[dans le méridien $\alpha\alpha_1\beta\beta_1$, la perpendiculaire à $\alpha\alpha_1$ en P coupe la sphère en Q; les bissectrices de l'angle $\alpha Q\alpha_1$ coupent $\alpha\alpha_1$ aux deux points P′ définis par (8)]. L'inversion de pôle P′, qui transforme Σ en elle-même, remplace tous les couples $\beta\beta_1$ par des couples diamétralement opposés; il suffit de raisonner sur un méridien issu de $\alpha\alpha_1$; nous l'orientons et appelons V l'angle $(\alpha_1\alpha, \alpha_1\beta)$. On a

$$(9)\qquad \operatorname{tang} V \operatorname{tang} V_1 = \frac{\overrightarrow{P\alpha}}{\overrightarrow{P\alpha_1}}.$$

---

condition est réalisée et l'on trouve de l'autre côté de l'équateur de symétrie de la zone conservée sur la sphère une calotte (transcendante) inscrite dans la sphère. La surface obtenue en réunissant à la zone centrale les deux calottes est fermée, convexe, sans singularité. Toutes les géodésiques sont fermées; seules, celles qui restent dans la zone centrale, donnent lieu à antipodes.

En appelant β', β'_1 les inverses de β et β_1 dans l'inversion P', on a aussi

$$(10)\qquad \operatorname{tang} V \operatorname{tang} V' = \frac{\overrightarrow{P'\alpha}}{\overrightarrow{P'\alpha_1}}, \qquad \operatorname{tang} V_1 \operatorname{tang} V'_1 = \frac{\overrightarrow{P'\alpha}}{\overrightarrow{P'\alpha_1}}.$$

La comparaison de (8), (9), (10) fournit

$$(11)\qquad \operatorname{tang} V' \operatorname{tang} V'_1 = -1.$$

Cela prouve que β' et β'_1 sont diamétralement opposés; ce procédé réalise finalement entre S et Σ *une correspondance conforme biunivoque où chaque couple d'antipodes de* S *a pour homologue un couple de points diamétralement opposés de* Σ.

Remarquons maintenant qu'une rotation d'ensemble de Σ (jointe ou non à une symétrie) autour de son centre donne ∞^3 correspondances conformes possédant la même propriété : *autrement dit* S *possède* ∞^3 *autocorrespondances conformes conservant les couples d'antipodes;* en réalité il y en a deux séries, la transformation identique (MM), ou la transformation (MM_1) étant le prototype de chaque série.

4. *Formes de Liouville de la sphère.* — Ce qui précède montre l'intérêt de la sphère comme surface type, *fermée*, à antipodes. Il est nécessaire de dire quelques mots des représentations conformes, non biunivoques, de la sphère sur elle-même, échangeant deux antipodes *quelconques* toujours en antipodes. Nous allons mettre la sphère en correspondance conforme biunivoque avec un morceau du plan au moyen des diverses coordonnées que l'on réalise avec un système de coniques sphériques homofocales. Dans le cas où l'écartement focal est nul, nous avons le système des méridiens et parallèles; la projection de Mercator donne les formules

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} &x = \frac{\cos X}{\operatorname{ch} Y}, \qquad y = \frac{\sin X}{\operatorname{ch} Y}, \qquad z = \frac{\operatorname{sh} Y}{\operatorname{ch} Y},\\ &\qquad d\sigma^2 = \frac{dX^2 + dY^2}{\operatorname{ch}^2 Y}. \end{aligned}\right.$$

Les deux points (X, Y) et $(X + \pi, -Y)$ sont diamétralement opposés; il y a correspondance conforme biunivoque entre la sphère et la bande indéfinie comprise entre les deux droites $X = 0$ et $X = 2\pi$.

Avec un écartement focal non nul, on écrira

$$(2)\quad \begin{cases} x^2 = \dfrac{(u-e_1)(v-e_1)}{(e_1-e_2)(e_1-e_3)}, \qquad y^2 = \dfrac{(u-e_2)(v-e_2)}{(e_2-e_1)(e_2-e_3)}, \\ z^2 = \dfrac{(u-e_3)(v-e_3)}{(e_3-e_1)(e_3-e_2)}, \\ d\sigma^2 = \dfrac{v-u}{4}\left[\dfrac{du^2}{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)} - \dfrac{dv^2}{(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3)}\right]. \end{cases}$$

On peut sans restreindre supposer que les constantes réelles e_1, e_2, e_3 satisfont aux inégalités

$$(3)\qquad e_1 > e_2 > e_3, \qquad e_1 + e_2 + e_3 = 0, \qquad e_1 - e_3 = 1.$$

Si l'on prend la fonction de Weierstrass pX, satisfaisant à

$$(4)\qquad p'^2 X = 4(pX - e_1)(pX - e_2)(pX - e_3),$$

cette fonction admet une période réelle 2ω, une période imaginaire pure $2\omega'$; la relation $e_1 - e_3 = 1$ sert à raccorder avec les notations de Legendre-Jacobi : on écrira aussi $\omega = K$, $\omega' = iK'$, K et K' étant des constantes réelles positives. Les points réels de la sphère sont obtenus en supposant, soit

$$(5)\qquad e_1 \geqq u \geqq e_2 \geqq v \geqq e_3,$$

soit

$$(6)\qquad e_1 \geqq v \geqq e_2 \geqq u \geqq e_3.$$

Les deux champs de variation pour (u, v) sont deux rectangles du plan (u, v) symétriques l'un de l'autre relativement à la première bissectrice; la sphère représente huit fois chacun de ces rectangles; le sommet $u = v = e_2$ donne les quatre foyers des coniques sphériques utilisées. On pourra se borner au premier rectangle et nous utiliserons une autre représentation de façon que la représentation devienne conforme et que les coordonnées d'un point de la sphère soient fonctions uniformes de deux paramètres. Écrivons

$$(7)\qquad u = p(\omega + i\xi) = pX, \qquad v = p(\omega' + \eta) = pY.$$

Nous ferons varier ξ et η par valeurs *réelles;* quand ξ varie de zéro à K', u varie de e_1 à e_2; si ξ change de signe ou prend la valeur nou-

velle $\xi + 2K'$, u reprend la même valeur. Quand η varie de zéro à K, v varie de e_3 à e_2; si η prend les nouvelles valeurs $-\eta$ ou $\eta + 2K$, v reprend la même valeur.

Le $d\sigma^2$ de la sphère est alors

$$d\sigma^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](d\xi^2 + d\eta^2). \tag{8}$$

Avec les notations de Legendre-Jacobi, on a

$$\left\{\begin{array}{l} e_2 - e_3 = k^2, \qquad e_1 - e_2 = k'^2, \qquad \omega = K, \qquad \omega' = iK', \\ e_3 = -\dfrac{1+k^2}{3}, \qquad e_2 = \dfrac{2k^2-1}{3}, \qquad e_1 = \dfrac{2-k^2}{3}, \\ \qquad p(u, |K, iK') = -\dfrac{1+k^2}{3} + \dfrac{1}{\operatorname{sn}^2 u}. \end{array}\right. \tag{9}$$

Les coordonnées du point de la sphère sont

$$x = \frac{1}{k'}\frac{\operatorname{cn} X \operatorname{cn} Y}{\operatorname{sn} X \operatorname{sn} Y}, \qquad y = \frac{1}{ikk'}\frac{\operatorname{dn} X \operatorname{dn} Y}{\operatorname{sn} X \operatorname{sn} Y}, \qquad z = \frac{1}{k}\frac{1}{\operatorname{sn} X \operatorname{sn} Y}. \tag{10}$$

Augmenter ξ de $2K'$ ou X de $2iK'$ donne la symétrie Oz; augmenter η de $2K$, la symétrie Ox; changer ξ en $-\xi$ ou X en $2K - X$ donne la

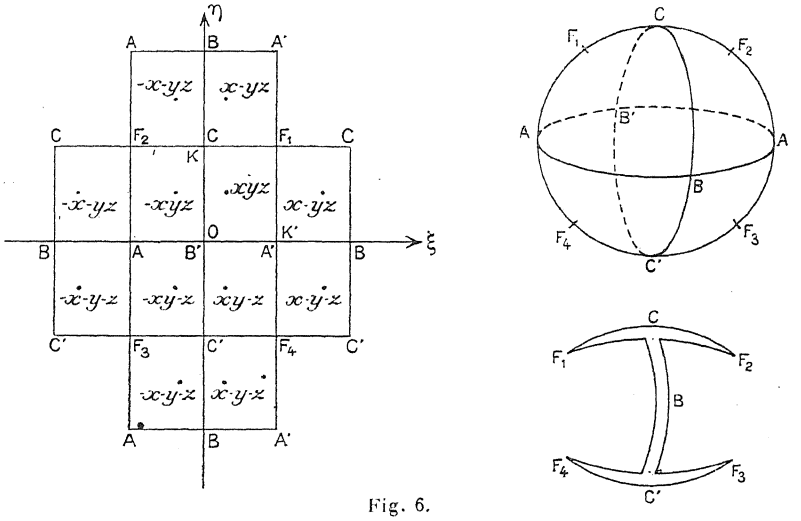

Fig. 6.

symétrie yOz; changer η en $-\eta$ ou Y en $2iK' - Y$ donne la symétrie xOy. Cette discussion jointe à la figure 6 montre comment la

sphère totale correspond d'une façon biunivoque conforme au rectangle $-2K' \leqq \xi \leqq 2K'$ et $-K \leqq \eta \leqq K$, ou encore au rectangle $-K' \leqq \xi \leqq K'$ et $-2K \leqq \eta \leqq 2K$. L'adoption du premier rectangle revient à avoir fait sur la sphère, pour n'obtenir sur le plan $\xi\eta$ qu'un rectangle et non les congruents, l'incision schématisée à part $F_1CF_2CBC'F_3C'F_4C'BCF_1$; les angles faits, sur la sphère, *autour d'un foyer*, sont réduits de moitié sur le plan. En posant

$$(11)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2K'\xi_1}{\pi}, \qquad \eta = \dfrac{2K'\eta_1}{\pi}, \\ d\sigma^2 = \dfrac{4K'^2}{\pi^2}\left[p\left(K + \dfrac{2iK'\xi_1}{\pi}\right) - p\left(iK' + \dfrac{2K'\eta_1}{\pi}\right)\right](d\xi_1^2 + d\eta_1^2), \end{cases}$$

les points (ξ_1, η_1) et $(\xi_1 + \pi, -\eta_1)$ sont diamétralement opposés.

De même en posant

$$(12)\quad \begin{cases} \xi = \dfrac{2K\xi_2}{\pi}, \qquad \eta = \dfrac{2K\eta_2}{\pi}, \\ d\sigma^2 = \dfrac{4K^2}{\pi^2}\left[p\left(K + \dfrac{2Ki\xi_2}{\pi}\right) - p\left(iK' + \dfrac{2K\eta_2}{\pi}\right)\right](d\xi_2^2 + d\eta_2^2), \end{cases}$$

les points (ξ_2, η_2) et $(-\xi_2, \eta_2 + \pi)$ sont diamétralement opposés.

