ANNALES SCIENTIFIQUES DE L'É.N.S.

CHARLES RIQUIER

Sur les intégrales singulières des systèmes d'équations aux dérivées partielles

Annales scientifiques de l'É.N.S. 3e série, tome 44 (1927), p. 1-96
<http://www.numdam.org/item?id=ASENS_1927_3_44__1_0>

© Gauthier-Villars (Éditions scientifiques et médicales Elsevier), 1927, tous droits réservés.

L'accès aux archives de la revue « Annales scientifiques de l'É.N.S. » (http://www.elsevier.com/locate/ansens) implique l'accord avec les conditions générales d'utilisation (http://www.numdam.org/conditions). Toute utilisation commerciale ou impression systématique est constitutive d'une infraction pénale. Toute copie ou impression de ce fichier doit contenir la présente mention de copyright.

NUMDAM

Article numérisé dans le cadre du programme
Numérisation de documents anciens mathématiques
http://www.numdam.org/

ANNALES
SCIENTIFIQUES
DE
L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE

SUR LES FIGURES INTÉGRALES SINGULIÈRES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS AUX DÉRIVÉES PARTIELLES

PAR M. CHARLES RIQUIER

Introduction.

La définition que nous avons cru devoir adopter pour les intégrales *singulières*, objet du présent Travail, en la faisant découler, par simple opposition logique, de celle des intégrales *ordinaires* (¹), est basée, comme cette dernière, sur la considération d'un caractère qui peut se manifester ou disparaître suivant la forme que l'on donne au système différentiel étudié. Elle nous a conduit, après constatation de certaines propriétés dont jouissent les intégrales générales d'un système total passif, à formuler, pour divers types de systèmes d'équations aux dérivées partielles qui se rencontrent fréquemment, des énoncés où interviennent, en même temps que les intégrales singulières du système envisagé, les intégrales générales d'un système total correspondant. Voici, très brièvement résumés, la méthode que nous avons suivie et les résultats que nous avons obtenus : quelque modestes

(¹) *Voir* la suite de l'Introduction, V.

que soient ces résultats, peut-être le point de vue qui les a fournis contribuera-t-il à orienter plus sûrement de futures recherches.

I. Considérant une fonction analytique de $x, y, \ldots$ définie par un simple développement entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, nous nommerons *phase de nullité* de cette fonction l'extrémité finale de tout arc continu [1] partant du point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ et jouissant de la propriété suivante : « La fonction considérée, calculable par cheminement sur l'arc dont il s'agit, atteint la valeur zéro à son extrémité finale; mais elle ne l'atteint jamais tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées (réelles) dont l'arc dépend, à faire exclusion de la valeur finale, en remplaçant celle-ci par une autre située en deçà et indéfiniment voisine. »

II. Considérant un groupe de fonctions analytiques de $x, y, \ldots$ en nombre limité, définies chacune par un simple développement entier en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, nous nommerons *phase singulière* du groupe l'extrémité finale de tout arc continu, A, partant du point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ et jouissant de la propriété suivante : « Les diverses fonctions du groupe sont calculables par cheminement sur l'arc A tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont l'arc dépend, à faire exclusion de la valeur finale, en remplaçant celle-ci par une autre située en deçà et indéfiniment voisine; mais l'une au moins des fonctions du groupe cesse d'être calculable sur l'arc A, si l'on n'exclut pour aucune des indéterminées la valeur finale. »

III. Étant donné le système total *passif* du premier ordre

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k\,;\ j = 1, 2, \ldots, h),$$

considérons le groupe des seconds membres $F_{i,j}$, et proposons-nous d'en rechercher les phases singulières. Les intégrales générales,

$$(2) \qquad u_i = U_i(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k),$$

---

[1] Voir *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 37.

du système (1) ayant été formées de telle façon que, pour les valeurs fondamentales des h variables x, elles se réduisent à de simples fonctions *linéaires* des constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_k$, traçons, à partir du point fondamental de l'espace $[[x_1, \ldots, x_h]]$, un arc, $A_x(p, \ldots)$, dépendant d'un groupe d'indéterminées, $p, \ldots$; puis, à partir du point fondamental de l'espace $[[C_1, \ldots, C_k]]$, un arc, $A_C(q, \ldots)$, dépendant d'un deuxième groupe d'indéterminées, $q, \ldots$, qui n'offre aucune indéterminée commune avec le groupe $p, \ldots$. En supposant les intégrales générales (2) calculables par cheminement sur l'arc $[A_x(p, \ldots), A_C(q, \ldots)]$, le point $(u_1, \ldots, u_k)$ décrira, à partir du point fondamental de l'espace $[[u_1, \ldots, u_k]]$, un arc, $A_u(p, \ldots, q, \ldots)$, dépendant à la fois des indéterminées $p, \ldots$ et des indéterminées $q, \ldots$, et dès lors, le point $(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k)$ décrira, à partir du point fondamental de l'espace

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

l'arc $[A_x(p, \ldots), A_u(p, \ldots, q, \ldots)]$: soient

$(\xi_1, \ldots, \xi_h)$ l'extrémité finale de l'arc $A_x(p, \ldots)$;
$(\gamma_1, \ldots, \gamma_k)$ celle de l'arc $A_C(q, \ldots)$;
$(\upsilon_1, \ldots, \upsilon_k)$ celle de l'arc $A_u(p, \ldots, q, \ldots)$.

Cela posé, *si l'arc* $[A_x(p, \ldots), A_C(q, \ldots)]$, *praticable pour le calcul par cheminement des intégrales générales* (2), *fournit par son extrémité finale*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \gamma_1, \ldots, \gamma_k),$$

une phase de nullité du déterminant différentiel

$$\Delta = \frac{\partial(U_1, \ldots, U_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)},$$

l'arc $[A_x(p, \ldots), A_u(p, \ldots, q, \ldots)]$ *ne pourra manquer de fournir, par son extrémité finale*

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k),$$

une phase singulière du groupe des seconds membres $F_{i,j}$.

D'où la conséquence suivante :

Les intégrales générales, (2), du système (1) ayant la forme ci-dessus spécifiée, et ces intégrales étant supposées connues, considérons le système obtenu en adjoignant aux k relations (2) la relation

$$(3) \qquad \frac{\partial(U_1, \ldots, U_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0:$$

dans ce système, qui relie les $h+2k$ indéterminées $x_1, \ldots, x_h$, $u_1, \ldots, u_k$, $C_1, \ldots, C_k$, toute solution numérique,

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k),$$

fournira, en y faisant abstraction des valeurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de $C_1, \ldots, C_k$, la phase singulière

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k)$$

du groupe des $F_{i,j}$, à la condition toutefois que

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

soit l'extrémité finale d'un arc $[A_x(p, \ldots), A_c(q, \ldots)]$ praticable pour le calcul par cheminement des intégrales générales (2), et tout le long duquel en excluant la valeur finale de chacune des indéterminées $p, \ldots, q, \ldots$, le déterminant différentiel Δ n'atteigne jamais la valeur numérique zéro. Sous réserve de cette restriction, indispensable pour la rigueur, on se trouve conduit à éliminer, si possible, $C_1, \ldots, C_k$ entre les $k+1$ équations du système fini [(2), (3)].

Observons maintenant qu'en raison des conditions particulières imposées ci-dessus aux équations intégrales (2), leur formation présentera souvent de grandes difficultés, et que, dès lors, les calculs à effectuer pour l'élimination, ainsi que les vérifications relatives à la restriction de cheminement, deviendront pratiquement inexécutables : mais on peut tout d'abord, en ce qui concerne le calcul d'élimination, s'affranchir entièrement de ce surcroît de complications.

Effectivement, si, dans l'espace à $h+k$ dimensions (réelles ou imaginaires) $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$, on considère la figure

variable à k paramètres que définit le système des k équations

$$(4)\qquad \begin{cases} M_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ M_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \end{cases}$$

cette figure variable à h dimensions admet, en général, une enveloppe à $h+k-1$ dimension, dont l'équation réduite s'obtiendra par l'élimination des paramètres $C_1, \ldots, C_k$ entre les k équations (4) *et la relation*

$$(5)\qquad \frac{\partial(M_1, \ldots, M_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0\ (^1);$$

le système [(4), (5)], *en général normalement résoluble par rapport à $k+1$ des coordonnées, définira une caractéristique à $h-1$ dimensions* (²).

On conclut de là que, dans l'élimination indiquée plus haut sur les systèmes [(2), (3)], *le résultat est indépendant de l'écriture adoptée pour les équations intégrales générales du système* (1), lesquelles,

---

(¹) A cause de l'équation (5), cette élimination ne peut s'effectuer par la résolution des équations (4).

(²) Exemples :

1° $h=1$, $k=1$. Dans l'espace $[[x, y]]$, la ligne variable $F(x, y, C)=0$ admet, en général, une ligne enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination du paramètre C entre les deux équations $F(x, y, C)=0$, $\frac{\partial F}{\partial C}=0$; l'enveloppe touche d'ailleurs en un simple point chacune des enveloppées.

2° $h=1$, $k=2$. Dans l'espace $[[x, y, z]]$, la ligne variable

$$F_1(x, y, z, C_1, C_2)=0, \qquad F_2(x, y, z, C_1, C_2)=0$$

admet, en général, une surface enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination des paramètres C_1, C_2 entre les trois équations $F_1(x, y, z, C_1, C_2)=0$, $F_2(x, y, z, C_1, C_2)=0$, $\frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(C_1, C_2)}=0$; l'enveloppe touche d'ailleurs en un simple point chacune des développées.

3° $h=2$, $k=1$. Dans l'espace $[[x, y, z]]$, la surface variable $L(x, y, z, C)=0$ admet, en général, une surface enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination du paramètre C entre les deux équations $L(x, y, z, C)=0$, $\frac{\partial L}{\partial C}=0$; l'enveloppe se raccorde d'ailleurs suivant une ligne avec chacune des enveloppées.

définissant toujours, dans l'espace $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$, la même famille de figures, ne peuvent manquer, quand on effectue sur ces figures une recherche d'enveloppe, de conduire toujours au même résultat.

Si, après avoir procédé à cette recherche le plus simplement qu'on aura pu, on juge insuffisamment commodes les vérifications relatives à la restriction de cheminement telle que nous l'avons formulée, on tâchera d'apercevoir, soit par l'examen direct du groupe des $F_{i,j}$, soit par toute autre voie qui semblera praticable, si les divers points de l'espace $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$ fournis par l'élimination sont bien tous des phases singulières (II) de ce groupe.

IV. Étant donné un système partiel du premier ordre, linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant la structure de ceux que l'on considère dans la méthode d'intégration de Jacobi généralisée [1], on peut, à l'aide d'un mécanisme très simple, lui faire correspondre un système total auxiliaire, tel : 1° que la passivité du système partiel entraîne celle du système total; 2° que les phases singulières du groupe des seconds membres soient fournies, dans l'un et dans l'autre système, par les extrémités finales des mêmes arcs.

Tout système partiel non linéaire du premier ordre, n'impliquant qu'une seule fonction inconnue, et résolu par rapport à diverses dérivées (premières) de cette inconnue, jouit de la même propriété.

V. Considérant actuellement un système quelconque d'équations aux dérivées partielles dont les premiers membres soient *analytiques* et les seconds membres nuls, désignons par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues engagées dans le système et, nommons *groupe d'intégrales* tout groupe de fonctions,

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

---

[1] Ces systèmes peuvent impliquer un nombre quelconque de fonctions inconnues; voir *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 206.

qui, substituées à u, v, ..., transforment en identités les diverses équations proposées.

Dans ce système, un groupe d'intégrales, supposées *analytiques*, sera dit *ordinaire*, si l'on peut assigner aux variables indépendantes quelque domaine de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient régulières, mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les premiers membres du système le soient aussi.

Dans ce même système, un groupe d'intégrales, supposées *analytiques*, sera dit *singulier*, s'il n'est pas ordinaire, ou, en d'autres termes, si, dans la région de convergence du groupe formé par les développements initiaux des intégrales, et aussi loin que ce groupe puisse être prolongé analytiquement, les valeurs des intégrales, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, ne sortent jamais d'une région où le groupe formé par l'association des premiers membres cesse d'être régulier; d'une région, notamment, dont tous les points soient des phases singulières de ce dernier groupe.

Il importe de ne jamais perdre de vue la relativité de la distinction ainsi établie entre les intégrales ordinaires et les intégrales singulières : un système différentiel étant donné, une même figure intégrale peut être, pour lui, tantôt ordinaire, tantôt singulière, suivant que le système est mis sous telle ou telle forme [1].

---

[1] Par exemple, l'équation aux dérivées partielles

$$\left(z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 - \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial z}{\partial y} = 0$$

n'admet évidemment aucune intégrale singulière, puisque son premier membre est une fonction entière de x, y, z, $\frac{\partial z}{\partial x}$, $\frac{\partial z}{\partial y}$, considérés pour un instant comme cinq variables indépendantes distinctes; en particulier, les intégrales évidentes $z = C(x+y)$ [C constante arbitraire] en sont des intégrales ordinaires. Mais, si l'on écrit l'équation sous la forme

$$z - x\frac{\partial z}{\partial x} - y\frac{\partial z}{\partial y} - \sqrt{\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y}} = 0,$$

il résulte de la théorique analytique de la fonction radicale que ces mêmes intégrales deviennent singulières.

Il va sans dire, enfin, que, lorsqu'il s'agit d'un système différentiel résolu par rapport à telles ou telles des quantités qui figurent dans ses équations, c'est, d'après les définitions posées ci-dessus, le groupe des *seconds* membres que l'on doit envisager pour opérer la distinction entre les deux sortes d'intégrales.

VI. La méthode que nous allons indiquer, applicable aux divers types de systèmes passifs du premier ordre ci-après énumérés, permet souvent de réaliser un notable progrès dans la recherche de leurs intégrales singulières.

A. *Systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre.*

Considérons le système (1); les variables indépendantes qui s'y trouvent engagées étant en nombre h, et les fonctions inconnues en nombre k, ses intégrales analytiques, tant ordinaires que singulières, sont des figures à h dimensions, situées dans l'espace à $h+k$ dimensions (réelles ou imaginaires) $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$.

Se reportant aux conclusions finales de l'alinéa III sur les phases singulières des seconds membres d'un système total passif, on formera les équations intégrales générales,

$$\begin{gathered} I_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \end{gathered}$$

du système (1), auxquelles on adjoindra la relation

$$\frac{\partial(I_1, \ldots, I_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0.$$

En éliminant, si possible, entre ces $k+1$ relations, l'une des constantes arbitraires, C_k par exemple, on obtiendra dans l'espace à $h+k$ dimensions une famille de figures à h dimensions, dépendant des paramètres $C_1, \ldots, C_{k-1}$, et dont tout point sera, sauf vérification, une phase singulière du groupe des seconds membres $F_{i,j}$. On tâchera alors d'apercevoir si l'attribution à $C_1, \ldots, C_{k-1}$ de telles ou telles

valeurs convenablement choisies peut fournir des intégrales du système (1).

B. *Systèmes passifs du premier ordre ayant la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, et intégrables par la méthode de Jacobi généralisée.*

Supposons, pour fixer les idées, que le système considéré implique les trois fonctions inconnues u, v, w des cinq variables indépendantes x, y, z, s, t, et qu'il soit résolu par rapport aux dérivées (premières) relatives à x, y, z de ces inconnues; ses intégrales analytiques, tant ordinaires que singulières, sont des figures à cinq dimensions situées dans l'espace à huit dimensions

$$[[x, y, z, s, t, u, v, w]].$$

Au système partiel donné on fera correspondre un système total auxiliaire, impliquant les cinq fonctions inconnues s, t, u, v, w des variables x, y, z, et jouissant, vis-à-vis du système partiel, de la double propriété énoncée à l'alinéa IV. On formera ensuite les équations intégrales générales du système auxiliaire, et, les seconds membres de ces dernières étant supposés nuls, on égalera à zéro le déterminant différentiel de leurs premiers membres, pris par rapport aux constantes arbitraires α, β, γ, δ, λ. En éliminant, si possible, entre ces six relations, trois des cinq constantes, γ, δ, λ par exemple, on obtiendra, dans l'espace à huit dimensions, une famille de figures à cinq dimensions, dépendant des paramètres α, β, et dont tout point sera, sauf vérification, une phase singulière pour le groupe des seconds membres du système total auxiliaire, donc aussi du système partiel proposé. On tâchera alors d'apercevoir si l'attribution à α, β de telles ou telles valeurs convenablement choisies peut fournir des intégrales de ce dernier.

C. *Systèmes passifs et non linéaires du premier ordre n'impliquant qu'une seule fonction inconnue.*

Supposons, pour fixer les idées, que la fonction inconnue, u, qui

se trouve engagée dans le système, dépende des cinq variables x, y, z, s, t, et que le système soit résolu par rapport à $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$.

Au système partiel donné on fera correspondre un système total auxiliaire, impliquant les cinq fonctions inconnues s, t, u, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ des trois variables x, y, z, et jouissant vis-à-vis du système partiel, de la double propriété énoncée à l'alinéa IV. En opérant, *mutatis mutandis*, comme nous l'avons indiqué pour les systèmes du type B, on tombera sur une relation où ne figurent, à l'exclusion de toute constante arbitraire, que les quantités x, y, z, s, t, u, $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, et dont toute solution numérique sera, sauf vérification, une phase singulière pour le groupe des seconds membres du système total auxiliaire, donc aussi du système partiel proposé. On tâchera alors d'apercevoir si quelque intégrale de l'équation ainsi obtenue vérifie en même temps ce dernier système.

CHAPITRE I.

PSEUDO-FONCTIONS CALCULABLES PAR CHEMINEMENT LE LONG D'UN ARC; COMPOSITION DES PSEUDO-FONCTIONS; PHASES DE NULLITÉ DES PSEUDO-FONCTIONS, LEURS PHASES SINGULIÈRES.

Rappel de notions générales relatives à la continuité.

1. Nous nommerons *point à n coordonnées* tout système de valeurs particulières attribuées aux n variables *réelles* $x, y, \ldots$, et *espace à n dimensions* l'ensemble des points à n coordonnées; cet espace sera désigné par la notation $[[x, y, \ldots]]$ [1].

---

[1] Nous généraliserons plus loin (n° 10) le sens de la notation $[[x, y, \ldots]]$ pour l'étendre au cas où les variables sont imaginaires.

La distance des deux points

$$(x_1, y_1, \ldots), \quad (x_2, y_2, \ldots)$$

est, par définition, la racine carrée non négative de la quantité

$$(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + \ldots;$$

si, notamment, il n'y a qu'une seule variable réelle, x, la distance des deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence $x_1 - x_2$ [1].

Pour que deux points soient identiques, c'est-à-dire pour que leurs coordonnées semblables soient respectivement égales, il faut et il suffit que leur distance soit nulle.

2. Dans l'espace à n dimensions on a souvent à considérer, à l'exclusion de tous les autres points, ceux dont les coordonnées satisfont à telles ou telles conditions, d'une nature absolument quelconque d'ailleurs; leur ensemble constitue ce qu'on nomme une *région* de l'espace à n dimensions.

On peut établir tout d'abord la propriété suivante :

Dans l'espace à n dimensions (n° 1), *si la distance de quelque point fixe de cet espace à un point variable d'une région donnée $\mathcal{R}$ reste toujours inférieure à quelque constante positive, tout point fixe jouit par rapport à $\mathcal{R}$ de la même propriété :* la région, en pareil cas, est dite *limitée* [2].

3. Un point fixe sera dit *complètement extérieur* à une région donnée de l'espace à n dimensions, si sa distance à un point variable de cette dernière reste supérieure à quelque constante positive.

Une région sera dite *complète*, si tout point n'en faisant pas partie lui est complètement extérieur.

4. Désignant par $x_0, y_0, \ldots$ certaines valeurs particulières des n variables réelles $x, y, \ldots$, et par X, Y, ... d'autres valeurs particu-

---

[1] Nous appelons *module* d'une quantité réelle ce qu'on nomme habituellement valeur absolue de cette quantité.

[2] *Voir* RIQUIER, *Les Systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 2.

lières des mêmes variables, respectivement supérieures aux premières, nous nommerons *intervalle complexe* la région de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ définie par les n relations simultanées

$$x_0 \leqq x \leqq X,$$
$$y_0 \leqq y \leqq Y,$$
$$\ldots\ldots\ldots,$$

dont chacune, considérée isolément, définit un *intervalle simple*.

Un intervalle complexe constitue une région limitée et complète de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ (¹).

5. Désignant par $x, y, \ldots$ des variables *réelles* en nombre quelconque n, considérons une région $\mathcal{R}$ extraite de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ et supposons qu'à chaque point $(x, y, \ldots)$ de la région on fasse, de quelque manière, correspondre un ensemble de constantes *réelles ou imaginaires* (soit une, soit plusieurs, soit une infinité), dont chacune s'appellera. pour abréger, une *caractéristique du point*.

Sur ces données faisons en outre l'hypothèse suivante :

Si un point $(x_0, y_0, \ldots)$ *de la région admet parmi ses caractéristiques la constante* λ_0, *tout point de la région* $\mathcal{R}$ *suffisamment voisin du précédent admet parmi les siennes quelque constante dont la différence à* λ_0 *présente un module inférieur à une quantité positive assignée d'avance.*

En d'autres termes, si l'on considère un point déterminé $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région $\mathcal{R}$, une caractéristique déterminée λ_0 de ce point, et une constante positive arbitrairement donnée α, on peut assigner une constante positive β telle que la relation

$$\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + \ldots} < \beta,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathcal{R}$, entraîne pour ce dernier point l'existence de quelque caractéristique λ satisfaisant à la relation

$$\operatorname{mod}(\lambda - \lambda_0) < \alpha.$$

(¹) *Ibid.*, n° 9, II.

6. *Les mêmes choses étant posées qu'au* n° 5, *et la région* $\mathcal{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, on peut assigner une constante positive,* L, *telle que tout point de la région admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module inférieur à* L (1).

7. *Les mêmes choses étant posées qu'au* n° 5, *et la région* $\mathcal{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, si, quelle que soit la constante positive* ω, *la région* $\mathcal{R}$ *contient quelque point dont toute caractéristique présente un module inférieur à* ω, *elle contient nécessairement aussi quelque point dont toute caractéristique est nulle* (2).

8. *Les mêmes choses étant posées qu'au* n° 5, *et la région* $\mathcal{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, si toutes les caractéristiques des divers points de la région sont des quantités différentes de zéro, on peut assigner une constante positive,* l, *telle que tout point de la région* $\mathcal{R}$ *admette, indépendamment de sa position, quelque caractéristique de module supérieur à* l (3).

9. *Les mêmes choses étant posées qu'au* n° 5, *et la région* $\mathcal{R}$ *étant, de plus, limitée et complète, on peut, une constante positive* α *étant donnée, assigner une constante positive* β, *telle que deux points arbitrairement choisis dans la région* $\mathcal{R}$ *à une distance mutuelle moindre que* β *admettent respectivement, au nombre de leurs caractéristiques, deux quantités dont la différence ait un module moindre que* α (4).

10. Nous nommerons *premier* et *second élément* de la quantité imaginaire $a' + ia''$ les deux quantités réelles a', a''.

Si aux n variables

$$x = x' + ix'', \qquad y = y' + iy'', \quad \ldots, \tag{1}$$

on attribue tous les systèmes possibles de valeurs imaginaires, les systèmes de valeurs réelles que prennent alors leurs $2n$ éléments

(1) *Ibid.*, n° 11.
(2) *Ibid.*, n° 12.
(3) *Ibid.*, n° 13.
(4) *Ibid.*, n° 14.

redonnent les divers points d'un espace à $2n$ dimensions,

$$(2) \qquad \big[[x', x'', y', y'', \ldots]\big].$$

Il arrive d'ailleurs sans cesse qu'on ait à considérer exclusivement, dans telle ou telle question, les systèmes de valeurs des n variables (1) satisfaisant à tel ou tel groupe de conditions entre leurs $2n$ éléments, ou, ce qui revient au même, les points situés dans telle ou telle région de l'espace (2).

Dans l'espace à $2n$ dimensions (2), à la considération duquel on est conduit par celle des n variables imaginaires (1), un point quelconque

$$(x', x'', y', y'', \ldots)$$

se désigne tout aussi bien par la notation

$$(x, y, \ldots),$$

et les valeurs $x, y, \ldots$ se nomment, en pareil cas, les coordonnées imaginaires du point. L'espace (2) se désigne de même par la notation

$$\big[[x, y, \ldots]\big].$$

Enfin, si l'on considère dans l'espace (2) deux points quelconques,

$$\begin{array}{lll} x_1 = x'_1 + ix''_1, & y_1 = y'_1 + iy''_1, & \ldots, \\ x_2 = x'_2 + ix''_2, & y_2 = y'_2 + iy''_2, & \ldots, \end{array}$$

leur distance, égale par définition (n° 1) à

$$\sqrt{(x'_1 - x'_2)^2 + (x''_1 - x''_2)^2 + (y'_1 - y'_2)^2 + (y''_1 - y''_2)^2 + \ldots},$$

peut évidemment s'écrire sous la forme

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x_1 - x_2)^2 + \operatorname{mod}(y_1 - y_2)^2 + \ldots}.$$

Si, notamment, il n'y a qu'une seule variable imaginaire x, la distance des deux points x_1, x_2 est égale au module de la différence $x_1 - x_2$.