En changeant le système de coniques homofocales utilisées, les rectangles (ξ_1, η_1) ou (ξ_2, η_2) ont une dimension toujours égale à 2π; dans le plan, nous ferons coïncider les axes de symétrie de ces rectangles, qui ont la même longueur 2π; nous ferons correspondre, sur la sphère Σ, les points qui ont une même image plane : cela exigera d'ailleurs que nous remplissions la bande indéfinie de longueur 2π par tous les rectangles congruents dans chacune des deux représentations : le rectangle subit une translation représentée par la dimension perpendiculaire à l'axe de longueur 2π. Chaque point de la sphère, dans la première série, a donc, en général, une infinité d'homologues dans la seconde série, et inversement [1] (si la première série provient de la projection de Mercator, chaque point de la première série

---

[1] Si les dimensions perpendiculaires à l'axe commun de longueur 2π sont commensurables entre elles, la correspondance devient algébrique, et il y a un nombre fini, constant, de correspondants.

a un seul homologue dans la seconde, mais chaque point de la seconde a une infinité d'homologues). On remarquera que dans ces représentations conformes de la sphère sur elle-même, un couple de points diamétralement opposés admet, parmi les points homologues, aussi des couples d'homologues respectifs diamétralement opposés. Traçons donc sur la sphère un système *quelconque* de coniques homofocales (auquel on donnera une orientation *quelconque* autour du centre de la sphère); prenons-en l'image dans une de ces correspondances conformes de la sphère sur elle-même : on obtiendra un nouveau système orthogonal isotherme, avec cette particularité que chaque courbe de l'une des deux familles orthogonales admet, dans la même famille, la courbe symétrique relativement au centre de la sphère; cela nous donne donc, par cette opération faite soit une seule fois, soit un nombre arbitraire de fois, le moyen d'obtenir une infinité de formes de l'élément linéaire de la sphère

$$d\sigma^2 = \varphi(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2), \tag{13}$$

où (ξ, η) et $(\xi + \pi, -\eta)$ donnent deux points diamétralement opposés de la sphère; nous avons signalé, parmi elles, celles qui sont du type de Liouville [formes (11) ou (12)].

Si donc on a une surface S, fermée ou non, à antipodes géodésiques, *toute* représentation conforme de S sur Σ fait correspondre à l'élément (13) de Σ un élément de S

$$ds^2 = f(\xi, \eta)(d\xi^2 + d\eta^2), \tag{14}$$

où l'on a aussi $f(\xi + \pi, -\eta) \equiv f(\xi, \eta)$, les deux points (ξ, η) et $(\xi + \pi, -\eta)$ étant de plus antipodes; *il y a donc aussi une infinité de correspondances conformes de* S *avec elle-même, non biunivoques, changeant les antipodes en antipodes; il y a exactement* ∞^3 *correspondances conformes biunivoques de* S *avec elle-même changeant les antipodes en antipodes* (cette dernière propriété a été établie à la fin du paragraphe précédent et résulte purement et simplement d'un déplacement de la sphère Σ autour de son centre).

Supposons maintenant que S admette une forme de Liouville

$$ds^2 = [\alpha(\xi) + \beta(\eta)](d\xi^2 + d\eta^2), \tag{15}$$

ce qui, *en général*, est réalisable d'*une seule façon*, en négligeant la substitution $(\xi, \eta; \varepsilon a\xi + b, \varepsilon' a\eta + c)$ où $\varepsilon = \pm 1$, $\varepsilon' = \pm 1$, et où a, b, c sont des constantes arbitraires. Si la surface S est à antipodes, on dispose de a et c de façon que les antipodes correspondent à (ξ, η) et $(\xi + \pi, -\eta)$. Alors chaque forme (13) de l'élément $d\sigma^2$ de Σ réalise une de ces correspondances conformes où les antipodes de S ont pour homologues deux points diamétralement opposés de Σ; si S est fermée et de connexion simple, nous nous bornons aux ∞^3 déjà signalées qui sont biunivoques sur toute l'étendue de S et Σ; mais alors, *il n'y a aucune raison que l'élément* (13) *de la sphère soit de la forme de Liouville*. Notre analyse a prouvé sur la surface S, annulaire ou fermée, l'existence d'une conique géodésique particulière $\eta = 0$ qu'il faut avoir soin de faire correspondre à un grand cercle de la sphère.

Que faut-il donc pour que l'élément de la sphère Σ, si S est fermée, soit aussi du type de Liouville : il est évidemment nécessaire et suffisant que la surface fermée S ait pour image, sur le plan (ξ, η) correspondant à la forme (15), un rectangle; les conditions, supposées vérifiées, $\alpha(\xi + \pi) \equiv \alpha(\xi)$, $\beta(-\eta) \equiv \beta(\eta)$, entraînent que le côté parallèle à $O\xi$ de ce rectangle ait pour longueur 2π et que $O\xi$ soit axe de symétrie de ce rectangle; à ce rectangle correspond, pour Σ, une forme *unique* de Liouville du type (11) : on connaît en effet le rapport $\frac{K}{2K'}$ égal au quotient par 2π de la dimension du rectangle parallèle à $O\eta$. Parmi les ∞^3 correspondances conformes biunivoques de S sur Σ, il faut encore choisir celle où la conique $\eta = 0$ a pour homologue le grand cercle ABA'B', qui est l'un des plans de symétrie des foyers F_1, F_2, F_3, F_4, car, par une rotation de la sphère autour d'un diamètre autre que CC', le $d\sigma^2$ de la sphère garderait la forme de Liouville, mais la surface S perdrait sa forme de Liouville.

Si la surface fermée S n'a pas pour image sur le plan (ξ, η) un rectangle ou une bande indéfinie limitée par deux droites parallèles, le ds^2 de S aurait la forme de Liouville, mais non celui $d\sigma^2$ de la sphère Σ, en se bornant aux représentations conformes biunivoques de S sur Σ. Cette analyse prouve que le $d\sigma^2$ de Mercator, auquel M. Carathéodory s'est borné, ne joue pas le rôle prépondérant que ce géomètre lui attribue. La soi-disant preuve donnée par M. Carathéo-

dory [1] que la sphère est la seule surface fermée à ds^2 de Liouville, *sans singularités et à antipodes*, repose en effet sur cette assertion que le ds^2, $[\alpha(x)+\beta(y)](dx^2+dy^2)$ d'une telle surface S correspond à une fonction α *constante :* or le ds^2, $[p(\omega+i\xi)-p(\omega'+\eta)](d\xi^2+d\eta^2)$, contredit cette assertion. Notre analyse prouve de plus qu'il doit y avoir sur la surface fermée S *quatre* points remarquables, si S et Σ, par leur représentation conforme biunivoque, prennent *simultanément* la forme de Liouville : ce sont les points qui correspondent aux foyers de la sphère (notre analyse jusqu'ici laisse subsister une rotation de la sphère autour de CC', mais nous verrons plus bas que l'on peut faire jouer aussi aux coniques η le rôle que les coniques ξ ont joué, de sorte que le grand cercle BCB'C' lui aussi plan de symétrie pour les quatre foyers F_1, F_2, F_3, F_4 soit représenté par $\xi=0$).

Il resterait d'ailleurs à voir si la surface fermée S peut avoir sur le plan ξ, η autre chose qu'un rectangle comme image; je ne le crois pas, pour la raison que je donnerai plus loin. D'autre part, d'après les recherches de M. H. Weyl, si la surface fermée S admet des antipodes *sur toute son étendue*, l'auto-isométrie de S, qui en résulte, doit, puisque S est fermée, se réduire à une égalité ou à une symétrie, accompagnée ou non d'un déplacement. Comme le sens des angles est renversé, on doit se borner à la symétrie; la réciprocité entre les antipodes, jointe à ce fait qu'il n'y a pas de point *invariant*, exige que l'on ait simplement une symétrie par rapport à un point [2].

5. *Symétriques géodésiques.* — Les deux points $M(\xi, \eta)$ et $M_1(\xi, -\eta)$ sont symétriques géodésiques. Pour $\eta=0$, le point $D(\xi, 0)$ coïncide avec son symétrique géodésique; cela exige que la géodésique admette le point D comme point double et ait elle-même la forme d'un 8 dans l'espace; le lieu du point double D est la conique géodésique $y=0$; cette conique géodésique n'est elle-même géodésique de la surface que si la valeur numérique de la fonction $\tau(0)$ est différente de zéro. Si l'on songe à une courbe plane, telle que la lemniscate, disposée de

(1) Page 311, n° 24 du Mémoire déjà cité.

(2) Au Chapitre III, § 5, je donne un exemple où les géodésiques à antipodes ont toutes un point double et la forme d'un huit, de sorte que la surface a une ligne invariante.

façon que O soit le centre et Ox l'axe transverse, deux points de la courbe, symétriques par rapport à Oy, sont séparés par une longueur d'arc constante (tandis que deux points symétriques par rapport à l'axe Ox sont séparés par une longueur variable avec la position du point); on a ici un fait analogue. On remarquera que les deux nappes séparées par $y = 0$ sont applicables l'une sur l'autre, à cause de $y = y_1$ et $\psi(z) \equiv \psi_1(z)$; on peut en effet, avec la variable z, écrire chacun de ces ds^2 sous la forme

$$[\alpha(x) - z][dx^2 + \psi^2(z)\,dz^2].$$

De la sorte, si l'on se borne à la nappe $y > 0$, on peut dire que sur cette nappe il y a ∞^2 géodésiques *fermées*, venant toutes buter sur le bord $y = 0$ en s'y réfléchissant (égalité de l'angle d'incidence et de réflexion). Si l'on considère dans le plan xOy une image géodésique, γ, coupant Ox en d, on devra donc construire une courbe gauche C fermée, de longueur égale à $\int_\gamma ds$; au point D les tangentes à C en D, au départ et à l'arrivée, doivent faire entre elles le même angle que les tangentes à γ en d et de plus les deux normales principales à C en D doivent coïncider avec la normale au plan des deux tangentes; on construit alors la surface S, comme il a été expliqué plus haut; sur cette surface S, la courbe $y = 0$ a une certaine configuration Γ; on doit, pour avoir la surface annoncée à points géodésiquement symétriques, réduire S à la portion $y > 0$, puis construire la seconde surface, applicable sur S, issue de la courbe Γ, qui se correspond à elle-même. En particulier, si Γ est plane, S_1 s'obtient en prenant la symétrique de S relativement au plan de Γ et les points symétriques géodésiquement sont ceux qui sont symétriques relativement au plan de Γ. On voit qu'on arrive au même résultat en se donnant *a priori* la courbe Γ qui a pour image $y = 0$. Il serait intéressant de déterminer par ses équations effectives, et non par son simple ds^2, une surface de ce type. En tout cas j'insiste sur ce fait remarquable que la nappe $y > 0$ fournit une surface S à géodésiques fermées, ayant toutes un point anguleux dont le lieu est le bord $y = 0$ de la surface S.

Pour éviter tout doute sur les propositions données ici, il est utile d'indiquer un exemple aussi précis que possible. Je pars pour

cela du ds^2

$$ds^2 = (2 - 4\xi^2 - \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2). \tag{1}$$

Toute surface représentative doit avoir son image contenue tout entière dans l'ellipse d'équation $2 - 4\xi^2 - \eta^2 = 0$. Les équations des géodésiques sont

$$\xi = \frac{\sqrt{1-h}}{2}\sin 2(t - t_0), \qquad \eta = \sqrt{1+h}\sin t. \tag{2}$$

Ces courbes images sont de degré 4, sauf pour $t_0 = \frac{\pi}{4}$, où l'on obtient une conique; en écartant $t_0 = \frac{\pi}{4}$, on a une quartique proprement dite inscrite dans le rectangle de côtés $\xi = \pm\frac{\sqrt{1-h}}{2}$, $\eta = \pm\sqrt{1+h}$; les sommets de ce rectangle sont sur l'ellipse limite, et du moment que $t_0 \neq \frac{\pi}{4}$, la quartique n'a aucun point commun avec l'ellipse. On trouve, sans difficulté, pour longueur d'arc, sur la géodésique précédente,

$$s = \frac{1-h}{4}\left[2(t - t_0) + \frac{\sin 4(t - t_0)}{2}\right] + \frac{1+h}{2}\left[t + \frac{\sin 2t}{2}\right]. \tag{3}$$

Quand t augmente de π, (ξ, η) est remplacé par $(\xi, -\eta)$ et l'arc s s'accroît de π. Prenons en particulier la géodésique d'image γ correspondant à $h = t_0 = 0$; elle a pour équation $\xi^2 = \eta^2(1 - \eta^2)$, de sorte que les tangentes au point double sont rectangulaires ($\xi = \pm\eta$). Construisons C, courbe de l'espace ayant γ pour image, ainsi : je coupe la sphère

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2z = 0 \tag{4}$$

par le cône (m constante positive, inférieure à 1)

$$x^2 - y^2 + (2m - 1)z^2 = 0. \tag{5}$$

La courbe C' ainsi obtenue admet xOz et yOz pour plan de symétrie, O pour point double, avec tangentes rectangulaires : les deux bissectrices de l'angle xOy; la normale principale à chaque branche est Oz. Ceci se vérifie aussitôt, car par addition et soustraction on déduit de (4) et (5) la représentation paramétrique

$$\begin{cases} z = -t^2, \\ x = t\sqrt{1 - mt^2}, \\ y = t\sqrt{1 - (1-m)t^2}. \end{cases} \tag{6}$$

Pour $t = 0$, en prenant les radicaux positivement, on a pour vitesse $(1, 1, 0)$ et pour accélération $(0, 0, -2)$, ce qui justifie le résultat. Si l'on suppose $\frac{1}{2} < m < 1$, en faisant varier t de 0 à $\frac{1}{m}$, on a un arc partant de O tangentiellement à la première bissectrice de xOy venant rencontrer le plan yOz pour $t = \frac{1}{m}$; ensuite en prenant $\sqrt{1 - mt^2}$ négativement, on a un arc symétrique du précédent relativement au plan yOz et revenant, quand t revient de $\frac{1}{m}$ à 0, à l'origine, tangentiellement à la seconde bissectrice de xOy; l'arc ainsi obtenu a une valeur facile à calculer par une intégrale; par une homothétie convenable, on donnera à cet arc la longueur π, et c'est cette homothétie qui donne la courbe C. La surface obtenue ainsi a nécessairement yOz pour plan de symétrie, la section par ce plan correspondant à $\xi = 0$; en continuant la courbe C sur l'autre branche symétrique relativement au plan xOz, on a une seconde nappe de surface symétrique de la précédente par rapport au plan xOz, la section par ce plan correspondant à la courbe $\eta = 0$; nous avons ainsi réalisé un exemple précis de surface ayant les propriétés annoncées; grâce aux précautions prises, nous avons un seul ds^2 et non *quatre*, comme dans certains cas et nous avons une seule surface sans ligne anguleuse, avec deux géodésiques planes particulières d'image $\xi = 0$, $\eta = 0$, il resterait à déterminer la région effective de l'ellipse $2 - 4\xi^2 - \eta^2 = 0$; qui est représentée par cette surface. Il est intéressant de confronter avec les constructions analogues relatives au $ds^2, (2 - \xi^2 - \eta^2)(d\xi^2 + d\eta^2)$: les surfaces de révolution s'obtiennent en faisant correspondre un cercle à la géodésique particulière $1 - \xi^2 - \eta^2 = 0$.

CHAPITRE III.

EXEMPLES; RECHERCHE DE SURFACES FERMÉES.

1. *Exemples déduits des surfaces de révolution.* — Soit une surface de révolution *connue*, annulaire ou fermée, à géodésiques fermées. Elle a un ds^2, $f(y)(dx^2 + dy^2)$, pour lequel le maximum de $f(y)$ est fini et correspond à l'équateur; supposons-le atteint pour $y = 0$; une

homothétie nous donne la surface de révolution

$$(1)\qquad ds^2 = [1+\beta(y)](dx^2+dy^2), \qquad \beta(y) = \frac{f(y)}{f(0)} - 1.$$

La fonction $\alpha(x)$ est donc égale à 1; nous supposons que x varie de 0 à 2π quand la géodésique est parcourue complètement, sinon on remplace x et y par mx, my où m est une constante convenable. La fonction $\tau(h)$ du premier Chapitre est donc

$$(2)\quad \tau(h) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\frac{dx}{\sqrt{1-h}} = \frac{\pi}{\sqrt{1-h}} = \int_0^{y_1}\frac{dy}{\sqrt{h+\beta(y)}} + \int_0^{y_{11}}\frac{dy_1}{\sqrt{h+\beta_1(y_1)}}.$$

Nous cherchons maintenant une surface du type A_2 (accidentellement A_3 ou B_2) correspondant au nouveau ds^2

$$(3)\qquad [\alpha(x)+\beta(y)](dx^2+dy^2),$$

où β est la même fonction que précédemment; la fonction $\tau(h)$ reste donc égale à $\frac{\pi}{\sqrt{1-h}}$; h ne peut donc varier que de 0 à 1; comme on doit fixer une constante A telle que $\tau(h)$ soit définie de 0 à A, la constante A sera donc prise égale à $\sin^2 m$, où m est un angle positif aigu; le maximum de $\alpha(x)$ sera $\sin^2 m$, et d'après les formules (1) à (7) du paragraphe 5 du premier Chapitre, nous écrirons

$$(4)\qquad \begin{cases} h+l = \sin^2 m, \quad \tau(h) = \dfrac{\pi}{\sqrt{1-h}}, \quad \sin^2 m - \alpha(x) = \zeta, \\ x + x_1 = \displaystyle\int_0^{\zeta}\frac{dl}{\sqrt{(\cos^2 m + l)(\zeta - l)}}, \quad \sin^2 m - \alpha(-x_1) = \zeta. \end{cases}$$

L'intégration donne

$$(5)\qquad x + x_1 = -2\left(\operatorname{arc\,tang}\sqrt{\frac{\zeta - l}{\cos^2 m + l}}\right)_{l=0}^{l=\zeta} = 2\operatorname{arc\,tang}\left(\frac{\sqrt{\zeta}}{\cos m}\right).$$

Pour avoir un résultat simple, prenons $x = x_1$, d'où

$$(6)\qquad \zeta = \cos^2 m \operatorname{tang}^2 x, \qquad \alpha = \sin^2 m - \cos^2 m \operatorname{tang}^2 x = 1 - \frac{\cos^2 m}{\cos^2 x}.$$

Finalement nous obtiendrons le ds^2

$$(7)\qquad ds^2 = \left[f(y) - \frac{f(0)\cos^2 m}{\cos^2 x}\right](dx^2 + dy^2),$$

qui *dépend de la constante arbitraire m et qui tend vers le ds^2 primitif si m tend vers* $\frac{\pi}{2}$. La longueur de chaque géodésique fermée est

$$(8)\qquad \sqrt{f(0)}\int_0^{\Lambda} \frac{\pi\, dh}{\sqrt{1-h}} = 4\pi\sqrt{f(0)}\sin^2\frac{m}{2}.$$

Si l'on applique ceci à la sphère, en partant du ds^2 de Mercator, on aura les ds^2

$$(9)\qquad ds^3 = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} - \frac{\cos^2 m}{\cos^2 x}\right)(dx^2 + dy^2).$$

De même si nous prenons la surface en poire de J. Tannery, définie par la méridienne (ξ, ζ)

$$(10)\qquad \xi = \frac{1}{2}\cos H, \qquad \zeta = 2\left(1 - \cos\frac{H}{2} + \sin\frac{H}{2}\right), \qquad -\frac{\pi}{2} \leqq H \leqq +\frac{\pi}{2},$$

le ds^2 est

$$(11)\qquad ds^2 = (2 + \sin H)^2\frac{dH^2}{4} + \frac{\cos^2 H}{4}d\theta^2.$$

Comme la géodésique fait deux tours sur la surface avant de se fermer, on écrira

$$(12)\qquad \begin{cases} \theta = 2x, \qquad \dfrac{2 + \sin H}{2\cos H} = dy, \\ ds^2 = \cos^2 H(dx^2 + dy^2). \end{cases}$$

On aura donc le nouveau ds^2 du type A_2

$$(13)\qquad ds^2 = \left(\cos^2 H - \frac{\cos^2 m}{\cos^2 x}\right)\left[dx^2 + \left(\frac{2 + \sin H}{2\cos H}\right)^2 dH^2\right].$$

Il est facile, avec les notations du premier Chapitre, de former les équations des géodésiques pour (9) ou (13). D'abord, pour (9), on

aura, en écrivant $h = \sin^2 i$,

$$(14)\qquad \begin{cases} \dfrac{\cos i \sin x}{\sqrt{\sin^2 m - \sin^2 i}} = \sin[(t - t_0)\cos i], \\[2ex] \dfrac{\cos i \operatorname{sh} y}{\sin i} = \sin(t \cos i). \end{cases}$$

Pour le ds^2 (13), on écrira encore $h = \sin^2 i$ et avec un angle φ variable

$$(15)\qquad \begin{cases} \sin H = \sin i \sin \varphi, \\[1ex] t = \dfrac{1}{\cos i} \operatorname{arc\,tang}(\cos i \operatorname{tang} \varphi) - \dfrac{\cos i}{2} \operatorname{arc\,tang}(\operatorname{tang} i \cos \varphi), \\[2ex] \dfrac{\cos i \sin x}{\sqrt{\sin^2 m - \sin^2 i}} = \sin[(t - t_0)\cos i]. \end{cases}$$

Ces formules, pour $m = \frac{\pi}{2}$, donnent encore les géodésiques de la sphère ou de la surface de J. Tannery. Pour le ds^2 (9), l'accroissement $\frac{2\pi}{\cos i}$, donné à t, fait repasser x et y par les mêmes valeurs : c'est notre point de départ; mais l'accroissement moitié, $\frac{\pi}{\cos i}$, donné à t, changera, *si m n'est pas égal à* $\frac{\pi}{2}$, x en $-x$ et y en $-y$, car x oscille entre deux valeurs égales et de signe contraire quand $m \neq \frac{\pi}{2}$, tandis que pour $m = \frac{\pi}{2}$, x peut varier de 0 à 2π. On a ainsi un exemple du cas dénommé A_3; pour m prenant la valeur $\frac{\pi}{2}$, on passe brusquement du cas A_3 au cas B_1; d'ailleurs, pour A_3 ou B_1, chaque point de l'anneau de surface est à lui-même son *second* point conjugué géodésique.