11. Soient

$$x, \quad y, \quad \ldots,$$

n variables indépendantes, que nous supposerons, indifféremment, *réelles* ou *imaginaires*.

Une fonction $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans toute l'étendue d'une région $\mathcal{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ [1], est dite *continue* dans cette région, si, un point $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région et une constante positive α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive β telle que les relations simultanées

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < \beta, \qquad \operatorname{mod}(y - y_0) < \beta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathcal{R}$, entraînent comme conséquence nécessaire la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha; \tag{3}$$

ou, ce qui revient au même, si, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ et la constante α étant donnés, on peut leur faire correspondre quelque constante positive γ, telle que la relation

$$\sqrt{\operatorname{mod}(x - x_0)^2 + \operatorname{mod}(y - y_0)^2 + \ldots} < \gamma,$$

supposée vérifiée pour un point $(x, y, \ldots)$ de la région $\mathcal{R}$, entraîne comme conséquence nécessaire la relation (3).

12. Si l'on observe que, dans le cas où les variables $x, y, \ldots$ sont imaginaires, l'espace $[[x, y, \ldots]]$ n'est autre chose, par définition (n° 10), que l'espace (2); si, d'un autre côté, on compare à notre hypothèse générale du n° 5 la définition, donnée ci-dessus (n° 11) de la *continuité*, on voit immédiatement qu'elle s'en déduit par la simple supposition que chaque point de la région $\mathcal{R}$ possède une caractéristique *unique*. Nous pouvons donc, sans autre démonstration, énoncer les théorèmes suivants :

1° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, son module y reste constamment inférieur à quelque quantité fixe* (n° 6);

2° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète,*

---

[1] Cet espace est à n ou à $2n$ dimensions, suivant que les n variables $x, y, \ldots$ sont réelles ou imaginaires.

et qu'elle y puisse acquérir un module inférieur à toute quantité positive donnée, elle s'annule certainement en quelque point de la région (n° 7);

3° *Si une fonction est continue dans une région limitée et complète, et qu'elle ne s'y annule jamais, son module y reste constamment supérieur à quelque quantité positive fixe* (n° 8);

4° *Si une fonction $f(x, y, \ldots)$ est continue dans une région limitée et complète, on peut, un nombre positif α étant donné, assigner un nombre positif β tel que, pour deux points $(x_1, y_1, \ldots)$, (x_2, y_2) arbitrairement choisis dans la région à une distance mutuelle moindre que β, la différence*

$$f(x_1, y_1, \ldots) - f(x_2, y_2, \ldots)$$

présente un module moindre que α (n° 9).

Observons enfin : 5° *Que le module d'une fonction continue $f(x, y, \ldots)$ est lui-même une fonction continue;* il suffit, pour s'en convaincre, de se reporter à notre définition du n° 11, et de remarquer que la relation

$$\operatorname{mod}[f(x, y, \ldots) - f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha$$

entraîne comme conséquence nécessaire

$$\text{val. abs.}[\operatorname{mod} f(x, y, \ldots) - \operatorname{mod} f(x_0, y_0, \ldots)] < \alpha.$$

Pseudo-fonction calculable par cheminement le long d'un arc.

13. Désignant par $s, t, \ldots$ des variables *réelles*, en nombre quelconque p, nous nommons, comme il a été dit au n° 4, *intervalle complexe* de l'espace $[[s, t, \ldots]]$ l'ensemble de tous les systèmes de valeurs dont les éléments $s, t, \ldots$ se trouvent respectivement compris dans p intervalles simples limités (sans exclusion des valeurs extrêmes de ces intervalles).

Désignant ensuite par $x, y, \ldots$ des variables *imaginaires*, en nombre quelconque n, et considérant l'ensemble des n formules

$$(1) \qquad \begin{cases} x = \varphi(s, t, \ldots), \\ y = \chi(s, t, \ldots), \end{cases}$$

où les fonctions $\varphi(s, t, \ldots)$, $\chi(s, t, \ldots)$, ... sont supposées toutes *continues* (n° 11) dans un même intervalle complexe, $\mathcal{J}$, de l'espace $[[s, t, \ldots]]$, nous dirons que les formules (1) définissent un *arc continu à p variables*, ou, plus simplement, un *arc à p variables* tracé dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$. Nous appellerons *durée* (complexe) de l'arc l'ensemble des systèmes de valeurs de $s, t, \ldots$ compris dans l'intervalle complexe $\mathcal{J}$; l'un quelconque de ces systèmes de valeurs portera le nom d'*instant*, et l'association des n valeurs imaginaires que les formules (1) assignent alors aux variables $x, y, \ldots$ sera le *point* correspondant de l'arc. En particulier, si, dans chacun des intervalles simples où $s, t, \ldots$ sont respectivement assujettis à varier, on convient de considérer l'une des deux valeurs extrêmes comme valeur initiale et l'autre comme valeur finale, il faudra entendre par *instant initial* (ou *final*) de l'arc le système formé par les valeurs initiales (ou finales) de $s, t, \ldots$; par *point initial* (ou *final*) le point qui correspond à l'instant initial (ou final).

Si l'on considère, d'une part, une suite brisée (et limitée) d'instants,

$$(2)\qquad (s_1, t_1, \ldots),\quad (s_2, t_2, \ldots),\quad (s_3, t_3, \ldots),\quad \ldots,\quad (s_{g-1}, t_{g-1}, \ldots),\quad (s_g, t_g, \ldots),$$

pris dans la durée $\mathcal{J}$, d'autre part, les points correspondants de l'arc (1), on obtiendra sur ce dernier une suite brisée (et limitée) de points,

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{l} (x_1, y_1, \ldots),\quad (x_2, y_2, \ldots),\quad (x_3, y_3, \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \qquad (x_{g-1}, y_{g-1}, \ldots),\quad (x_g, y_g, \ldots), \end{array}\right.$$

qui seront les *sommets* successifs d'un chemin *inscrit* dans l'arc. Ce chemin inscrit sera dit admettre comme *régulateur* la quantité positive ρ, si les différences

$$\begin{array}{l} s_2 - s_1,\quad s_3 - s_2,\quad \ldots,\quad s_g - s_{g-1}, \\ t_2 - t_1,\quad t_3 - t_2,\quad \ldots,\quad t_g - t_{g-1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}$$

formées en comparant deux instants consécutifs quelconques de la suite (2) sont toutes moindres que ρ en valeur absolue.

L'arc (1) *étant donné, ainsi que des constantes positives,* $\varepsilon_x, \varepsilon_y, \ldots$, *en*

nombre n, il existe quelque constante positive, α, telle que les inégalités simultanées

$$\operatorname{mod}(s' - s'') < \alpha, \quad \operatorname{mod}(t' - t'') < \alpha, \quad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux instants $(s', t', \ldots)$, $(s'', t'', \ldots)$, de la durée (complexe) $\mathcal{J}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les points correspondants de l'arc, les relations

$$\operatorname{mod}(x' - x'') < \varepsilon_x, \quad \operatorname{mod}(y' - y'') < \varepsilon_y, \quad \ldots.$$

Car la durée $\mathcal{J}$ constitue, dans $[[s, t, \ldots]]$, une région *limitée et complète* où les seconds membres (1) sont tous continus (n° 4; n° 12, 4°).

14. En désignant, comme ci-dessus, par $x, y, \ldots$ des variables imaginaires en nombre quelconque, une région, $\mathcal{R}$, de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ sera dite *continue*, si quelque point fixe, $(x_0, y_0, \ldots)$, choisi une fois pour toutes dans la région, peut être relié à tout point, $(X, Y, \ldots)$, choisi dans cette dernière, par un arc continu ayant son point initial en $(x_0, y_0, \ldots)$, son point final en $(X, Y, \ldots)$, et tous ses points dans la région $\mathcal{R}$.

La propriété conférée par la définition précédente au point fixe $(x_0, y_0, \ldots)$ de la région $\mathcal{R}$ appartient alors nécessairement, comme on va le voir, à tout point fixe, $(x_1, y_1, \ldots)$, de cette même région. Il résulte en effet de la définition qu'en désignant par $(X, Y, \ldots)$ un point arbitrairement choisi dans $\mathcal{R}$: 1° le point $(x_1, y_1, \ldots)$ peut être relié au point $(x_0, y_0, \ldots)$, par quelque arc continu ayant son point initial en $(x_1, y_1, \ldots)$, son point final $(x_0, y_0, \ldots)$, et entièrement situé dans $\mathcal{R}$; que le point $(x_0, y_0, \ldots)$ peut être relié au point $(X, Y, \ldots)$ par quelque arc continu ayant son point initial en $(x_0, y_0, \ldots)$, son point final en $(X, Y, \ldots)$, et entièrement situé dans $\mathcal{R}$. Finalement donc, le point $(x_1, y_1, \ldots)$ peut être relié au point $(X, Y, \ldots)$ par quelque suite d'arcs continus placés bout à bout dans la région $\mathcal{R}$, le premier des arcs dont il s'agit ayant son point initial en $(x_1, y_1, \ldots)$, et le dernier son point final en $(X, Y, \ldots)$; or, comme nous l'avons établi ailleurs, cette suite d'arcs peut toujours être remplacée par un

arc unique ayant son point initial en $(x_1, y_1, \ldots)$, son point final en $(X, Y, \ldots)$, et entièrement situé dans la région $\mathcal{R}$ [1].

Une région $\mathcal{R}$ de l'espace $[[x, y, \ldots]]$ sera dite *normale*, si elle satisfait à la double condition suivante : 1° la région $\mathcal{R}$ est continue; 2° tout point de la région $\mathcal{R}$ est le centre de quelque domaine entièrement situé dans $\mathcal{R}$ [2].

Nous dirons qu'une fonction, $f(x, y, \ldots)$, bien définie dans une région normale, $\mathcal{R}$, y est *olotrope*, si, autour d'un point quelconque, $(x_0, y_0, \ldots)$, de la région, pris comme centre, on peut assigner quelque domaine dans toute l'étendue duquel la fonction $f(x, y, \ldots)$ soit exprimable à l'aide d'un même développement entier par rapport aux différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... Les rayons d'un pareil domaine (qu'on doit supposer, naturellement, compris tout entier dans la région $\mathcal{R}$) se nommeront *olomètres* (simultanés) de la fonction au point $(x_0, y_0, \ldots)$; le développement entier, nécessairement unique, qui exprime la fonction dans le voisinage de ce point sera dit avoir lieu *à partir de* $(x_0, y_0, \ldots)$, et, par rapport à lui, les quantités x_0, $y_0, \ldots$, et $f(x_0, y_0, \ldots)$ se nommeront les valeurs *initiales* des variables et de la fonction.

Lorsqu'une série entière en $x - x_0$, $y - y_0$, ... admet quelque système de rayons de convergence (et par suite une infinité), sa somme a une valeur déterminée en tout point $(x, y, \ldots)$ tel que les différences $x - x_0$, $y - y_0$, ... présentent des modules respectivement inférieurs aux rayons de quelqu'un des systèmes; cette somme est

---

(1) *Voir* le Mémoire intitulé *Sur les systèmes partiels du premier ordre auxquels s'applique la méthode d'intégration de Jacobi, et sur le prolongement analytique de leurs intégrales* (*Annales de la Faculté des Sciences de l'Université de Toulouse*, 3e série, t. VII, note des pages 78 et suiv.). Nous avons même fait voir à cette occasion que l'arc unique ainsi envisagé peut être supposé ne dépendre que d'une indéterminée également unique : mais cette dernière considération ne nous procurerait ici aucun avantage.

(2) Nous nommons *domaine* toute région définie par un système de relations de la forme

$$\operatorname{mod}(x - x_0) < R_x, \ \operatorname{mod}(y - y_0) < R_y, \ldots,$$

où $(x_0, y_0, \ldots)$ désigne un point fixe, et R_x, R_y, ... des constantes positives (> 0); ces constantes seront elles-mêmes les *rayons* du domaine, le point $(x_0, y_0, \ldots)$ en sera le *centre*.

donc une fonction bien définie de $x, y, \ldots$ dans la région de convergence (évidemment normale) formée par l'ensemble des points en question.

Cela posé, on prouve facilement : 1° que la somme de la série considérée est une fonction olotrope de $x, y, \ldots$ dans la région ainsi définie; 2° qu'en désignant par $(x, y, \ldots)$ un point quelconque de cette dernière, et par $R_x, R_y, \ldots$ des rayons de convergence choisis de manière à rendre positives les différences

$$R_x - \operatorname{mod}(x - x_0), \quad R_y - \operatorname{mod}(y - y_0), \quad \ldots,$$

la fonction admet certainement comme olomètres en $(x, y, \ldots)$ les différences dont il s'agit.

Rappelons enfin qu'à toute fonction olotrope $f(x, y, \ldots)$ se rattache un groupe indéfini de fonctions, olotropes dans les mêmes limites que $f(x, y, \ldots)$, dont la considération joue un rôle capital dans les théories de l'Analyse infinitésimale : on les nomme les *dérivées de tous ordres* de $f(x, y, \ldots)$ [1].

15. Les n variables $x, y, \ldots$ étant supposées imaginaires, considérons une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$ admettant, autour du centre $(x_0, y_0, \ldots)$, quelque région de convergence, et définissant, par suite, une fonction de $x, y, \ldots$ olotrope dans cette région (n° 14). A ce développement donnons la forme de Taylor [2]; puis désignant par $(x_1, y_1, \ldots)$ un point intérieur à la région, introduisons dans ce développement et dans toutes ses dérivées l'hypothèse numérique

$$(x, y, \ldots) = (x_1, y_1, \ldots).$$

La connaissance des sommes de ces divers développements nous permettra évidemment de construire celui de notre fonction à partir des nouvelles valeurs initiales $x_1, y_1, \ldots$; ce deuxième développement de Taylor, entier en $x - x_1, y - y_1, \ldots$, admettra certainement

---

(1) La définition des fonctions dont il s'agit et les premières propriétés des fonctions olotropes et de leurs dérivées se trouvent exposées dans l'Ouvrage déjà cité (*Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n°s 42 à 58).

(2) *Ibid.*, n° 55.

quelque rayon de convergence (n° 14), et nous dirons pour abréger, qu'il *se raccorde* avec le précédent.

Cela posé, considérons dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$ un chemin *brisé* ayant pour *sommets* successifs

$$(4) \quad (x_0, y_0, \ldots), (x_1, y_1, \ldots), (x_2, y_2, \ldots), \ldots, (x_g, y_g, \ldots), (X, Y, \ldots).$$

Si, à partir de ces sommets successifs, on peut construire autant de développements dont chacun se raccorde avec le précédent, et dont le premier ne soit autre que le développement donné, le chemin brisé sera dit *praticable* relativement au développement donné. D'après cela, il faudra donc, pour que le chemin (4) soit praticable, que le développement donné admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_1 - x_0, y_1 - y_0, \ldots$, ce qui permettra de construire, à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$, un deuxième développement se raccordant avec le premier; il faudra ensuite que ce nouveau développement admette des rayons de convergence respectivement supérieurs aux modules des différences $x_2 - x_1, y_2 - y_1, \ldots$, ce qui permettra de construire, à partir de $x_2, y_2, \ldots$, un troisième développement se raccordant avec le second; et ainsi de suite jusqu'au développement construit à partir de $x_g, y_g, \ldots$, qui doit admettre des rayons de convergence supérieurs aux modules des différences $X - x_g$, $Y = y_g, \ldots$, afin qu'un dernier développement puisse être finalement construit à partir de X, Y, ...

Lorsqu'une fonction de $x, y, \ldots$ est olotrope dans une région, la connaissance du développement de la fonction à partir d'un seul point de la région suffit pour qu'on puisse construire, par l'opération échelonnée que nous venons de décrire, son développement à partir d'un autre point quelconque de la même région [1]. Mais il va sans dire qu'on peut se proposer d'effectuer des cheminements analogues en prenant comme base des calculs successifs, non plus un développement fourni par telle ou telle fonction qu'on sait être olotrope dans telle ou telle région, mais une série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$, arbitrairement choisie sous la seule condition d'admettre quelque

---

[1] *Ibid.*, n° 57, IV et V.

domaine de convergence. Tant qu'on ne sort pas de la région de convergence du développement initial, ce que nous venons de dire reste applicable, puisque la somme du développement définit, dans cette région, une fonction olotrope des variables $x, y, \ldots$ (n° 14); mais, au delà, toute certitude disparaît, en général, quant à la possibilité du cheminement. Il y a plus : si l'on considère deux chemins brisés partant du point $(x_0, y_0, \ldots)$ et aboutissant au même sommet final, ces deux chemins, à supposer qu'ils soient l'un et l'autre praticables par rapport au développement donné, peuvent conduire, suivant les cas, soit au même développement final, soit, au contraire, à deux développements distincts.

Nous nommerons, avec Méray, série ou développement *fondamental* la série entière en $x - x_0, y - y_0, \ldots$ choisie comme base des calculs précédents, et nous affecterons de la même qualification les premières valeurs, $x_0, y_0, \ldots$, des variables indépendantes, ainsi que le point, $(x_0, y_0, \ldots)$, dont elles sont les coordonnées. Un développement fondamental donné (admettant quelque domaine de convergence) sera dit définir une *pseudo-fonction analytique*, ou, plus simplement, une *pseudo-fonction de $x, y, \ldots$* [1].

Si à un développement fondamental quelconque on substitue sa dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$, tout chemin praticable relativement aux anciennes données l'est encore relativement aux nouvelles, et les développements successifs obtenus dans le second cas sont respectivement les dérivées d'ordres partiels $p, q, \ldots$ de ceux qu'on obtient dans le premier. Cette deuxième pseudo-fonction se nomme la *dérivée d'ordres partiels $p, q, \ldots$* de la proposée.

16. Étant donné un développement fondamental, entier par rapport aux différences $x - x_0, y - y_0, \ldots$, traçons dans l'espace $[[x, y, \ldots]]$ un arc continu (n° 13) *partant du point fondamental*, c'est-à-dire tel, qu'aux valeurs initiales, $s_0, t_0, \ldots$, des indéterminées réelles, $s, t, \ldots$, dont il dépend, correspondent pour $x, y, \ldots$ les coordonnées $x_0, y_0 \ldots$ du point fondamental (n° 15); l'instant initial $(s_0, t_0, \ldots)$ sera en

---

[1] La plupart des auteurs ont adopté la dénomination « *fonction analytique de $x, y, \ldots$* ».

pareil cas qualifié de *fondamental*. Dans cet arc inscrivons ensuite un chemin brisé ayant son premier sommet au point fondamental; en d'autres termes, considérons, conformément à ce qui a été dit plus haut (n° 13), une suite brisée et limitée d'instants

$$(s_0, t_0, \ldots), \quad (s_1, t_1, \ldots), \quad \ldots, \quad (s_g, t_g, \ldots), \quad (\mathrm{S}, \mathrm{T}, \ldots),$$

commençant à l'instant fondamental, et faisons-lui correspondre sur l'arc la suite brisée et limitée des points

$$(x_0, y_0, \ldots), \quad (x_1, y_1, \ldots), \quad \ldots, \quad (x_g, y_g, \ldots), (\mathrm{X}, \mathrm{Y}, \ldots),$$

dont le premier n'est autre que le point fondamental.

Cela posé, nous établirons la proposition suivante :

Si l'on peut assigner une constante positive ρ jouissant de la propriété que les divers chemins de régulateur ρ (n° 13) inscrits dans l'arc en question à partir du point fondamental soient tous praticables, le développement final auquel on est conduit à l'extrémité d'un pareil chemin dépend uniquement de l'instant $(s, t, \ldots)$ qui en fournit le dernier sommet.

I. Dans ce qui suit, nous aurons plus d'une fois à exprimer que deux chemins brisés de même extrémité, praticables par rapport à un développement fondamental donné, conduisent au même développement final : en désignant par

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A},$$
$$a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A},$$

les deux chemins dont il s'agit, *nous exprimerons cette équivalence à l'aide de la notation*

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A}] = \Psi[a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A}].$$

II. *Si, par rapport à un développement fondamental donné, deux chemins brisés de même extrémité,*

$$(5) \qquad a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A},$$
$$(6) \qquad a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A},$$

sont praticables et équivalents, si, de plus, le chemin brisé

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A} \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

obtenu par un certain allongement de (5), *est praticable, le chemin brisé*

$$a_0 a'_1 a'_2 \ldots a'_{g'} \mathrm{A} \alpha_1 \ldots \alpha_k,$$

obtenu par le même allongement de (6), *est praticable, comme le précédent, et conduit au même développement final.*

III. *Considérons un développement fondamental admettant les rayons de convergence* R_x, R_y, ..., *et un chemin brisé,*

$$\begin{aligned}
a_0 &= (x_0, \quad y_0 \quad \ldots) \\
a_1 &= (x_0 + h_1, y_0 + k_1, \ldots) = (x_1, y_1, \ldots), \\
a_2 &= (x_1 + h_2, y_1 + k_2, \ldots) = (x_2, y_2, \ldots), \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
a_p &= (x_{p-1} + h_p, y_{p-1} + k_p, \ldots) = (x_p, y_p, \ldots),
\end{aligned}$$

ayant son origine au point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$: *si les accroissements successivement attribués aux variables vérifient les relations*

$$\begin{aligned}
\operatorname{mod} h_1 + \operatorname{mod} h_2 + \ldots + \operatorname{mod} h_p &< R_x, \\
\operatorname{mod} k_1 + \operatorname{mod} k_2 + \ldots + \operatorname{mod} k_p &< R_y, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,
\end{aligned}$$

les deux chemins

$$a_0 a_1 a_2 \ldots a_p,$$
$$a_0 a_p$$

sont praticables et conduisent au même développement final.

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 72, III.

IV. *Étant donné un développement fondamental entier en* $x - x_0$, $y - y_0$, ..., *tout chemin brisé ayant son premier sommet en* $(x_0, y_0, \ldots)$ *et ses divers sommets dans les limites de convergence du développement équivaut, s'il est praticable, au chemin direct formé avec les deux sommets extrêmes.*

A. *Si une fonction* $f(x, y, \ldots)$ *est olotrope dans une région normale* $\mathcal{R}$ (n° 14), *et si, dans cette dernière, on trace un arc continu, on peut assigner quelque constante positive,* r, *telle que la fonction* $f(x, y, \ldots)$

admette, en un point quelconque de l'arc, un système d'olomètres (au moins) égaux à r.

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 57, II.

B. *Le point énoncé au début du présent alinéa* IV *est exact, lorsque le nombre des sommets du chemin brisé est égal à* 3.

Désignant par $f(x, y, \ldots)$ la somme du développement donné, entier en $x - x_0$, $y - y_0$, ..., et par

$$a_0 = (x_0, y_0, \ldots),$$
$$a_1 = (x_1, y_1, \ldots),$$
$$A = (X, Y, \ldots)$$

les trois sommets de notre chemin brisé, on observera tout d'abord que le développement auquel on est conduit en a_1 coïncide avec celui de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$.