Écrivons maintenant, au lieu de (7),

$$(16)\qquad ds^2 = \left[f(y) - \frac{f(0)\cos^2 m}{\cos^2 px}\right](dx^2 + dy^2),$$

la relation entre x et t sur la géodésique $h(h = \sin^2 i)$ est donnée, au lieu de la formule entrant dans (14) et (15), par

$$(17)\qquad \frac{\cos i \sin px}{\sqrt{\sin^2 m - \sin^2 i}} = \sin[p(t - t_0)\cos i].$$

Si donc p est égal à $\frac{1}{2}$, l'accroissement $\frac{2\pi}{\cos i}$ infligé à t fait repasser y par la même valeur, mais change x de signe : c'est le cas B_2 des *symétriques géodésiques*. On a ainsi les exemples simples

$$ds^2 = \left(\frac{1}{\operatorname{ch}^2 y} - \frac{\cos^2 m}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right)(dx^2 + dy^2), \tag{18}$$

$$ds^2 = \left(\cos^2 \mathrm{H} - \frac{\cos^2 m}{\cos^2 \frac{x}{2}}\right)\left[dx^2 + \left(\frac{2 + \sin \mathrm{H}}{2 \cos \mathrm{H}}\right)^2 d\mathrm{H}^2\right]. \tag{19}$$

Il est très simple de retrouver l'exemple $(2 - x^2 - y^2)(dx^2 + dy^2)$; il suffit de supposer la fonction $\tau(h)$ constante, égale à π par exemple. Les formules (6) et (7) du paragraphe 5 du Chapitre I fournissent alors

$$\left\{\begin{array}{ll} \psi(z) + \psi_1(z) = \dfrac{1}{\sqrt{z}}, & y + y_1 = 2\sqrt{z}, \\ \varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta) = \dfrac{1}{\sqrt{\zeta}}, & x + x_1 = 2\sqrt{\zeta}. \end{array}\right. \tag{20}$$

L'exemple annoncé s'obtient donc pour $x = x_1 = \sqrt{\zeta}$, $y = y_1 = \sqrt{z}$, $A = 2$. Un exemple un peu moins simple s'obtient en prenant (m, n, constantes)

$$\left\{\begin{array}{ll} y = \sqrt{z} + nz, & x = \sqrt{\zeta} + m\zeta, \\ y_1 = \sqrt{z} - nz, & x_1 = \sqrt{\zeta} - m\zeta. \end{array}\right. \tag{21}$$

Cet exemple est choisi de façon que y et $-y_1$ soient deux branches d'une même fonction analytique, et de même x et $-x_1$. En posant

$$z = \eta^2, \qquad \zeta = \xi^2, \tag{22}$$

on aura

$$ds^2 = (2 - \xi^2 - \eta^2)[(1 + 2m\xi)^2 d\xi^2 + (1 + 2n\eta)^2 d\eta^2]. \tag{23}$$

Les équations des géodésiques sont

$$\left\{\begin{array}{ll} \xi = \sqrt{1 - h}\sin \mathrm{U}, & \mathrm{U} - 2m\sqrt{1 - h}\cos \mathrm{U} = t - t_0, \\ \eta = \sqrt{1 + h}\sin \mathrm{V}, & \mathrm{V} - 2n\sqrt{1 + h}\cos \mathrm{V} = t. \end{array}\right. \tag{24}$$

Si m, n tendent vers zéro, on retrouve le ds^2 de révolution qui a été

déjà employé au paragraphe 2 du Chapitre I pour obtenir, par un autre procédé, des surfaces voisines, qui ne sont pas de révolution. Ce ds^2 (23) est du type A_2; il n'est du type A_3 que si $m = n = 0$. On obtient un type B_2, symétriques géodésiques, en prenant

$$(25) \qquad ds^2 = (2 - 4\xi^2 - \eta^2)[(1 + 2m\xi)^2 d\xi^2 + d\eta^2],$$

car les équations des géodésiques deviennent

$$(26) \qquad \begin{cases} 2\xi = \sqrt{1-h}\sin U, \qquad U - m\sqrt{1-h}\cos U = 2(t - t_0), \\ \eta = \sqrt{1+h}\sin t. \end{cases}$$

2. *Cas où l'une des fonctions $\alpha(x)$ ou $\beta(y)$ est paire.* — Je rappelle que l'on a posé

$$(1) \quad \beta(-y) \equiv \beta_1(y), \qquad \beta(y) = \beta_1(y_1) = -z, \qquad dy = \psi(z)\,dz, \qquad dy_1 = \psi_1(z)\,dz.$$

Les deux fonctions $\beta(y)$ et $\beta_1(y_1)$ n'ont besoin d'être étudiées que pour $y > 0$ et $y_1 > 0$; il suffit de savoir exprimer y et y_1 en z, z étant une variable positive. Si donc on prend $\beta(y) \equiv \beta(-y)$, on a $y = y_1$. Cette identité $\beta(y) \equiv \beta(-y)$ peut avoir lieu, parce que β est une fonction *paire*, au sens analytique de ce terme, de la variable y : par exemple $\beta(y) \equiv y^2$, pour toutes les valeurs de y (négatives ou positives); ou bien parce que l'on prend par exemple $\beta(y) = y$ pour y *positif*, puis $\beta(-y) \equiv \beta_1(y) = y$ pour y *positif* encore, de sorte que finalement $\beta(y) = y$ pour y *positif* et $\beta(y) = -y$ pour y *négatif*: dans ce cas, la parité de β est une parité graphique, obtenue en prenant pour β deux branches de fonctions distinctes. C'est donc ainsi que j'entendrai parité : soit au sens analytique, soit au sens graphique. Or dans les recherches que nous avons développées, seule s'introduit la somme $y + y_1$, que $\beta(y)$ soit paire ou impaire : si les géodésiques fermées ne coupent qu'une fraction des coniques y, cela a été vu. Si les géodésiques fermées doivent couper *toutes* les coniques y, le résultat subsiste, car on introduit l'hypothèse de la périodicité de $\beta(y)$; donc $\beta(-\pi) = \beta(+\pi)$ et l'on considère la fonction $\tau(h)$ définie par

$$(2) \qquad 2\tau(h) = \int_{-\pi}^{+\pi} \frac{dy}{\sqrt{h + \beta(y)}} = \int_0^{\beta(\pi)} \frac{[\psi(z) + \psi_1(z)]\,dz}{\sqrt{h - z}}.$$

Il n'y a donc encore que les sommes $\psi(z)+\psi_1(z)$ et $y+y_1$ qui interviennent. Ces préliminaires posés, supposons que $\beta(y)$ soit *paire*, au sens expliqué, et en même temps que le ds^2 à géodésiques fermées

$$(3)\qquad ds^2=[\alpha(x)+\beta(y)](dx^2+dy^2);$$

introduisons le nouveau ds^2

$$(4)\qquad ds^2=[\alpha(x)+\beta(y)](dx^2+dY^2),\qquad Y=y+\varphi(\beta),$$

où $\varphi(\beta)$ est une fonction uniforme de β, au voisinage de $\beta(0)$; le nouveau ds^2 a aussi ses géodésiques fermées ; en effet on a

$$(5)\qquad Y=y+\varphi(\beta),\qquad \beta(y)=-z,$$

à une valeur positive de z correspond une valeur y positive, puis la même changée de signe; on a donc

$$(6)\qquad Y=y+\varphi(\beta'),\qquad -Y_1=-y+\varphi(\beta)\qquad (y>0),$$

en adoptant la notation $-Y_1$ pour étudier les valeurs de la fonction Y dans le champ y négatif, comme nous avons dû le faire pour expliquer les résultats d'Abel; on a donc

$$(7)\qquad Y+Y_1=2y=y+y_1,$$

et ceci justifie l'assertion. Si $\alpha(x)$ était paire, au lieu de $\beta(y)$, on raisonnerait sur $\alpha(x)$ au lieu de $\beta(y)$; si $\alpha(x)$ et $\beta(y)$ sont paires ensemble, on peut faire la double opération; cela nous a permis de déduire du type $(2-x^2-y^2)(dx^2+dy^2)$ le type plus compliqué $(2-x^2-y^2)[dx^2(1+2mx)^2+dy^2(1+2ny)^2]$ en prenant $X=x+mx^2$ et $Y=y+ny^2$. Si la fonction β est périodique en y, nous pouvons remarquer qu'elle reste de périodicité π quand on l'étudie comme fonction de Y. Nous allons appliquer ceci à la sphère.