Si l'on considère maintenant les différences

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}(X - x_0), \quad \operatorname{mod}(y_1 - y_0) - \operatorname{mod}(Y - y_0), \quad \ldots.$$

un certain nombre d'entre elles,

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}(X - x_0), \quad \ldots,$$

sont $\geqq 0$, tandis que les autres,

$$\operatorname{mod}(y_1 - y_0) - \operatorname{mod}(Y - y_0), \quad \ldots,$$

sont $\leqq 0$. Cela étant, les deux arcs continus

$$(7) \qquad \begin{cases} x = x_1 + (X - x_1)s, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y = y_1, \\ \ldots\ldots \end{cases}$$

et

$$(8) \qquad \begin{cases} x = X, \\ \ldots\ldots, \\ y = y_1 + (Y - y_1)t, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

dépendant chacun d'une indéterminée réelle assujettie à varier de

0 à 1, sont entièrement situés dans les limites de convergence de la série proposée. En effet, ces deux arcs comprenant respectivement les points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$ [qui correspondent respectivement aux hypothèses numériques $s = 0$, $t = 1$], et les points $(x_1, y_1, \ldots)$, $(X, Y, \ldots)$, étant supposés compris l'un et l'autre dans les limites en question, il suffit de faire voir que les différences

$$\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}(x - x_0), \quad \ldots$$

sont $\geqq 0$ sur toute l'étendue du premier arc, et que les différences

$$\operatorname{mod}(Y - y_0) - \operatorname{mod}(y - y_0), \quad \ldots$$

jouissent de la même propriété sur toute l'étendue du second; ou, en d'autres termes, que, les indéterminées s, t n'excédant ni l'une ni l'autre l'intervalle de 0 à 1, on a constamment

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}[x_1 + (X - x_1)s - x_0] \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(Y - y_0) - \operatorname{mod}[y_1 + (Y - y_1)t - y_0] \geqq 0, \quad \ldots. \end{aligned}$$

Or, si l'on tient compte des inégalités

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) \geqq \operatorname{mod}(X - x_0), \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(y_1 - y_0) \leqq \operatorname{mod}(Y - y_0), \quad \ldots, \end{aligned}$$

les relations évidentes

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - (1 - s)\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - s\operatorname{mod}(x_1 - x_0) = 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(Y - y_0) - (1 - t)\operatorname{mod}(Y - y_0) - t\operatorname{mod}(Y - y_0) = 0, \quad \ldots \end{aligned}$$

donnent successivement, les premières,

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - (1 - s)\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - s\operatorname{mod}(X - x_0) \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}[(1 - s)(x_1 - x_0) + s(X - x_0)] \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(x_1 - x_0) - \operatorname{mod}[x_1 + (X - x_1)s - x_0] \geqq 0, \quad \ldots, \end{aligned}$$

les dernières,

$$\begin{aligned} &\operatorname{mod}(Y - y_0) - (1 - t)\operatorname{mod}(y_1 - y_0) - t\operatorname{mod}(Y - y_0) \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(Y - y_0) - \operatorname{mod}[(1 - t)(y_1 - y_0) + t(Y - y_0)] \geqq 0, \quad \ldots, \\ &\operatorname{mod}(Y - y_0) - \operatorname{mod}[y_1 + (Y - y_1)t - y_0] \geqq 0, \quad \ldots. \end{aligned}$$

Cela posé, il résulte de A que la fonction $f(x, y, \ldots)$ admet sur

toute l'étendue de ces deux arcs des olomètres au moins égaux à certaines constantes positives $\delta_x, \delta_y, \ldots$. Formons alors, avec 0 et 1 comme termes extrêmes, deux suites croissantes,

$$\begin{array}{cccccc} 0, & s', & s'', & \ldots, & s^{(h)}, & 1, \\ 0, & t', & t'', & \ldots, & t^{(k)}, & 1, \end{array}$$

telles que, pour chacun des deux chemins brisés inscrits qui leur correspondent respectivement sur les arcs (7) et (8), les différences formées avec les coordonnées imaginaires semblables de deux sommets consécutifs quelconques présentent des modules respectivement inférieurs à $\delta_x, \delta_y, \ldots$ (n° 13). Observons ensuite que le sommet final du premier coïncide avec le sommet initial du second, que le chemin brisé résultant de leur juxtaposition bout à bout a son sommet initial en $(x_1, y_1, \ldots)$, son sommet final en $(X, Y, \ldots)$, et que, si l'on prend pour développement fondamental celui de $f(x, y, \ldots)$ effectué à partir des valeurs $x_1, y_1, \ldots$, le parcours total de ce dernier chemin fait retomber de toute nécessité sur le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs $X, Y, \ldots$. Assurons-nous enfin, chose extrêmement aisée, que, sur le chemin brisé dont il s'agit, la somme des modules des accroissements successivement attribués à chaque variable est égale à l'une ou à l'autre des quantités

$$\operatorname{mod}(X - x_1), \quad \operatorname{mod}(Y - y_1), \ldots,$$

suivant qu'il s'agit de l'une ou de l'autre des variables $x, y, \ldots$. Comme, en vertu de notre hypothèse, le point $(X, Y, \ldots)$ est situé dans les limites de convergence du développement qui correspond au sommet $(x_1, y_1, \ldots)$ considéré comme initial, on pourra passer directement de celui-ci au sommet final $(X, Y, \ldots)$ (III).

Ainsi, le développement final auquel conduit le chemin donné $a_0 a_1 A$ coïncide avec le développement de $f(x, y, \ldots)$, effectué à partir des valeurs $X, Y, \ldots$; il équivaut donc au chemin direct $a_0 A$.

C. *Le point énoncé au début du présent alinéa* IV *est exact, quel que soit le nombre des sommets du chemin brisé.*

Si l'on désigne en effet par $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_g, A$ les sommets suc-

cessifs du chemin dont il s'agit, on a d'abord, en vertu de B,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2] = \Psi[a_0 a_2$$

(I), d'où l'on déduit (II)

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_2 a_3].$$

Une nouvelle application de B donne alors

$$\Psi[a_0 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3],$$

d'où, par comparaison avec la relation qui précède,

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 a_3] = \Psi[a_0 a_3].$$

En continuant ce raisonnement de proche en proche, on tombera finalement sur la relation

$$\Psi[a_0 a_1 a_2 \ldots a_g \mathrm{A}] = \Psi[a_0 \mathrm{A}].$$

V. *La proposition formulée dans l'énoncé général du présent* n° 16 *est exacte, si l'arc dépend d'une seule variable s.*

A. En désignant par s_0 et S les valeurs initiale et finale de la variable dont il s'agit, tout chemin inscrit

$$s_0 s_1 s_2 \ldots,$$

partant du point fondamental, se compose d'une suite limitée de fragments alternativement *directs* et *inverses*, c'est-à-dire tels, que les différences formées en retranchant chaque valeur de s de la suivante aient toutes le signe $\mathrm{S} - s_0$ s'il s'agit d'un fragment de rang impair, et le signe contraire s'il s'agit d'un fragment de rang pair.

B. Deux chemins inscrits de régulateur ρ, composés l'un et l'autre d'un simple fragment direct, et dont l'extrémité finale correspond, pour tous deux, à une même valeur de s, conduisent au même développement final.

Soient

(9) $$s_0 s'_1 s'_2 \ldots s'_{g'} \mathrm{S}^{(1)},$$

(10) $$s_0 s''_1 s''_2 \ldots s''_{g''} \mathrm{S}^{(1)}$$

les deux chemins dont il s'agit. Si, entre les valeurs extrêmes s_0,

$S^{(1)}$ des deux suites précédentes, on range par ordre de grandeur les valeurs $s'_1, s'_2, \ldots, s'_{g'}, s''_1, s''_2, \ldots, s''_{g''}$, on obtient un troisième chemin inscrit,

$$(11) \qquad s_0\sigma_1\sigma_2\ldots, \quad \sigma_{g'+g''}S^{(1)},$$

équivalent, comme nous allons le voir, à chacun des proposés.

Parcourons, en effet, la suite (11) jusqu'à ce que nous y trouvions le terme s'_1, et soit, pour fixer les idées,

$$(12) \qquad s_0\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4$$

(où $\sigma_4 = s'_1$) la portion de suite ainsi obtenue. Deux termes quelconques de cette suite partielle présentant une différence numériquement inférieure à ρ, il résulte de notre hypothèse que le chemin (12) est praticable et qu'il a tous ses sommets situés dans les limites de convergence du développement initial. Dès lors, en vertu de l'alinéa IV, la portion $s_0s'_1$, du chemin (9) équivaut à la portion (11) qui commence et finit aux mêmes valeurs de s, et l'on verra de proche en proche qu'il en est de même des portions successives

$$s'_1s'_2, \quad s'_2s'_3, \quad \ldots, \quad s'_{g'}S^{(1)}.$$

Le chemin (11) est donc équivalent à (9), et, en vertu d'un raisonnement semblable, à (10); ces derniers sont donc équivalents entre eux, ce qu'il s'agissait de prouver.

C. Un chemin inscrit de régulateur ρ, composé de k fragments alternativement directs et inverses, équivaut à tout chemin direct de même régulateur dont l'extrémité finale correspond à la même valeur de s.

Supposons d'abord $k = 2$, et soit

$$(13) \qquad s_0\ldots S^{(1)}\ldots S^{(2)}$$

le chemin inscrit dont il s'agit. La valeur $S^{(2)}$ étant comprise dans l'intervalle de s_0 à $S^{(1)}$, on peut (B), sans changer le développement final, intercaler à la place voulue la valeur $S^{(2)}$ dans la portion directe du chemin (13), et considérer celui-ci comme composé des trois fragments

$$(14) \qquad s_0\ldots S^{(2)}\ldots S^{(1)}\ldots S^{(2)},$$

les deux premiers directs, le troisième inverse. A ce dernier on peut en outre substituer un fragment formé avec les mêmes valeurs de s que le second, mais dans l'ordre inverse : car les deux fragments que l'on remplace ainsi l'un par l'autre constituent deux chemins directs, et par suite équivalents (B), relativement à l'arc partiel qui commence à $S^{(1)}$ et finit à $S^{(2)}$. Désignant alors par

$$S^{(2)}, \quad s_1, \quad s_2, \quad \ldots, \quad s_g, \quad S^{(1)},$$

les valeurs successives de s qui constituent le deuxième fragment de (14), il est aisé de se convaincre que les deux chemins inscrits

$$\begin{gathered} s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g s_{g-1} \ldots s_2 s_1 S^{(2)}, \\ s_0 \ldots S^{(2)} \end{gathered}$$

sont équivalents : car l'application alternative des alinéas IV et II nous donne

$$\begin{aligned} \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g] &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g], \\ \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g S^{(1)} s_g s_{g-1}] &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1} s_g s_{g-1}] \\ &= \Psi[s_0 \ldots S^{(2)} s_1 s_2 \ldots s_{g-1}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

et nous conduit ainsi de proche en proche à l'équivalence dont il s'agit. Le chemin (13) équivaut donc à quelque chemin direct de régulateur ρ allant de s_0 en $S^{(2)}$, et, par suite (B), à tout chemin direct remplissant cette double condition.

Il nous suffit maintenant de faire voir que, si le point en question (C) est vrai pour un chemin composé de $k-1$ fragments, il l'est encore pour un chemin composé de k fragments, par exemple

$$s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)} \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}.$$

Désignons, à cet effet, par

$$\begin{gathered} s_0 \ldots S^{(k-1)}, \\ s_0 \ldots S^{(k)} \end{gathered}$$

deux chemins directs, de régulateur ρ, allant respectivement de s_0 à $S^{(k-1)}$ et de s_0 à $S^{(k)}$. On a, d'une part, en vertu de ce qui est admis,

$$\Psi[s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)} \ldots S^{(k-1)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)}],$$

d'où (II),

$$\Psi[s_0 \ldots S^{(1)} \ldots S^{(2)} \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}];$$

en se reportant, d'autre part, soit à B, soit au cas déjà examiné dans C, suivant que le dernier fragment $S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}$ est direct ou inverse, on a la relation

$$\Psi[s_0 \ldots S^{(k-1)} \ldots S^{(k)}] = \Psi[s_0 \ldots S^{(k)}],$$

qu'il suffit de comparer avec la précédente pour en déduire le point que nous avons en vue.

VI. *Les hypothèses étant les mêmes que dans l'énoncé général formulé au début du présent* n° 16, *un chemin inscrit de régulateur* ρ *qui contient le fragment*

$$(15) \qquad \begin{cases} (\sigma, t_1, \ldots), \\ (\sigma, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_3, \ldots) \end{cases}$$

équivaut au chemin inscrit (de même régulateur) que l'on déduit du premier en remplaçant σ *par* $\mathfrak{s}$ *dans le sommet intermédiaire du fragment* (15).

Effectivement, le nouveau chemin inscrit que l'on déduit du premier en y remplaçant le fragment (15) par

$$(16) \qquad \begin{cases} (\sigma, t_1, \ldots), \\ (\sigma, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_2, \ldots), \\ (\mathfrak{s}, t_3, \ldots) \end{cases}$$

est nécessairement praticable, puisqu'il admet, comme les précédents, le régulateur ρ. D'un autre côté, le second et le troisième sommet du fragment (16) sont compris dans les limites de convergence du développement correspondant au premier; le troisième et le quatrième, dans les limites de convergence du développement correspondant au second. On peut donc, en vertu de l'alinéa IV, supprimer à volonté,

soit le second, soit le troisième sommet du fragment (16), ce qui fait retomber, soit sur le fragment

$$(\sigma, t_1, \ldots),$$
$$(s, t_2, \ldots),$$
$$(s, t_3, \ldots),$$

soit sur le fragment (15).

VII. *La proposition formulée dans l'énoncé général du présent* n° 16 *est exacte lorsque l'arc donné dépend de p variables s, t, ...*

Si l'on a égard à l'alinéa V, il suffit évidemment de faire voir qu'en la supposant exacte pour un arc à $p-1$ variables, elle l'est nécessairement encore pour l'arc donné.

A cet effet, désignons par $(s_0, t_0, \ldots)$ l'instant fondamental de l'arc, et par $(\sigma, \tau, \ldots)$ un instant quelconque. Si l'on considère l'arc à $p-1$ variables obtenu en attribuant à s la valeur fixe s_0 et en faisant mouvoir les autres variables $t, \ldots$, dans ceux des intervalles simples qui leur correspondent respectivement, tous les chemins inscrits de régulateur ρ ayant leur instant initial en $(t_0, \ldots)$ sont praticables, et, dès lors, en vertu de ce qui est admis, conduisent en $(\tau, \ldots)$ à un seul et même développement final. Si, prenant ensuite ce dernier comme développement fondamental, on considère l'arc à une seule variable obtenu en attribuant à $t, \ldots$ les valeurs fixes $\tau, \ldots$ et en faisant mouvoir s dans l'intervalle qui lui correspond, tous les chemins inscrits de régulateur ρ ayant leur instant initial en s_0 sont encore praticables, et, dès lors (V), conduisent en σ à un seul et même développement final. Or, comme nous allons le faire voir, le parcours d'un chemin quelconque de régulateur ρ, inscrit dans l'arc donné de $(s_0, t_0, \ldots)$ à $(\sigma, \tau, \ldots)$, fait nécessairement retomber sur le développement dont il s'agit.

Effectivement, soit

$$(17) \qquad \left\{ \begin{array}{l} (s_0, t_0, \ldots), \\ (s_1, t_1, \ldots), \\ (s_2, t_2, \ldots), \\ (s_2, t_3, \ldots), \end{array} \right.$$

un semblable chemin. Le chemin inscrit

$$(18)\qquad \left\{\begin{array}{l} (s_0, t_0, \ldots), \\ (s_0, t_1, \ldots), \\ (s_0, t_2, \ldots), \\ (s_0, t_3, \ldots), \\ (s_0, \tau, \ldots), \\ (s_1, \tau, \ldots), \\ (s_2, \tau, \ldots), \\ (s_3, \tau, \ldots), \\ (\sigma, \tau, \ldots), \end{array}\right.$$

déduit du précédent à l'aide d'un mécanisme facile à apercevoir, admet aussi le régulateur ρ, et l'on voit sans peine qu'il lui est équivalent : car on peut, en vertu de l'alinéa VI, remplacer s_0 par s_1 dans la cinquième ligne du tableau (18), puis faire successivement la même substitution dans la quatrième, la troisième et la seconde ligne. Considérant alors le tableau résultant, on pourra de même remplacer s_1 par s_2 dans sa sixième, sa cinquième, sa quatrième et enfin sa troisième ligne. En continuant ainsi et réunissant en un seul les derniers instants du tableau final, qui coïncident avec $(\sigma, \tau, \ldots)$, on retombera sur le tableau (17).

Il suffit maintenant d'observer que le chemin (18) se compose de deux fragments consécutifs respectivement inscrits dans l'arc à $p-1$ variables et dans l'arc à une variable dont nous avons parlé ci-dessus, le premier de $(t_0, \ldots)$ à $(\tau, \ldots)$, le second de s_0 à σ.

Ainsi se trouve achevée la démonstration de notre énoncé général.

17. Lorsque les hypothèses formulées par l'énoncé du numéro précédent se trouvent réalisées, nous dirons que l'arc donné est *praticable avec le régulateur* ρ par rapport au développement fondamental. A tout instant de cet arc, c'est-à-dire *à tout système de valeurs des indéterminées réelles dont il dépend*, on peut alors faire correspondre un développement déterminé, en s'astreignant à ne considérer que les chemins inscrits *de régulateur* ρ parmi ceux qui vont de l'instant fondamental de l'arc à l'instant considéré : le parcours d'un semblable

chemin se nommera, pour abréger, le *parcours de l'arc*, effectué de l'instant fondamental à l'instant dont il s'agit.

Il est d'ailleurs manifeste que *tout arc praticable pour une pseudo-fonction l'est aussi pour ses dérivées de tous ordres* (n° 15), *et avec le même régulateur.*

18. Il convient de noter ici les propriétés suivantes :

I. *Lorsqu'une pseudo-fonction de $x, y, \ldots$ est calculable sur un arc donné, on peut assigner certaines constantes positives,* $R_x, R_y, \ldots$, *que son développement en un instant variable de l'arc ne cesse d'admettre comme rayons de convergence.* C'est ce que nous exprimerons d'une façon plus brève en disant que *la pseudo-fonction admet, sur toute l'étendue de l'arc donné, des rayons de convergence (au moins) égaux à* $R_x, R_y, \ldots$.

Désignant par $s, t, \ldots$, les variables (réelles) dont l'arc dépend, et par $\mathcal{J}$ la durée (complexe) où elles sont assujetties à se mouvoir, nommons *caractéristique* d'un instant $(s, t, \ldots)$ de la durée $\mathcal{J}$ toute quantité positive $(>0)\rho$, telle que le développement, en $(s, t, \ldots)$, de la pseudo-fonction admette un système de rayons de convergence (au moins) égaux à ρ. Cela étant, supposons qu'un instant déterminé $(s', t', \ldots)$ de la durée $\mathcal{J}$ admette parmi ses caractéristiques la constante ρ', et considérons, dans cette même durée, un instant, $(\sigma, \tau, \ldots)$, suffisamment voisin de $(s', t', \ldots)$ pour que les points correspondants, $(\xi, \eta, \ldots)$, $(x', y', \ldots)$, de l'arc satisfassent aux relations

$$\operatorname{mod}(\xi - x') < \rho', \qquad \operatorname{mod}(\eta - y') > \rho', \qquad \ldots :$$

d'une propriété rappelée au n° 14 il résulte que l'instant $(\sigma, \tau, \ldots)$ admettra parmi ses caractéristiques la plus petite des différences positives

$$\rho' - \operatorname{mod}(\xi - x'), \quad \rho' - \operatorname{mod}(\eta - y'), \quad \ldots,$$

c'est-à-dire une quantité dont la différence à ρ' tombe au-dessous de toute quantité donnée lorsque l'instant $(\sigma, \tau, \ldots)$ est suffisamment voisin de $(s', t', \ldots)$.

En conséquence, les diverses conditions spécifiées au n° 5 relative-

ment aux caractéristiques se trouvent remplies dans la région *limitée et complète* $\mathcal{J}$, et, comme les caractéristiques sont ici essentiellement *supérieures* à zéro, il existe de toute nécessité (n° 8) quelque constante positive telle, que tout instant de la durée $\mathcal{J}$ admette, indépendamment de sa situation dans cette durée, quelque caractéristique supérieure à cette constante.

II. En attribuant aux notations R_x, R_y, ... le même sens qu'à l'alinéa précédent I, désignons par β un nombre positif tel, que les inégalités

$$\operatorname{mod}(s'-s'')<\beta, \qquad \operatorname{mod}(t'-t'')<\beta, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées à la fois pour deux instants, $(s', t', \ldots)$, $(s'', t'', \ldots)$, de la durée $\mathcal{J}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les points correspondants de l'arc, les relations

$$\operatorname{mod}(x'-x'')<R_x, \qquad \operatorname{mod}(y'-y'')<R_y, \qquad \ldots:$$

un pareil nombre β existe certainement, car la durée $\mathcal{J}$ constitue, dans $[[s, t, \ldots]]$, une région *limitée et complète* où les seconds membres des équations qui définissent l'arc sont tous continus (n° 4; n° 12, 4°).

Cela étant, il est manifeste que *le nombre β peut servir de régulateur à la pseudo-fonction pour son calcul par cheminement sur l'arc donné.*

Pseudo-fonctions composées.

19. Soient

$$(1) \qquad f(u, v, \ldots)$$

une composante donnée;

$$(2) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

des fonctions simples données (en même nombre que les variables $u, v, \ldots$ de la composante);

$$(3) \qquad F(x, y, \ldots)=f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

la fonction composée résultant de leur combinaison;

x', y', ... des valeurs particulières attribuées aux variables x, y, ...;

$$u' = \mathrm{U}(x', y, \ldots), \qquad v' = \mathrm{V}(x', y', \ldots), \qquad \ldots$$

les valeurs correspondantes des fonctions simples (2).

Si, d'une part, autour du point $(u', v', \ldots)$, *pris comme centre, on peut assigner quelque domaine,* $\mathfrak{D}$, *dans toute l'étendue duquel la composante* (1) *soit exprimable à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences* $u - u'$, $v - v'$, ...; *si, d'autre part, autour du point* $(x', y', \ldots)$, *pris comme centre, on peut assigner quelque domaine,* $\mathfrak{d}$, *dans toute l'étendue duquel chacune des fonctions simples* (2) *soit exprimable à l'aide d'un développement entier par rapport aux différences* $x - x'$, $y - y'$, ...: *la fonction composée* (3) *jouit certainement de cette dernière propriété dans toute l'étendue d'un domaine suffisamment petit concentrique à* $\mathfrak{d}$.

En outre, *le développement de la fonction composée à partir des valeurs* x', y', ... *peut s'obtenir en combinant le développement de la composante, effectué à partir des valeurs correspondantes* u', v', ... *des fonctions simples, avec ceux de*

$$\mathrm{U}(x, y, \ldots) - u', \qquad \mathrm{V}(x, y, \ldots) - v', \ \ldots,$$

effectués à partir de x', y', ...: *il suffit de remplacer respectivement par les derniers développements les différences*

$$u - u', \quad v - v', \quad \ldots,$$

qui figurent dans chaque terme du premier, d'appliquer à chaque résultat la règle de multiplication des séries, de former, sans omission ni répétition, une série procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles ainsi obtenues, et d'opérer, finalement, la réduction des termes semblables en $x - x'$, $y - y'$, ...

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 59.

De là résulte immédiatement la remarque suivante :

On peut assigner quelque constante positive, r', *telle que le développement de la composante, les développements des fonctions simples, et celui qui s'obtient par leur combinaison, admettent tous des rayons de convergence (au moins) égaux à* r'.

20. Avant de poursuivre, il importe d'observer que la valeur variable acquise par une pseudo-fonction donnée des n variables imaginaires $x, y, \ldots$ aux divers instants d'un arc continu praticable est une fonction *continue* des indéterminées (réelles) $s, t, \ldots$ dont l'arc dépend. Effectivement, si l'on désigne par $(\sigma, \tau, \ldots)$ un instant déterminé de l'arc, et par $(\xi, \eta, \ldots)$ le point correspondant, la valeur de notre pseudo-fonction, pour un instant $(s, t, \ldots)$ suffisamment voisin de $(\sigma, \tau, \ldots)$, s'obtiendra en substituant aux n différences $x - \xi$, $y - \eta, \ldots$, dans un certain développement $G(x, y, \ldots)$, entier par rapport à elles, et, par suite, fonction continue de $x, y, \ldots$, n fonctions continues de $s, t, \ldots$: on voit donc que, pour des valeurs numériquement assez petites de $s - \sigma$, $t - \tau, \ldots$, les modules de $x - \xi$, $y - \eta, \ldots$, puis celui de la différence $G(x, y, \ldots) - G(\xi, \eta, \ldots)$ tomberont au-dessous de toute quantité donnée.

Cela étant, considérons g pseudo-fonctions des n variables imaginaires $x, y, \ldots$,

$$(4) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

définies par un même point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$, et par g développements fondamentaux; et soient $u_0, v_0, \ldots$ les termes constants respectifs de ces g développements. *Si, dans l'espace* $[[x, y, \ldots]]$, *on trace, à partir de* $(x_0, y_0, \ldots)$, *un arc continu praticable pour les* g *pseudo-fonctions* (4), *le point de l'espace* $[[u, v, \ldots]]$, *résultant de l'association des valeurs acquises par elles à un même instant de l'arc, décrit, à partir de* $(u_0, v_0, \ldots)$, *un arc continu dépendant des mêmes indéterminées (réelles) que le premier.*

21. Nous établirons maintenant la proposition suivante :

Soient

$$(5) \qquad f(u, v, \ldots)$$

la somme d'un développement entier par rapport aux g différences $u - u_0$, $v - v_0, \ldots$;

$$(6) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

les sommes de g développements entiers par rapport aux n diffé-

rences $x - x_0$, $y - y_0$, ..., et ayant respectivement u_0, v_0, ... pour termes constants. Pour des valeurs de x, y, ... suffisamment voisines de x_0, y_0, ..., l'expression

$$(7) \qquad F(x, y, \ldots) = f[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

peut, ainsi qu'il résulte du n° 19, être mise sous forme d'un développement entier en $x - x_0$, $y - y_0$ .... Et il va sans dire que ces divers développements, considérés conjointement avec le point fondamental $(u_0, v_0, \ldots)$ s'il s'agit du premier, ou avec le point fondamental $(x_0, y_0, \ldots)$ s'il s'agit des suivants, définissent autant de pseudo-fonctions : à ces dernières nous attribuerons, comme s'il s'agissait de fonctions proprement dites, les dénominations respectives de pseudo-fonction *composante*, pseudo-fonctions *simples*, pseudo-fonction *composée*.