3. *Surfaces déduites de la sphère.* — Nous avons obtenu le ds^2 de la sphère

$$(1)\qquad d\sigma^2=[p(\omega+i\xi)-p(\omega'+\eta)](d\xi^2+d\eta^2),$$

en variables réelles ξ, η; la fonction $p(\omega+i\xi)$ est paire en ξ (au sens

analytique) et admet la période $\frac{4\omega'}{i} = 4K'$ nécessaire de ce fait qu'une série de grands cercles coupent *toutes* les coniques ξ; la fonction $p(\omega' + \eta)$ est paire en η et admet la période $4\omega = 4K$ nécessaire de ce fait qu'une série de grands cercles coupent *toutes* les coniques η; d'ailleurs les grands cercles qui rencontrent toutes les coniques ξ ne rencontrent qu'une fraction des coniques η et inversement. En fait $p(\omega + i\xi)$ admet la période $\frac{2\omega'}{i}$ et $p(\omega' + \eta)$ la période 2ω, et cela tient cette fois aux antipodes. Maintenant, conformément aux indications du paragraphe précédent, écrivons avec deux constantes arbitraires m et n

$$(2)\qquad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](dx^2 + dy^2), \\ x = \xi + mp(\omega + i\xi), \qquad y = \eta + np(\omega' + \eta). \end{cases}$$

Nous avons bien satisfait aux conditions de parité et périodicité. On peut, si l'on préfère, écrire ce ds^2 sous la forme

$$(3)\qquad ds^2 = (u - v)\left[du^2\left\{m + \frac{1}{\sqrt{4(e_1 - u)(u - e_2)(u - e_3)}}\right\}^2 + dv^2\left\{n + \frac{1}{\sqrt{4(v - e_1)(v - e_2)(v - e_3)}}\right\}^2\right],$$

où $u = p(\omega + i\xi)$ et $v = p(\omega' + \eta)$; on a $e_1 \geqq u \geqq e_2 \geqq v \geqq e_3$. Les équations des géodésiques sont

$$(4)\qquad \frac{d\xi + m\,du}{\sqrt{u - h}} = \frac{d\eta + n\,dv}{\sqrt{h - v}} = dt$$

ou encore

$$(5)\qquad \begin{cases} \displaystyle\int \frac{du}{\sqrt{4(u - e_1)(u - e_2)(u - e_3)(h - u)}} + 2m\sqrt{u - h} = t, \\ \displaystyle\int \frac{dv}{\sqrt{4(v - e_1)(v - e_2)(v - e_3)(h - v)}} - 2n\sqrt{h - v} = t - t_0. \end{cases}$$

Ces équations s'intègrent explicitement par les fonctions elliptiques, *il faut bien remarquer que les coordonnées d'un point de la surface ne sont pas exprimées en fonctions uniformes de u et v.*

Si m, n sont nulles toutes deux, on retrouve la sphère; si ni m, ni n ne sont nulles, les géodésiques sont simplement fermées, sans aucune particularité (ni antipodes, ni points géodésiquement conjugués). Supposons n nul, $m \neq 0$. Nous allons trouver une particularité singulière; en effet, si la constante h est comprise entre e_2 et e_3, la fonction $p(\omega + i\xi)$ joue comme fonction périodique de ξ [période $4K'$ correspondant à 2π, $2K'$ correspondant à π] et $p(\omega' + \eta)$ comme fonction *quelconque;* les fonctions $\varphi(\zeta) + \varphi_1(\zeta)$ et $\psi(z) + \psi_1(z)$ sont les *mêmes* que pour la sphère; d'ailleurs, n étant nulle, $\psi(z) = \psi_1(z)$, $y = y_1$, ces fonctions étant les mêmes que pour la sphère. Cela entraîne bien, d'après les résultats du Chapitre I, paragraphe 4, que l'accroissement $2\tau(h)$ échange (ξ, η) avec $(\xi + 4K', \eta)$, mais que l'accroissement $\tau(h)$, infligé à t, échange (ξ, η) avec $(\xi + 2K', -\eta)$ comme pour la sphère; *les géodésiques correspondant à $e_3 \leqq h \leqq e_2$ ont donc des antipodes.* Si maintenant on a $e_2 \leqq h \leqq e_1$, c'est β qui joue comme fonction périodique, mais non α; cette fois, la condition de parité n'est plus vérifiée pour α considérée comme fonction de x; *il n'y a plus d'antipodes géodésiques sur les géodésiques correspondant à $e_2 \leqq h \leqq e_1$.* Au Chapitre II, paragraphe 3, nous avions déjà signalé une propriété de cette espèce pour une surface continue, fermée, sans singularité, mais formée par la réunion de trois morceaux analytiquement distincts; ici, nous avons des anneaux de surface formés d'un seul morceau analytique; il faut, d'ailleurs, signaler la difficulté qu'il y a à trouver un anneau contenant effectivement une géodésique de l'une et l'autre catégorie.

Une question intéressante se pose, c'est de voir si ce ds^2 nouveau (2) définit une surface fermée. D'abord, ce ds^2 est défini sur toute la sphère d'élément (1), car à chaque point de la sphère appartient un (ξ, η) bien déterminé dans le rectangle

$$-2K' \leqq \xi \leqq 2K', \qquad -K \leqq \eta \leqq K;$$

et la forme (2) montre qu'en cette station (ξ, η) le ds^2 (2) est parfaitement connu. Calculons la courbure de ce ds^2.

La courbure totale, H, du $ds^2 = [\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2)$ est

$$(6) \qquad H = \frac{1}{RR_1} = \frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - (\alpha + \beta)(\alpha'' + \beta'')}{2(\alpha + \beta)^3}.$$

Ici, on a

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \alpha = p(\omega + i\xi), & \beta = -p(\omega' + \eta), \\ \alpha' = \dfrac{d\alpha}{dx} = \dfrac{ip'(\omega + i\xi)}{1 + mip'(\omega + i\xi)}, & \beta' = \dfrac{d\beta}{dy} = \dfrac{-p'(\omega' + \eta)}{1 + np'(\omega' + \eta)}, \\ \alpha'' = \dfrac{d\alpha'}{dx} = \dfrac{-p''(\omega + i\xi)}{[1 + mip'(\omega + i\xi)]^3}, & \beta'' = \dfrac{d\beta'}{dy} = \dfrac{-p''(\omega' + \eta)}{[1 + np'(\omega' + \eta)]^3}, \end{array} \right.$$

$$(8) \quad H = \frac{\left\{ \begin{array}{l} \dfrac{-p'^2(\omega + i\xi)}{[1 + mip'(\omega + i\xi)]^2} + \dfrac{p'^2(\omega' + \eta)}{[1 + np'(\omega' + \eta)]^2} \\ + [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)] \left[\dfrac{p''(\omega + i\xi)}{(1 + mip')^3} + \dfrac{p''(\omega' + \eta)}{(1 + np')^3} \right] \end{array} \right\}}{2[p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)]^3}.$$

Il est facile de voir que, dans le plan ξ, η, les courbes obtenues en donnant à H, dans l'équation (8), une valeur *arbitraire* passent au point $\xi = K' = \frac{\omega'}{i}$, $\eta = K = \omega$, image d'un foyer de la sphère, et y ont trois tangentes réelles. En rendant l'équation entière, on a

$$\begin{aligned} (8') \quad & -p'^2(\omega + i\xi)[1 + mip'(\omega + i\xi)][1 + np'(\omega' + \eta)]^3 \\ & + p'^2(\omega' + \eta)[1 + np'(\omega' + \eta)][1 + mip'(\omega + i\xi)]^3 \\ & + [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)] \{ p''(\omega + i\xi)[1 + np'(\omega' + \eta)]^3 \\ & \qquad + p''(\omega' + \eta)[1 + mip'(\omega + i\xi)]^3 \} \\ & \qquad - 2H[p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)]^3 = 0. \end{aligned}$$

Pour $m = n = 0$, on aurait la sphère; donc, dans (8'), la partie indépendante de m et n se réduit à

$$2(1 - H)[p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)]^3.$$

Posons

$$\xi = \frac{\omega'}{i} + X, \qquad \eta = \omega + Y$$

et appliquons le développement

$$(9) \qquad p(\omega + \omega' + t) = e_2 + A_1 t^2 + A_2 t^4 + \ldots.$$

Au second membre de (9), il n'y a que des puissances paires. On a

$$(10) \qquad p'(\omega + \omega' + t) = 2A_1 t + 4A_2 t^3 + \ldots.$$

On aura donc, en amorçant le développement de (8′),

$$
\begin{aligned}
(11)\qquad & (2A_1X - 4A_2X^3 + \ldots)^2[1 - 2mA_1X + \ldots][1 + 6nA_1Y + \ldots] \\
& + [2A_1Y + 4A_2Y^3 + \ldots]^2[1 + 2nA_1Y + \ldots][1 - 6mA_1X + \ldots] \\
& - (A_1X^2 + A_1Y^2 + \ldots)[(2A_1 - 12A_2X^2 + \ldots)(1 + 6nA_1Y + \ldots) \\
& + (2A_1 + 12A_2Y^2 + \ldots)(1 - 6mA_1X + \ldots)] + 2H(A_1X^2 + A_1Y^2 + \ldots)^3 = 0.
\end{aligned}
$$

Comme vérification, il n'y a pas de terme du second degré; les termes de degré trois se réduisent à

$$4A_1^3[m(X^3 - 3XY^2) + n(3X^2Y - Y^3].$$

En l'égalant à zéro, cette expression donne les tangentes au point

$$X = Y = 0 \qquad \text{ou} \qquad \xi = K', \qquad \eta = K;$$

en posant

$$\frac{Y}{X} = \operatorname{tang}\omega,$$

on obtient

$$(12)\qquad \operatorname{tang} 3\omega = -\frac{m}{n},$$

de sorte que nous obtenons un point triple à tangentes réelles, formant entre elles des angles de 60°. Sur une surface fermée, qui représenterait le ds^2, la courbure totale pourrait donc prendre une valeur quelconque; les courbes de même courbure totale (pour la surface) passeraient toutes aux points homologues des quatre foyers de la sphère. Nous verrons, un peu plus bas, un exemple de surface algébrique offrant un tel point singulier, cet exemple étant donné, non pas pour les géodésiques, qui sont quelconques, mais au point de vue de cette singularité. Il est bon de calculer l'élément superficiel de la surface et celui de sa représentation sphérique; le premier est

$$(\alpha + \beta)\,dx\,dy,$$

le second,

$$\frac{\alpha'^2 + \beta'^2 - (\alpha + \beta)(\alpha'' + \beta'')}{2(\alpha + \beta)^2}\,dx\,dy.$$

On trouvera donc aux environs de $\xi = K'$, $\eta = K$ ou $X = Y = 0$, à calculer pour l'aire de la représentation sphérique l'intégrale

$$(13)\qquad \int\int \frac{4A_1^3[m(X^3 - 3XY^2) + n(3X^2Y - Y^3)] + \ldots}{2[A_1(X^2 + Y^2) + \ldots]^2}\,dX\,dY.$$

En passant aux coordonnées polaires, on voit aussitôt que l'élément différentiel reste fini au voisinage du point $X = Y = 0$, de sorte qu'il n'y a pas impossibilité d'obtenir une surface fermée.