Cela étant, *si les g pseudo-fonctions simples* (6) *sont toutes calculables sur un même arc continu*, $A_{x,y,\ldots}$, *et si la composante* (5) *jouit de la même propriété sur l'arc correspondant*, $A_{u,v,\ldots}$, *décrit par le point*

$$[U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots]$$

(n° 20), *la pseudo-fonction composée* (7) *est calculable sur l'arc* $A_{x,y,\ldots}$, *et son développement à un instant quelconque s'obtient en combinant les développements correspondants des pseudo-fonctions simples et composante à l'aide du mécanisme décrit au* n° 19.

Soient

s, t, ... les variables (réelles), en nombre quelconque, dont dépendent solidairement les arcs $A_{x,y,\ldots}$ et $A_{u,v,\ldots}$;
s_0, t_0, ... les valeurs fondamentales de s, t, ...;
$\mathcal{T}$ la durée (complexe) où ces variables sont assujetties à se mouvoir.

I. Désignant par $(s', t', \ldots)$ un instant déterminé (quelconque) de la durée $\mathcal{T}$, par x', y', ... les coordonnées imaginaires du point correspondant de l'arc $A_{x,y,\ldots}$, et par u', v', ... celles du point correspondant de l'arc $A_{u,v,\ldots}$, considérons les développements, à l'instant $(s', t', \ldots)$, de la pseudo-fonction (5) et des pseudo-fonctions (6), lesquels sont entiers, le premier par rapport aux différences $u - u'$,

$v - v'$, ..., les suivants par rapport aux différences $x - x'$, $y - y'$, ... avec les termes constants u', v', ...; puis prenons comme composante la fonction que définit le premier développement, comme fonctions simples celles que définissent les développements suivants, et considérons, conjointement avec elles, la fonction composée qu'engendre leur combinaison.

Cela posé, *on peut*, d'après ce qui a été dit au n° 19, *assigner quelque constante positive, r', telle que, à l'instant* $(s', t', \ldots)$, *le développement de la composante, les développements des fonctions simples, et celui qu'engendre leur combinaison, admettent tous des rayons de convergence* (*au moins*) *égaux à* r'.

II. *Il existe quelque constante positive, r, indépendante de l'instant* $(s, t, \ldots)$, *et telle que, à l'instant dont il s'agit, le développement de la pseudo-fonction* (5), *ceux des pseudo-fonctions* (6), *et celui qui résulte de leur combinaison, admettent tous des rayons de convergence* (*au moins*) *égaux à* r.

Considérons en effet, dans $[[s, t, \ldots]]$, la région *limitée et complète* $\mathfrak{I}$, et nommons *caractéristique* de l'instant $(s', t', \ldots)$ toute constante positive, r', telle que, à l'instant dont il s'agit, le développement de la pseudo-fonction (5), ceux des pseudo-fonctions (6), et celui qui résulte de leur combinaison, admettent tous des rayons de convergence (au moins) égaux à r'. Une pareille caractéristique existe certainement en vertu de I; il est d'ailleurs aisé de voir que si un instant $(s', t', \ldots)$ de la durée $\mathfrak{I}$ admet parmi ses caractéristiques la constante r', tout instant de cette même durée suffisamment voisin de $(s', t', \ldots)$ admet parmi les siennes une constante dont la différence à r' tombe numériquement au-dessous de toute quantité donnée : comme les caractéristiques sont ici essentiellement *supérieures* à zéro, il existe bien (n° 8) quelque constante positive, r, indépendante de l'instant considéré, et jouissant de la propriété énoncée.

III. Attribuons à la notation r le même sens que dans l'alinéa précédent II, et désignons par γ une constante positive telle, que les inégalités simultanées

$$\operatorname{mod}(s' - s'') < \gamma, \qquad \operatorname{mod}(t' - t'') < \gamma, \qquad \ldots,$$

supposées vérifiées pour deux instants, $(s', t', \ldots)$, $(s'', t'', \ldots)$, de la durée $\mathcal{J}$, entraînent comme conséquences nécessaires, pour les points correspondants des arcs $A_{x,y,\ldots}$, $A_{u,v,\ldots}$, les relations

$$\begin{array}{lll} \operatorname{mod}(x'-x'')<r, & \operatorname{mod}(y'-y'')<r, & \ldots, \\ \operatorname{mod}(u'-u'')<r, & \operatorname{mod}(v'-v'')<r, & \ldots : \end{array}$$

un pareil nombre γ existe certainement, car la durée $\mathcal{J}$ constitue, dans $[[s, t, \ldots]]$, une région *limitée et complète* où les seconds membres des équations qui définissent les deux arcs sont tous continus (n° 4; n° 12, 4°).

Cela posé, on se convaincra sans difficulté que la pseudo-fonction composée de $x, y, \ldots$ définie par la combinaison du développement fondamental de la pseudo-fonction (5) avec les développements fondamentaux des pseudo-fonctions (6) est calculable sur l'arc $A_{x,y,\ldots}$ avec le régulateur γ, et que son développement à un instant quelconque de l'arc $A_{x,y,\ldots}$ s'obtient conformément aux indications de l'énoncé.

22. Dans le cas où la série entière qui joue le rôle de composante a ses rayons de convergence tous infinis, il est aisé de voir que tout chemin brisé praticable à la fois pour les diverses pseudo-fonctions simples l'est aussi pour la pseudo-fonction composée; chacun des développements successifs obtenus pour celle-ci admet alors comme rayons de convergence ceux qu'admettent à la fois les développements de même rang des pseudo-fonctions simples, et s'obtient en combinant ces derniers avec celui de la composante [1].

---

[1] Supposons, d'une part, qu'une série entière par rapport aux g différences $u-\upsilon$, $v-\varphi$, ...,

$$\Sigma K_{P,Q,\ldots}(u-\upsilon)^P(v-\varphi)^Q\ldots, \tag{8}$$

ait des rayons de convergence tous infinis; supposons, d'autre part, que g séries entières par rapport aux n différences $x-\xi$, $y-\eta$, ...,

$$\left\{\begin{array}{l} \Sigma a_{p,q,\ldots}(x-\xi)^p(y-\eta)^q\ldots, \\ \Sigma b_{p,q,\ldots}(x-\xi)^p(y-\eta)^q\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{array}\right. \tag{9}$$

admettent le système de rayons de convergence δ_x, δ_y, ..., et qu'elles aient υ, φ, ...

En conséquence, *si la série entière qui joue le rôle de composante a ses rayons de convergence tous infinis, tout arc praticable à la fois pour*

---

pour termes constants respectifs. La série (8) étant prise comme fonction composante, et les g séries (9) comme fonctions simples, je dis que, *pour toutes valeurs des n différences $x-\xi$, $y-\eta$, ... dont les modules sont respectivement inférieurs à δ_x, δ_y, ..., la fonction composée est exprimable à l'aide d'un même développement, entier par rapport à ces différences.*

Considérons en effet, en même temps que les séries (8) et (9), les séries convergentes

$$(10)\qquad \begin{cases} \Sigma \bmod a_{p,q,\ldots}\,\delta'^{\,p}_x\,\delta'^{\,q}_y\ldots, \\ \Sigma \bmod b_{p,q,\ldots}\,\delta'^{\,p}_x\,\delta'^{\,q}_y\ldots, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

où les quantités positives δ'_x, δ'_y, ... sont *arbitrairement* choisies *au-dessous de* δ_x, δ_y, ... et désignons par

(9 *bis*) et (10 *bis*)

les séries (9) et (10) privées chacune du terme qui correspond à la combinaison d'indices $p, q, \ldots = 0, 0, \ldots$; assujettissons enfin les variables x, y, ... à vérifier les relations

$$(11)\qquad \bmod(x-\xi) = \delta'_x,\ \bmod(y-\eta) = \delta'_y,\ \ldots.$$

La valeur de la fonction composée peut alors s'obtenir en substituant à $u-\xi$, $v-\eta$, ..., dans la série (8), les sommes respectives des séries (9 *bis*). Dans la série résultant de cette substitution, considérons le terme général

$$(12)\qquad K_{P,Q,\ldots}\,[\text{première série } (9\ bis)]^P\,[\text{deuxième série } (9\ bis)]^Q\ldots,$$

et développons-le suivant la règle de multiplication des séries (sans réduction des termes semblables en $x-\xi$, $y-\eta$, ...) : dans ce développement, la somme des modules des termes est inférieure à

$$(13)\qquad \bmod K_{P,Q,\ldots}\,[\text{première série } (10\ bis)]^P\,[\text{deuxième série } (10\ bis)]^Q\ldots.$$

Or, la quantité (13) est le terme général d'une série convergente, puisque la série entière (8) a, par hypothèse, tous ses rayons de convergence infinis. Si donc on suppose vérifiées les relations (11), non seulement les séries partielles, $T_{P,Q,\ldots}$, analogues à celles que fournit l'expression (12) développée mécaniquement par la règle de multiplication, restent convergentes lorsqu'à chaque terme on substitue son module, mais encore les sommes de ces diverses séries de modules forment elles-mêmes une série convergente. On peut donc exécuter, sur la série qui a pour termes les sommes des séries partielles $T_{P,Q,\ldots}$, les deux opérations successives suivantes : 1° la transformer en une autre procédant suivant les termes élémentaires des séries partielles $T_{P,Q,\ldots}$; 2° ranger et grouper arbitrairement les termes de la série résultante, et, notamment, effectuer la réduction des termes semblables en $x-\xi$, $y-\eta$. Or, on tombe ainsi sur une série entière par rapport à ces différences, et la règle pour obtenir un pareil développement de la fonction composée est celle que nous avons formulée au n° 19.

les diverses pseudo-fonctions simples l'est aussi pour la pseudo-fonction composée.

Par exemple, si k pseudo-fonctions, dépendant d'un nombre au moins égal de variables imaginaires, sont toutes calculables sur un même arc, leur déterminant différentiel, pris par rapport à k quelconques de ces variables, jouira nécessairement aussi de la même propriété.

23. La différentiation d'une pseudo-fonction composée s'effectue d'ordinaire à l'aide de la formule connue, permettant d'écrire immédiatement ses dérivées premières, et qu'on applique plusieurs fois de suite pour le calcul des dérivées d'ordre supérieur.

La dérivée première relative à x de la pseudo-fonction composée $F = f(U, V, \ldots)$, *qui s'obtient par la combinaison des pseudo-fonctions simples*

$$u = U(x, y, \ldots), \qquad v = V(x, y, \ldots), \qquad \ldots$$

avec la composante $f(u, v, \ldots)$, *est donnée par la formule*

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial x} + \ldots,$$

où il faut, naturellement, faire dans $\frac{\partial f}{\partial u}, \frac{\partial f}{\partial v}, \ldots$ *les substitutions*

$$u = U, \qquad v = V, \qquad \ldots.$$

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 62.

24. Soient

$$(14) \qquad U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots$$

diverses pseudo-fonctions de $x, y, \ldots$ (en nombre limité);

$\Phi(x, y, \ldots), \ldots$ quelques-unes de leurs dérivées (en nombre également limité);

$(x_0, y_0, \ldots)$ le point fondamental commun à toute ces pseudo-fonctions;

$u_0, v_0, \ldots, \varphi_0, \ldots$ leurs valeurs fondamentales.

Soit, d'autre part,

$$(15) \qquad f(x, y, \ldots, u, v, \ldots, \varphi, \ldots)$$

une pseudo-fonction composante, avec

$$(x_0, y_0, \ldots, u_0, v_0, \ldots, \varphi_0, \ldots)$$

comme point fondamental.

Si, à partir de $(x_0, y_0, \ldots)$, *on trace un arc praticable pour les diverses pseudo-fonctions* (14), *si l'on suppose en outre que l'arc correspondant* (n° 20) *décrit par le point*

$$[x, y, \ldots, U(x, y, \ldots), V(x, y, \ldots), \ldots, \Phi(x, y, \ldots)]$$

soit lui-même praticable pour la pseudo-fonction composante (15), le simple rapprochement de l'énoncé du n° 21 avec la remarque finale du n° 17 nous fait voir que *le premier de ces deux arcs est praticable pour la pseudo-fonction composée*, et nous apprend à former le développement de cette dernière en un point quelconque de l'arc dont il s'agit, connaissant les développements correspondants des pseudo-fonctions (14) et (15).

Considérons maintenant deux pseudo-fonctions composées, finies ou différentielles, et supposons que les diverses données fondamentales définissant de part et d'autre, comme ci-dessus, les pseudo-fonctions simples et composantes, aient été choisies de telle manière que les développements fondamentaux des deux pseudo-fonctions composées soient identiques. Si l'on trace alors, à partir du point fondamental commun à ces dernières, un arc tel que la proposition précédente soit applicable à toutes deux, leurs développements construits, à l'aide du mécanisme indiqué, en un même point quelconque de l'arc dont il s'agit, seront, eux aussi, identiques l'un à l'autre.

Phases de nullité des pseudo-fonctions; leurs phases singulières.

25. Considérant une pseudo-fonction de $x, y, \ldots$, définie par un développement fondamental, nous nommerons *phase de nullité* de cette pseudo-fonction l'extrémité finale de tout arc continu (n° 13) partant du point fondamental et jouissant de la propriété suivante :

« La pseudo-fonction considérée est calculable sur cet arc par cheminement, et elle atteint la valeur zéro à l'extrémité finale de l'arc; mais elle ne l'atteint jamais tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées (réelles) dont l'arc dépend, à faire exclusion de la valeur finale, en remplaçant celle-ci par une autre située en deçà et indéfiniment voisine. »

Considérant un groupe de pseudo-fonctions de $x, y, \ldots$ en nombre limité, définies par un même point fondamental et divers développements fondamentaux, nous nommerons *phase singulière* du groupe l'extrémité finale de tout arc continu, A, partant du point fondamental et jouissant de la propriété suivante : « Les diverses pseudo-fonctions du groupe sont toutes calculables par cheminement sur l'arc A, tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont l'arc dépend, à faire exclusion de la valeur finale, en remplaçant celle-ci par une autre située en deçà et indéfiniment voisine; mais l'une au moins des pseudo-fonctions du groupe cesse d'être calculable par cheminement sur l'arc A, si l'on n'exclut pour aucune des indéterminées la valeur finale [1]. »

CHAPITRE II.

PHASES SINGULIÈRES DU GROUPE FORMÉ PAR LES SECONDS MEMBRES D'UN SYSTÈME PASSIF D'ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES TOTALES DU PREMIER ORDRE.

Étude des propriétés d'un certain groupe de pseudo-ionctions.

26. Nous rappellerons tout d'abord la proposition fondamentale classique de la théorie des fonctions implicites.

---

[1] La locution de *phase singulière* est empruntée à Méray, qui la définit comme il suit : « Relativement à une fonction donnée, dit-il, on pourrait, puisqu'elle est habituellement développable en série entière (taylorienne), appeler *ordinaires* les valeurs à partir desquelles ce développement est possible. Par opposition, nous appellerons valeurs *singulières* celles à partir desquelles il ne l'est plus, ce qui, comme nous l'avons annoncé, est toujours un fait exceptionnel, et nous dirons que la fonction se trouve dans une *phase singulière*, quand les variables prennent de semblables valeurs ou tendent vers elles. » Voir *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, première Partie, n° 144.

Soient

$$(1)\qquad \begin{cases} f_1(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ f_2(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ f_m(u, v, \ldots, x, y, \ldots) = 0, \end{cases}$$

m équations simultanées entre les diverses variables

$$u, v, \ldots,$$
$$x, y, \ldots,$$

dont les premières $u, v, \ldots$ *sont en nombre m comme les équations. Supposons que les premiers membres* $f_1, f_2, \ldots, f_m$ *soient tous développables à partir des valeurs particulières*

$$(2)\qquad u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots$$

de $u, v, \ldots, x, y, \ldots$, *et s'annulent pour les valeurs en question; supposons en outre que le déterminant différentiel,*

$$\Delta(u, v, \ldots, x, y, \ldots),$$

des m premiers membres par rapport aux m variables $u, v, \ldots$, *ne s'annule pas pour les valeurs* (2).

Cela étant :

1° *Le système des équations proposées* (1) *est identiquement vérifié par la substitution à* $u, v, \ldots$ *d'un certain groupe de fonctions de* $x, y, \ldots$,

$$u = \upsilon(x, y, \ldots),$$
$$v = \varphi(x, y, \ldots),$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

développables à partir des valeurs $x_0, y_0, \ldots$, *et ayant pour valeurs initiales respectives* $u_0, v_0, \ldots$;

2° *Si l'on considère, en même temps que le système proposé* (1), *le système des formules*

$$(3)\qquad \begin{cases} u - \upsilon(x, y, \ldots) = 0, \\ v - \varphi(x, y, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \end{cases}$$

les systèmes (1) *et* (3) *sont numériquement équivalents à l'intérieur de*

cercles suffisamment petits décrits de $u_0, v_0, \ldots, x_0, y_0, \ldots$ *comme centres dans les plans de notation graphique de* $u, v, \ldots, x, y, \ldots$.

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 120.

27. Considérons actuellement, entre les $h + 2k$ variables

$$x_1, \ldots, x_h,$$
$$u_1, \ldots, u_k,$$
$$C_1, \ldots, C_k,$$

le système des k relations

$$(4) \qquad \left\{ \begin{array}{l} u_1 = \Upsilon_1(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k = \Upsilon_k(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k), \end{array} \right.$$

admettant la solution numérique fondamentale

$$(5) \qquad x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$
$$(6) \qquad u_1^{(0)}, \ldots, u_k^{(0)},$$
$$(7) \qquad C_1^{(0)}, \ldots, C_k^{(0)},$$

et résoluble à partir de cette dernière par rapport à $C_1, \ldots, C_k$ conformément au principe général des fonctions implicites; soient

$$(8) \qquad \left\{ \begin{array}{l} C_1 = \Gamma_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ C_k = \Gamma_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \end{array} \right.$$

les formules de résolution. Les formules (4) définissant les u comme pseudo-fonctions des x et des C, différentions-les par rapport aux x, et, dans les relations résultantes, remplaçons les C par leurs expressions tirées de (8) : nous tomberons, en vertu d'une proposition connue, sur un système différentiel total passif impliquant les k fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ des h variables indépendantes $x_1, \ldots, x_h$, et admettant comme figure intégrale générale, dans l'espace à $h + k$ dimensions $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$, la famille de figures à h dimensions (4), qui dépend des k constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_k$. Nous désignerons par T le système total ainsi obtenu; l'application

du mécanisme à l'aide duquel on le déduit des formules (4) se nommera, par rapport à celles-ci, l'*élimination des constantes arbitraires*.

Traçons maintenant dans l'espace

$$(9) \qquad \big[[x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k]\big],$$

à partir du point [(5), (7)], un arc continu, $A_{x,C}$, que nous supposerons *praticable pour les diverses pseudo-fonctions* (4) : d'après ce qui a été dit au n° 20, le point de l'espace

$$(10) \qquad \big[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]\big]$$

résultant de l'association des $h + k$ valeurs acquises par les x et les u en un même point de l'arc décrira, à partir du point [(5), (6)], un arc continu, $A_{x,u}$, dépendant des mêmes indéterminées réelles que le premier.

Cela étant, *si, d'une part*, comme il a été dit, *les pseudo-fonctions* (4) *sont calculables sur l'arc* $A_{x,C}$, *d'où résulte que leur déterminant différentiel* Θ_C, *relatif aux* C, *y est lui-même calculable, si, d'autre part, les seconds membres du système* T *le sont sur l'arc correspondant* $A_{x,u}$, *on a les identités*

$$(11) \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_1} = P_1 \Theta_C, \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_2} = P_2 \Theta_C, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_h} = P_h \Theta_C,$$

où $P_1, P_2, \ldots, P_h$ *désignent certaines pseudo-fonctions des* x *et des* C *calculables sur l'arc* $A_{x,C}$.

Considérons en effet le déterminant différentiel

$$(12) \qquad \Theta_C(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k) = \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial C_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_1} & \ldots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_2} & \ldots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_2} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_k} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_k} & \ldots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_k} \end{vmatrix}.$$

D'après la règle connue pour prendre la dérivée d'un déterminant

par rapport à l'une des variables dont il dépend, la dérivée

$$\frac{\partial \Theta_C}{\partial x_j} \qquad (j = 1, 2, \ldots, h)$$

est la somme de k déterminants, savoir :

$$\text{premier déterminant} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j \partial C_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_1} \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j \partial C_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_2} \\ \cdots\cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j \partial C_k} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_k} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_k} \end{vmatrix} \right. ,$$

$$\text{deuxième déterminant} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial C_1} & \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_j \partial C_1} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_2} & \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_j \partial C_2} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_2} \\ \cdots & \cdots\cdots & \cdots & \cdots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_k} & \frac{\partial^2 Y_2}{\partial x_j \partial C_k} & \cdots & \frac{\partial Y_k}{\partial C_k} \end{vmatrix} \right. ,$$

$$k^{\text{ième}} \text{ déterminant} \left\{ \begin{vmatrix} \frac{\partial Y_1}{\partial C_1} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_1} & \cdots & \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_j \partial C_1} \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_2} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_2} & \cdots & \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_j \partial C_2} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots\cdots \\ \frac{\partial Y_1}{\partial C_k} & \frac{\partial Y_2}{\partial C_k} & \cdots & \frac{\partial^2 Y_k}{\partial x_j \partial C_k} \end{vmatrix} \right. ;$$

ceux-ci se déduisent respectivement du déterminant (12) en remplaçant dans ses colonnes de rangs respectifs $1, 2, \ldots, k$ les divers éléments par leurs dérivées premières relatives à x_j.

Soit maintenant

$$\frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \qquad (j = 1, 2, \ldots, h\,;\ i = 1, 2, \ldots, k)$$

le système T, ci-dessus défini : en désignant par (T *bis*) un système identique à T quant à l'écriture, mais où les inconnues u, au lieu de dépendre seulement des x comme dans T, dépendent à la fois des x et

des C, les pseudo-fonctions (4) vérifient identiquement le système (T *bis*), et l'on a, quels que soient les x et les C,

$$(13)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial Y_1}{\partial x_j} = F_{1,j}(x_1, \ldots, x_h, Y_1, \ldots, Y_k), \\ \dfrac{\partial Y_2}{\partial x_j} = F_{2,j}(x_1, \ldots, x_h, Y_1, \ldots, Y_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \dfrac{\partial Y_k}{\partial x_j} = F_{k,j}(x_1, \ldots, x_h, Y_1, \ldots, Y_k). \end{cases}$$

Comme, en vertu de notre hypothèse, les pseudo-fonctions (4) sont calculables par cheminement sur l'arc $A_{x,C}$, et que les seconds membres du système (T *bis*) le sont eux-mêmes sur l'arc $A_{x,C}$, la règle de différentiation des pseudo-fonctions composées est applicable (n° 23), et l'on déduit dès lors de la première formule (13)

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j\,\partial C_1} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial C_1} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial C_1} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_k}\frac{\partial Y_k}{\partial C_1}, \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j\,\partial C_2} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial C_2} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial C_2} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_k}\frac{\partial Y_k}{\partial C_2}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \frac{\partial^2 Y_1}{\partial x_j\,\partial C_k} &= \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_1}\frac{\partial Y_1}{\partial C_k} + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial C_k} + \ldots + \frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_k}\frac{\partial Y_k}{\partial C_k}; \end{aligned}$$

le premier des k déterminants dont la somme exprime, comme il a été dit, $\dfrac{\partial \Theta_C}{\partial x_j}$, a donc pour valeur $\dfrac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_1}\Theta_C$. Par un calcul semblable, les suivants deviendront

$$\frac{\partial F_{2,j}}{\partial Y_2}\Theta_C, \quad \ldots, \quad \frac{\partial F_{k,j}}{\partial Y_k}\Theta_C$$

et l'on aura

$$\frac{\partial \Theta_C}{\partial x_j} = \left(\frac{\partial F_{1,j}}{\partial Y_1} + \frac{\partial F_{2,j}}{\partial Y_2} + \ldots + \frac{\partial F_{k,j}}{\partial Y_k}\right)\Theta_C.$$

Dans le second membre de cette dernière relation, le multiplicateur de Θ_C est, en vertu du principe général des pseudo-fonctions composées (n° 21), calculable sur l'arc $A_{x,C}$; en le désignant par

$$P_j(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k),$$

on aura $\frac{\partial \Theta_C}{\partial x_j} = P_j \Theta_C$, d'où, en faisant successivement $j = 1, 2, \ldots, h$, les h relations (11).

28. Les mêmes définitions étant posées qu'au début du numéro précédent, *si le groupe des pseudo-fonctions* (4) *est calculable par cheminement sur l'arc* $A_{x,C}$, *et que leur déterminant différentiel* Θ_C, *relatif aux* C, *ne s'y annule jamais, le groupe des seconds membres du système* T *est calculable par cheminement sur l'arc correspondant* $A_{x,u}$.

Effectivement, le déterminant Θ_C étant supposé ne jamais s'annuler sur l'arc $A_{x,C}$, on pourra, à tout instant de cet arc, opérer sur les formules (4) l'élimination des constantes arbitraires. Il existe d'ailleurs, ainsi que le montre un raisonnement analogue à celui de l'alinéa II du n° 21, quelque constante positive, r, indépendante de l'instant considéré, et telle que, à l'instant dont il s'agit, les seconds membres du système total résultant admettent tous des rayons de convergence (au moins) égaux à r. On en déduit sans peine la propriété qu'il s'agit actuellement d'établir.