Cette étude montre comment il est avantageux de modifier le ds^2; écrivons, en effet, avec un entier positif k et des constantes m, n quelconques, mais petites,

$$(14)\quad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](dx^2 + dy^2), \\ x = \xi + m[p(\omega + i\xi) - e_2]^k, \qquad y = \eta + n[p(\omega' + \eta) - e_2]^k. \end{cases}$$

Par un calcul analogue au précédent, on a

$$(15)\quad \begin{cases} \alpha = p(\omega + i\xi), \qquad \alpha' = \dfrac{ip'(\omega + i\xi)}{1 + mikp'(p - e_2)^{k-1}}, \\ \alpha'' = \dfrac{-p''(\omega + i\xi) + mik(k-1)p'^3(p - e_2)^{k-2}}{[1 + mikp'p - e_2)^{k-1}]^3}, \end{cases}$$

et formules analogues pour β, β', β''. Le même calcul, pour la courbe

$$\frac{1}{RR'} = H,$$

donne une équation en X, Y où les termes indépendants de m, n se réduisent à

$$(16)\qquad 2(H - 1)(A_1X^2 + A_1Y^2)^3.$$

Il suffit que l'ensemble des termes contenant m ou n soit de degré 7 au moins; il suffit de regarder la forme des termes que l'on aura dans l'équation analogue à (8′),

$$(17)\quad \begin{aligned} &-p'^2(\omega + i\xi)[1 + mip'k(p - e_2)^{k-1}][1 + np'k(p - e_2)^{k-1}]^3 + \ldots \\ &+ [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)][\{p''(\omega + i\xi) - imk(k-1)(p - e_2)^{k-2}p'^3\} \\ &\times \{1 + np'k(p - e_2)^{k-1}\}^3 + \ldots], \end{aligned}$$

où l'on n'a écrit que le strict nécessaire pour le degré des termes; on voit que le degré minimum des termes en m ou n est $2k + 1$; si donc $k \geqq 3$, les termes de degré minimum en X et Y sont ceux que fournit (16); pour un point quelconque du rectangle

$$e_1 \geqq u \geqq e_2 \geqq v \geqq e_3, \qquad u = p(\omega + i\xi), \qquad v = p(\omega' + \eta)$$

autre que le sommet $u = v = e_2$, la courbure totale est finie; pour $u = v = e_2$, elle se réduira à 1 : en effet, on a, au voisinage de ce point,

$$H = 1 + \frac{P_7(X, Y) + P_8(X, Y) + \ldots}{(X^2 + Y^2)^3 + Q_7(X, Y) + \ldots}, \tag{18}$$

et pour X, Y très petits, H se réduit à l'unité; si, d'autre part, on prend un point *fixe* (u, v) autre que $u = v = e_2$, la courbure tend vers 1, si m, n tendent vers zéro; ceci suffit à montrer que pour m, n suffisamment petits et $k \geqq 3$, le ds^2 (14) a toujours sa courbure positive, finie, non nulle; mais, pour pouvoir se servir des résultats de M. H. Weyl et affirmer que ce ds^2 définit une surface fermée convexe, *in abstracto*, il faudrait lever la difficulté offerte par $u = v = e_2$ ou $\xi = K'$, $\eta = K$, car bien que la fonction H définie par (18) tende vers 1 si X et Y tendent vers zéro, la fonction H n'est pas holomorphe au voisinage de ce point $X = Y = 0$.

4. *Digression sur certaines surfaces auxiliaires et les points où la courbure totale est indéterminée.* — Je définis une surface algébrique auxiliaire de degré 4 par le procédé suivant : dans le plan horizontal xOy, soit la circonférence C d'équation

$$(x - \varepsilon)^2 + y^2 = (1 + \varepsilon)^2,$$

où ε est une certaine constante positive que je suppose d'abord petite. La surface S est engendrée par une circonférence variable C′ d'équations

$$\begin{cases} z = z_0, \\ (x - \varepsilon\sqrt{1 - z_0^2})^2 + y^2 = (1 + \varepsilon)^2(1 - z_0^2). \end{cases} \tag{1}$$

Chaque plan horizontal donne deux de ces circonférences, symétriques l'une de l'autre par rapport à Oz; chacune rencontre la circonférence Γ décrite de O pour centre, avec un rayon égal à 1, dans le plan xOz; si nous suivons par continuité la circonférence C′, qui, pour $z_0 = 0$, se réduit à C, cette circonférence C′ rencontre la demi-circonférence Γ située du côté des x négatifs et engendre une nappe de surface *convexe* fermée, sans singularité, voisine, pour ε petit, de la sphère Σ

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1;$$

la surface S se compose de cette nappe et de la nappe symétrique relativement à Oz; un plan pivotant autour de Oz coupe S suivant deux ellipses ayant en commun pour axe le diamètre vertical de Γ; ce plan coupe la nappe isolée sur S suivant deux demi-ellipses dont les axes horizontaux ont une longueur différente. L'équation de S est immédiate,

$$(2)\qquad [x^2+y^2+(1+2\varepsilon)(z^2-1)]^2=4\varepsilon^2x^2(1-z^2).$$

En transportant l'origine au point $(0, 0, 1)$, on a l'équation

$$(2')\qquad [x^2+y^2+(1+2\varepsilon)(z'^2+2z')]^2+4\varepsilon^2x^2(z'^2+2z')=0,$$

de sorte que le cône des tangentes à la nouvelle origine est le plan $z'=0$ compté deux fois. Pour $\varepsilon=0$, la surface S se réduit bien à la surface Σ

$$x^2+y^2+z^2=1$$

comptée deux fois. Une représentation paramétrique de S s'obtient immédiatement:

$$(3)\qquad \begin{cases} x=\varepsilon\sin\theta+(1+\varepsilon)\sin\theta\cos\varphi,\\ y=\qquad\qquad(1+\varepsilon)\sin\theta\sin\varphi,\\ z=\qquad\qquad\qquad\cos\theta;\end{cases}$$

$$(4)\qquad \begin{cases} c=\sin\theta\cos\varphi,\\ c'=\sin\theta\sin\varphi,\\ c''=\cos\theta.\end{cases}$$

La nappe dont nous avons parlé s'obtient en faisant varier φ de 0 à 2π et θ de 0 à $\frac{\pi}{2}$; la nappe symétrique relativement à Oz s'obtient en remplaçant ensuite θ par $-\theta$; nous avons mis en regard, formules (4), ce que l'on obtient pour $\varepsilon=0$; on peut faire correspondre un à un les points de Σ et S correspondant aux mêmes valeurs de θ, φ. On calcule aisément par le tableau des dérivées $\frac{\partial x}{\partial\theta}, \frac{\partial x}{\partial\varphi}, \ldots,$

$$(5)\qquad \begin{vmatrix} \varepsilon\cos\theta+(1+\varepsilon)\cos\theta\cos\varphi & (1+\varepsilon)\cos\theta\sin\varphi & -\sin\theta\\ -(1+\varepsilon)\sin\theta\sin\varphi & (1+\varepsilon)\sin\theta\cos\varphi & 0\end{vmatrix},$$

les coefficients E, F, G du ds^2, $E\,d\theta^2 + 2F\,d\theta\,d\varphi + G\,d\varphi^2$,

$$(6)\qquad \begin{cases} E = (1+\varepsilon)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta + \varepsilon^2\cos^2\theta + 2\varepsilon(1+\varepsilon)\cos^2\theta\cos\varphi, \\ F = -\varepsilon(1+\varepsilon)\sin\theta\cos\theta\sin\varphi, \\ G = (1+\varepsilon)^2\sin^2\theta, \end{cases}$$

puis les mineurs ξ, η, ζ, de (5),

$$(7)\qquad \begin{cases} \xi = [(1+\varepsilon)\sin\theta]\sin\theta\cos\varphi, \qquad \eta = [(1+\varepsilon)\sin\theta]\sin\theta\sin\varphi, \\ \zeta = [(1+\varepsilon)\sin\theta][(1+\varepsilon)\cos\theta + \varepsilon\cos\theta\cos\varphi)], \end{cases}$$

et enfin les coefficients D, D′, D″ de Gauss,

$$(8)\qquad D = -(1+\varepsilon)\sin\theta[1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi], \qquad D' = 0, \qquad D'' = -(1+\varepsilon)^2\sin^3\theta.$$

La courbure totale K égale à $\dfrac{DD'' - D'^2}{(EG - F^2)^2}$ est donc

$$(9)\qquad K = \frac{1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi}{(1+\varepsilon)[(1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi)^2\cos^2\theta + \sin^2\theta]^2};$$

ε étant supposé positif, le numérateur $1+\varepsilon(1+\cos\varphi)$ est toujours positif, au moins égal à 1, de sorte que la courbure est toujours positive, finie, non nulle. Or pour le point le plus haut de la surface, $\theta = 0$, φ *indéterminé*, on a

$$(10)\qquad K = \frac{1}{(1+\varepsilon)(1+\varepsilon+\varepsilon\cos\varphi)^3},$$

et l'on voit que cette courbure varie en ce point depuis $\dfrac{1}{1+\varepsilon}$ jusqu'à $\dfrac{1}{(1+\varepsilon)(1+2\varepsilon)^3}$. La courbure totale en ce point est donc indéterminée; la circonstance obtenue, pour le premier exemple du paragraphe précédent, n'est donc pas de nature propre à empêcher l'existence des surfaces correspondantes; pour le second, nous avons vu que la courbure totale reste finie et est égale à 1 au point critique. La surface S a son ds^2 défini sur toute la sphère Σ, au sens de M. Weyl, mais avec la restriction que, pour $\theta = 0$, on a le quotient $\cos\varphi = \dfrac{c}{\sqrt{c^2+c'^2}}$ qui est fini, mais non holomorphe en c, c', c''. Avec les idées de M. Weyl, on doit exprimer x, y, z en fonction homogène de degré zéro, de c, c', c''.

On a ainsi

$$(11)\quad x = \frac{\varepsilon\sqrt{c^2+c'^2}+(1+\varepsilon)c}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},\qquad y = \frac{(1+\varepsilon)c'}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},\qquad z = \frac{c''}{\sqrt{c^2+c'^2+c''^2}},$$

de sorte que $c = c' = 0$ donne déjà une singularité; puis

$$(12)\quad \left\{\begin{aligned} E &= \frac{[\varepsilon^2+(1+\varepsilon)^2]c''^2+c^2+c'^2+2\varepsilon(1+\varepsilon)c''^2\dfrac{c}{\sqrt{c^2+c'^2}}}{c^2+c'^2+c''^2},\\ F &= \frac{-\varepsilon(1+\varepsilon)c'c''}{c^2+c'^2+c''^2},\qquad G = \frac{(1+\varepsilon)^2(c^2+c'^2)}{c^2+c'^2+c''^2},\\ K &= \frac{\left(1+\varepsilon+\dfrac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+c'^2}}\right)(c^2+c'^2+c''^2)^3}{(1+\varepsilon)\left[\left(1+\varepsilon+\dfrac{\varepsilon c}{\sqrt{c^2+c'^2}}\right)^2c''^2+c^2+c'^2\right]^3}. \end{aligned}\right.$$

Bien que la méthode stricte de M. H. Weyl ne soit plus applicable au ds^2 (6), on voit néanmoins que ce ds^2 définit une surface convexe fermée (à un déplacement et symétrie près). Il n'y a donc pas à hésiter pour essayer d'étendre la méthode de l'auteur allemand aux exemples qu'un problème intéressant m'a fait trouver; même au cas où ces exemples ne donneraient pas de surfaces fermées, les recherches complémentaires sur les méthodes de M. H. Weyl ne seraient pas stériles et auraient un gros intérêt pour la théorie des surfaces. J'ajoute une autre remarque, qui montrera elle aussi l'utilité de la digression de ce paragraphe. Aux points (0, 0, 1) et (0, 0, —1) la surface S *complète* admet un plan tangent double : j'ai pu, par un certain procédé (celui des sections horizontales suivies par continuité), décomposer ma surface S *complète* en deux nappes séparées, sans *singularité* (sauf peut-être pour l'œil du mathématicien); si, au contraire, on engendre la surface par les ellipses complètes dont j'ai parlé (sections par les plans pivotant autour de Oz), la surface ne se sépare pas, ou se sépare, au gré de l'opérateur; je trace sur la figure 7 la circonférence C et sa symétrique relativement à l'origine; en prenant *toujours* la plus grande des deux ellipses méridiennes, on a une nappe dont la section horizontale est CEDFC; en prenant la plus petite, on a une nappe dont la section

horizontale est AEBF; nous avions pris avant la nappe dont la section horizontale est AEDF.

Il est facile de voir que les surfaces définies au paragraphe précé-

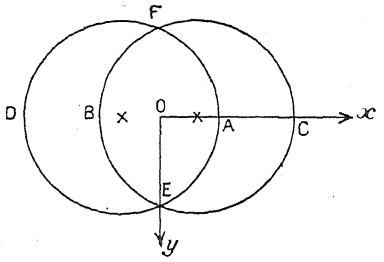

Fig. 7.

dent offrent, si on les prend dans leur ensemble, en chaque foyer, précisément deux nappes régulières, tangentes entre elles (toujours en admettant l'existence de la surface). En effet, dans la représentation, conforme sur le plan (x, y),

$$(13)\quad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](dx^2 + dy^2), \\ x = \xi + m[p(\omega + i\xi) - e_2]^k, \qquad y = \eta + n[p(\omega' + \eta) - e_2]^k, \end{cases}$$

il y a sur le plan (x, y) réduction de moitié pour les angles de la surface autour du foyer F_1; nous avons donc obtenu un rectangle (x, y) analogue au rectangle (ξ, η) de la figure 6, obtenu en faisant varier ξ de $-2K'$ à $+2K'$, et η de $-K$ à $+K$; le tour complet fait sur la nappe correspondante de S, autour de F_1, tour d'amplitude 2π, est traduit sur le plan (x, y) par une rotation d'amplitude π seulement; mais si nous prenons maintenant deux valeurs de (ξ, η) symétriques relativement à F_1, ce qui revient à remplacer ξ par $2K' - \xi$ et η par $2K - \eta$, $p(\omega + i\xi)$ et $p(\omega' + \eta)$ reprennent les mêmes valeurs; mais les quantités suivantes (ou leurs carrés)

$$(14)\quad \begin{cases} dx = d\xi\,[1 + mk\{p(\omega + i\xi) - e_2\}^{k-1} ip'(\omega + i\xi)], \\ dy = d\eta\,[1 + nk\{p(\omega' + \eta) - e_2\}^{k-1} p'(\omega' + \eta)] \end{cases}$$

ne se reproduisent pas, car $p'(\omega + i\xi)$, $p'(\omega' + \eta)$ changent de signe; on a donc une nappe de ds^2 différent, tandis que dans la surface

$$(15)\qquad ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](d\xi^2 + d\eta^2),$$

qui avait servi de point de départ, on retrouvait le même ds^2. On a donc deux nappes, distinctes, non applicables l'une sur l'autre, tangentes entre elles au foyer F_1 : leur total donne une rotation de 4π dans le plan tangent, réduite à 2π sur l'image (x, y); si m, n tendent vers zéro, chacune de ces deux nappes tend à se confondre avec la surface de départ (15).

C'est une circonstance analogue à celle qui se produit pour la surface algébrique S prise comme exemple ici; elle se compose de deux nappes qui, séparément, tendent vers Σ si ε tend vers zéro.

5. *Autres surfaces déduites de la sphère.* — J'ai déjà indiqué comment le ds^2 de la sphère

$$(1)\quad d\sigma^2 = \frac{v-u}{4}\left[\frac{du^2}{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)} - \frac{dv^2}{(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3)}\right],$$

$$(1')\quad d\sigma^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](d\xi^2 + d\eta^2)$$

conduit aux nouveaux ds^2 à géodésiques fermées (m, n entiers premiers entre eux),

$$(2)\quad ds^2 = \frac{v-u}{4}\left[\frac{m^2\,du^2}{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)} - \frac{n^2\,dv^2}{(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3)}\right],$$

$$(2')\quad ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](m^2 d\xi^2 + n^2 d\eta^2).$$

Écrivons

$$(3)\quad \left\{\begin{aligned} &x = m\xi, \qquad y = n\eta, \\ &ds^2 = \left[p\left(\omega + i\frac{x}{m}\right) - p\left(\omega' + \frac{y}{n}\right)\right](dx^2 + dy^2), \end{aligned}\right.$$

on a pour la courbure totale l'expression

$$(4)\quad \frac{1}{RR'} = \frac{\dfrac{4v^3 - g_2 v - g_3}{n^2} - \dfrac{4u^3 - g_2 u - g_3}{m^2} + (u-v)\left[\dfrac{6u^2 - \frac{g_2}{2}}{m^2} + \dfrac{6v^2 - \frac{g_2}{2}}{n^2}\right]}{2(u-v)^3}.$$

Les courbes $\frac{1}{RR'} = H$, où H est une constante arbitraire, forment dans le plan (u, v) un faisceau de cubiques, dont une cubique de base est la première bissectrice $u - v = 0$ comptée trois fois; les points de base sont donc les trois points $u = v = e_1$, ou e_2, ou e_3 comptés chacun trois fois; en chacun la tangente est parallèle à la seconde bissectrice.

L'élément superficiel de la représentation sphérique conduit à l'intégrale double

$$(5)\qquad \int\int \frac{i(u-v)mn\,du\,dv}{4\sqrt{(u-e_1)(u-e_2)(u-e_3)(v-e_1)(v-e_2)(v-e_3)}}\,\frac{1}{\mathrm{RR}'},$$

qui, au voisinage de $u=v=e_2$, n'a pas de sens et donne un résultat infiniment grand pour une aire infiniment petite de forme convenable entourant le point $u=v=e_2$: il ne peut donc exister de surface fermée ayant ce ds^2 particulier (2), à moins que m et n ne soient égaux tous deux à l'unité [en effet, en écrivant $u=\mathrm{U}+e_2$, $v=\mathrm{V}+e_2$, l'élément différentiel (5) est de la forme

$$\frac{\mathrm{U}-\mathrm{V}}{\sqrt{\mathrm{UV}}}\,\frac{\mathrm{AU}+\mathrm{BV}+\ldots}{(\mathrm{U}-\mathrm{V})^3}\,d\mathrm{U}\,d\mathrm{V};$$

où A, B, ... sont des constantes].

Il y a néanmoins intérêt à étudier au point de vue de l'*analysis situs* les surfaces S annulaires ayant ce ds^2 ; faisons correspondre sur S et la sphère Σ les points de même ξ, η; dans cette correspondance, les géodésiques de S sont remplacées sur Σ par des courbes non géodésiques, mais topologiquement images. Cette image a pour équation sur Σ

$$(6)\qquad \frac{m\,d\xi}{\sqrt{p(\omega+i\xi)-h}}=\frac{n\,d\eta}{\sqrt{h-p(\omega'+\eta)}}=dt.$$

Supposons d'abord $e_2\geqq h\geqq e_3$ de façon que la courbe rencontre toutes les coniques sphériques ξ; si $2\tau(h)$ désigne toujours la quantité qui intervient pour les grands cercles de la sphère

$$(7)\qquad 2\tau(h)=\int_0^{4\mathrm{K}'}\frac{d\xi}{\sqrt{p(\omega+i\xi)-h}},$$

on voit que les intégrales ξ, η de (6) offrent les échanges suivants :

$$(8)\qquad \left\{\begin{array}{lll} t, & \xi, & \eta, \\ t+2mn\tau(h), & \xi+4n\mathrm{K}', & \eta, \\ t+\ \ mn\tau(h), & \xi+2n\mathrm{K}', & (-1)^m\eta. \end{array}\right.$$

Supposons d'abord m, n entiers, premiers entre eux, *impairs* : l'accroissement $mn\tau(h)$ donne sur S des géodésiques à antipodes, les antipodes

correspondant à deux points diamétralement opposés de la sphère; cette correspondance n'est pas conforme et la courbe fait sur S ou Σ, avant de se fermer, n tours. [Bien entendu, quand on supposera $e_1 \geqq h \geqq e_2$, les variables ξ, η échangeront leurs rôles et les circonstances resteront les mêmes.]

Supposons maintenant *m pair, n impair* (le cas de m impair, n pair reviendra à un échange des rôles de ξ et η). L'accroissement $mn\tau(h)$ donne sur S le passage d'un point (ξ, η) à un point $(\xi + 2n\mathrm{K}', \eta)$, *superposé* au point $(\xi + 2\mathrm{K}', \eta)$, ce qui donne sur Σ *deux points symétriques autour de* $\mathrm{O}z$; on a simplement une *congruence géodésique* sur S; la géodésique en jeu, *qui rencontre toutes les coniques* ξ, se referme sur S après avoir fait n tours comme précédemment.

Si m est *impair, n pair*, pour les *géodésiques qui rencontrent toutes les coniques* ξ, l'accroissement $mn\tau(h)$ donné à t donne, sur S, le passage de (ξ, η) au point $(\xi + 2n\mathrm{K}', -\eta)$ superposé au point $(\xi, -\eta)$, ce qui donne sur Σ *deux points symétriques relativement au plan* $x\mathrm{O}y$. C'est donc un exemple précis du cas où *les antipodes géodésiques donnent une auto-isométrie de* S *avec une ligne invariante*, ce qui, par une déformation convenable de S peut se ramener à une symétrie plane; il suffirait, en effet, que la ligne invariante, géodésique $\eta = 0$, devienne plane. Si nous échangeons, pour ce qui vient d'être dit, les rôles de m, n, ξ et η, K et K', nous voyons que, pour *m pair, n impair* et pour les géodésiques qui, cette fois, rencontrent toutes les coniques η et simplement une fraction des coniques ξ, on aura pour l'accroissement $mn\tau(h)$ le passage du point (ξ, η) à un point $(-\xi, \eta + 2m\mathrm{K})$ superposé au point $(-\xi, \eta)$, ce qui donne sur Σ deux points symétriques relativement au plan $y\mathrm{O}z$. On a donc une propriété importante pour *m pair, n impair*, les géodésiques fermées se partagent en deux catégories : les unes qui rencontrent toutes les coniques ξ se referment après avoir donné des couples de points congruents géodésiquement; les autres, qui rencontrent toutes les coniques η, se referment après avoir donné des couples d'antipodes, chaque géodésique de cette série ayant un point double dont le lieu est une courbe à la fois géodésique et conique géodésique, ligne invariante dans l'auto-isométrie de la surface. Je signale, d'ailleurs, comme au paragraphe 3, qu'il y a une difficulté à résoudre : c'est de trouver un anneau S qui comporte à la fois des géo-

désiques des deux espèces. La distinction entre les antipodes et les symétriques géodésiques ne consiste donc pas en ce fait que les surfaces à antipodes pourraient se ramener exclusivement à des surfaces ayant un centre de symétrie et les surfaces à symétriques géodésiques à des surfaces ayant un plan de symétrie; la distinction tient simplement à ce que la géodésique coupe *toutes* les coniques géodésiques d'un système, dans le cas des antipodes et une *fraction* seulement de l'un et l'autre système dans le cas des symétriques géodésiques.