29. Les deux propositions que nous venons d'établir (n°s 27 et 28) entraînent respectivement, à titre de conséquences particulières, les deux que nous allons formuler.

Dans l'espace $[[x_1, \ldots, x_h]]$, traçons, à partir du point fondamental $(x_1^0, \ldots, x_h^0)$, un arc, $A_x(s, \ldots)$, dépendant d'un groupe d'interminées (réelles), $s, \ldots$; puis, dans l'espace $[[C_1, \ldots C_k]]$, à partir du point fondamental $(C_1^{(0)}, \ldots, C_k^{(0)})$, un arc, $A_C(t, \ldots)$, dépendant d'un deuxième groupe d'indéterminées, $t, \ldots$, qui n'offre aucune indéterminée commune avec le groupe $s, \ldots$. En supposant que l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$ soit praticable pour le groupe des pseudo-fonctions (4), le point $(u_1, \ldots, u_k)$ de l'espace $[[u_1, \ldots, u_k]]$ décrira, à partir du point fondamental $(u_1^0, \ldots, u_k^0)$, un arc correspondant, $A_u(s, \ldots, t, \ldots)$, dépendant à la fois des indéterminées $s, \ldots$ et des indéterminées $t, \ldots$, et, dès lors, le point

$$(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k)$$

de l'espace

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$$

décrira, à partir du point fondamental

$$(x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}, u_1^{(0)}, \ldots, u_k^{(0)}),$$

l'arc $[A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)]$. Cela étant :

I. *Si, d'une part, les pseudo-fonctions* (4) *sont calculables par cheminement sur l'arc*

$$[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)],$$

d'où résulte que leur déterminant différentiel Θ_C, relatif aux C, y est lui-même calculable, *si, d'autre part, les seconds membres du système* T *le sont sur l'arc correspondant*

$$[A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)],$$

on a les identités

$$(14) \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_1} = Q_1 \Theta_C, \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_2} = Q_2 \Theta_C, \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial \Theta_C}{\partial x_h} = Q_h \Theta_C,$$

où $Q_1, Q_2, \ldots, Q_h$ *désignent certaines pseudo-fonctions des* x *et des* C *calculables sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$.

II. *Si le groupe des pseudo-fonctions* (4) *est calculable sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, *et que leur déterminant différentiel* Θ_C, *relatif aux* C, *ne s'y annule jamais, le groupe des seconds membres du système* T *est calculable sur l'arc correspondant* $[A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)]$.

Observons ici que le fait, pour les pseudo-fonctions (4), d'être calculables par cheminement sur l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$ entraîne pour les sous-pseudo-fonctions

$$(15) \qquad \upsilon_1(C_1, \ldots, C_k), \quad \ldots, \quad \upsilon_k(C_1, \ldots, C_k),$$

dont les développements fondamentaux se déduisent de ceux de (4) par la simple attribution à $x_1, \ldots, x_h$ de leurs valeurs numériques fondamentales, la propriété d'être calculables sur l'arc $A_C(t, \ldots)$, ainsi que leur déterminant différentiel, θ_C.

Observons encore que le fait, pour Θ_C, de ne jamais s'annuler sur l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$ entraîne pour θ_C la propriété de ne jamais s'annuler sur l'arc $A_C(t, \ldots)$.

En conséquence, le corollaire II peut encore se formuler comme il suit :

Supposons que le groupe des pseudo-fonctions (4) *soit calculable sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, *et que le déterminant différentiel* θ_C *des sous-pseudo-fonctions* (15) *ne s'annule jamais sur l'arc* $A_C(t, \ldots)$.

Cela étant, si le déterminant différentiel Θ_C, *relatif aux* C, *des pseudo-fonctions* (4) *ne s'annule jamais sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, *le groupe des seconds membres du système* T *est calculable sur l'arc*

$$[A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)].$$

30. Nous allons établir maintenant la proposition réciproque.

Supposons, comme dans l'énoncé qui vient d'être formulé, *que le groupe des pseudo-fonctions* (4) *soit calculable sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, *et que le déterminant différentiel* θ_C *des sous-pseudo-fonctions* (15) *ne s'annule jamais sur l'arc* $A_C(t, \ldots)$.

Cela étant, si le groupe des seconds membres du système T *est calculable sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)]$, *le déterminant différentiel* Θ_C, *relatif aux* C, *des pseudo-fonctions* (4) *ne s'annule jamais sur l'arc* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$.

I. Il est tout d'abord bien facile de voir qu'*en associant l'instant fondamental de* $A_x(s, \ldots)$ *avec un instant quelconque de* $A_C(t, \ldots)$, *la valeur correspondante de* Θ_C *est nécessairement différente de zéro :* cela résulte de ce que θ_C, calculé par cheminement sur l'arc $A_C(t, \ldots)$, n'y acquiert jamais la valeur zéro.

Il reste à faire voir qu'en associant un instant *quelconque* de $A_x(s, \ldots)$ avec un instant quelconque de $A_C(t, \ldots)$, la valeur correspondante de Θ_C est encore différente de zéro : c'est ce que nous allons faire dans ce qui suit.

II. Supposons qu'une pseudo-fonction quelconque des x et des C soit calculable par cheminement sur l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$; sur $A_x(s, \ldots)$, prenons un instant quelconque, $(s', \ldots)$, et désignons par $x'_1, \ldots, x'_h$ les coordonnées imaginaires du point correspondant; sur $A_C(t, \ldots)$, prenons de même un instant quelconque, $(\tau, \ldots)$, et

désignons par $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ les coordonnées imaginaires du point correspondant : à l'instant $(s', \ldots, \tau, \ldots)$ de l'arc

$$[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$$

correspondra, pour notre pseudo-fonction, un développement entier par rapport aux différences

$$(16) \qquad x_1 - x'_1, \quad \ldots, \quad x_h - x'_h,$$

$$(17) \qquad C_1 - \gamma_1, \quad \ldots, \quad C_k - \gamma_k;$$

et, en ordonnant ce développement par rapport aux différences (17), les coefficients du développement résultant seront des séries entières par rapport aux différences (16).

Prenons maintenant sur $A_x(s, \ldots)$ un autre instant quelconque, $(s'', \ldots)$, et désignons par $x''_1, \ldots, x''_h$ les coordonnées imaginaires du point correspondant; prenons, d'autre part, sur $A_C(t, \ldots)$, le même instant, $(\tau, \ldots)$, que précédemment : à l'instant $(s'', \ldots, \tau, \ldots)$ de l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$ correspondra, pour notre pseudo-fonction, un développement entier par rapport aux différences

$$(18) \qquad x_1 - x''_1, \quad \ldots, \quad x_h - x''_h$$

et aux différences (17); et, en ordonnant, comme ci-dessus, ce développement par rapport aux différences (17), les coefficients du développement résultant seront des séries entières par rapport aux différences (18).

Désignons respectivement par D', D'' les deux développements qu'a fournis tour à tour l'ordination indiquée; ces développements sont entiers par rapport aux différences (17), et ont pour coefficients certaines fonctions des x.

Cela étant, *si, dans l'un de ces développements ordonnés,* D', *le terme (fonction des* x*) indépendant des différences* (17) *est identiquement nul, le terme similaire pris dans l'autre développement,* D'', *ne peut manquer d'être lui-même identiquement nul.*

Désignons en effet par d', d'' les termes indépendants des différences (17) dans les développements respectifs D', D''. Pour passer de D' à D'', il suffit de prendre sur $A_C(t, \ldots)$ l'instant fixe $(\tau, \ldots)$, puis de cheminer sur $A_x(s, \ldots)$, en prenant comme instant de

départ $(s', \ldots)$ et comme instant d'arrivée $(s'', \ldots)$; il suffira dès lors, pour passer de d' à d'', d'effectuer ce dernier cheminement : or, la nullité identique du développement d', si elle a lieu, entraîne, de proche en proche, celle de tous les développements subséquents, et, en particulier, celle du développement final.

III. Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, désignons par $(s', \ldots)$ un instant quelconque pris sur l'arc $A_x(s, \ldots)$, par $(t', \ldots)$ un instant quelconque pris sur l'arc $A_C(t, \ldots)$, et par

$$x'_1, \quad \ldots, \quad x'_h, \quad C'_1, \quad \ldots, \quad C'_k$$

les valeurs correspondantes des x et des C; puis, considérons le développement correspondant, Θ'_C, de la pseudo-fonction Θ_C, entier par rapport aux différences

$$(19) \qquad x_1 - x'_1, \quad \ldots, \quad x_h - x'_h,$$

$$(20) \qquad C_1 - C'_1, \quad \ldots, \quad C_k - C'_k,$$

et, dans ce développement, le terme indépendant des différences (19) et (20), lequel est une simple *constante numérique*. Ordonnons enfin le développement Θ'_C par rapport aux différences (20), et, dans le développement ainsi ordonné, désignons par ${}^{(x)}\theta'$ le terme indépendant de ces dernières, lequel est une *série entière* par rapport aux différences (19).

Or, entre la constante numérique et la série entière dont nous venons de parler, il existe cette relation, que *la nullité de la constante numérique, si elle avait lieu, entraînerait la nullité identique de la série entière;* en d'autres termes, la nullité du terme constant de la série ${}^{(x)}\theta'$ entraînerait la nullité identique de ${}^{(x)}\theta'$.

Pour l'établir, envisageons, à l'instant considéré $(s', \ldots, t', \ldots)$ de l'arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, le développement, Q'_j, de la pseudo-fonction $Q_j(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k)$ [n° 29, I], entier par rapport aux différences (19) et (20), et désignons par ${}^{(x)}q'_j$ l'ensemble des termes qui n'y dépendent pas des différences (20). Puisque, d'après les relations (14), on a, quels que soient les x et les C,

$$\frac{\partial \Theta'_C}{\partial x_j} = Q'_j \Theta'_C,$$

on aura manifestement, quels que soient les x,

$$\frac{\partial}{\partial x_j}\,{}^{(x)}\theta' = {}^{(x)}q'_j\,{}^{(x)}\theta',$$

d'où, en faisant successivement $j = 1, 2, \ldots, h$,

$$(21)\qquad \frac{\partial}{\partial x_1}\,{}^{(x)}\theta' = {}^{(x)}q'_1\,{}^{(x)}\theta', \qquad \frac{\partial}{\partial x_2}\,{}^{(x)}\theta' = {}^{(x)}q'_2\,{}^{(x)}\theta', \qquad \ldots, \qquad \frac{\partial}{\partial x_h}\,{}^{(x)}\theta' = {}^{(x)}q'_h\,{}^{(x)}\theta'.$$

Cela étant, supposons que le terme constant de la série ${}^{(x)}\theta'$ ait pour valeur numérique zéro, ou, en d'autres termes, que, pour

$$x_1, \ldots, x_h = x'_1, \ldots, x'_h,$$

la fonction ${}^{(x)}\theta'$ ait une valeur initiale nulle : en différentiant indéfiniment les relations (21) [par rapport aux variables x, qui seules y figurent], on obtiendra de proche en proche, pour les dérivées d'ordres successifs 1, 2, 3, ... de la fonction ${}^{(x)}\theta'$, des valeurs initiales toutes nulles. La fonction ${}^{(x)}\theta'$ est donc, de toute nécessité, identiquement nulle.

IV. Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, *si, à quelque instant de l'arc*

$$[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)],$$

instant obtenu, comme il a été dit, en associant un instant $(s', \ldots)$ de l'arc $A_x(s, \ldots)$ avec un instant $(t', \ldots)$ de l'arc $A_C(t, \ldots)$, *la pseudo-fonction* Θ_C *atteignait la valeur numérique zéro, elle ne pourrait manquer de l'atteindre aussi à l'instant* $(s_0, \ldots, t', \ldots)$, qui se déduit du premier, $(s', \ldots, t', \ldots)$, par la substitution à l'instant $(s', \ldots)$, pris sur $A_x(s, \ldots)$, de l'instant fondamental $(s_0, \ldots)$ de $A_x(s, \ldots)$.

Car, à l'instant $(s', \ldots, t', \ldots)$, primitivement choisi sur

$$[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)],$$

l'ensemble des termes du développement de Θ_C qui ne dépendent pas des différences (20) ne pourrait manquer, en vertu de III, d'être alors identiquement nul : la même chose aurait donc lieu, en vertu

de II, à l'instant $(s_0, \ldots, t', \ldots)$; à plus forte raison la valeur numérique de Θ_C serait-elle nulle à ce dernier instant.

V. Les mêmes choses étant posées que dans notre énoncé général, *la pseudo-fonction* Θ_C *est différente de zéro à un instant quelconque de* $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$.

Car, si elle s'annulait à quelque instant de l'arc, elle s'annulerait aussi, en vertu de IV, à l'instant qui se déduit du premier par la substitution à l'instant pris sur $A_x(s, \ldots)$ de l'instant fondamental de $A_x(s, \ldots)$: or, une semblable conséquence est contradictoire avec I.

Ainsi se trouve achevée notre démonstration.

31. Examinons spécialement le cas où les sous-pseudo-fonctions (15) sont de simples fonctions *linéaires* de $C_1, \ldots, C_k$ (à coefficients constants),

$$(22)\qquad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{1,1}C_1 + \ldots + \alpha_{1,k}C_k + \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k,1}C_1 + \ldots + \alpha_{k,k}C_k + \alpha_k : \end{array}\right.$$

en supposant que le déterminant

$$(23)\qquad \begin{vmatrix} \alpha_{1,1}, & \ldots, & \alpha_{1,k} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{k,1}, & \ldots, & \alpha_{k,k} \end{vmatrix}$$

soit différent de zéro, et prenant, comme de raison, pour valeurs fondamentales de $C_1, \ldots, C_k$ celles qui vérifient les relations

$$\begin{array}{l} \alpha_{1,1}C_1 + \ldots + \alpha_{1,k}C_k + \alpha_1 = u_1^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k,1}C_1 + \ldots + \alpha_{k,k}C_k + \alpha_k = u_k^{(0)} \end{array}$$

(*voir* le n° 27), on aperçoit immédiatement que les relations (4), résolues, en fait, par rapport aux u, sont, de plus, résolubles par rapport aux C, conformément au principe général des fonctions implicites, à partir des valeurs fondamentales des x, u, C. Leurs seconds membres peuvent en effet, par un groupement convenable des termes de leurs

développements, être mis sous la forme

$$(24)\quad \left\{\begin{array}{l} \alpha_{1,1}C_1+\ldots+\alpha_{1,k}C_k+\alpha_1+(x_1-x_1^0)\Omega_{1,1}+(x_2-x_2^0)\Omega_{1,2}+\ldots+(x_h-x_h^0)\Omega_{1,h}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k,1}C_1+\ldots+\alpha_{k,k}C_k+\alpha_k+(x_1-x_1^0)\Omega_{k,1}+(x_2-x_2^0)\Omega_{k,2}+\ldots+(x_h-x_h^0)\Omega_{k,h}. \end{array}\right.$$

où les hk coefficients Ω sont des fonctions de $x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k$ développables à partir des valeurs fondamentales de ces variables. Or, le déterminant différentiel des k expressions (24) par rapport aux variables $C_1, \ldots, C_k$ se réduit manifestement, pour

$$x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

à celui des k fonctions linéaires (22), c'est-à-dire, en vertu de notre hypothèse sur (23), à une constante non nulle. En effectuant alors, comme nous venons d'en montrer la possibilité, la résolution des formules (4) par rapport aux C, nous obtiendrons un groupe de formules tel que (8).

Observons maintenant que, dans le cas actuel, le déterminant différentiel des sous-pseudo-fonctions (22), se réduisant identiquement à la constante non nulle (23), n'acquiert jamais la valeur numérique zéro. En conséquence, les propriétés énoncées à l'alinéa II du n° 29 (*in fine*) et au n° 30 nous fournissent, sans autre démonstration, celles que nous allons formuler :

Les sous-pseudo-fonctions (15), auxquelles se réduisent les pseudo-fonctions (4) par l'attribution aux x de leurs valeurs numériques fondamentales, *n'étant autres désormais que les fonctions linéaires* (22), *pour lesquelles le déterminant* (23) *est différent de zéro*, convenons, pour éviter toute équivoque, de désigner les pseudo-fonctions (4) à l'aide des notations

$$(25)\quad \left\{\begin{array}{l} u_1 = U_1(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k = U_k(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k), \end{array}\right.$$

et le système total passif déduit de (25) par l'élimination des constantes arbitraires C (n° 27) à l'aide de la notation Σ.

Cela étant, et *les pseudo-fonctions* (25) *étant supposées calculables*

par cheminement sur l'arc

$$(26) \qquad [A_x(s, \ldots), A_G(t, \ldots)],$$

pour que le système Σ *ait tous ses seconds membres calculables par cheminement sur l'arc correspondant*

$$(27) \qquad [A_x(s, \ldots), A_u(s, \ldots, t, \ldots)],$$

il faut et il suffit que, sur l'arc (26), *le déterminant différentiel*

$$(28) \qquad \frac{\partial(U_1, \ldots, U_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)}$$

n'acquière jamais la valeur numérique zéro.

32. Les mêmes notations étant adoptées, *si un arc tel que* (26) *fournit par son extrémité finale une phase de nullité du déterminant différentiel* (28), *l'arc correspondant* (27) *fournira par son extrémité finale une phase singulière du groupe des seconds membres du système total passif* Σ (*voir* les définitions posées au n° 25).

Effectivement, tant que, pour chacune des indéterminées $s, \ldots, t, \ldots$, on fait abstraction de la valeur finale, le groupe des seconds membres de Σ est calculable sur l'arc (27) [car la condition formulée au n° 31 est suffisante]. Cela étant, si l'extrémité finale de l'arc (27) n'était pas pour le groupe une phase singulière, le groupe serait calculable par cheminement sur l'arc dont il s'agit jusques et y compris l'instant final, et, dès lors (puisque la condition formulée au n° 31 est nécessaire), le déterminant différentiel relatif aux C des pseudo-fonctions (25) serait, contrairement à l'hypothèse, différent de zéro à l'instant final.

Phases singulières du groupe formé par l'association des seconds membres d'un système total passif donné.

33. Soit

$$(1) \qquad \frac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \qquad (i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, h)$$

un système différentiel total du premier ordre impliquant *les k fonc-*

tions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ *des* h *variables indépendantes* $x_1, \ldots, x_h$; ce système, composé de hk équations, a pour premiers membres les hk dérivées premières des u par rapport aux x, et ne contient dans ses seconds membres aucune dérivée; nous supposerons essentiellement qu'il est *passif*.

Parallèlement au système (1), considérons le système

$$(1\ bis)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k\,;\ j = 1, 2, \ldots, h), \end{cases}$$

identique à (1) quant à l'écriture, mais où *les fonctions inconnues* $u_1, \ldots, u_k$ *sont supposées dépendre, non plus seulement*, comme dans (1), *des* h *variables* $x_1, \ldots, x_h$, *mais encore de* k *variables adjointes*, $C_1, \ldots, C_k$, qui ne figurent dans les équations du système, ni par elles-mêmes, ni par l'intermédiaire d'aucun symbole de dérivation : le système (1) étant supposé *passif*, le système (1 *bis*) l'est aussi, car l'application de la règle de passivité conduit, pour l'un et pour l'autre, aux mêmes relations. Dans le premier, (1), les conditions initiales sont de la forme

$$\text{pour}\quad \begin{aligned} &u_1, \ldots, u_k = \text{des valeurs numériques données} \\ &x_1, \ldots, x_h = \text{des valeurs numériques données}; \end{aligned}$$

dans le deuxième, (1 *bis*), elles sont de la forme

$$\text{pour}\quad \begin{aligned} &u_1, \ldots, u_k = \text{des fonctions données de } C_1, \ldots, C_k \\ &x_1, \ldots, x_h = \text{des valeurs numériques données.} \end{aligned}$$

Cela posé, soient

$$x_1^{(0)}, \quad \ldots, \quad x_h^{(0)}, \quad u_1^{(0)}, \quad \ldots, \quad u_k^{(0)}$$

des valeurs numériques fondamentales de

$$x_1, \quad \ldots, \quad x_h, \quad u_1, \quad \ldots, \quad u_k$$

à partir desquelles les seconds membres de (1) ou (1 *bis*) soient déve-

loppables en séries tayloriennes ;

$$(2)\qquad \begin{cases} \alpha_{1,1}C_1 + \ldots + \alpha_{1,k}C_k + \alpha_1, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k,1}C_1 + \ldots + \alpha_{k,k}C_k + \alpha_k \end{cases}$$

k fonctions linéaires de $C_1, \ldots, C_k$ dont les coefficients α ont été choisis sous la seule condition

$$\begin{vmatrix} \alpha_{1,1}, & \ldots, & \alpha_{1,k} \\ \ldots, & \ldots, & \ldots \\ \alpha_{k,1}, & \ldots, & \alpha_{k,k} \end{vmatrix} \neq 0.$$

Comme valeurs fondamentales des variables adjointes $C_1, \ldots, C_k$, prenons celles qui vérifient les relations

$$\begin{gathered} \alpha_{1,1}C_1 + \ldots + \alpha_{1,k}C_k + \alpha_1 = u_1^{(0)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \alpha_{k,1}C_1 + \ldots + \alpha_{k,k}C_k + \alpha_k = u_k^{(0)}, \end{gathered}$$

et soient, alors,

$$(3)\qquad \begin{cases} u_1 = U_1(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k = U_k(x_1, \ldots, x_h, C_1, \ldots, C_k) \end{cases}$$

les intégrales du système (1 *bis*) qui, pour

$$x_1, \ldots, x_h = x_1^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)},$$

se réduisent aux fonctions *linéaires* (2) : les formules (3), où $C_1, \ldots, C_k$ sont considérés comme des constantes arbitraires, fournissent, comme on sait, les intégrales générales du système (1), et l'élimination de ces arbitraires, opérée sur (3), fait retomber identiquement sur (1).

Cela étant, la propriété établie au n° 32 permet, comme on va le voir, de réaliser un notable progrès dans la recherche des phases singulières du groupe des $F_{i,j}$, seconds membres de (1). Considérons en effet le système obtenu en adjoignant aux k formules (3) la relation

$$(4)\qquad \frac{\partial(U_1, \ldots, U_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0 :$$

dans ce système, qui relie les $h + 2k$ indéterminées $x_1, \ldots, x_h$,

$u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k$, toute solution numérique,

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k, \gamma_1, \ldots, \gamma_k),$$

fournira, en y faisant abstraction des valeurs $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ de $C_1, \ldots, C_k$, la phase singulière

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \upsilon_1, \ldots, \upsilon_k)$$

du groupe des $F_{i,j}$, à la condition toutefois, comme l'indique notre énoncé du n° 32, que

$$(\xi_1, \ldots, \xi_h, \gamma_1, \ldots, \gamma_k)$$

soit bien l'extrémité finale d'un arc $[A_x(s, \ldots), A_C(t, \ldots)]$, praticable pour le calcul par cheminement des intégrales générales (3), et tout le long duquel, en excluant la valeur finale de chacune des indéterminées $s, \ldots, t, \ldots$, le déterminant différentiel $\frac{\partial(U_1, \ldots, U_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)}$ n'acquière jamais la valeur numérique zéro. Sous réserve de cette restriction, indispensable pour la rigueur, on se trouve conduit à éliminer, si possible, $C_1, \ldots, C_k$ entre les $k+1$ équations du système fini [(3), (4)].

Observons maintenant qu'en raison des conditions particulières imposées ci-dessus aux équations intégrales (3), leur formation présentera souvent de grandes difficultés, et que, dès lors, les calculs à effectuer pour l'élimination, ainsi que les vérifications relatives à la restriction de cheminement, deviendront pratiquement inexécutables : mais on peut tout d'abord, en ce qui concerne le calcul d'élimination, s'affranchir entièrement de ce surcroît de complications.

Effectivement, si, dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

on considère la figure variable à k paramètres que définit le système des k équations

$$(5) \qquad \begin{cases} M_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0. \end{cases}$$

cette figure variable à h dimensions admet, en général, une enveloppe

à $h+k-1$ dimensions, dont l'équation réduite s'obtiendra par l'élimination des paramètres $C_1, \ldots, C_k$ *entre les k équations* (5) *et la relation*

$$\frac{\partial(M_1, \ldots, M_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0 \quad (^1); \tag{6}$$

le système [(5), (6)], *en général normalement résoluble par rapport à $k+1$ des coordonnées, définira une caractéristique à $h-1$ dimensions* (²).

De cette propriété, que nous allons établir, on conclut que, dans l'élimination indiquée plus haut sur le système [(3), (4)], *le résultat est indépendant de l'écriture adoptée pour les équations intégrales générales du système* (1), lesquelles, définissant toujours, dans l'espace $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$, la même famille de figures, ne peuvent manquer, quand on effectue sur ces figures une recherche d'enveloppe, de conduire toujours au même résultat.

Si, après avoir procédé à cette recherche le plus simplement qu'on

---

(¹) A cause de l'équation (6), cette élimination ne peut s'effectuer par la résolution des équations (5).

(²) Exemples :

1° $h=1$, $k=1$. Dans l'espace $[[x, y]]$, la ligne variable $F(x, y, C) = 0$ admet, en général, une ligne enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination du paramètre C entre les deux équations $F(x, y, C) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial C} = 0$; l'enveloppe touche d'ailleurs en un simple point chacune des enveloppées.

2° $h=1$, $k=2$. Dans l'espace $[[x, y, z]]$, la ligne variable

$$F_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0,$$
$$F_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0$$

admet, en général, une surface enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination des paramètres C_1, C_2 entre les trois équations

$$F_1(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \qquad F_2(x, y, z, C_1, C_2) = 0, \qquad \frac{\partial(F_1, F_2)}{\partial(C_1, C_2)} = 0;$$

l'enveloppe touche d'ailleurs en un simple point chacune des enveloppées.

3° $h=2$, $k=1$. Dans l'espace $[[x, y, z]]$, la surface variable $L(x, y, z, C) = 0$ admet, en général, une surface enveloppe, dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination du paramètre C entre les deux équations $L(x, y, z, C) = 0$, $\frac{\partial L}{\partial C} = 0$; l'enveloppe se raccorde d'ailleurs suivant une ligne avec chacune des enveloppées.

aura pu, on juge insuffisamment commodes les vérifications relatives à la restriction de cheminement telle que nous l'avons formulée, on tâchera d'apercevoir, soit par l'examen direct du groupe des $F_{i,j}$, soit par toute autre voie qui semblera praticable, si les divers points de l'espace $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$ fournis par l'élimination sont bien tous des phases singulières (n° 25) de ce groupe.

Interprétation hypergéométrique du calcul d'élimination.

34. Nous établirons tout d'abord divers lemmes relatifs à la théorie hypergéométrique des contacts.

Lemme I. — Dans un espace à n dimensions (réelles ou imaginaires), on considère trois figures, F_1, F_2, F_3, ayant un point commun, ordinaire pour toutes trois; soient $n-p_1$, $n-p_2$, $n-p_3$ leurs nombres respectifs de dimensions, que l'on suppose rangés *par ordre de grandeur décroissante* ($n-p_1 \geqq n-p_2 \geqq n-p_3$). Cela étant, *si, au point dont il s'agit,* F_1 *est tangente à* F_2, *et* F_2 *tangente à* F_3, F_1 *sera nécessairement tangente à* F_3.

La définition d'un contact d'ordre quelconque entre deux figures étant, comme on sait, indépendante de toute transformation ponctuelle opérée sur les coordonnées, il est toujours permis, si l'on y trouve quelque avantage, de recourir à une pareille transformation. Or, en vertu d'une remarque exposée ailleurs [1], on peut, moyennant une simple transformation linéaire des n coordonnées, faire en sorte que les équations transformées de F_1 soient indifféremment résolubles par rapport à tout groupe de p_1 coordonnées; qu'en même temps les équations transformées de F_2 le soient, indifféremment, par rapport à tout groupe de p_2 coordonnées; et qu'en même temps aussi, les équations transformées de F_3 le soient, indifféremment, par rapport à tout groupe de p_3 coordonnées. Pour fixer les idées, supposons qu'il s'agisse de l'espace à 7 dimensions $[[x, y, z, s, t, u, v]]$, que l'on ait $p_1 = 1$,

---

(1) *Sur les principes fondamentaux de la Théorie des contacts dans l'Hypergéométrie réelle ou imaginaire, etc.*, n° 21 (*Journal de Mathématiques pures et appliquées*, 1923, fasc. 3).

$p_2 = 3$, $p_3 = 5$, et que, dans le voisinage du point commun, les figures F_1, F_2, F_3 se trouvent définies par les systèmes respectifs

$$x = X_1(y, z, s, t, u, v);$$

$$\begin{aligned} x &= X_2(s, t, u, v), \\ y &= Y_2(s, t, u, v), \\ z &= Z_2(s, t, u, v); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= X_3(u, v), \\ y &= Y_3(u, v), \\ z &= Z_3(u, v), \\ s &= S_3(u, v), \\ t &= T_3(u, v), \end{aligned}$$

comprenant respectivement 1, 3, 5 équations. En vertu des définitions générales relatives aux contacts [1], on est conduit à former successivement les trois groupes de fonctions composées

$$(1) \qquad X_2(s, t, u, v) - X_1[Y_2(s, t, u, v), Z_2(s, t, u, v), s, t, u, v];$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} &X_3(u, v) - X_2[S_3(u, v), T_3(u, v), u, v], \\ &Y_3(u, v) - Y_2[S_3(u, v), T_3(u, v), u, v], \\ &Z_3(u, v) - Z_2[S_3(u, v), T_3(u, v), u, v]; \end{aligned} \right.$$

$$(3) \qquad X_3(u, v) - X_1[Y_3(u, v), Z_3(u, v), S_3(u, v), T_3(u, v), u, v],$$

et à établir à leur sujet la propriété suivante :

Si l'on suppose :

1° qu'au point considéré la fonction composée (1) s'annule ainsi que toutes ses dérivées premières (relatives à s, t, u, v);

2° qu'en même temps les fonctions composées (2) s'y annulent ainsi que toutes leurs dérivées premières (relatives à u, v) :

la fonction composée (3) ne pourra manquer de s'y annuler elle-même ainsi que toutes ses dérivées premières (relatives à u, v).

La chose étant manifeste en ce qui concerne les fonctions elles-mêmes, occupons-nous de ce qui concerne les dérivées.

Pour opérer le calcul des valeurs initiales des dérivées premières

---

[1] *Sur les principes fondamentaux, etc.*

de (3), il est permis, en vertu de ce qu'on suppose sur les fonctions composées (2), de substituer à (3) l'expression

$$(4)\qquad \left\{\begin{array}{l} X_2(S_3, T_3, u, v) \\ -X_1[Y_2(S_3, T_3, u, v), Z_2(S_3, T_3, u, v), S_3, T_3, u, v]. \end{array}\right.$$

D'après la règle des fonctions composées, la dérivée partielle de (4) par rapport à u a pour valeur

$$\begin{aligned} &\frac{\partial X_2}{\partial S_3}\frac{\partial S_3}{\partial u} + \frac{\partial X_2}{\partial T_3}\frac{\partial T_3}{\partial u} + \frac{\partial X_2}{\partial u} \\ -&\frac{\partial X_1}{\partial Y_2}\left[\frac{\partial Y_2}{\partial S_3}\frac{\partial S_3}{\partial u} + \frac{\partial Y_2}{\partial T_3}\frac{\partial T_3}{\partial u} + \frac{\partial Y_2}{\partial u}\right] \\ -&\frac{\partial X_1}{\partial Z_2}\left[\frac{\partial Z_2}{\partial S_3}\frac{\partial S_3}{\partial u} + \frac{\partial Z_2}{\partial T_3}\frac{\partial T_3}{\partial u} + \frac{\partial Z_2}{\partial u}\right] \\ -&\left[\frac{\partial X_1}{\partial S_3}\frac{\partial S_3}{\partial u} + \frac{\partial X_1}{\partial T_3}\frac{\partial T_3}{\partial u} + \frac{\partial X_1}{\partial u}\right], \end{aligned}$$

ce qui peut s'écrire

$$\begin{aligned} &\frac{\partial S_3}{\partial u}\left[\frac{\partial X_2}{\partial S_3} - \frac{\partial X_1}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial S_3} - \frac{\partial X_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial S_3} - \frac{\partial X_1}{\partial S_3}\right] \\ +&\frac{\partial T_3}{\partial u}\left[\frac{\partial X_2}{\partial T_3} - \frac{\partial X_1}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial T_3} - \frac{\partial X_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial T_3} - \frac{\partial X_1}{\partial T_3}\right] \\ +&\left[\frac{\partial X_2}{\partial u} - \frac{\partial X_1}{\partial Y_2}\frac{\partial Y_2}{\partial u} - \frac{\partial X_1}{\partial Z_2}\frac{\partial Z_2}{\partial u} - \frac{\partial X_1}{\partial u}\right]. \end{aligned}$$

Or, il résulte de ce que l'on suppose sur la fonction composée (1) que, dans cette dernière expression, le coefficient de $\frac{\partial S_3}{\partial u}$, celui de $\frac{\partial T_3}{\partial u}$ et le terme indépendant s'annulent au point considéré : la dérivée première de (3) par rapport à u s'y annule donc aussi.

Et, semblablement, la dérivée première de (3) par rapport à v.

35. Lemme II. — Dans un espace à n dimensions (réelles ou imaginaires), nous conviendrons d'appeler *ligne* toute figure à une dimension; ou, en d'autres termes, tout système réduit de $n-1$ équations reliant les n coordonnées : un pareil système est normalement résoluble par rapport à $n-1$ des coordonnées (convenablement choisies), et la coordonnée restante est alors arbitraire.

L'entier h étant supposé plus grand que 1, considérons, dans

l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

les deux figures suivantes, ayant un point (ordinaire) commun : l'une d'elles, à h dimensions, sera définie par le système réduit des k équations

$$(5) \qquad \begin{cases} P_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0; \end{cases}$$

l'autre, à $h+k-1$ dimensions, sera définie par l'équation réduite

$$(6) \qquad Q(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0.$$

Nous nous bornerons d'ailleurs à les envisager toutes deux dans le voisinage exclusif du point commun dont il s'agit.

Cela étant, *pour que les figures* (5) *et* (6) *soient tangentes entre elles, il faut et il suffit que la ligne d'intersection de* (5) *avec toute figure à* $k+1$ *dimensions* (*passant par le point commun*) *soit tangente à* (6).

Les figures (5) *et* (6) *étant supposées tangentes, et le système* [(5), (6)] *étant supposé réduit, la figure de raccordement est à* $h-1$ *dimensions.*

A. Supposons, pour fixer les idées, que $(u_1, \ldots, u_k)$ soit l'un des groupes de k coordonnées par rapport auxquels le système (5) est normalement résoluble : une des lignes auxquelles il est fait allusion dans l'énoncé s'obtient alors en adjoignant aux k équations (5) un système de $h-1$ équations,

$$(7) \qquad \begin{cases} \Phi_1 \quad (x_1, x_2, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h-1}(x_1, x_2, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \end{cases}$$

arbitrairement choisi sous la seule restriction que le groupe des $k+h-1$ équations (5) et (7) soit normalement résoluble en fonctions de quelqu'une des coordonnées $x_1, x_2, \ldots, x_h$, par exemple de x_1.

Pour que les figures (5) et (6) soient tangentes entre elles, il faut et il suffit que, si du groupe (5) on tire les u en fonctions des x,

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1(x_1, x_2, \ldots, x_h), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k &= v_k(x_1, x_2, \ldots, x_h), \end{aligned}$$

la fonction composée

$$Q(x_1, x_2, \ldots, x_h, v_1, \ldots, v_k),$$

que nous désignerons plus simplement par

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_h),$$

s'annule au point considéré ainsi que ses diverses dérivées premières $\frac{\partial R}{\partial x_1}, \frac{\partial R}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial R}{\partial x_h}$.

D'autre part, pour que la ligne [(5), (7)] et la figure (6) soient tangentes entre elles, il faut et il suffit qu'en résolvant le système [(5), (7)] en fonctions de x_1 et portant les valeurs obtenues dans le premier membre de (6), la fonction composée résultante s'annule au point considéré ainsi que sa dérivée première. Or, pour résoudre [(5), (7)], on peut, d'après la théorie générale des fonctions implicites, tirer d'abord $u_1, \ldots, u_k$ de (5) et transporter dans (7), ce qui donne

$$(8) \qquad \begin{cases} \Phi_1 \quad (x_1, x_2, \ldots, x_h, v_1, \ldots, v_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h-1}(x_1, x_2, \ldots, x_h, v_1, \ldots, v_k) = 0; \end{cases}$$

puis, résoudre (8) par rapport à $x_2, \ldots, x_h$, d'où

$$x_2 = \xi_2(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_h = \xi_h(x_1):$$

en définitive, la ligne [(5), (7)] se trouvera représentée par les formules

$$\begin{gathered} u_1 = v_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ u_k = v_k(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h), \\ x_2 = \xi_2(x_1), \qquad \ldots, \qquad x_h = \xi_h(x_1). \end{gathered}$$

La fonction composée à former n'est donc autre que

$$Q[x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h, v_1(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h), \ldots, v_k(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h)],$$

c'est-à-dire

$$(9) \qquad R(x_1, \xi_2, \ldots, \xi_h),$$

et elle a pour dérivée première (relative à x_1)

$$\frac{\partial R}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial \xi_2}\frac{d\xi_2}{dx_1} + \ldots + \frac{\partial R}{\partial \xi_h}\frac{d\xi_h}{dx_1}. \tag{10}$$

Cela posé :

La condition énoncée est nécessaire; car la nullité de (9) et (10) au point considéré résulte immédiatement de celles de

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_h), \quad \frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial x_h} \quad (^1).$$

La condition énoncée est suffisante.

Considérons en effet la ligne [(5), (7)], arbitrairement tracée sur la figure (5). En désignant par $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, \ldots, x_h^{(0)}$ les valeurs numériques de $x_1, x_2, \ldots, x_h$ au point dont il s'agit, on peut tour à tour, pour les $h-1$ équations (7), choisir notamment les h systèmes indiqués dans les h lignes horizontales qui suivent :

$$\begin{array}{llll}
x_2 = x_2^{(0)}, & x_3 = x_3^{(0)}, & \ldots, & x_h = x_h^{(0)}; \\
x_2 = x_2^{(0)} + x_1, & x_3 = x_3^{(0)}, & \ldots, & x_h = x_h^{(0)}; \\
x_2 = x_2^{(0)}, & x_3 = x_3^{(0)} + x_1, & \ldots, & x_h = x_h^{(0)}; \\
\ldots\ldots\ldots, & \ldots\ldots\ldots\ldots, & \ldots, & \ldots\ldots\ldots; \\
x_2 = x_2^{(0)}, & x_3 = x_3^{(0)}, & \ldots, & x_h = x_h^{(0)} + x_1.
\end{array}$$

Les expressions (9) et (10) s'annulant, d'après l'hypothèse, au point considéré pour l'un quelconque de ces choix, on voit immédiatement qu'il en sera de même de

$$R(x_1, x_2, \ldots, x_h), \quad \frac{\partial R}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial R}{\partial x_2}, \quad \ldots, \quad \frac{\partial R}{\partial x_h}.$$

B. *Les figures* (5) *et* (6) *étant supposées tangentes, et le système* [(5), (6)] *étant supposé réduit, la figure de raccordement est à* $h-1$ *dimensions.*

Car le système [(5), (6)] définit l'ensemble des points communs aux deux figures en contact.

---

(1) Ce premier point n'est d'ailleurs qu'une conséquence particulière du lemme I n° 34).

36. Du lemme que nous venons d'établir découle immédiatement le corollaire suivant :

Considérons, dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

la figure variable à h dimensions, dépendant de paramètres α, β, ... en nombre quelconque, que définit le système des k équations

$$(11) \qquad \left\{ \begin{array}{l} F_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots) = 0, \end{array} \right.$$

normalement résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées.

Pour que cette figure variable (11) *à h dimensions admette une enveloppe à $h+k-1$ dimensions, il faut et il suffit qu'il existe quelque figure (fixe) de cette dernière espèce à laquelle soit constamment tangente la ligne d'intersection de la figure variable* (11) *avec toute figure fixe à $k+1$ dimensions.*

L'enveloppe étant supposée exister, la caractéristique sera, en général, à $h-1$ dimensions.

37. Lemme III. — Désignant par h, k, l trois entiers positifs tels que $h-l$ soit >0, considérons, dans l'espace à $k+h$ dimensions

$$(12) \qquad [[x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

d'une part, la figure à $h-l$ dimensions que définit le système des $k+l$ équations

$$(13) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P_1(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \end{array} \right.$$

$$(14) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \Phi_1(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_l(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0 \end{array} \right.$$

(normalement résoluble par rapport à quelque groupe de $k+l$ coordonnées); d'autre part, la figure à k dimensions que définit le système

des $(h-l)+l=h$ équations

$$(15)\qquad \begin{cases} Q_1 \quad (x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_{h-l}(x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \end{cases}$$

$$(14)\qquad \begin{cases} \Phi_1 \quad (x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_l \quad (x_1, \ldots, x_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0 \end{cases}$$

(normalement résoluble par rapport à quelque groupe de h coordonnées). Les équations (14), *qui figurent dans l'un et dans l'autre système*, sont (en vertu même de ce que nous supposons sur la nature réduite de ces systèmes) normalement résolubles par rapport à quelque groupe de l coordonnées, par exemple $x_1, \ldots, x_l$, qui, dès lors, pourront s'exprimer en fonctions des $k+h-l$ coordonnées restantes $x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k$; soient

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1(x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_l &= \xi_l(x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \end{aligned}$$

les expressions obtenues. En les transportant, à la place de $x_1, \ldots, x_l$, dans les groupes (13) et (15), ceux-ci deviennent respectivement

$$(16)\qquad \begin{cases} P_1(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \end{cases}$$

et

$$(17)\qquad \begin{cases} Q_1 \quad (\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ Q_{h-l}(\xi_1, \ldots, \xi_l, x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0; \end{cases}$$

les groupes (16), (17), résultant de cette substitution, définissent, dans l'espace à $k+h-l$ dimensions

$$(18)\qquad \big[[x_{l+1}, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]\big],$$

le premier, (16), une figure à $h-l$ dimensions, le second, (17), une figure à k dimensions, et l'adjonction du groupe (14) aux groupes respectifs (16) et (17) fait manifestement retomber, des deux figures

(16) et (17) de l'espace (18), sur les deux figures primitivement considérées de l'espace (12).

Cela étant, *pour que, dans l'espace* (12) *à* $k+h$ *dimensions, la figure à* $h-l$ *dimensions* [(13), (14)] *et la figure à* k *dimensions* [(15), (14)] *soient tangentes entre elles, il faut et il suffit que, dans l'espace* (18) *à* $k+h-l$ *dimensions, la figure à* $h-l$ *dimensions* (16) *et la figure à* k *dimensions* (17) *jouissent de cette même propriété.*

Ce lemme résulte immédiatement des définitions posées dans la Théorie hypergéométrique des contacts. *Il est*, notamment, *applicable dans l'hypothèse* $l=h-1$, où les figures [(13), (14)] et (16) se réduisent l'une et l'autre à des lignes.

38. Du lemme III (n° 37) nous déduirons le corollaire suivant :

Considérons, dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k]], \tag{19}$$

une figure variable à h dimensions, dépendant de paramètres $\alpha, \beta, \ldots$ en nombre quelconque, et définie par le système des k équations

$$\left\{\begin{array}{l} P_1(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots)=0, \end{array}\right. \tag{20}$$

que l'on suppose normalement résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées. Considérons en même temps la figure fixe à $k+1$ dimensions définie par le système des $h-1$ équations

$$\left\{\begin{array}{l} \Phi_1 \quad (x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k)=0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Phi_{h-1}(x_1, \ldots, x_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k)=0, \end{array}\right. \tag{21}$$

et supposons que le système [(20), (21)] soit normalement résoluble par rapport à quelque groupe de $k+h-1$ coordonnées : ce dernier système définira, dans l'espace (19) à $k+h$ dimensions, une ligne variable dépendant des paramètres $\alpha, \beta, \ldots$. Le groupe (21) étant d'ailleurs, en vertu même de nos hypothèses, normalement résoluble par rapport à quelque groupe de $h-1$ coordonnées, par exemple

$x_1, \ldots, x_{h-1}$, considérons les valeurs

$$\begin{aligned} x_1 &= \xi_1 \quad (x_h, u_1, \ldots, u_k), \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ x_{h-1} &= \xi_{h-1}(x_h, u_1, \ldots, u_k), \end{aligned}$$

obtenues par cette résolution, et transportons-les dans le groupe (20) : celui-ci deviendra

$$(22) \qquad \left\{ \begin{array}{l} P_1(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ P_k(\xi_1, \ldots, \xi_{h-1}, x_h, u_1, \ldots, u_k, \alpha, \beta, \ldots) = 0, \end{array} \right.$$

et, dans l'espace à $k+1$ dimensions

$$(23) \qquad [[x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

le groupe résultant (22) définira une ligne variable, dépendant, elle aussi, des paramètres $\alpha, \beta, \ldots$.

Cela posé, *pour que, dans l'espace* (19), *la ligne variable* [(20). (21)] *admette une enveloppe à k dimensions, il suffit* (¹) *que, dans l'espace* (23), *la ligne variable* (22) *admette elle-même une enveloppe à k dimensions.*

Supposons en effet que, dans l'espace à $k+1$ dimensions (23), la ligne variable (22) admette une enveloppe à k dimensions définie par l'équation réduite

$$(24) \qquad Q(x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0,$$

et considérons :

d'une part, dans l'espace à $k+h$ dimensions (19), la ligne variable [(20), (21)], et la figure fixe [(24), (21)] à k dimensions;

d'autre part, dans l'espace à $k+1$ dimensions (23), la ligne variable (22), et la figure fixe (24) à k dimensions.

La ligne variable (22) étant, par hypothèse, constamment tangente à la figure fixe (24), il résulte immédiatement du lemme III, où l'on supposera $l = h-1$, que la ligne variable [(20), (21)] est constamment tangente (²) à la figure fixe [(24), (21)].

(¹) Ce n'est qu'une condition *suffisante*.

(²) En général suivant un simple point.

39. Nous pouvons procéder maintenant à l'exposé de l'interprétation hypergéométrique annoncée.

Dans l'espace à $k+h$ dimensions

$$[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

considérons la figure variable à k paramètres que définit le système des k équations

$$(25)\qquad \begin{cases} F_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0 \end{cases}$$

(normalement résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées) : nous allons établir que *cette figure variable à h dimensions admet, en général, une enveloppe à $k+h-1$ dimensions, dont l'équation réduite,*

$$(26)\qquad \Omega(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0,$$

s'obtiendra par l'élimination des paramètres $C_1, \ldots, C_k$ entre les k équations (25) *et la relation*

$$(27)\qquad \frac{\partial(F_1, \ldots, F_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0\ (^1);$$

le système [(25), (27)], *en général normalement résoluble par rapport à $k+1$ des coordonnées, définira une caractéristique à $h-1$ dimensions* (²).

I. *Notre proposition est vraie pour $h=1$* (quel que soit k).

Considérons, dans l'espace à $k+1$ dimensions $[[x, u_1, \ldots, u_k]]$, la

(¹) A cause de l'équation (27), cette élimination ne peut s'effectuer par la résolution des équations (25).

(²) *Voir* les cas particuliers cités dans l'Introduction (III).

ligne variable à k paramètres que définit le système

$$(28)\qquad \begin{cases} F_1(x, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ F_k(x, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0 \end{cases}$$

(normalement résoluble par rapport à quelque groupe de k coordonnées) : il s'agit de voir que cette ligne variable admet, en général, une enveloppe à k dimensions, touchant chacune des enveloppées en un simple point, et dont l'équation réduite s'obtient par l'élimination des paramètres $C_1, \ldots, C_k$ entre les k équations (28) et la relation

$$(29)\qquad \frac{\partial(F_1, \ldots, F_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0.$$

Or, en se reportant à la Théorie hypergéométrique des contacts, et à la démonstration, développée ailleurs [1], d'un cas particulier ($k = 2$) du point visé par le présent alinéa I, on aperçoit aisément que les raisonnements exposés demeurent applicables, *mutatis mutandis*, pour une valeur quelconque de k. En conséquence :

Pour exprimer à l'aide des paramètres $C_1, \ldots, C_k$ les coordonnées d'un point variable de l'enveloppe hypothétique, on s'assurera que, dans le système [(28), (29)], certaines restrictions d'inégalité, dans le détail desquelles nous n'entrerons pas, se trouvent satisfaites, et l'on résoudra ce système par rapport aux $k+1$ coordonnées x, $u_1, \ldots, u_k$. Les fonctions inconnues $x, u_1, \ldots, u_k$ des variables $C_1, \ldots, C_k$ étant en nombre précisément égal à celui des équations finies auxquelles elles doivent satisfaire, la non-existence de l'enveloppe sera le cas exceptionnel, son existence le cas général, et son équation réduite en $x, u_1, \ldots, u_k$ celle qu'indique l'énoncé; cette enveloppe, à k dimensions, touchera d'ailleurs en un simple point chacune des lignes enveloppées.

II. *Notre proposition est vraie pour $h > 1$* (quel que soit k).

---

[1] *Sur l'enveloppe d'une famille de lignes à deux paramètres* (*Nouvelles Annales de Mathématiques*, novembre 1923).