6. *Surfaces fermées à géodésiques fermées et ayant un ds^2 de Liouville.* — La région où le ds^2

$$ds^2 = [\alpha(x) + \beta(y)](dx^2 + dy^2) \tag{1}$$

est défini positif est donnée par l'inégalité

$$\alpha(x) + \beta(y) > 0. \tag{2}$$

Ce ds^2, tel celui $[p(\omega + ix) - p(\omega' + y)](dx^2 + dy^2)$ de la sphère, peut rester positif dans tout le plan (exception faite de points isolés, tels que $x = \pm \frac{\omega'}{i}$ et $y = \pm \omega$ et points congruents). Si l'inégalité (2) n'est pas vérifiée dans tout le plan, la courbe $\alpha(x) + \beta(y) = 0$ partage le plan en régions; pour chaque région positive, une fraction seule peut se trouver représentée par une surface, de sorte que ces surfaces admettent soit une ligne d'arrêt, soit une arête de rebroussement. Nous devons donc, pour les surfaces fermées, revenir au cas où $\alpha(x) + \beta(y)$ est positif, quels que soient x et y, sauf peut-être pour certains couples (x_0, y_0) isolés; or, dans le cas A_1, $\alpha(x)$ est périodique, donc limitée supérieurement et inférieurement et l'inégalité $\beta(y) \geqq -\alpha(x)$ montre aussi que β est limitée inférieurement; le cas A_1 a d'ailleurs montré que β est limitée supérieurement. Dans le cas A_2, α et β sont chacune limitées supérieurement, de sorte que les inégalités $\beta \geqq -\alpha$ et $\alpha \geqq -\beta$ prouvent encore que β et α sont limitées inférieurement. Nous pouvons supposer que la borne supérieure de β est zéro; la fonction $z = -\beta(y)$ est positive, limitée supérieurement; soit m la limite supérieure, positive de z et A, a les limites supérieure et inférieure de α. On a évidemment, en vertu de $\alpha + \beta \geqq 0$, l'inégalité $a - m \geqq 0$;

on ne peut avoir $a > m$, sinon les géodésiques

$$(3) \qquad \frac{dx}{\sqrt{\alpha - h}} = \frac{dy}{\sqrt{h - z}},$$

obtenues pour une valeur *quelconque* de h, comprise entre a et m, couperaient *toutes* les coniques x, *toutes* les coniques y et cela est impossible en géodésiques fermées (Chap. I, § 3). La *limite inférieure de* α *est donc égale* à la *limite supérieure de* $-\beta$; les valeurs de h comprises entre A et a donnent des géodésiques coupant *toutes* les coniques y, donc β est *périodique* (si α est constant, cette conclusion est en défaut car $A = a = \alpha$, c'est le cas des ds^2 de révolution qui a été étudié à part et sur lequel nous ne revenons plus). Si h est compris entre a et zéro, la géodésique coupe toutes les coniques x, donc α est *périodique*. Cela explique les circonstances rencontrées pour la sphère; on a alors

$$(4) \qquad \begin{cases} \alpha = p(\omega + ix) - e_3, & \beta = e_3 - p(\omega' + y), \\ A = e_1 - e_3, & a = e_2 - e_3. \end{cases}$$

Il résulte de là que *toute* la surface fermée éventuelle dont le ds^2 est (1) a pour image sur le plan xOy un domaine ayant pour frontière : 1° deux courbes ne différant que par une translation, parallèle à Ox, d'amplitude 2π (grâce à une homothétie convenable faite sur le plan); 2° deux courbes ne différant que par une translation, parallèle à Oy, d'amplitude 2λ, si 2λ est la période de β. Pour la sphère 2π et 2λ sont doubles de la plus petite période de α et β respectivement; pour avoir la sphère *une* fois, il suffit d'un rectangle de dimension 2π et λ ou π et 2λ; le rectangle de dimension $(2\pi, 2\lambda)$ donne *deux* fois la sphère et rétablit la symétrie entre les coordonnées x, y. Nous allons retrouver un fait analogue ici. Marquons dans le plan xOy (*fig.* 8) l'axe des x qui correspond à la conique géodésique $y = 0$ (ligne qui est géodésique à moins d'être anguleuse), l'axe des y qui correspond de même à la conique géodésique $x = 0$, analogue à la précédente (nous avons supposé les limites supérieures de α et β obtenues pour x et y nuls); la géodésique particulière, correspondant à $h = a$ (a limite inférieure de α et supérieure de $-\beta$), est une géodésique de transition représentée dans son intégrité par une parallèle $x = x_0$ à l'axe Oy et par

une parallèle $y = y_0$ à l'axe Ox; les trois géodésiques $x = 0$, $y = 0$ et $x = x_0$ ou $y = y_0$ limitent un triangle de la surface; dans la représentation sphérique de la surface; il correspond à ce triangle, d'après la formule de Gauss, une portion de la sphère d'étendue $\frac{\pi}{2}$; la surface doit donc comprendre *huit* triangles analogues offrant avec leurs images

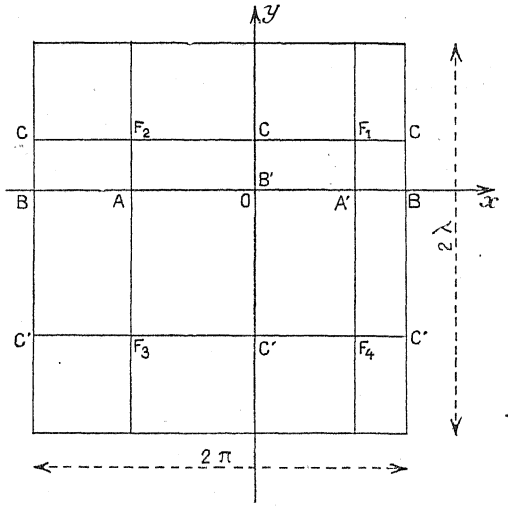

Fig. 8.

une configuration analogue à celle que nous avons obtenue pour la sphère (*fig.* 6, Chap. II); il y a nécessairement deux valeurs $-x_1, x_0$ (x_1 et x_0 positifs) donnant à α la valeur minimum a, deux valeurs $-y_1, y_0$ (y_1 et y_0 positifs) donnant à $-\beta$ la valeur maximum a; cela fait quatre foyers F_1, F_2, F_3, F_4; autour de F_1 les angles, sur la surface, sont diminués de moitié dans la représentation plane. Autour de F_1 dans le plan on peut décrire un angle d'amplitude 2π, donc sur la surface *complète* un angle d'amplitude 4π; cela prouve l'existence de deux nappes se raccordant sur la surface en F_1. Sur la sphère cette singularité n'existe pas sur la surface, mais sur sa représentation, car deux points symétriques relativement à F_1 donnent le même point de la sphère; ici, au contraire, la représentation n'a pas de singularité, c'est la surface qui possède la singularité; cela explique pourquoi le rectangle *complet* de dimensions $(2\pi, 2\lambda)$ donne l'image conforme de la

surface complète, qui a pour courbure totale 8π et est représentable univoquement sur la sphère *recouverte deux fois*. Ce n'est qu'exceptionnellement que la surface aura pour courbure totale 4π et sera représentable sur la sphère recouverte une fois; il me paraît assez vraisemblable que dans ce cas on doit avoir

$$x_0 = x_1 = \frac{\pi}{2}, \qquad y_0 = y_1 = \frac{\lambda}{2}$$

et que deux points de xOy, symétriques par rapport à F_1, ou F_2, ou F_3, ou F_4 doivent être images d'un même point de la surface. Cela entraînerait

$$(5) \quad \begin{cases} \alpha(x) = \alpha(\pi - x), & \alpha(x) = \alpha(x + 2\pi), \\ \beta(y) = \beta(\lambda - y), & \beta(y) = \beta(y + 2\lambda), \end{cases} \qquad \alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \beta\left(\frac{\lambda}{2}\right).$$

Ceci montre qu'il y aurait là sujet à de belles recherches. Les conditions relatives à la courbure totale auraient aussi lieu à intervenir pour les foyers F_1, F_2, F_3, F_4 si l'on veut que ces points soient réguliers sur la surface.

7. *Exemple de surface possédant ∞^2 géodésiques fermées et ∞^2 géodésiques ouvertes.* — Considérons le ds^2 (m, n constantes)

$$(1) \quad \begin{cases} ds^2 = [p(\omega + i\xi) - p(\omega' + \eta)](dx^2 + dy), \\ x = \xi + m[p(\omega + i\xi) - e_2]^k, \\ y = \eta + n[e_2 - p(\omega' + \eta)]^k; \end{cases}$$

où k est de la forme $N + \frac{1}{2}$, N étant entier positif. Si ni m, ni n ne sont nuls, les géodésiques ne sont pas fermées. Supposons n nul; posons

$$(2) \qquad X = p(\omega + i\xi) - e_2, \qquad Y = e_2 - p(\omega' + \eta).$$

Les équations des géodésiques sont

$$(3) \qquad \frac{d\xi}{\sqrt{X - h}} + \frac{mkX^{k-1}\,dX}{\sqrt{X - h}} = \frac{d\eta}{\sqrt{h + Y}} = dt.$$

Pour h négatif, les géodésiques sont fermées, car le terme $2\tau(h)$ ne

fait intervenir que $\frac{d\xi}{\sqrt{X-h}}$, mais pour h positif, les géodésiques ne sont plus fermées. Précisément pour N au moins égal à trois, on peut espérer avoir ainsi des surfaces fermées convexes. Il est bon de donner un tel exemple, car dans tous les travaux antérieurs, on n'a pas songé à cette séparation des géodésiques sur une même surface fermée; j'ai indiqué plus haut des exemples analogues pour les surfaces à antipodes sur une région ne formant qu'une fraction de la surface (§ 3 de ce Chapitre).