Coupons en effet la figure variable (25) à h dimensions par une figure fixe à $k+1$ dimensions,

$$(30)\qquad \begin{cases} \Psi_1 \quad (x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ \Psi_{h-1}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) = 0, \end{cases}$$

arbitrairement choisie sous la seule restriction que l'ensemble des points communs aux deux figures soit une ligne [c'est-à-dire que le système des $k+h-1$ équations (25) et (30) soit normalement résoluble par rapport à quelque groupe de $k+h-1$ coordonnées]. Si, dans les k équations (25), nous remplaçons $h-1$ des coordonnées par leurs valeurs tirées de (30) en fonctions des $k+1$ coordonnées restantes, nous aurons, dans un espace à $k+1$ dimensions extrait de

$$(31)\qquad [[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]],$$

une ligne variable dépendant des paramètres $C_1, \ldots, C_k$. En vertu du numéro précédent, pour que, dans l'espace (31), la ligne variable [(25), (30)], qui dépend des mêmes paramètres, admette une enveloppe à k dimensions, il suffit que, dans l'espace à $k+1$ dimensions extrait de (31), la ligne variable obtenue par la substitution qui vient d'être dite admette elle-même une enveloppe à k dimensions : or, c'est ce qui a lieu en général, en vertu de l'alinéa I du présent numéro. L'équation de cette deuxième enveloppe s'obtiendra d'ailleurs en opérant la même substitution dans l'équation (26), que donne l'élimination de $C_1, \ldots, C_k$ entre (25) et (27) : l'adjonction, à l'équation (26) ainsi modifiée, des $h-1$ équations (30) fournira donc la première enveloppe, et le lieu de celle-ci, résultant de l'élimination des fonctions arbitraires $\Psi_1, \ldots, \Psi_{h-1}$, se trouvera défini par l'équation (26) telle qu'elle est écrite.

Observons maintenant que ce lieu, étant constamment en symptose avec la première enveloppe, laquelle est constamment tangente à la ligne variable [(25), (30)], ne peut manquer, en vertu du lemme I (n° 34), d'être constamment tangent à cette dernière. Il en résulte, en vertu du n° 36, que la figure fixe (26) enveloppe la figure variable (25);

la caractéristique, définie par le système des $k+1$ équations (25) et (26), sera d'ailleurs en général à $h-1$ dimensions.

40. Notons, en terminant, la remarque suivante :

L'entier h étant supérieur ou égal à 1, si l'on désigne par k', k'' deux entiers (arithmétiques) tels que $k'+k''=k$, et si, entre les $k+1$ équations (25) et (27), on élimine k'' des paramètres, par exemple $C_{k'+1}, \ldots, C_{k'+k''=k}$, on obtiendra une figure variable à $k''+h-1$ dimensions, dépendant des paramètres $C_1, \ldots, C_{k'}$, et constamment en symptose avec la figure à $k+h-1$ dimensions (26), fournie par l'élimination de tous les paramètres.

CHAPITRE III.

EXPOSÉ OU RAPPEL DE PROPRIÉTÉS DONT JOUISSENT CERTAINS SYSTÈMES PARTIELS DU PREMIER ORDRE.

---

41. Les systèmes du premier ordre auxquels fait allusion le titre ci-dessus sont :

1° Les systèmes partiels du premier ordre linéaires par rapport aux dérivées des fonctions inconnues qui s'y trouvent engagées, et présentant la structure de ceux que l'on considère dans la méthode d'intégration de Jacobi généralisée [1].

2° Les systèmes partiels non linéaires du premier ordre n'impliquant qu'une seule fonction inconnue, et résolus par rapport à diverses dérivées (premières) de cette inconnue.

42. Occupons-nous tout d'abord du premier de ces deux types, et

---

[1] Ces systèmes peuvent impliquer un nombre quelconque de fonctions inconnues. Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 206.

considérons, pour fixer les idées, le système

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= U_x + S_x\frac{\partial u}{\partial s} + T_x\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= U_y + S_y\frac{\partial u}{\partial s} + T_y\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= U_z + S_z\frac{\partial u}{\partial s} + T_z\frac{\partial u}{\partial t};\\
\frac{\partial v}{\partial x} &= V_x + S_x\frac{\partial v}{\partial s} + T_x\frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= V_y + S_y\frac{\partial v}{\partial s} + T_y\frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= V_z + S_z\frac{\partial v}{\partial s} + T_z\frac{\partial v}{\partial t};\\
\frac{\partial w}{\partial x} &= W_x + S_x\frac{\partial w}{\partial s} + T_x\frac{\partial w}{\partial t},\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= W_y + S_y\frac{\partial w}{\partial s} + T_y\frac{\partial w}{\partial t},\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= W_z + S_z\frac{\partial w}{\partial s} + T_z\frac{\partial w}{\partial t};
\end{aligned}\right.$$

dans ces formules, u, v, w désignent des fonctions inconnues de x, y, z, s, t, et

$$\begin{gathered}U_x,\quad U_y,\quad U_z,\quad V_x,\quad V_y,\quad V_z,\quad W_x,\quad W_y,\quad W_z,\\ S_x,\quad S_y,\quad S_z,\quad T_x,\quad T_y,\quad T_z\end{gathered}$$

des fonctions analytiques connues de x, y, z, s, t, u, v, w.

Première Propriété. — *La passivité du système* (1), si elle a lieu, *entraîne*, comme on sait, *celle du système différentiel total*

$$(2)\quad \left\{\begin{aligned}
&\frac{\partial s}{\partial x} = -S_x, && \frac{\partial t}{\partial x} = -T_x, && \frac{\partial u}{\partial x} = U_x, && \frac{\partial v}{\partial x} = V_x, && \frac{\partial w}{\partial x} = W_x,\\
&\frac{\partial s}{\partial y} = -S_y, && \frac{\partial t}{\partial y} = -T_y, && \frac{\partial u}{\partial y} = U_y, && \frac{\partial v}{\partial y} = V_y, && \frac{\partial w}{\partial y} = W_y,\\
&\frac{\partial s}{\partial z} = -S_z, && \frac{\partial t}{\partial z} = -T_z, && \frac{\partial u}{\partial z} = U_z, && \frac{\partial v}{\partial z} = V_z, && \frac{\partial w}{\partial z} = W_z,
\end{aligned}\right.$$

où s, t, u, v, w désignent cinq fonctions inconnues de x, y, z [1].

---

[1] Si, dans un système partiel du type actuellement considéré, les équations sont en même nombre que les fonctions inconnues, le système total qu'on lui fait ainsi correspondre est un système d'équations différentielles ordinaires.

Deuxième Propriété. — *Les phases singulières du groupe des seconds membres sont fournies, dans le système* (1) *et dans le système* (2), *par les extrémités finales des mêmes arcs.*

A. Considérons une phase singulière du groupe des seconds membres de (1), fournie par un arc, A, dépendant de certaines indéterminées (réelles), et supposons pour un instant qu'elle ne soit pas une phase singulière du groupe des seconds membres de (2). En vertu de notre définition du n° 25, les seconds membres de (1) sont calculables par cheminement sur l'arc A tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont il dépend, à faire exclusion de la valeur finale, et, dès lors, il en sera de même pour les dérivées de ces seconds membres, notamment pour

$$S_x, \quad S_y, \quad S_z, \quad T_x, \quad T_y, \quad T_z;$$

puis pour

$$\left(U_x + S_x \frac{\partial u}{\partial s} + T_x \frac{\partial u}{\partial t}\right) - S_x \frac{\partial u}{\partial s} - T_x \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left(U_y + S_y \frac{\partial u}{\partial s} + T_y \frac{\partial u}{\partial t}\right) - S_y \frac{\partial u}{\partial s} - T_y \frac{\partial u}{\partial t},$$

$$\left(U_z + S_z \frac{\partial u}{\partial s} + T_z \frac{\partial u}{\partial t}\right) - S_z \frac{\partial u}{\partial s} - T_z \frac{\partial u}{\partial t},$$

c'est-à-dire pour U_x, U_y, U_z. La même chose a lieu, semblablement, pour V_z, V_y, V_z, et enfin pour W_x, W_y, W_z. Elle a donc lieu, en résumé, pour les seconds membres de (2). Cela étant, si le groupe de ces seconds membres était calculable par cheminement sur l'arc A jusques et y compris l'instant final, d'où résulte manifestement que la même chose aurait lieu pour les seconds membres de (1), l'extrémité finale de l'arc A ne fournirait pas une phase singulière du groupe que forment ces derniers, ce qui est contraire à l'hypothèse.

B. Inversement, considérons une phase singulière du groupe des seconds membres de (2), fournie par un arc, A, dépendant de certaines indéterminées, et supposons pour un instant qu'elle ne soit pas une phase singulière du groupe des seconds membres de (1). En vertu de notre définition du n° 25, les seconds membres de (2) sont calculables par cheminement sur l'arc A tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont il dépend, à faire exclusion de la valeur finale, et,

dès lors, il en est manifestement de même pour les seconds membres de (1). Cela étant, si le groupe des seconds membres de (1) était calculable par cheminement sur l'arc A jusques et y compris l'instant final, on voit, en raisonnant comme nous l'avons fait plus haut, qu'il en serait de même pour le groupe des seconds membres de (2). L'extrémité finale de l'arc A ne fournirait donc pas une phase singulière de ce dernier, ce qui est contraire à l'hypothèse.

43. Considérons maintenant un système non linéaire du premier ordre n'impliquant qu'une seule fonction inconnue, u, et résolu par rapport à diverses dérivées (premières) de cette inconnue. Nous supposerons, pour fixer les idées, que u dépend des cinq variables x, y, z, s, t, et que le système est résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$: en adoptant, pour les deux dérivées restantes $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, les notations respectives u_s, u_t, il est de la forme

$$(3)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= F_x(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= F_y(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= F_z(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\end{aligned}\right.$$

où F_x, F_y, F_z désignent trois composantes analytiques connues.

En même temps que le système partiel (3), considérons le système total auxiliaire

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned} &\frac{\partial s}{\partial x} = -\frac{\partial F_x}{\partial u_s}, \qquad \frac{\partial t}{\partial x} = -\frac{\partial F_x}{\partial u_t},\\ &\frac{\partial s}{\partial y} = -\frac{\partial F_y}{\partial u_s}, \qquad \frac{\partial t}{\partial y} = -\frac{\partial F_y}{\partial u_t},\\ &\frac{\partial s}{\partial z} = -\frac{\partial F_z}{\partial u_s}, \qquad \frac{\partial t}{\partial z} = -\frac{\partial F_z}{\partial u_t},\\ &\frac{\partial u}{\partial x} = F_x - u_s\frac{\partial F_x}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_x}{\partial u_t}, \qquad \frac{\partial u_s}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial s} + \frac{\partial F_x}{\partial u}u_s, \qquad \frac{\partial u_t}{\partial x} = \frac{\partial F_x}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial u}u_t,\\ &\frac{\partial u}{\partial y} = F_y - u_s\frac{\partial F_y}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_y}{\partial u_t}, \qquad \frac{\partial u_s}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial s} + \frac{\partial F_y}{\partial u}u_s, \qquad \frac{\partial u_t}{\partial y} = \frac{\partial F_y}{\partial t} + \frac{\partial F_y}{\partial u}u_t,\\ &\frac{\partial u}{\partial z} = F_z - u_s\frac{\partial F_z}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_z}{\partial u_t}, \qquad \frac{\partial u_s}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial s} + \frac{\partial F_z}{\partial u}u_s, \qquad \frac{\partial u_t}{\partial z} = \frac{\partial F_z}{\partial t} + \frac{\partial F_z}{\partial u}u_t,\end{aligned}\right.$$

où s, t, u, u_s, u_t désignent cinq fonctions inconnues de x, y, z, et qui se déduit de (3) par un mécanisme évident [1].

Les systèmes (3) et (4) jouissent l'un par rapport à l'autre de propriétés toutes semblables à celles que nous avons exposées au numéro précédent pour les systèmes (1) et (2).

44. Première Propriété. — *La passivité du système* (3), si elle a lieu, *entraîne celle du système* (4).

I. Considérons actuellement le système partiel linéaire du premier ordre

$$(5)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u_s}{\partial x} &= \frac{\partial F_x}{\partial s} + \frac{\partial F_x}{\partial u} u_s + \frac{\partial F_x}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial F_x}{\partial u_t}\frac{\partial u_s}{\partial t},\\
\frac{\partial u_s}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial s} + \frac{\partial F_y}{\partial u} u_s + \frac{\partial F_y}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial F_y}{\partial u_t}\frac{\partial u_s}{\partial t},\\
\frac{\partial u_s}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial s} + \frac{\partial F_z}{\partial u} u_s + \frac{\partial F_z}{\partial u_s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + \frac{\partial F_z}{\partial u_t}\frac{\partial u_s}{\partial t};
\end{aligned}\right.$$

$$(6)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u_t}{\partial x} &= \frac{\partial F_x}{\partial t} + \frac{\partial F_x}{\partial u} u_t + \frac{\partial F_x}{\partial u_s}\frac{\partial u_t}{\partial s} + \frac{\partial F_x}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial t},\\
\frac{\partial u_t}{\partial y} &= \frac{\partial F_y}{\partial t} + \frac{\partial F_y}{\partial u} u_t + \frac{\partial F_y}{\partial u_s}\frac{\partial u_t}{\partial s} + \frac{\partial F_y}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial t},\\
\frac{\partial u_t}{\partial z} &= \frac{\partial F_z}{\partial t} + \frac{\partial F_z}{\partial u} u_t + \frac{\partial F_z}{\partial u_s}\frac{\partial u_t}{\partial s} + \frac{\partial F_z}{\partial u_t}\frac{\partial u_t}{\partial t};
\end{aligned}\right.$$

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= F_x - u_s\frac{\partial F_x}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_x}{\partial u_t} + \frac{\partial F_x}{\partial u_s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F_x}{\partial u_t}\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= F_y - u_s\frac{\partial F_y}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_y}{\partial u_t} + \frac{\partial F_y}{\partial u_s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F_y}{\partial u_t}\frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= F_z - u_s\frac{\partial F_z}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_z}{\partial u_t} + \frac{\partial F_z}{\partial u_s}\frac{\partial u}{\partial s} + \frac{\partial F_z}{\partial u_t}\frac{\partial u}{\partial t}.
\end{aligned}\right.$$

Le système linéaire [(5), (6), (7)], impliquant les fonctions inconnues u, u_s, u_t des variables indépendantes x, y, z, s, t, et présentant la structure de ceux que l'on considère dans la méthode d'intégration de Jacobi généralisée, est, au point de vue de l'intégration, une conséquence

[1] Dans le cas où le système actuellement considéré ne comprend qu'une seule équation, le système total auxiliaire qu'on lui fait ainsi correspondre est un système d'équations différentielles ordinaires.

évidente du système (3) : à toute intégrale ordinaire [1], u, de celui-ci, il suffit en effet d'adjoindre les deux fonctions $u_s = \frac{\partial u}{\partial s}$, $u_t = \frac{\partial u}{\partial t}$ pour avoir un groupe d'intégrales ordinaires de [(5), (6), (7)]. Nous appuyant sur cette propriété, nous établirons que la passivité du système (3) entraîne celle du système [(5), (6), (7)], laquelle entraînera, à son tour, la passivité du système (4) : ainsi se trouvera établie la propriété qui fait l'objet du présent n° 44.

II. *Formation des conditions de passivité du système* [(5), (6), (7)]. — Pour former les conditions de passivité du système [(5), (6), (7)], il suffit d'adjoindre aux équations qui composent le système celles qui s'en déduisent par toutes les différentiations premières possibles, et d'éliminer entre les équations du système résultant toutes les dérivées principales du premier et du second ordre. Aux diverses dérivées cardinales,

$$\begin{array}{lll} \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 u}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 u}{\partial y\,\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_s}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 u_s}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 u_s}{\partial y\,\partial z}, \\ \frac{\partial^2 u_t}{\partial x\,\partial y}, & \frac{\partial^2 u_t}{\partial x\,\partial z}, & \frac{\partial^2 u_t}{\partial y\,\partial z}, \end{array}$$

correspondront respectivement des conditions de passivité ayant la forme

$$(8)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_{xy,s}\frac{\partial u}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial u}{\partial t} + A_{xy,u} = 0, \\ A_{xz,s}\frac{\partial u}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial u}{\partial t} + A_{xz,u} = 0, \\ A_{yz,s}\frac{\partial u}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial u}{\partial t} + A_{yz,u} = 0; \end{array} \right.$$

$$(9)\quad \left\{ \begin{array}{l} A_{xy,s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + A_{xy,t}\frac{\partial u_s}{\partial t} + A_{xy,u_s} = 0, \\ A_{xz,s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + A_{xz,t}\frac{\partial u_s}{\partial t} + A_{xz,u_s} = 0, \\ A_{yz,s}\frac{\partial u_s}{\partial s} + A_{yz,t}\frac{\partial u_s}{\partial t} + A_{yz,u_s} = 0; \end{array} \right.$$

[1] *Voir* l'Introduction, V.

$$(10)\qquad \left\{\begin{aligned} &A_{xy,s}\frac{\partial u_t}{\partial s}+A_{xy,t}\frac{\partial u_t}{\partial t}+A_{xy,u_t}=0,\\ &A_{xz,s}\frac{\partial u_t}{\partial s}+A_{xz,t}\frac{\partial u_t}{\partial t}+A_{xz,u_t}=0,\\ &A_{yz,s}\frac{\partial u_t}{\partial s}+A_{yz,t}\frac{\partial u_t}{\partial t}+A_{yz,u_t}=0,\end{aligned}\right.$$

où les A (il n'y en a que quinze en tout) désignent certaines expressions composées avec les coefficients du système linéaire [(5), (6), (7)] et leurs dérivées partielles du premier ordre, et ne contenant, par suite, que x, y, z, s, t, u, u_s, u_t.

III. *La passivité du système* (3) *entraîne celle du système* [(5), (6), (7)], ou, en d'autres termes, la nullité identique des quinze expressions A.

Les valeurs numériques initiales de x, y, z, s, t, u, u_s, u_t étant choisies à volonté dans les limites où les seconds membres de (3) sont tous analytiques et réguliers, considérons l'intégrale ordinaire, u, du système (3) qui répond à un choix complètement arbitraire des valeurs numériques initiales des dérivées paramétriques de u dont l'ordre est supérieur au premier (ce choix étant assujetti à la seule restriction que la détermination initiale de u ait un développement convergent). En vertu de la passivité de (3), l'intégrale dont il s'agit existe effectivement, et, en lui adjoignant les deux fonctions $u_s=\frac{\partial u}{\partial s}$, $u_t=\frac{\partial u}{\partial t}$, on obtiendra un certain groupe d'intégrales du système [(5), (6), (7)]. Ce dernier système admet d'ailleurs comme conséquences nécessaires, au point de vue de l'intégration (ordinaire), ses propres conditions de passivité, et notamment les relations (9), lesquelles ne contiennent que x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, $\frac{\partial u_s}{\partial s}\left(=\frac{\partial^2 u}{\partial s^2}\right)$ et $\frac{\partial u_s}{\partial t}\left(=\frac{\partial^2 u}{\partial s\,\partial t}\right)$: il en résulte que les relations (9) sont numériquement vérifiées pour les valeurs initiales de ces dix quantités, et par suite, à cause du choix arbitraire de celles-ci, identiquement vérifiées. On en déduit immédiatement, quels que soient x, y, z, s, t, u, u_s, u_t,

$$\begin{array}{lll} A_{xy,s}=0, & A_{xy,t}=0, & A_{xy,u_s}=0,\\ A_{xz,s}=0, & A_{xz,t}=0, & A_{xz,u_s}=0,\\ A_{yz,s}=0, & A_{yz,t}=0, & A_{yz,u_s}=0.\end{array}$$

Si l'on tient compte maintenant des six relations figurant dans

les deux premières colonnes de ce tableau, les relations (8) et (10) deviennent

$$A_{xy,u} = 0, \qquad A_{xz,u} = 0, \qquad A_{yz,u} = 0$$

et

$$A_{xy,u_t} = 0, \qquad A_{xz,u_t} = 0, \qquad A_{yz,u_t} = 0:$$

ne contenant, dès lors, que x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, elles seront numériquement vérifiées par les valeurs initiales spécifiées plus haut de ces huit quantités, et, par suite, identiquement vérifiées.

IV. *La passivité du système partiel* [(5), (6), (7)] *entraîne celle du système total* (4).

Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 206, I, et n° 203.

V. L'exactitude de notre énoncé général résulte du simple rapprochement des alinéas III et IV.

45. Deuxième Propriété. — *Les phases singulières du groupe des seconds membres sont fournies, dans le système* (3) *et dans le système* (4), *par les extrémités finales des mêmes arcs.*

I. Considérons une phase singulière du groupe des seconds membres de (3), fournie par un arc, A, dépendant de certaines indéterminées (réelles), et supposons pour un instant qu'elle ne soit pas une phase singulière du groupe des seconds membres de (4). En vertu de notre définition du n° 25, les seconds membres de (3) sont calculables par cheminement sur l'arc A tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont il dépend, à faire exclusion de la valeur finale, et, dès lors, il en sera de même pour les dérivées premières de F_x, F_y, F_z, puis pour les divers seconds membres de (4). Cela étant, si le groupe de ces seconds membres était calculable par cheminement sur l'arc A jusques et y compris l'instant final, la même chose aurait lieu pour les fonctions

$$(11)\qquad \left\{\begin{aligned} &\left(F_x - u_s\frac{\partial F_x}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_x}{\partial u_t}\right) + u_s\frac{\partial F_x}{\partial u_s} + u_t\frac{\partial F_x}{\partial u_t},\\ &\left(F_y - u_s\frac{\partial F_y}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_y}{\partial u_t}\right) + u_s\frac{\partial F_y}{\partial u_s} + u_t\frac{\partial F_y}{\partial u_t},\\ &\left(F_z - u_s\frac{\partial F_z}{\partial u_s} - u_t\frac{\partial F_z}{\partial u_t}\right) + u_s\frac{\partial F_z}{\partial u_s} + u_t\frac{\partial F_z}{\partial u_t},\end{aligned}\right.$$

c'est-à-dire pour les fonctions F_x, F_y, F_z : l'extrémité finale de l'arc A ne fournirait donc pas une phase singulière du groupe des seconds membres de (3), ce qui est contraire à l'hypothèse.

II. Inversement, considérons une phase singulière du groupe des seconds membres de (4), fournie par un arc, A, dépendant de certaines indéterminées, et supposons pour un instant qu'elle ne soit pas une phase singulière du groupe des seconds membres de (3). En vertu de notre définition du n° 25, les seconds membres de (4) sont calculables par cheminement sur l'arc A tant que l'on s'astreint, pour chacune des indéterminées dont il dépend, à faire exclusion de la valeur finale, et, dès lors, il en est de même pour les fonctions (11), c'est-à-dire pour F_x, F_y, F_z. Cela étant, si les fonctions F_x, F_y, F_z étaient calculables par cheminement sur l'arc A jusques et y compris l'instant final, la même chose aurait lieu pour leurs dérivées premières, et par suite pour les divers seconds membres de (4) : l'extrémité finale de l'arc A ne fournirait donc pas une phase singulière du groupe formé par l'association de ces derniers, ce qui est contraire à l'hypothèse.

CHAPITRE IV.

INTÉGRALES SINGULIÈRES; LEUR RECHERCHE DANS LES SYSTÈMES PASSIFS DU PREMIER ORDRE DONT L'INTÉGRATION SE RAMÈNE A CELLE D'UN SYSTÈME TOTAL.

Figures intégrales singulières.

46. Considérons un système quelconque d'équations aux dérivées partielles dont les premiers membres soient *analytiques* et les seconds membres nuls; désignant par $x, y, \ldots$ les variables indépendantes, et par $u, v, \ldots$ les fonctions inconnues engagées dans le système, nommons *groupe d'intégrales* tout groupe de fonctions

$$U(x, y, \ldots), \quad V(x, y, \ldots), \quad \ldots,$$

qui, substituées à u, v, ..., transforment en identités les diverses équations proposées, et envisageons, à l'exclusion de tous autres, les groupes d'intégrales *analytiques*. Cela posé, une distinction essentielle doit avant tout être faite entre les divers groupes possibles de pareilles intégrales.

Un groupe d'intégrales analytiques sera qualifié d'*ordinaire*, si l'on peut assigner aux variables indépendantes quelque domaine de variation tel, que non seulement les intégrales dont il s'agit y soient exprimables par des développements (tayloriens) construits à partir du centre (n° 14), mais que, de plus, leurs valeurs, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, restent toujours intérieures à quelque domaine où tous les premiers membres du système soient exprimables de la même manière (¹).

Un groupe d'intégrales analytiques du même système sera dit *singulier*, s'il n'est pas ordinaire, ou, en d'autres termes, si, dans le domaine de convergence du groupe formé par les développements initiaux des intégrales, et aussi loin que ce groupe puisse être prolongé analytiquement, les valeurs des intégrales, prises conjointement avec celles de leurs dérivées et des variables indépendantes, ne sortent jamais d'une région où le groupe formé par l'association des premiers membres cesse d'être régulier; d'une région, notamment, dont tous les points soient des phases singulières (n° 25) de ce dernier groupe.

Il va sans dire que, lorsqu'il s'agit d'un système différentiel résolu par rapport à telles ou telles des quantités qui figurent dans ses équations, les définitions posées ci-dessus conduisent à envisager le groupe formé par les seconds membres du système.

Désignant par h le nombre des variables indépendantes $x, y, \ldots$ et par k celui des fonctions inconnues u, v, ..., nous dirons qu'une figure à h dimensions, définie, dans l'espace à $h+k$ dimensions

$$[[x, y, \ldots, u, v, \ldots]],$$

par un groupe réduit de k équations finies (²), est une *figure intégrale* du système, si ce groupe réduit est résoluble par rapport aux k coor-

(¹) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 98.
(²) *Sur les principes fondamentaux, etc.*, n° 20.

données u, v, ..., et que, après résolution, il fournisse un groupe d'intégrales particulières de ce système; la figure intégrale sera dite *ordinaire* ou *singulière*, suivant que les intégrales particulières ainsi obtenues seront elles-mêmes ordinaires ou singulières [1].

47. La substitution d'intégrales ordinaires connues dans les équations du système considéré (dont nous supposons les seconds membres réduits à zéro) en transforme les divers premiers membres en diverses fonctions composées des variables, des intégrales, et de quelques-unes de leurs dérivées. D'après la définition même des intégrales ordinaires, et entre les limites assignées par cette définition, les règles établies pour la différentiation des pseudo-fonctions composées sont applicables aux premiers membres dont il s'agit; d'ailleurs, le premier membre de chaque équation étant identiquement nul après cette substitution, ses dérivées de tous ordres le sont aussi : en conséquence, un groupe quelconque d'intégrales ordinaires vérifie, non seulement les équations du système, mais encore toutes celles qu'on en peut déduire par différentiation.

Cette conclusion est radicalement inapplicable aux intégrales singulières.

48. Il est essentiel, comme nous l'avons fait observer dans l'Intro-

---

(1) Dans son Ouvrage intitulé *Leçons nouvelles sur l'Analyse infinitésimale et ses applications géométriques*, Méray considère certains systèmes d'équations aux dérivées partielles du premier ordre qu'il nomme *immédiats*, et il fait, entre leurs intégrales ordinaires et singulières, la distinction que nous allons indiquer.

« Un système différentiel, dit-il, est *immédiat*, quand toutes ses équations sont du *premier ordre* et fournissent immédiatement plus ou moins de dérivées des fonctions inconnues, exprimées en fonctions composées des variables indépendantes, de ces fonctions inconnues elles-mêmes, et de leurs autres dérivées. » (Première Partie, n° 335.)

« Les intégrales *ordinaires* d'un système immédiat sont celles dont les valeurs, à elles-mêmes et à leurs dérivées paramétriques premières, associées aux valeurs correspondantes des variables, tombent toujours dans des aires où les composantes des seconds membres des équations du système sont toutes olotropes. Pour les intégrales *singulières*, au contraire, les valeurs dont il s'agit sont *toujours* singulières pour quelqu'une au moins de ces composantes. » (Première Partie, n° 339.)

Nous avons, plus haut (*voir* la note du n° 25), textuellement reproduit la définition que donne Méray des valeurs *singulières* d'une fonction.

duction, de ne jamais perdre de vue que la distinction établie entre les figures intégrales ordinaires et les figures intégrales singulières d'un système d'équations aux dérivées partielles donné est toute relative, nous voulons dire qu'une même figure intégrale peut être pour lui, tantôt ordinaire, tantôt singulière, suivant la forme donnée au système. Il est facile de mettre cette relativité en lumière par des exemples.

I. Considérons l'équation différentielle

$$y'^2 - 2x\sqrt{y}\,y' + 4y\sqrt{y} = 0, \tag{1}$$

où y désigne une fonction inconnue de la variable indépendante x, et y' la dérivée première de y. En se reportant à la théorie classique de la fonction radicale, on voit que son premier membre ne peut admettre d'autres phases singulières que les systèmes de valeurs de x, y, y' où y a la valeur zéro, et que la fonction $y = 0$, intégrale évidente de l'équation (1), en est une intégrale singulière : or, elle devient ordinaire, si l'on écrit l'équation (1) sous la forme

$$y'^4 - 4y(xy' - 2y)^2 = 0, \tag{2}$$

puisque le premier membre de (2) est une fonction entière de x, y, y', considérés pour un instant comme trois variables indépendantes distinctes.

II. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(1 + p^2 + q^2)z^2 - R^2 = 0, \tag{3}$$

où R désigne une constante, z une fonction inconnue des deux variables indépendantes x et y, et p, q les deux dérivées premières de z relatives à x, y respectivement. Elle ne peut évidemment admettre aucune intégrale singulière, puisque son premier membre est une fonction entière de x, y, z, p, q, considérés pour un instant comme cinq variables indépendantes distinctes ; les intégrales évidentes $z = \pm R$, et les intégrales $z = \sqrt{R^2 - (y - C)^2}$ (C constante arbitraire), dont il est facile de constater l'existence, en sont dès lors des intégrales ordinaires.

Résolvons maintenant l'équation par rapport à p; elle deviendra

$$(4) \qquad p = \frac{\sqrt{R^2 - (1+q^2)z^2}}{z}.$$

Si on la considère sous cette nouvelle forme, on voit que la fonction figurant dans le second membre ne peut avoir pour phases singulières que les systèmes de valeurs de q, z pour lesquels on a, ou bien $z = 0$, ou bien $(1+q^2)z^2 = R^2$. La fonction $z = 0$ n'est manifestement pas une intégrale de l'équation (3). D'autre part, la relation $(1+q^2)z^2 = R^2$ ayant, d'après (4), $p = 0$ pour conséquence nécessaire, on se trouve ramené, dans la recherche des intégrales singulières de (4), à intégrer le système

$$p = 0, \qquad (1+q^2)z^2 - R^2 = 0,$$

c'est-à-dire à intégrer l'équation différentielle

$$(1+q^2)z^2 - R^2 = 0,$$

où z désigne une fonction inconnue de la seule variable indépendante y, et q la dérivée première de cette fonction; ou bien enfin, en posant $z^2 = v$, à intégrer l'équation différentielle

$$\frac{dv}{dy} = 2\sqrt{R^2 - v}.$$

En désignant par C une constante arbitraire, l'intégrale générale de cette dernière est donnée par la formule

$$v = R^2 - (y - C)^2;$$

il existe en outre pour elle une intégrale singulière, $v = R^2$: on en déduit pour z les valeurs

$$z = \sqrt{R^2 - (y - C)^2}, \qquad z = \pm R.$$

Ainsi, l'équation (4) admet, comme intégrales singulières, ces diverses fonctions, que nous avions constaté être, pour l'équation (3), des intégrales ordinaires.

III. Proposons-nous de rechercher, s'il en existe, les intégrales

singulières de l'équation aux dérivées partielles

$$(5) \qquad p(x^2 - z^2) + q(xy + z\sqrt{x^2 + y^2 - z^2}) = 0,$$

où z, p, q ont les mêmes significations respectives que dans l'exemple précédent. Ayant pour premier membre une fonction entière de $x, y, z, p, q, \sqrt{x^2 + y^2 - z^2}$, elle ne peut admettre d'autre intégrale singulière que celle qui serait fournie par la relation $x^2 + y^2 - z^2 = 0$: or, on constate sans peine que cette dernière vérifie l'équation (5); elle en est donc une intégrale singulière.

Il va sans dire que, pour l'équation (5) rendue rationnelle, cette même intégrale serait ordinaire.

IV. Considérons l'équation aux dérivées partielles

$$(6) \qquad (z - px - qy)^2 - p + q = 0.$$

Elle n'admet évidemment aucune intégrale singulière, puisque son premier membre est une fonction entière des quantités x, y, z, p, q; en particulier, les intégrales évidentes $z = C(x + y)$ [C constante arbitraire] en sont des intégrales ordinaires.

Écrivons maintenant l'équation sous la forme

$$(7) \qquad z - px - qy - \sqrt{p - q} = 0.$$

Le premier membre de (7) ne peut avoir d'autres phases singulières que les systèmes de valeurs de x, y, z, p, q pour lesquels on a $p = q$; on se trouve donc ramené à intégrer le système des deux équations

$$z - px - qy = 0, \qquad p - q = 0,$$

ou

$$(8) \qquad z = p(x + y), \qquad q = p.$$

De la première équation (8) on tire

$$(9) \qquad z = (x + y)v,$$

où v désigne une fonction arbitraire de la seule variable y; en portant cette valeur dans la deuxième équation (8), elle devient

$$v + (x + y)\frac{dv}{dy} = v, \qquad \text{ou} \qquad \frac{dv}{dy} = 0,$$

d'où l'on tire $v = C$ (constante arbitraire), puis, par substitution dans la formule (9), $z = C(x+y)$.

Ainsi, l'équation (7) admet comme intégrale singulière l'expression $z = C(x+y)$, que nous avions constaté être pour (6) une intégrale ordinaire.

49. On peut, d'une manière générale, observer que tout système dont les premiers membres ont la forme entière par rapport aux fonctions inconnues et à leurs dérivées de tous ordres (les seconds membres étant nuls) ne peut, tant qu'on la considère sous cette forme, admettre aucune figure intégrale singulière. Il est manifeste, en effet, que les phases singulières du groupe des premiers membres ne sont autres que les phases singulières du groupe de leurs coefficients : les relations (non identiquement vérifiées, s'il en existe) que l'on est conduit à adjoindre au système proposé pour la recherche de ses intégrales singulières ne peuvent donc contenir que les seules variables indépendantes à l'exclusion des fonctions inconnues et de leurs dérivées, ce qui entraîne la non-existence de toutes intégrales singulières.

Il convient d'observer enfin qu'un système d'équations aux dérivées partielles ne possède pas nécessairement d'intégrales singulières, alors même que les relations que l'on est conduit à lui adjoindre pour la recherche de ces intégrales contiendraient, avec ou sans les variables indépendantes, les fonctions inconnues ou leurs dérivées.

Considérons, par exemple, l'équation différentielle

$$y' = -x + \sqrt{x^2 + y}. \tag{10}$$

Si elle admet une intégrale singulière, cette dernière vérifie forcément la relation

$$y + x^2 = 0, \tag{11}$$

et l'équation (10) se réduit dès lors à $y' = -x$, alors que l'équation (11) donne $y' = -2x$. Il est donc impossible que l'équation (10) admette aucune intégrale singulière.

50. Les systèmes passifs du premier ordre dont les intégrales sin-

gulières constituent l'objet du présent Chapitre peuvent se répartir en trois catégories que nous examinerons successivement :

1° Les systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre.

2° Les systèmes passifs du premier ordre ayant la forme linéaire par rapport aux dérivées des fonctions inconnues, et intégrables par la méthode de Jacobi généralisée.

3° Les systèmes passifs et non linéaires du premier ordre n'impliquant qu'une seule fonction inconnue.

Systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre.

51. Soit, comme au n° 33,

$$(1)\qquad \begin{cases} \dfrac{\partial u_i}{\partial x_j} = F_{i,j}(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k) \\ (i = 1, 2, \ldots, k; j = 1, 2, \ldots, h) \end{cases}$$

un système *passif* d'équations différentielles totales du premier ordre; les variables indépendantes qui s'y trouvent engagées étant en nombre h, et les fonctions inconnues en nombre k, les intégrales analytiques, tant ordinaires que singulières, du système (1) sont des figures à h dimensions, situées dans l'espace à $h+k$ dimensions (réelles ou imaginaires) $[[x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k]]$. Dans la recherche de ses intégrales singulières, la méthode ci-après indiquée permettra souvent de réaliser un notable progrès.

Se reportant aux conclusions finales du n° 33 sur les phases singulières des seconds membres d'un système total passif, on formera les équations intégrales générales du système (1),

$$\begin{gathered} I_1(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\ I_k(x_1, \ldots, x_h, u_1, \ldots, u_k, C_1, \ldots, C_k) = 0, \end{gathered}$$

auxquelles on adjoindra la relation

$$\frac{\partial(I_1, \ldots, I_k)}{\partial(C_1, \ldots, C_k)} = 0.$$

En éliminant, si possible, entre ces $k+1$ relations, l'une des constantes arbitraires, C_k par exemple, on obtiendra, dans l'espace à $h+k$ dimensions, une famille de figures à h dimensions, dépendant des paramètres $C_1, \ldots, C_{k-1}$, et dont tout point sera, sauf vérification, une phase singulière du groupe des seconds membres $F_{i,j}$. On tâchera alors d'apercevoir si l'attribution à $C_1, \ldots, C_{k-1}$ de telles ou telles valeurs convenablement choisies peut fournir des figures intégrales du système (1) ([1]).

Systèmes passifs et linéaires du premier ordre intégrables par la méthode de Jacobi généralisée ([2]).

52. Pour fixer les idées, considérons le système

$$(1)\quad \left\{\begin{aligned}
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial u}{\partial x} &= U_x + S_x \frac{\partial u}{\partial s} + T_x \frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial y} &= U_y + S_y \frac{\partial u}{\partial s} + T_y \frac{\partial u}{\partial t},\\
\frac{\partial u}{\partial z} &= U_z + S_z \frac{\partial u}{\partial s} + T_z \frac{\partial u}{\partial t},
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial v}{\partial x} &= V_x + S_x \frac{\partial v}{\partial s} + T_x \frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial v}{\partial y} &= V_y + S_y \frac{\partial v}{\partial s} + T_y \frac{\partial v}{\partial t},\\
\frac{\partial v}{\partial z} &= V_z + S_z \frac{\partial v}{\partial s} + T_z \frac{\partial v}{\partial t},
\end{aligned}\right.\\
&\left\{\begin{aligned}
\frac{\partial w}{\partial x} &= W_x + S_x \frac{\partial w}{\partial s} + T_x \frac{\partial w}{\partial t},\\
\frac{\partial w}{\partial y} &= W_y + S_y \frac{\partial w}{\partial s} + T_y \frac{\partial w}{\partial t},\\
\frac{\partial w}{\partial z} &= W_z + S_z \frac{\partial w}{\partial s} + T_z \frac{\partial w}{\partial t};
\end{aligned}\right.
\end{aligned}\right.$$

([1]) Dès 1894, dans un Chapitre des *Leçons nouvelles, etc*, consacré à l'étude des systèmes passifs d'équations différentielles totales du premier ordre, Méray a donné l'indication de ce procédé (*voir* la première Partie de l'Ouvrage, n°s 381, 382, 383 et 408) : toutefois, le manque de précision des énoncés qu'il formule, l'insuffisance et l'obscurité des raisonnements qu'il expose, en laissaient, selon nous, l'application fort incertaine.

([2]) Voir *Les systèmes d'équations aux dérivées partielles*, n° 206.

dans ces formules, u, v, w désignent des fonctions inconnues de x, y, z, s, t, et

$$(2)\qquad \left\{\begin{array}{l} U_x,\quad U_y,\quad U_z,\quad V_x,\quad V_y,\quad V_z,\quad W_x,\quad W_y,\quad W_z,\\ \qquad\qquad S_x,\quad S_y,\quad S_z,\quad T_x,\quad T_y,\quad T_z \end{array}\right.$$

des fonctions analytiques connues de x, y, z, s, t, u, v, w, ces dernières, (2), satisfaisant aux conditions voulues pour que le système soit *passif*. Le nombre des variables indépendantes étant égal à 5, et celui des fonctions inconnues égal à 3, les intégrales analytiques, tant ordinaires que singulières, du système (1) sont des figures à cinq dimensions, situées dans l'espace à huit dimensions $[[x, y, z, s, t, u, v, w]]$. Dans la recherche de ses intégrales singulières, la méthode ci-après indiquée permettra souvent de réaliser un notable progrès.

Au système partiel donné on fera correspondre, comme au n° 42, le système total auxiliaire

$$(3)\qquad \left\{\begin{array}{lllll} \dfrac{\partial s}{\partial x} = -S_x, & \dfrac{\partial t}{\partial x} = -T_x, & \dfrac{\partial u}{\partial x} = U_x, & \dfrac{\partial v}{\partial x} = V_x, & \dfrac{\partial w}{\partial x} = W_x,\\ \dfrac{\partial s}{\partial y} = -S_y, & \dfrac{\partial t}{\partial y} = -T_y, & \dfrac{\partial u}{\partial y} = U_y, & \dfrac{\partial v}{\partial y} = V_y, & \dfrac{\partial w}{\partial y} = W_y,\\ \dfrac{\partial s}{\partial z} = -S_z, & \dfrac{\partial t}{\partial z} = -T_z, & \dfrac{\partial u}{\partial z} = U_z, & \dfrac{\partial v}{\partial z} = V_z, & \dfrac{\partial w}{\partial z} = W_z, \end{array}\right.$$

impliquant les cinq fonctions inconnues s, t, u, v, w des variables x, y, z, et jouissant, vis-à-vis du système partiel, de la double propriété qui fait l'objet du n° 42, savoir : 1° la passivité supposée du système (1) entraîne celle du système (3); 2° les phases singulières du groupe des seconds membres sont fournies, dans le système (1) et dans le système (3), par les extrémités finales des mêmes arcs.

On formera alors les équations intégrales générales,

$$\begin{array}{l} I_1(x, y, z, s, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = 0,\\ I_2(x, y, z, s, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = 0,\\ I_3(x, y, z, s, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = 0,\\ I_4(x, y, z, s, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = 0,\\ I_5(x, y, z, s, t, u, v, w, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) = 0, \end{array}$$

du système total auxiliaire passif (3), auxquelles on adjoindra la relation

$$\frac{\partial(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)} = 0.$$

En éliminant, si possible, entre ces six relations, trois des cinq constantes arbitraires α, β, γ, δ, λ, par exemple γ, δ, λ, on obtiendra, dans l'espace à huit dimensions, une famille de figures à cinq dimensions, dépendant des paramètres α, β, et dont tout point sera, sauf vérification, une phase singulière pour le groupe des seconds membres du système total auxiliaire, donc aussi du système partiel proposé. On tâchera alors d'apercevoir si l'attribution à α, β de telles ou telles valeurs convenablement choisies peut fournir des figures intégrales de ce dernier.

Systèmes passifs et non linéaires du premier ordre n'impliquant qu'une seule fonction inconnue.

53. Désignant par u la fonction inconnue, supposons, pour fixer les idées, qu'elle dépende des cinq variables x, y, z, s, t, et que le système proposé soit résolu par rapport aux trois dérivées $\frac{\partial u}{\partial x}$, $\frac{\partial u}{\partial y}$, $\frac{\partial u}{\partial z}$: en adoptant, pour les deux dérivées restantes $\frac{\partial u}{\partial s}$, $\frac{\partial u}{\partial t}$, les notations respectives tt_s, u_t, il est de la forme

$$(1)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} &= F_x(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\\ \frac{\partial u}{\partial y} &= F_y(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\\ \frac{\partial u}{\partial z} &= F_z(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t),\end{aligned}\right.$$

où F_x, F_y, F_z désignent trois composantes analytiques connues, satisfaisant aux conditions voulues pour que le système soit *passif*. Dans la recherche de ses intégrales singulières, la méthode ci-après indiquée permettra souvent de réaliser un notable progrès.

Au système partiel donné on fera correspondre, comme au n° 43, le

système total auxiliaire

$$
(2)\quad \left\{
\begin{array}{lll}
 & \dfrac{\partial s}{\partial x} = -\dfrac{\partial F_x}{\partial u_s}, & \dfrac{\partial t}{\partial x} = -\dfrac{\partial F_x}{\partial u_t}, \\
 & \dfrac{\partial s}{\partial y} = -\dfrac{\partial F_y}{\partial u_s}, & \dfrac{\partial t}{\partial y} = -\dfrac{\partial F_y}{\partial u_t}, \\
 & \dfrac{\partial s}{\partial z} = -\dfrac{\partial F_z}{\partial u_s}, & \dfrac{\partial t}{\partial z} = -\dfrac{\partial F_z}{\partial u_t}, \\
\dfrac{\partial u}{\partial x} = F_x - u_s\dfrac{\partial F_x}{\partial u_s} - u_t\dfrac{\partial F_x}{\partial u_t}, & \dfrac{\partial u_s}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial s} + \dfrac{\partial F_x}{\partial u}u_s, & \dfrac{\partial u_t}{\partial x} = \dfrac{\partial F_x}{\partial t} + \dfrac{\partial F_x}{\partial u}u_t, \\
\dfrac{\partial u}{\partial y} = F_y - u_s\dfrac{\partial F_y}{\partial u_s} - u_t\dfrac{\partial F_y}{\partial u_t}, & \dfrac{\partial u_s}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial s} + \dfrac{\partial F_y}{\partial u}u_s, & \dfrac{\partial u_t}{\partial y} = \dfrac{\partial F_y}{\partial t} + \dfrac{\partial F_y}{\partial u}u_t, \\
\dfrac{\partial u}{\partial z} = F_z - u_s\dfrac{\partial F_z}{\partial u_s} - u_t\dfrac{\partial F_z}{\partial u_t}, & \dfrac{\partial u_s}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial s} + \dfrac{\partial F_z}{\partial u}u_s, & \dfrac{\partial u_t}{\partial z} = \dfrac{\partial F_z}{\partial t} + \dfrac{\partial F_z}{\partial u}u_t,
\end{array}
\right.
$$

impliquant les cinq fonctions inconnues s, t, u, u_s, u_t des variables x, y, z, et jouissant, vis-à-vis du système partiel, de la double propriété qui fait l'objet des n°s 44 et 45, savoir : 1° la passivité supposée du système (1) entraîne celle du système (2); 2° les phases singulières du groupe des seconds membres sont fournies, dans le système (1) et dans le système (2), par les extrémités finales des mêmes arcs.

On formera alors les équations intégrales générales,

$$
\begin{aligned}
I_1(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) &= 0, \\
I_2(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) &= 0, \\
I_3(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) &= 0, \\
I_4(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) &= 0, \\
I_5(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda) &= 0,
\end{aligned}
$$

du système total auxiliaire passif (2), auxquelles on adjoindra la relation

$$\frac{\partial(I_1, I_2, I_3, I_4, I_5)}{\partial(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \lambda)} = 0.$$

En éliminant, si possible, entre ces six équations, les cinq constantes arbitraires α, β, γ, δ, λ, on tombera sur une équation de la forme

$$(3)\qquad H(x, y, z, s, t, u, u_s, u_t) = 0,$$

dont toute solution numérique sera, sauf vérification, une phase singulière pour le groupe des seconds membres du système total auxiliaire, donc aussi du système partiel proposé. Considérant alors l'équa-

tion aux dérivées partielles (3), on tâchera d'apercevoir si quelqu'une de ses intégrales vérifie en même temps le système partiel proposé (1) ([1]).

([1]) Voici encore un cas où la méthode exposée aux n°s 51, 52 et 53 est applicable.

Considérons un système du *premier ordre* impliquant les k fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k$ des $l+1$ variables indépendantes $x, y_1, \ldots, y_l$, et comprenant m équations de la forme ci-après indiquée :

1° Ces équations, dont les seconds membres sont nuls, ont pour premiers membres m expressions *linéaires* par rapport aux $kl+k$ dérivées premières des inconnues, et les $m(kl+k+1)$ *coefficients* de ces expressions sont fonctions *analytiques* de x, des y et des u.

2° Les coefficients dont il s'agit peuvent se partager en deux groupes, dont le premier en contient $k+l$; les coefficients du second groupe sont fonctions composées des précédents, et *chacun d'eux résulte de la combinaison de ceux-ci avec une composante indéfiniment olotrope.*

Un pareil système, S, étant donné, et les coefficients du premier groupe étant respectivement désignés par

$$A_1, \quad \ldots, \quad A_k, \quad A_{k+1}, \quad \ldots, \quad A_{k+l},$$

on fera correspondre à S le système d'équations différentielles ordinaires

$$(a) \qquad \begin{cases} \dfrac{du_1}{dx} - A_1 = 0, & \ldots, \quad \dfrac{du_k}{dx} - A_k = 0, \\ \dfrac{dy_1}{dx} - A_{k+1} = 0, & \ldots, \quad \dfrac{dy_l}{dx} - A_{k+l} = 0, \end{cases}$$

impliquant les fonctions inconnues $u_1, \ldots, u_k, y_1, \ldots, y_l$ de la variable indépendante x; dans le système S et dans le système (a), les phases singulières du groupe des premiers membres seront fournies par les extrémités finales des mêmes arcs.

Cela posé, on formera les équations intégrales générales du système auxiliaire (a), et, les seconds membres de ces dernières étant supposés nuls, on égalera à zéro le déterminant différentiel de leurs premiers membres, pris par rapport aux constantes arbitraires $C_1, \ldots, C_k, C_{k+1}, \ldots, C_{k+l}$. En éliminant, si possible, entre ces $k+l+1$ relations, $l+1$ des constantes, par exemple C_k, C_{k+1}, C_{k+l}, on obtiendra, dans l'espace à $k+l+1$ dimensions

$$[[x, y_1, \ldots, y_l, u_1, \ldots, u_k]],$$

une famille de figures à $l+1$ dimensions, dépendant des paramètres $C_1, \ldots, C_{k-1}$, et dont tout point sera, sauf vérification, une phase singulière pour le groupe des premiers membres du système auxiliaire (a), donc aussi du système donné S. Toute intégrale de ce dernier étant elle-même une figure à $l+1$ dimensions, on tâchera d'apercevoir si l'attribution à $C_1, \ldots, C_{k-1}$, de telles ou telles valeurs convenablement choisies peut fournir des figures intégrales de S.